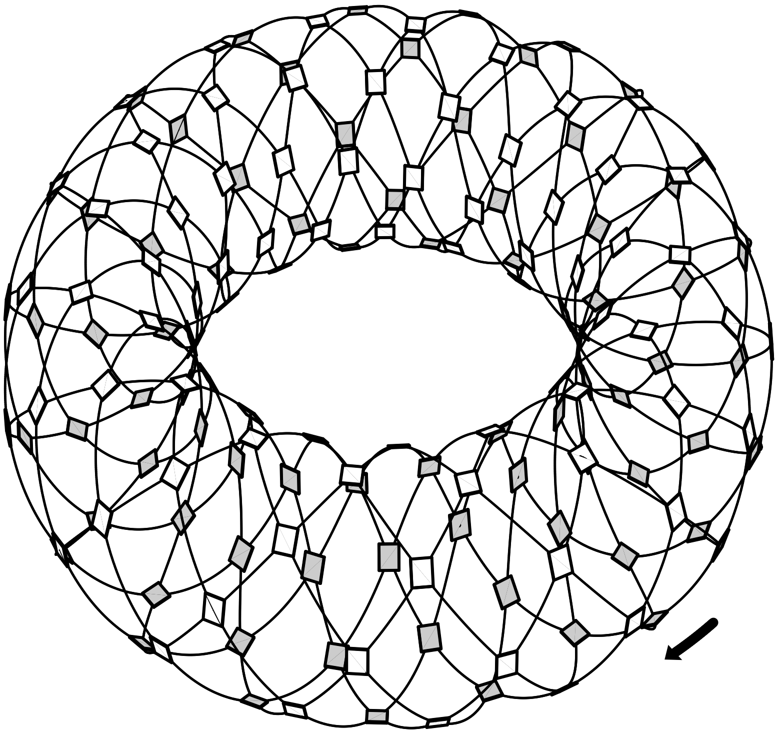
Zyklische Ordnungen

Axiome und einfache Eigenschaften



Diplomarbeit

Mark-Oliver Stehr
Universität Hamburg
Fachbereich Informatik
Arbeitsbereich Theoretische Grundlagen der Informatik

Stand 11. Juni 1996

Mark-Oliver Stehr
Hamburger Str. 3
22083 Hamburg
EMail: stehr@informatik.uni-hamburg.de

Betreuer: Prof. Dr. Rüdiger Valk
Zweitbetreuer: Prof. Dr. Manfred Kudlek

Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist es auf systematische Weise, ausgehend von einer Axiomatisierung azyklischer Ordnungen, schrittweise zu Axiomen für zyklische Ordnungen zu gelangen. Es wurde dabei angestrebt, eine möglichst allgemeine mathematische Theorie zu entwickeln, ebenso wie es die Theorie azyklischer Ordnungen ist.

Den Ausgangspunkt für die Formalisierung bildet eine recht allgemeine Repräsentation mit Hilfe von Wortmengen, die wir auch als verallgemeinerte Relationen bezeichnen. Wir definieren die zentralen Begriffe der Einfachheit (Wiederholungsfreiheit innerhalb von Wörtern), Teilwort- und Rotationsabgeschlossenheit sowie Konsistenz (Widerspruchsfreiheit), Vollständigkeit, Totalität (für totale Ordnungen) und Transitivität in verschiedenen Varianten. Sowohl azyklische wie auch zyklische Ordnungen können mit Hilfe dieser Axiome als spezielle verallgemeinerte Relationen aufgefaßt werden. Die Wörter der Ordnung sind dabei als endliche, totale Teilordnungen zu interpretieren, die zusammengefaßt die gesamte Ordnung konstituieren. Zyklizität wird durch Rotationsabgeschlossenheit formalisiert. Analog zur Transitivität azyklischer Ordnungen wird außerdem einer Form zyklischer Transitivität gefordert. Parallel zu Axiomatisierung werden viele einfache und intuitive Eigenschaften zyklischer Ordnungen abgeleitet. Insbesondere wird die unmittelbare Nachfolgerrelation untersucht und aufgezeigt, daß diese im allgemeinen höchstens eine Abstraktion zyklischer Ordnungen darstellen kann. Das Hauptresultat dieser Arbeit ist die Darstellbarkeit von zyklischen Ordnungen durch verallgemeinerte Relationen (hier als Basen bezeichnet), deren Wortlänge auf drei beschränkt ist. Dies bedeutet, daß die meisten interessanten zyklischen Ordnungen als Mengen von Tripeln aufgefaßt werden können.

Abschließend definieren wir die Eigenschaft der globalen Orientiertheit als Erweiterbarkeit zu einer totalen Ordnung. Interessanterweise besitzen nicht alle zyklischen Ordnungen diese anschauliche Eigenschaft. Wir können jedoch zeigen, daß die Klasse der global orientierten, zyklischen Ordnungen identisch ist mit der Klasse der aufschneidbaren, zyklischen Ordnungen, wenn wir eine geeignete Schnittdefinition verwenden.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **7**

1.1 Ordnungen und strenge Ordnungen . . . 8
1.2 Quasiordnungen . . . 9
1.3 Gerichtete Graphen . . . 9
1.4 Netzsysteme und Synchronisationsgraphen . . . 10
1.5 Concurrency-Strukturen . . . 12
1.6 Trennungsstrukturen . . . 15
1.7 Projektive Geometrie . . . 16
1.8 Orientierte Geometrie und Tripelstrukturen . . . 17
1.9 Mutative von Ordnungen . . . 20
1.10 Abwicklungen . . . 21
1.11 Überblick . . . 21

2 Grundlagen **23**

2.1 Logik . . . 23
2.2 Mengenlehre . . . 26
2.3 Binäre Relationen . . . 29
2.4 Funktionen . . . 32
2.5 Natürliche Zahlen . . . 33
2.6 Kardinalität . . . 34
2.7 Grundmengen . . . 35
2.8 Iteration . . . 35
2.9 Transitive Hülle . . . 36

3 Wörter **37**

3.1 Indizierung . . . 40
3.2 Verkettung (Katenation) . . . 43
3.3 Spiegelung . . . 44
3.4 Spiegelungsäquivalenz . . . 45
3.5 Rotation . . . 45
3.6 Rotationsäquivalenz . . . 46
3.7 Teilwörter . . . 48
3.8 Extraktion . . . 51
3.9 Projektion . . . 52
3.10 Rotierte Teilwörter . . . 54
3.11 Konsistente Wörter . . . 55
3.12 Konsistenz modulo Identität . . . 60
3.13 Konsistenz modulo Rotation . . . 63
3.14 Ketten und Zyklen von binären Relationen . . . 69

4 Verallgemeinerte Relationen **71**
4.1 Endlichkeit . . . 73
4.2 Abgeschlossenheit . . . 74
4.3 Konsistenz . . . 80
4.4 Projektion . . . 84
4.5 Abhängigkeit . . . 85
4.6 Unabhängigkeit . . . 91
4.7 Beziehungen zwischen Abhängigkeit und Unabhängigkeit . . . 92
4.8 Abhängigkeitskliquen . . . 93
4.9 Abhängigkeit unter Projektion . . . 96
4.10 Vollständigkeit . . . 99
4.11 Spiegelung . . . 108

5 Azyklische Ordnungen **113**
5.1 Azyklische Systeme . . . 113
5.2 Darstellung . . . 118
5.3 Definition . . . 120
5.4 Spiegelung . . . 124
5.5 Totale, azyklische Ordnungen . . . 125
5.6 Projektion . . . 127
5.7 Vereinigung . . . 133
5.8 Durchschnitt . . . 136
5.9 Eine binäre Ordnungsrelation . . . 140
5.10 Intervalle . . . 142
5.11 Unmittelbare Nachfolger . . . 146
5.12 Einschränkung der Wortlänge . . . 147
5.13 Azyklische Ordnungsbasen . . . 147
5.14 Eindeutigkeit . . . 151
5.15 Bezug zu binären Ordnungen . . . 151
5.16 Globale Orientiertheit . . . 152

6 Totale, zyklische Ordnungen **153**
6.1 Sequentielle Systeme . . . 153
6.2 Darstellung . . . 157
6.3 Definition . . . 159
6.4 Spiegelung . . . 162
6.5 Vergleich . . . 164
6.6 Endlichkeit . . . 165
6.7 Projektion . . . 167
6.8 Zyklische Transitivität . . . 168
6.9 Intervalle . . . 176
6.10 Unmittelbare Nachfolger . . . 178
6.11 Kens und Zyklen . . . 185
6.12 Repräsentation durch unmittelbare Nachfolger . . . 192
6.13 Einschränkung der Wortlänge . . . 194
6.14 Totale, zyklische Ordnungsbasen . . . 195
6.15 Kens und Zyklen von Basen . . . 200
6.16 Konsistenz mit Ketten . . . 207
6.17 Konsistente, totale Vervollständigung . . . 209
6.18 Eindeutigkeit . . . 215

7 Zyklische Ordnungen **217**
7.1 Zyklische Systeme . . . 217
7.2 Darstellung . . . 219
7.3 Definition . . . 223
7.4 Projektion . . . 226
7.5 Zyklische Transitivität . . . 229
7.6 Vereinigung . . . 234
7.7 Durchschnitt . . . 239
7.8 Intervalle . . . 244
7.9 Kens und Zyklen . . . 249
7.10 Repräsentation durch binäre Relationen . . . 253
7.11 Unabhängigkeit in der Nachbarschaft . . . 256
7.12 Lokale Regeln für Abhängigkeit und Unabhängigkeit . . . 259
7.13 Einschränkung der Wortlänge . . . 263
7.14 Zyklische Ordnungsbasen . . . 269
7.15 Konsistente Vervollständigung . . . 271
7.16 Eindeutigkeit . . . 278
7.17 Globale Orientiertheit . . . 280
7.18 Rotationsabschluß von azyklischen Ordnungen . . . 286
7.19 Schnitte . . . 295

8 Ausblick **299**
8.1 Zusammenhang . . . 299
8.2 Endlichkeit . . . 300
8.3 Dichte . . . 300
8.4 Abschnürungen . . . 302
8.5 Kombinatorische, zyklische Ordnungen . . . 303
8.6 Eindeutige Ergänzbarkeit . . . 303
8.7 Zyklische Kausalordnungen . . . 304
8.8 Kausal fundierte, zyklische Ordnungen . . . 304
8.9 Natürliche, zyklische Ordnungen . . . 305
8.10 Netzsysteme und zyklische Systemordnungen . . . 305
8.11 Homomorphismen und Isomorphismen . . . 307
8.12 Quotienten . . . 308
8.13 Extensionalität und Irreduzibilität . . . 309
8.14 Azyklische Trennungsrelationen . . . 310
8.15 Zyklische Trennungsrelationen . . . 311
8.16 Konsistente und globale Orientierbarkeit . . . 313

9 Zusammenfassung **315**

A Hauptdefinitionen und Charakterisierungen **319**

B Definitionsverzeichnis **321**

Kapitel 1

Einleitung

Zyklische Abhängigkeiten begegnen uns in der realen Welt in den verschiedensten Varianten. Man denke beispielsweise an biologische und wirtschaftliche Kreisläufe, selbstreferenzielle Hypertextsysteme, rekursive Datentypen und Funktionen, Struktur von Software, Fahrpläne von Zügen, Systeme zur Steuerung von Verkehrsampeln, analoge und digitale, elektrische Schaltungen, Protokolle in Rechnernetzen und Datenfluß in parallelen Rechnern.

Die meisten dieser Beispiele sind keine reinen zyklischen Abhängigkeiten, sondern komplexe Systeme, die Information speichern und mit der Umgebung austauschen können. Diese Systeme können im allgemeinen nicht allein durch die zyklischen Abhängigkeiten ihrer Komponenten beschrieben werden. Das Beispiel der Fahrpläne von Zügen ist wohl besonders gut geeignet, um zyklische Abhängigkeiten an einem dynamischen System zu erklären. Wir können nämlich annehmen, daß die Zugführer bzgl. der Fahrtstrecke keinen Entscheidungsspielraum haben und somit Information (und deren Austausch) keine Rolle spielt. Wir haben eine Menge von Zügen und eine Menge von Ereignissen, die beschreiben, daß ein bestimmter Zug gerade eine bestimmte Position erreicht. Damit Passagiere bequem umsteigen können, sollen sich die Züge von Zeit zu Zeit in gemeinsamen Ereignissen synchronisieren. Fahren mehrere Züge auf einer Strecke, so ist natürlich auch eine Synchronisation der Ereignisse erforderlich, damit die Züge nicht kollidieren. Wir können uns auch vorstellen, daß Züge an bestimmten Orten durch mehrere Anschlußzüge ersetzt werden, bzw. bei Synchronisation an einem Ort, mehr oder weniger Züge den Ort verlassen. Für unsere Zwecke können wir von dem Grund der Synchronisation abstrahieren. Die Reihenfolge, in der die Ereignisse auftreten, d.h. die Züge die entsprechenden Positionen erreichen, bezeichnen wir als die zyklische Ordnung der Ereignisse.

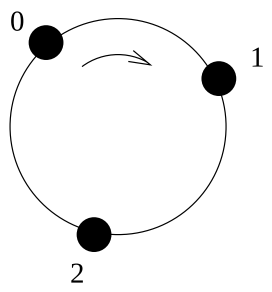


Abbildung 1.1: Eine dreielementige, totale, zyklische Ordnung

Zur Einführung wählen wir zwei einfache Strukturen (siehe Abb. 1.1 und Abb. 1.2) bei denen es sich

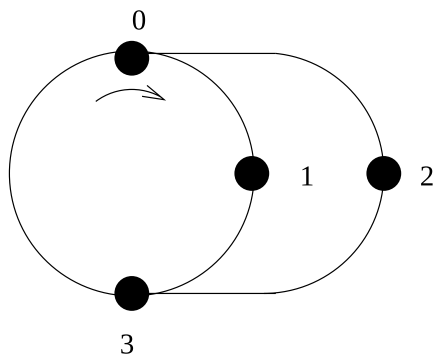


Abbildung 1.2: Eine vierelementige, nichttotale, zyklische Ordnung

intuitiv um zyklische Ordnungen handelt:

- Die dreielementige Struktur stellt eine zyklische Ordnung der Menge {0,1,2} dar. Die drei verschiedenen Elemente 0, 1 und 2 seien zyklisch im Uhrzeigersinn angeordnet. Dabei ist 0 unmittelbarer Vorgänger von 1, 1 unmittelbarer Vorgänger von 2 und 2 wiederum der unmittelbare Vorgänger von 0. Es handelt sich um eine totale, zyklische Ordnungen, da alle Elemente auf einem Kreis liegen und damit vollständig geordnet sind. Diese zyklische Ordnung wird offenbar in der oben genannten Interpretation von einem Zug generiert, die auf einer geschlossenen Strecke die Positionen 0, 1 und 2 immer wieder in dieser Reihenfolge überfährt.
- Bei der vierelementigen Struktur handelt es sich um eine zyklische Ordnung der Menge {0,1,2,3}. Die Kreise sind {0,1,3} und {0,2,3}. Sie haben die Elemente 0 und 3 gemeinsam, während 1 und 2 auf keinem Kreis liegen, also ungeordnet sind. Es gelten die unmittelbaren Vorgängerbeziehungen: 0 vor 1, 1 vor 3, 3 vor 0 sowie 0 vor 2 und 2 vor 3. Die zyklische Ordnung ist nicht total, da die Elemente 1 und 2 nicht durch einen Kreis geordnet sind. Wieder können wir uns einen Zug an Position 3 vorstellen, der an Position 0 durch zwei Züge ersetzt wird, die jeweils unabhängig voneinander über die Positionen 1 und 2 fahren und sich an Position 3 wieder zu einem Zug synchronisieren.

An dieser Stelle haben wir noch keine Vorstellung, was zyklische Ordnungen sein könnten, geschweige denn haben wir eine konkrete Formalisierung vor Augen. Wir wissen jedoch ungefähr was zyklische Ordnungen leisten sollen: Zyklische Abhängigkeiten sollen durch sie exakt und adäquat beschrieben werden. Um diese Forderung zu verdeutlichen, werden wir im folgenden verschiedene Ansätze kurz ansprechen, die zeigen, wie bekannte aus verschiedenen Gebieten stammende Formalismen auf unterschiedliche Art und Weise mit zyklischen Strukturen umgehen. Die Überlegungen in diesem Kapitel spielen sich alle auf einer intuitiven, informalen Ebene ab.

1.1 Ordnungen und strenge Ordnungen

Zunächst stellen wir fest, daß es sich bei den gegebenen Strukturen nicht um strenge Ordnungen handeln kann: Bei einer strengen Ordnung ist die Ordnungsrelation eine irreflexive und transitive binäre Relation. Aus der obigen Deutung der Abbildung wissen wir, daß die Paare (0,1), (1,2) und (0,2) in der Ordnungsrelation enthalten sein müssen. Wenden wir die Transitivität an, so folgt aus (0,1) und (1,2) daß auch (0,2) in der Ordnung ist. Eine zweite Anwendung der Transitivität ergibt, daß mit (0,2) und (2,0) auch (0,0) in der Ordnungsrelation enthalten ist, was direkt im Widerspruch zur Irreflexivität steht. Wir stellen also fest: Strenge Ordnungen (auf diese Weise angewandt) sind unbrauchbar zur Formalisierung von zyklischen Ordnungen.

Entsprechende Überlegungen gelten auch für die (nichtstrengen) Ordnungen: Nach Definition sind sie durch eine reflexive, transitive und antisymmetrische binäre Relation gegeben. Für das obige Beispiel bedeutet dies, daß zusätzlich zu (0,1), (1,2) und (2,0) auch noch die Paare (0,0), (1,1) und (2,2) in der Ordnungsrelation enthalten sind. Transitivität erzwingt, daß mit (0,1) und (1,2) auch (0,2) in der Relation ist, was zusammen mit dem Paar (2,0) im Widerspruch zur Antisymmetrie steht, da 0 und 2 verschieden sind.

1.2 Quasiordnungen

Aus dem letzten Widerspruch bietet sich jedoch ein einfacher Ausweg an: Wenn die Antisymmetrie nicht erfüllbar ist, verzichten wir einfach auf sie und nehmen nur Reflexivität und Transitivität als Ordnungsaxiome. Tatsächlich sind die so definierten Relationen in der Mathematik (wie auch der Informatik) als Quasiordnungen (oder Präordnungen) wohlbekannt. Sie werden verwendet, wenn aufgrund von Zyklen in den betrachteten Strukturen eine Behandlung als Ordnung nicht mehr möglich ist. Für unser kleines Beispiel bedeutet dies: Zusätzlich zu (0,1), (1,2), (2,0) sind auch alle Paare in der Ordnungsrelation, die wir durch reflexiven und transitiven Abschluß bilden können. Dies ist die vollständige Relation $\{0,1,2\}^2$.

Entspricht eine solche Vorgehensweise aber unserer Forderung nach einer exakten Darstellung der zyklischen Ordnung ? Sicher nicht. Für unsere dreielementige Struktur, erhalten wir die triviale, vollständige Ordnungsrelation, in der keinerlei Struktur mehr erkennbar ist. Die Elemente sind durch diese Relation nicht mehr voneinander zu unterscheiden, obwohl sie in Abb. 1.1 durch ihre relative Lage auf dem Kreis unterscheidbar waren. Der Formalismus der Quasiordnungen genügt also unserem Anspruch an Exaktheit der Beschreibung nicht: Mann könnte auch sagen, er ist zu grob oder zu abstrakt: Zyklen werden behandelt, indem man von ihnen abstrahiert, d.h. deren Elemente werden identifiziert (bzw. als äquivalent betrachtet). Nichtsdestotrotz ist die Quasiordnung für viele Anwendungen (z.B. als Reduktionsordnung von Ersetzungssystemen in der Informatik) das geeignete Werkzeug, und zwar immer dann, wenn die innere Struktur von Zyklen nicht interessiert.

1.3 Gerichtete Graphen

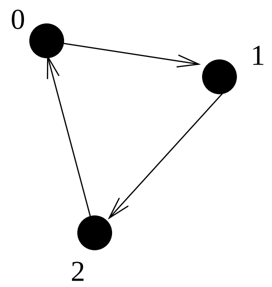


Abbildung 1.3: Die unmittelbare Nachfolgerrelation der totalen, zyklischen Ordnung aus Abb. 1.1

Mit Hilfe von Graphen könnten wir sowohl zyklische als auch azyklische Strukturen repräsentieren. Reichen zur Darstellung der Strukturen aus Abb. 1.1 und Abb. 1.2 nicht schon die in Abb. 1.3 bzw. Abb. 1.4 als gerichtete Graphen dargestellten binäre Relationen $\{(0,1),(1,2),(2,0)\}$ bzw. $\{(0,1), (0,2), (1,3), (2,3), (3,0)\}$ völlig aus ? In diesem Beispiel ist dies tatsächlich der Fall. Der Grund: Wir haben es in unserem Beispiel mit einer endlichen Struktur zu tun, die allein durch unmittelbare Nachfolger

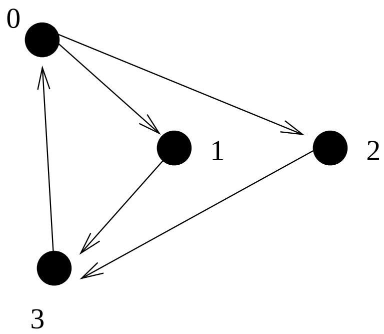


Abbildung 1.4: Die unmittelbare Nachfolgerrelation der nichttotalen, zyklischen Ordnung aus Abb. 1.2

bzw. Vorgänger charakterisiert werden kann. Ergänzen wir die Struktur so, daß es keine unmittelbaren Nachfolger und Vorgänger mehr gibt, erhalten wir den leeren Graph, der keine Aussage über die zyklische Ordnung mehr zuläßt. Letzteres können wir beispielsweise erreichen, indem wir sicherstellen, daß zwischen zwei Elementen immer ein drittes liegt, zwei Elemente also niemals direkt benachbart sein können. Damit ist die Graphendarstellung für diese unendlichen zyklischen Ordnungen unbrauchbar.

Tatsächlich gibt es noch einen anderen Grund, der die allgemeine Darstellung von zyklischen Ordnungen als Graphen der unmittelbaren Nachfolgerbeziehung ausschließt: Bei (endlichen) nichttotalen, zyklischen Ordnungen (d.h. Ordnungen bei denen nicht alle Elemente auf einem Kreis liegen müssen) kann es vorkommen (in unserem Beispiel ist dies allerdings nicht der Fall), daß verschiedene zyklische Ordnungen den gleichen Graphen der unmittelbaren Nachfolgerbeziehung besitzen. Das bedeutet, die Graphendarstellung erfüllt nicht unser Exaktheitskriterium. Sie ist nicht exakt genug, um verschiedene, zyklische Ordnungen zu unterscheiden. Auf diesen wichtigen Punkt wird später in Form von konkreten Beispielen noch ausführlich eingegangen.

1.4 Netzsysteme und Synchronisationsgraphen

Ein Netz (S,T,F) besteht aus einer Menge von Stellen S, einer Menge von Transitionen T sowie einer Flußrelation $F \subseteq (S \times T) \cup (T \times S)$. Bei Modellierung von Systemen werden Stellen oft als lokale Zustände und Transitionen als Ereignisse, d.h. Zustandsübergänge, interpretiert. Die Flußrelation stellt bei dieser Interpretation die unmittelbaren, kausalen Abhängigkeiten dar. Graphisch werden die Stellen als Kreise, die Transitionen als Rechtecke und die Flußrelation durch Pfeile dargestellt. Betrachten wir ein Netzelement $x \in (S \cup T)$, d.h. eine Stelle oder eine Transition, so bezeichnen wir die Elemente $F[\{x\}]$ als Nachmenge und die Elemente $F^{-1}[\{x\}]$ als Vormenge von x. Zwei Transitionen sind voneinander unabhängig, wenn sie in ihren Vor- und Nachmengen keine gemeinsamen Elemente besitzen. Andernfalls stehen die Transitionen in Konflikt zueinander.

Ein (elementares) Netzsystem (S,T,F,M) ist ein Netz (S,T,F) mit einer Markierung $M \subseteq S$ der Stellen. Eine Markierung wird graphisch durch sogenannte Marken, d.h. ununterscheidbare Objekte auf den Stellen des Netzes dargestellt. Die Markierung des Netzsystems stellt zu jedem Zeitpunkt den globalen Zustand des System dar. Die Dynamik eines Netzsystems, d.h. die zeitliche Entwicklung, wird durch das sogenannte Markenspiel beschrieben: Sind alle Stellen in der Vormenge einer Transition markiert, so ist eine Transition vorwärts aktiviert. Eine vorwärts aktivierte Transition kann vorwärts schalten, d.h. alle Marken in der Vormenge werden konsumiert und für jede Stelle in der Nachmenge wird eine neue Marke produziert. Das Schalten ist in jedem Fall ein atomarer Vorgang. Eine Transition ist rückwärts aktiviert und kann rückwärts schalten, wenn wir bei den genannten Bedingungen Vor- und Nachmenge vertauschen. In einem Schritt kann eine beliebige Menge von Transitionen vorwärts oder rückwärts schalten, sofern sie alle aktiviert sind und paarweise nicht in Konflikt stehen. Eine Markierung ist von einer anderen erreichbar, wenn die beiden Markierungen mit Hilfe des Markenspiels durch eine endliche Zahl von Schritten ineinander überführbar sind. Die Menge aller von der Markierung eines Netzsystems erreichbaren Markierungen ist die Fallklasse des Netzsystems. Die Markierung ist nicht als Anfangszustand, sondern als Repräsentant für diese Fallklasse aufzufassen. Ein Ablauf des Netzsystems ist eine strenge Ordnung auf Vorkommen von Transitionen, die sich ergibt, wenn wir das Markenspiel innerhalb der Fallklasse spielen und dabei Transitionen nur vorwärts schalten lassen. Da wir möglicherweise mehrere Transitionen in einem Schritt schalten können, ist die strenge Ordnung nicht notwendigerweise total. Im allgemeinen kann es mehrere alternative, zeitliche Abläufe geben.

Im Gegensatz zur üblichen Definition der Aktiviertheits- und Schaltbedingung legen wir nicht fest, was passiert, wenn auf einer schon markierten Stelle ein neue Marke produziert wird. Meist wird dies durch eine schärfere Aktiviertheitsbedingung ausgeschlossen. In unseren Beispielen wird diese Situation jedoch niemals auftreten, da es sich immer um sichere Systeme (Definition folgt) handeln wird.

Ein Vorwärtskontakt liegt bei einer Markierung vor gdw. eine Transition mit nichtleerer Nachmenge vorwärts aktiviert ist. Bei einem Rückwärtskontakt ist eine Transition mit nichtleerer Vormenge rückwärts aktiviert. Ein Netzsystem, bei dem in keiner Markierung der Fallklasse ein Kontakt vorliegt, bezeichnen wir als sicher. Gibt es für jede Transition eine Markierung in der Fallklasse, in der sie aktiviert ist, und gibt es für jede Stelle eine Markierung der Fallklasse, die sie markiert, und eine Markierung, in der sie nicht markiert ist, so bezeichnen wir das Netzsystem als lebendig.

Haben wir ein Netzsystem mit genau einer Transition in der Vormenge und in der Nachmenge jeder Stelle, können wir auf naheliegende Weise einen gerichteten Graphen zur Darstellung verwenden: Die Knoten sind die Transitionen und die Kanten entsprechen den Stellen. Die Markierung wird durch auf den Kanten liegende Marken dargestellt. Diesen markierten, gerichteten Graph bezeichnen wir als Synchronisationsgraph. Das Markenspiel läßt sich direkt von Netzsystemen auf Synchronisationsgraphen übertragen, wobei Konflikte natürlich nie auftreten können.

Eine leicht verständliche Einführung in die Theorie der Petri-Netze findet sich beispielsweise in *Reisig 1982*. Elementare Netzsysteme werden in *Thiagarajan 1987* definiert. Auf die (etwas unübliche) Einbeziehung der Rückwärtsschritte bei Definition der Fallklasse wird in *Petri 1996* besonderen Wert gelegt. Eigenschaften von Synchronisationsgraphen (insbesondere in Hinsicht auf Sicherheit und Lebendigkeit) sind das Thema in *Genrich und Lautenbach 1973*.

In Abb. 1.5 und Abb. 1.6 sehen wir ein Netzsystem und einen äquivalenten Synchronisationsgraphen, die beide die vierelementige, zyklische Ordnung aus unserem Beispiel beschreiben. Spielen wir das Markenspiel, so stellen wir fest, daß nachdem 3 und 0 nacheinander schalten, die Transitionen 1 und 2 in beliebiger Reihenfolge oder gar in einem Schritt schalten können, was darauf hindeutet, daß die Gesamtmenge der Ereignisse nicht vollständig, sondern nur partiell geordnet sind. Die Zyklizität der Ordnung drückt sich in der Tatsache aus, daß sich die Ereignisse permanent wiederholen können.

Wir haben gerade die zyklische Ordnung der Transitionen, also der Elemente des Synchronisationsgraphen betrachtet. Es ist jedoch auch möglich das abgebildete Netzsystem direkt als zyklische Ordnung aller seiner Netzelemente, also Stellen und Transitionen, aufzufassen. Dies ist ein wesentlicher und unverzichtbarer Aspekt der Concurrency-Theorie, die wir im folgenden kurz diskutieren werden.

Kommen wir nun auf zyklische Ordnungen zurück, so wurde oben erwähnt, daß die Information zur Unterscheidung zweier Ordnungen im allgemeinen nicht allein durch den Graphen der unmittelbaren Nachfolgerrelation gegeben ist. Fassen wir diese Graphen als Synchronisationsgraph auf, so kann die fehlende Information jedoch in vielen Fällen durch eine geeignete Markierung geliefert werden. Eine

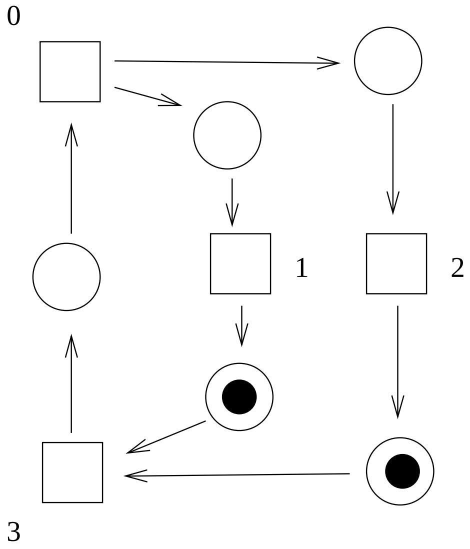


Abbildung 1.5: Die nichttotale, zyklische Ordnung aus Abb. 1.2 als Netzsystem

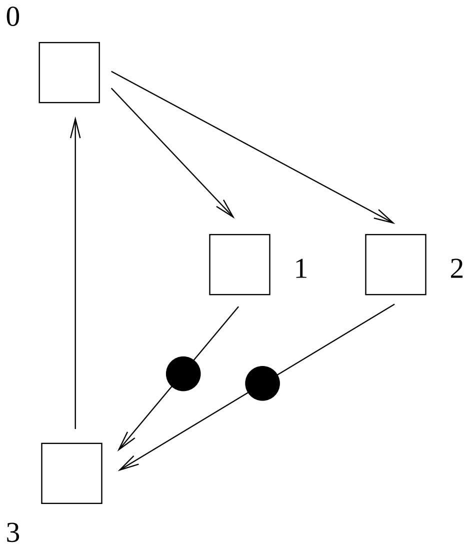


Abbildung 1.6: Ein zum Netzsystem aus Abb. 1.5 äquivalenter Synchronisationsgraph

interessante Frage, die wir in dieser Arbeit nicht behandeln werden, ist, ob jeder sichere und lebendige Synchronisationsgraph eine zyklische Ordnung (mit gleicher unmittelbarer Nachfolgerrelation) liefert und sich umgekehrt jede endliche zyklische Ordnung als Synchronisationsgraph ihrer unmittelbaren Nachfolgerrelation darstellen läßt.

1.5 Concurrency-Strukturen

Als erfolgreicher Ansatz spezielle, zyklische Ordnungen direkt als binäre Relationen zu beschreiben, kann die Concurrency-Theorie von C.A.Petri interpretiert werden. Aufbauend auf einer Grundmenge X und binären Relationen der Kausalität (li $\subseteq X^2$) und Nebenläufigkeit (co $\subseteq X^2$) wird mit physikalisch motivierten Axiomen eine Prozeß-Theorie aufgebaut, die sowohl zyklische wie auch azyklische Modelle zuläßt. Diese Modelle (X,li,co) werden als Concurrency-Strukturen bezeichnet.

Als elementare Forderungen an co und li sind Irreflexivität (co $\cap$ $\mathcal{ID}$(X) = $\emptyset$, li $\cap$ $\mathcal{ID}$(X) = $\emptyset$) und Symmetrie (co = co^{-1}, li = li^{-1}) zu nennen. Ferner ergänzen sich co und li zusammen mit der Identität zur vollständigen Relation (co $\cup$ li $\cup$ $\mathcal{ID}$(X) = X^2). Zwei verschiedene Elemente sind also entweder nebenläufig oder kausal abhängig. Über die Richtung der kausalen Abhängigkeit wird keine Aussage getroffen.

Ursprünglich (z.B. in *Petri 1980*, *Petri 1987* und *Petri 1982*) wurde eine strenge Ordnung (<) als Basis für die Axiomatisierung gewählt. Hier wird die Kausalrelation li = $\updownarrow(<)$ als symmetrischer Abschuß aus einer Kausalordnung gewonnen. Zu zyklischen Strukturen gelangt man, indem man die Forderung nach einer unterliegenden Ordnung fallen läßt, wie es z.B. in *Petri 1987* angedeutet wird. Einen Überblick über die historische Entwicklung der Concurrency-Theorie findet man in *Müller 1993*. Hier werden auch die verschiedenen von Petri vorgeschlagenen Axiomsysteme vorgestellt. Azyklische und zyklische Concurrency-Strukturen werden in *Stehr 1993* behandelt. Ausführliche Untersuchungen über das Zusammenspiel verschiedener Axiome sowie der formale Vergleich verschiedener Axiomsysteme werden in *Kummer 1995* durchgeführt.

Zu den genannten Axiomen der Irreflexivität, Symmetrie und Vollständigkeit kommen weitere Axiome, die die Klasse der Modelle recht stark einschränken. Leider sind sie jedoch teilweise nötig, um ein Ziel der Concurrency-Theorie, nämlich die Darstellbarkeit als konfliktfreie Netze sicherzustellen. Allein mit Hilfe der ungerichteten Kausalrelation li ist es unter diesen Axiomen möglich, die Grundmenge X in eine Menge von Stellen S und eine Menge von Transitionen T zu partitionieren und eine unmittelbare, gerichtete Kausalrelation F $\subseteq$ li zu finden, so daß sich ein Netz (S,T,F) ergibt, in dem Nebenläufigkeit und Kausalität lokal mit co und li verträglich sind. In diesem Netz sind Transitionen (die Wechselwirkungen repräsentieren) immer vorwärts und rückwärts verzweigt und Stellen (die sich als Signale interpretieren lassen) unverzweigt. Ferner ist mit einem Netz (S,T,F) auch das inverse Netz (S,T,F^{-1}) mit der Concurrency-Struktur assoziiert, d.h. die Concurrency-Struktur zeichnet keine Orientierung aus. Die möglichen Flußrelationen F werden auch als konsistente Orientierungen der Concurrency-Struktur bezeichnet, da sie mögliche Ablaufrichtungen für die globale, zeitliche Entwicklung angeben.

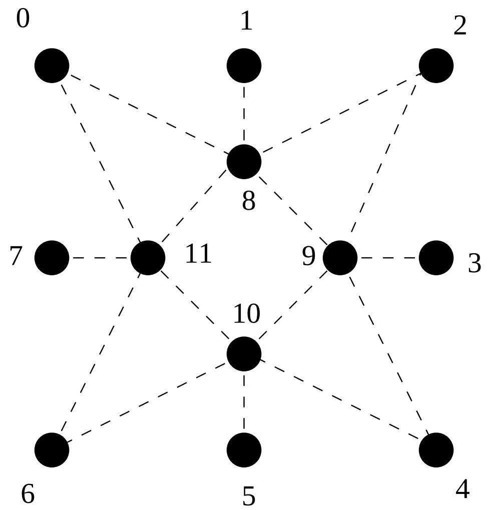


Abbildung 1.7: Eine Concurrency-Struktur mit 12 Elementen

Das kleinste Modell der Concurrency-Theorie ist in Abb. 1.7 dargestellt (man bemerke, daß man für das kleinste Modell immerhin schon 12 Elemente benötigt). Gestrichelte Kanten bezeichnen die

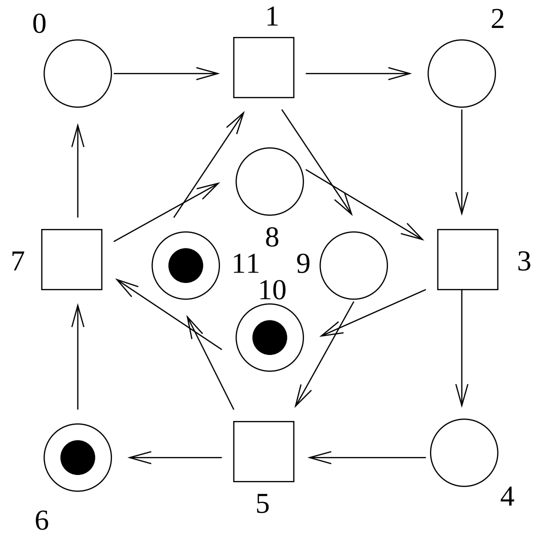


Abbildung 1.8: Ein die Concurrency-Struktur aus Abb. 1.7 generierendes Netzsystem

Relation co. li ergibt sich daraus als irreflexives Komplement. Eine äquivalente Repräsentation als Netzsystem ist ebenfalls angegeben. Mit Hilfe des Markenspiels läßt sich in diesem Beispiel verifizieren, daß die Nebenläufigkeit im Netzsystem (die sich aus gemeinsam markierten Stellen und schaltenden Transitionen ergibt) gerade mit der co-Relation übereinstimmt. In *Stehr 1993* wird eine Klasse von Concurrency-Strukturen untersucht, die immer durch Netzsysteme darstellbar sind, wozu jedoch noch weitere Axiome benötigt werden. Mit Hilfe des Netzsystems läßt sich die Concurrency-Struktur (im Uhrzeigersinn orientiert) auch als zyklische Ordnung der Netzelemente auffassen, wie wir es im vorigen Abschnitt besprochen haben.

Die vorliegende Arbeit über zyklische Ordnungen läßt sich in gewisser Weise als Verallgemeinerung der Concurrency-Theorie auffassen, obwohl wir uns auf eine ganz andere Weise und mit einem anderen Formalismus dem Thema nähern werden. Insgesamt läßt sich die Komplexität (sowohl in der Zahl der Axiome als auch in der Größe der Modelle) und Eingeschränktheit der Concurrency-Theorie auf drei Punkte zurückführen:

- Die Tatsache, daß die Concurrency-Theorie allein auf binären Relationen aufbaut, erlaubt zwar mathematisch elegante und knappe Formulierungen, führt jedoch dazu, daß viele einfache Strukturen wie z.B. die zyklischen Ordnungen aus Abb. 1.1 und Abb. 1.2 ausgeschlossen werden. Da hier je zwei verschiedene Elemente kausal abhängig sind, entartet li zum irreflexiven Teil der vollständigen Relation (li $= \mathrm{X}^2 - \mathcal{ID}(\mathrm{X})$) und erlaubt damit keine Differenzierung der Elemente mehr. Ein entsprechendes Problem ist uns schon von den Quasiordnungen her bekannt.
- Eng mit dem vorigen Punkt verknüpft ist die Zweisortigkeit der Grundmenge: Jedes Element entspricht entweder einer Stelle oder einer Transition im assoziierten Netz. Stellen sind bzgl. einer Flußrelation immer unverzweigt, Transitionen sind beidseitig verzweigt. Diese physikalisch durch das Alternieren von Signalen und Wechselwirkungen motivierte Zweisortigkeit schränkt die (direkt) behandelbaren zyklischen Ordnungen stark ein.
- Schließlich ist die Concurrency-Theorie eine Theorie der ungerichteten Strukturen. Dies führt dazu, daß eine konsistente Orientierbarkeit offenbar nicht durch lokale Forderungen sicherzustellen ist, so daß man auf ein Axiom der konsistenten Orientierbarkeit (oder einer äquivalenten Forderung) angewiesen ist. Dieser Punkt wird eingehend in *Stehr 1993* und *Kummer 1995* beleuchtet. Man vergleiche dies mit der Situation bei azyklischen Concurrency-Strukturen: Hier wird durch die (lokale) Transitivität und Irreflexivität der unterliegenden Ordnung erzwungen,

daß die Struktur immer konsistent orientierbar ist.

1.6 Trennungsstrukturen

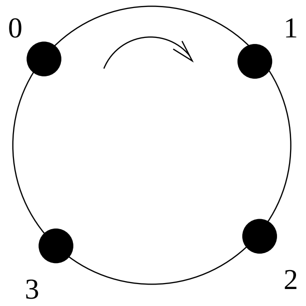


Abbildung 1.9: Eine vierelementige, totale, zyklische Ordnung

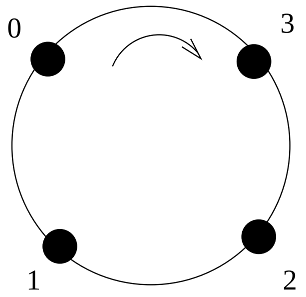


Abbildung 1.10: Die totale, zyklische Ordnung aus Abb. 1.9 mit umgekehrter Orientierung

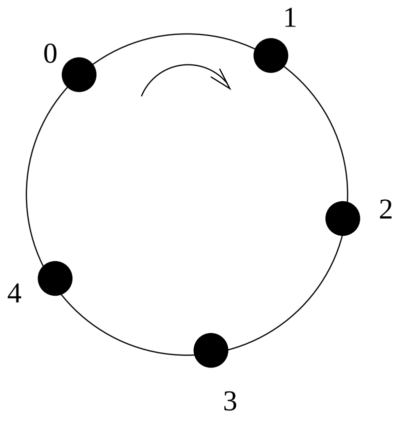


Abbildung 1.11: Eine fünfelementige, totale, zyklische Ordnung

Azyklische Concurrency-Strukturen können als (strenge) Ordnungen behandelt werden. Für zyklische Concurrency-Strukturen ist dies natürlich nicht möglich. Als Ausweg aus diesem Dilemma wurde von C.A.Petri (schon in *Petri 1980* in Form einer Übungsaufgabe) ein Ansatz zur Definition von zyklischen Ordnungen vorgeschlagen: Man solle zyklische Ordnungen als Mengen von Trennungsquadrupeln der

Gestalt {{a,c}, {b,d}} auffassen, wobei a,b,c,d paarweise verschieden sind. Die Interpretation eines solchen Quadrupels ist: a und c trennen b und d auf einem Kreis. Man beachte die doppelte Symmetrie der ungeordneten Paare: {{a,c}, {b,d}} = {{c,a}, {b,d}} = {{b,d}, {a,c}}. Es gilt also auch: c und a trennen b und d sowie b und d trennen a und c. Die Anordnung in Abb. 1.9 wird somit durch das Quadrupel {{0,2}, {1,3}} beschrieben.

Zur Beschreibung einer zyklischen Ordnung, fassen wir die aus der Ordnung ablesbaren Quadrupel zu einer Menge zusammen. Abb. 1.9 wird also durch die einelementige Menge {{{0,2}, {1,3}} } beschrieben. Für die Struktur in Abb. 1.10 ergibt sich die gleiche Menge, d.h. die Trennungsstruktur ist identisch, obwohl wir die Orientierung des Kreises umgekehrt haben. Für die Struktur in Abb. 1.11 erhalten wir genau die Menge {{{0,2}, {1,3}}, {{0,2}, {1,4}}, {{0,3}, {1,4}}, {{0,3}, {2,4}}, {{1,3}, {2,4}}}. Aus dem ersten und zweiten Beispiel ist ersichtlich, daß auch in diesem Ansatz von der Orientierung der Ordnung abstrahiert wird: Wir bezeichnen deshalb diese Quadrupelmengen anstatt als zyklische Ordnungen besser als Trennungsstrukturen, für die Petri in *Petri 1991* einige Axiome forderte, um intuitiv unerwünschte Strukturen auszuschließen. Auch Strukturen mit mehreren Kreisen sollten in diesem Ansatz selbstverständlich erfaßt werden.

Trennungsstrukturen teilen die problematische Eigenschaft, nicht gerichtet zu sein, mit den Concurrency-Strukturen. Dies bedeutet, daß sich ohne Axiome der konsistenten Orientierbarkeit unerwünschte Strukturen ergeben. Nichtsdestotrotz sind viele der für Trennungsstrukturen formulierten Ideen auch im Kontext von zyklischen Ordnungen relevant, und in gewisser Weise kann der in dieser Arbeit eingeführte Formalismus (nicht jedoch die zyklischen Ordnungen selbst) als Verallgemeinerung der Trennungsstrukturen betrachtet werden, so daß diese Arbeit gleichzeitig einen Rahmen zu deren Untersuchung anbietet. Obwohl wir diese Untersuchung hier nicht durchführen werden, wird diese Möglichkeit an geeigneter Stelle noch konkretisiert. Die für uns sehr wesentlichen Begriffe der Linien, der Konsistenz und der Vollständigkeit sind auf die in der Concurrency-Theorie und *Petri 1991* formulierten Ideen Petris zurückzuführen. Ohne diese Ideen wäre die vorliegende Arbeit wohl kaum möglich gewesen.

Formal ähnlich bzgl. der Symmetrieeigenschaften zu den Trennungsstrukturen sind die von Rozenberg und Ehrenfeucht in *Rozenberg und Ehrenfeucht 1994* behandelten Square-Systems. Es handelt sich dabei um vierstellige Relationen also um eine Menge von Tupeln der Form (a,b,c,d), die symmetrisch sind bzgl. Vertauschung des erstes Paares (a,b) mit dem zweiten Paar (c,d) sowie bzgl. Vertauschung innerhalb dieser Paare. Sie verhalten sich also gerade wie die Quadrupel der Trennungsstrukturen. Die in dem genannten Artikel angestellten Untersuchungen weisen jedoch in eine ganz andere Richtung, die keine direkten Verbindungen zu Trennungsstrukturen oder gar zyklischen Ordnungen aufweist.

1.7 Projektive Geometrie

Trennungseigenschaften von Punkten auf einer Geraden wurden schon in der projektiven Geometrie untersucht. In *H.S.M.Coxeter 1964* wird die Trennungsbeziehung von vier Punkten auf einer Geraden durch Konstruktion eines Vierecks definiert, wie dies beispielhaft in Abb. 1.12 dargestellt ist. Wir haben zwei verschiedene auf einer Geraden g liegende Punkte A und C und möchten zwei andere ebenfalls verschiedene, auf der Geraden liegende, sie trennende Punkte B und D konstruieren. Hierzu zeichnen wir je zwei verschiedene Geraden durch A und C. Diese vier neuen Geraden schneiden sich in vier Punkten, die ein Viereck aufspannen. Die Diagonalen dieses Vierecks schneiden die ursprüngliche Gerade in zwei Punkten B und D. Somit haben wir eine (geordnete) sogenannte harmonische Menge (A,C,B,D). Alle so konstruierbaren harmonischen Mengen werden zur vierstelligen harmonischen Relation H zusammengefaßt. Die harmonische Menge (A,C,B,D) entspricht gerade dem Trennungsquadrupel {{A,C}, {B,D}}, denn A und C trennen B und D auf der Geraden g.

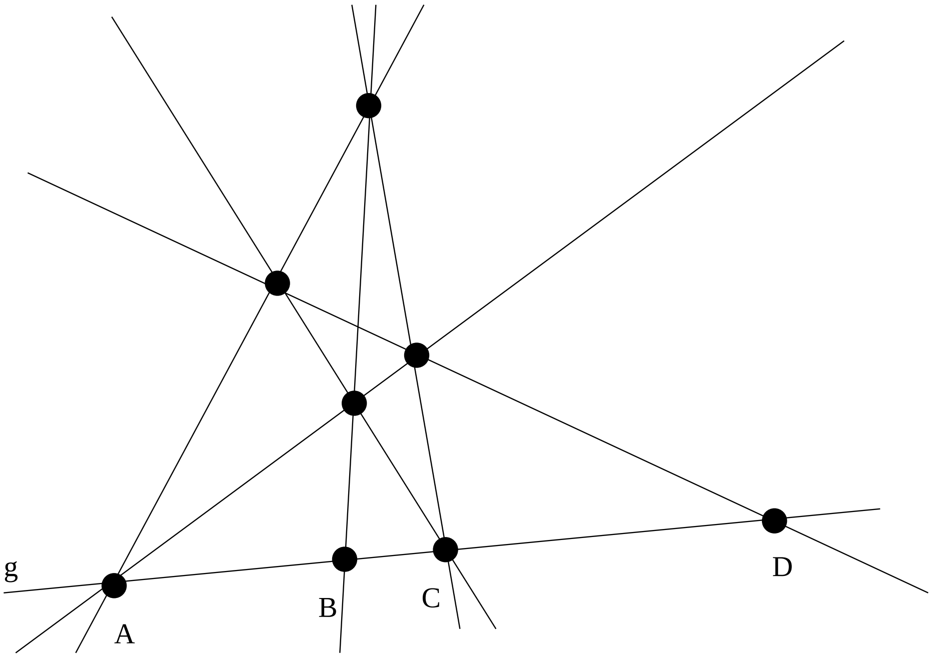


Abbildung 1.12: Konstruktion einer harmonischen Menge (A,C,B,D)

Kreise und Geraden werden in der projektiven Geometrie nicht unterschieden. Ferner hat eine Gerade keine ausgezeichnete Orientierung. Deshalb erfüllt die harmonische Relation die schon von den Trennungsstrukturen bekannte Symmetriebedingung (A,B,C,D) $\in$ H $\Leftrightarrow$ (B,A,C,D) $\in$ H $\Leftrightarrow$ (A,B,D,C) $\in$ H $\Leftrightarrow$ (B,A,D,C) $\in$ H.

Schließlich wird die Wichtigkeit der Trennungseigenschaften noch durch ein interessantes Ergebnis unterstrichen: Die Trennungseigenschaften von vier Punkten auf einer Geraden bleiben unter Projektionen erhalten. Dies ist in Abb. 1.13 dargestellt: Hier wird die harmonische Menge (A,B,C,D) auf g über den Punkt O auf die harmonische Menge (C′,D',A',B') auf g' projiziert.

1.8 Orientierte Geometrie und Tripelstrukturen

Projektive Geometrie geht von einer Inzidenzrelation zwischen Punkten und Geraden aus. Punkte und Geraden haben keine weiteren darüberhinausgehenden Eigenschaften wie z.B. eine Orientierung. Das bedeutet beispielsweise, daß eine projektive Geometrie nicht von ihrer gespiegelten Version unterschieden werden kann, da Spiegelung die Inzidenzen nicht verändert. Für viele Anwendungen ist aber eine solche Unterscheidung wesentlich.

Als eine völlig andere Art der Axiomatisierung geometrischer Zusammenhänge (hier in einer Ebene) ist ein von Donald Knuth in *Knuth 1992* aufgestelltes Axiomsystem zu nennen. Das Ziel war dort die Verifikation eines speziellen geometrischen Algorithmus zur Triangulierung und zur Berechnung benachbarter Punkte in einer Ebene. Interessanterweise werden durch dieses System totale, zyklische Ordnungen beschrieben. Der Begriff der Ordnung wird dabei jedoch überhaupt nicht verwendet.

Um die Axiome zu verstehen, werden wir zunächst die Interpretation besprechen: Unsere Grundmenge X enthält Punkte einer euklidischen Ebene. Um die relative Lage der Punkte untereinander zu

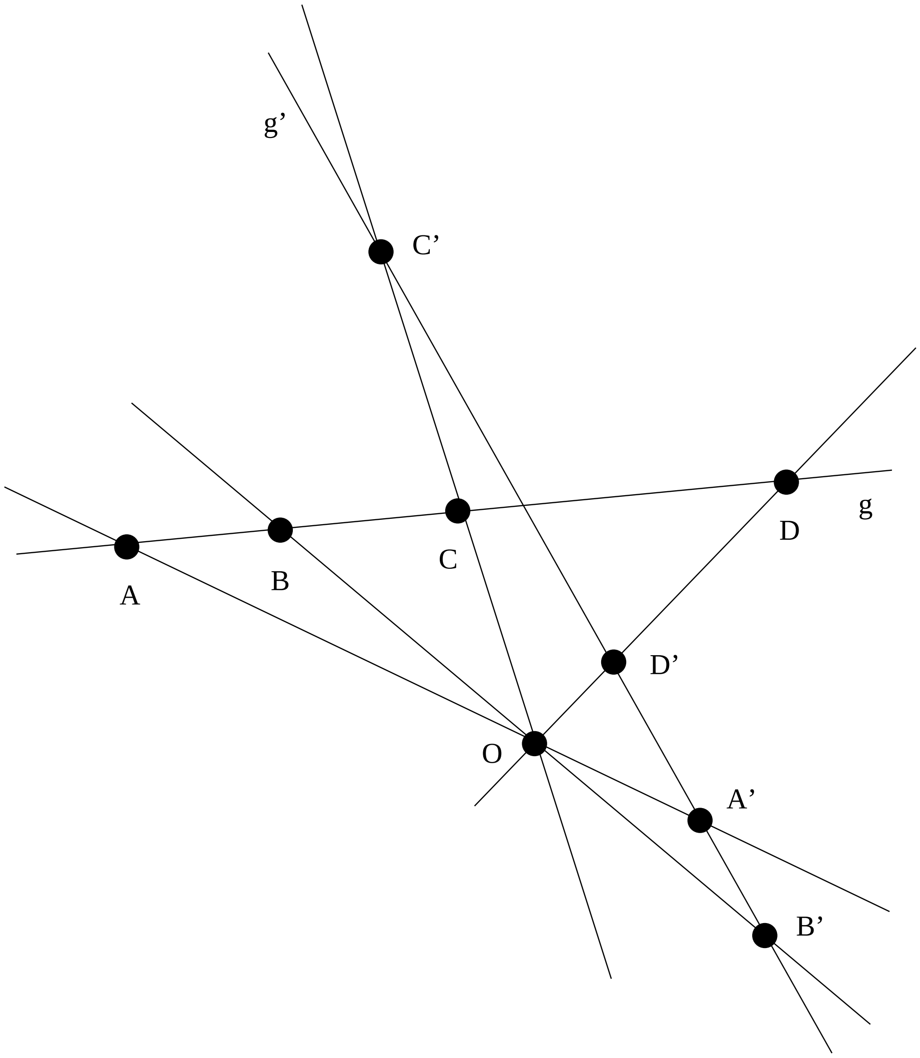


Abbildung 1.13: Invarianz der harmonischen Relation unter Projektion

beschreiben, betrachten wir geordnete Tripel (p,q,r) von verschiedenen Punkten, wobei p in der linken von der gerichteten Geraden (q,r) abgetrennten Halbebene liegt. Die Tripel, die diese Bedingung erfüllen, werden zu einer dreistelligen Relation $R \subseteq X \times X \times X$ zusammengefaßt. Damit wir die relative Lage eines Punktes p zu einer Geraden {q,r} immer entscheiden können, wollen wir Geometrien ausschließen, in denen drei oder mehr Punkte auf einer Geraden liegen. Betrachten wir in Abb. 1.14 beispielsweise nacheinander die gerichteten Geraden (p,r), (r,q), (q,s), (s,p), (s,r), (r,s), (p,q), (q,p) und die relative Lage der übrigen Punkte zu jeder dieser Geraden, so erhalten wir die Relation R = {(q,p,r), (s,p,r), (p,r,q), (s,r,q), (r,q,s), (p,q,s), (q,s,p), (r,s,p), (q,s,r), (p,r,s), (s,p,q), (r,q,p)}. Da in einer euklidischen Ebene durch drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, genau ein Kreis verläuft, läßt sich ein Tripel $(p,q,r) \in R$ äquivalent wie folgt interpretieren: (p,q,r) ist gerade die Reihenfolge, die die Punkte einnehmen, wenn ein durch sie laufender Kreis im Gegenuhrzeigersinn orientiert wird. Abb. 1.15 stellt die gleiche Konfiguration wir Abb. 1.14 mit dieser Interpretation dar.

Nun zur Axiomatisierung: Aus den genannten Interpretationen folgen direkt die einfachen Axiome. Es handelt sich um die zyklischen Symmetrie $(p,q,r) \in R \Rightarrow (q,r,p) \in R$, die Antisymmetrie $(p,q,r) \in R \Rightarrow (p,r,q) \notin R$ sowie die Nichtentartung $(p,q,r) \in R \vee (p,r,q) \in R$. Es ist leicht zu überprüfen, daß diese Axiome in unserem Beispiel tatsächlich erfüllt sind.

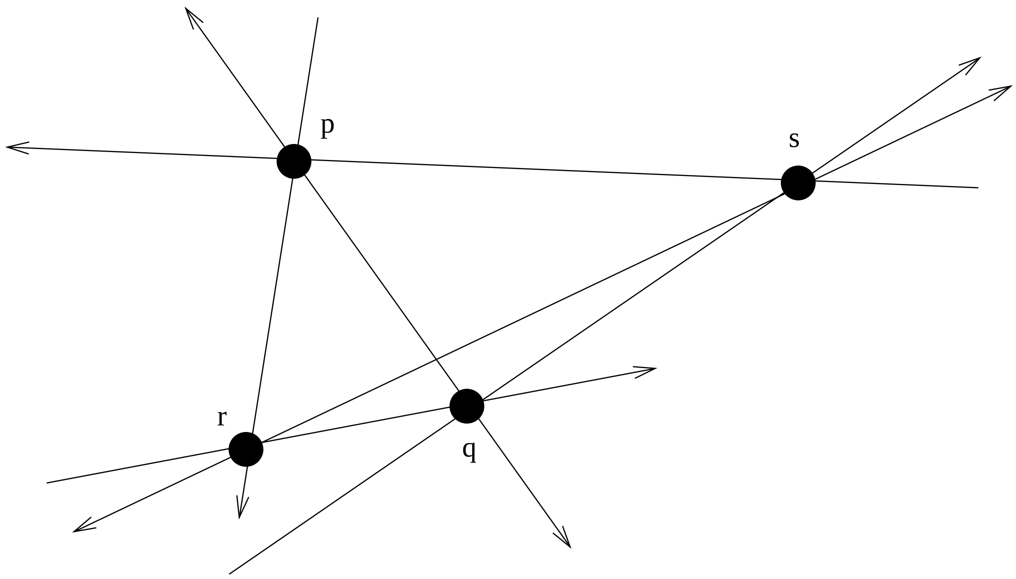


Abbildung 1.14: Punkte in einer euklidischen Ebene

Knuth fordert nun weitere Axiome, die sich ebenfalls aus den obigen Interpretationen ergeben. Für uns ist jedoch ein stärkeres Axiom interessant, daß Knuth nur kurz erwähnt, jedoch nicht weiter verfolgt. Es handelt sich um das Axiom $(t,p,q) \in R \wedge (t,q,r) \in R \Rightarrow (p,q,r) \in R$. In dieser Arbeit werden wir auf die durch diese Axiome definierten Strukturen als Tripelstrukturen verweisen.

Geometrisch läßt sich das letzte Axiom wie folgt interpretieren: Liegt t auf der linken Seite von (p,q) und (q,r) so liegt p links von (q,r). In allgemeinen Geometrien gilt dies nicht. In unserem Beispiel ist diese Eigenschaft aber gerade erfüllt. Das Axiom gilt genau dann, wenn die Punkte gerade die Ecken eines Polygons sind. Wenn $\{x_1,...,x_n\}$ die Ecken des Polygons bezeichnet, dann wird die Lage der Punkte durch eine Relation der Form $(x_i,x_j,x_k) \in R \Leftrightarrow (i < j < k) \vee (j < k < i) \vee (k < i < j)$ beschrieben. Im obigen Beispiel hat das Polygon die Ecken $\{q,s,p,r\}$.

Damit ist der Zusammenhang zu totalen, zyklischen Ordnungen offensichtlich: Läuft man in Gegenuhrzeigersinn am Rand des Polygons entlang, dann sind die Ecken total, zyklisch geordnet. In unserem Beispiel ist dies die Menge $\{q,s,p,r\}$ in dieser Reihenfolge. Liegt ein Punkt dagegen im inneren des Polygons, dann ist das vorige Axiom verletzt. Es kann keine eindeutige totale, zyklische Ordnung angegeben werden, da nicht klar ist, zwischen welchen anderen Elementen dieser Punkt einzuordnen ist.

Unter Ausnutzung der zyklischen Symmetrie läßt sich das letzte Axiom auch schreiben als $(q,r,t) \in R \wedge (q,t,p) \in R \Rightarrow (q,r,p) \in R$. Es wird sich zeigen, daß es sich bei dieser einfachen Eigenschaft, die später als zyklische Transitivität bezeichnet wird, um ein wesentliches Merkmal zyklischer Ordnungen handelt, das während der gesamten Arbeit eine zentrale Rolle spielen wird.

Was die totalen, zyklischen Ordnungen betrifft, kommt dieses Axiomsystem dem in dieser Arbeit vorgestellten Ansatz am nächsten, da hier keine Endlichkeitsannahmen zugrundeliegen und auch nicht von der Orientierung der Ordnung abstrahiert wird. Im Unterschied zum Ansatz der vorliegenden Arbeit werden zyklische Ordnungen mit weniger als drei Elementen durch dieses Axiomsystem nicht abgedeckt.

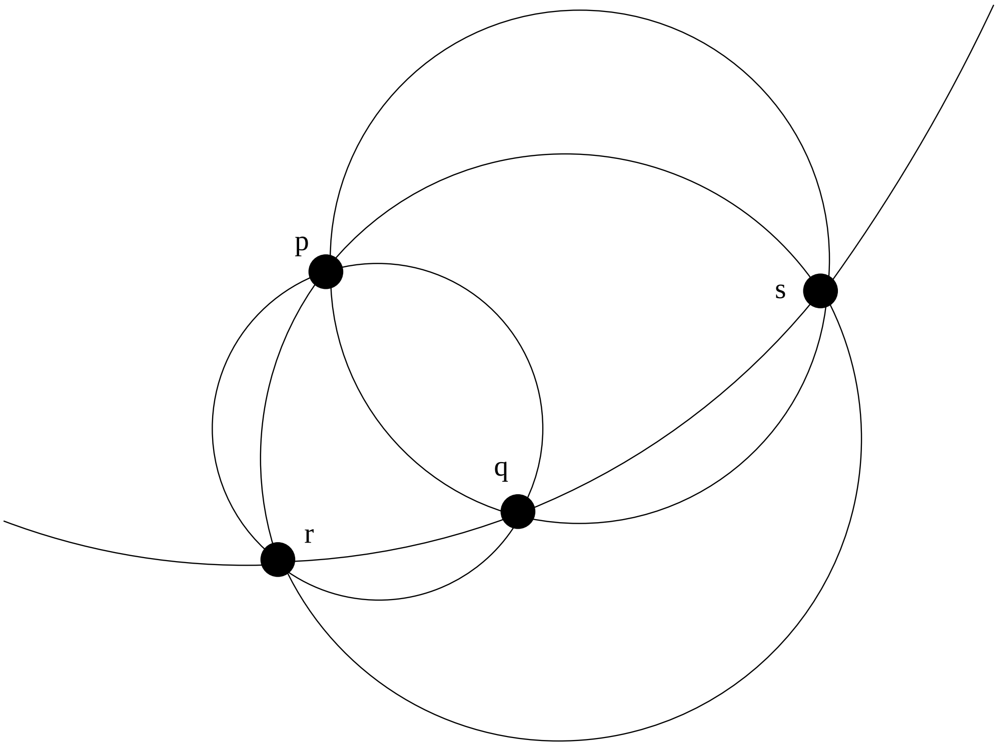


Abbildung 1.15: Lage der Punkte auf Kreisen

1.9 Mutative von Ordnungen

Ein zu den oben genannnten Tripelstrukturen identisches Axiomsystem wurde schon in *Genrich 1971* mit Verweis auf *Huntington 1919* als Definition einer zyklischen Vollordnung vorgeschlagen. Genrich erkannte, daß es nicht möglich ist, dieses Axiomsystem zu einer Definition von zyklischen Halbordnungen zu verallgemeinern, indem man nur auf das Axiom der Nichtentartung (p,q,r) $\in$ R $\vee$ (p,r,q) $\in$ R verzichtet.

Genrich gibt ein Beispiel an, das alle übrigen Axiome der Tripelsysteme erfüllt, jedoch nicht zu einer zyklischen Vollordnung erweiterbar ist. Die Erweiterbarkeit einer Ordnung zu einer zyklischen Ordnung wollen wir als (zyklische) globale Orientiertheit bezeichnen. Nach Genrich ist dies eine wesentliche Eigenschaft, die auch für zyklische Ordnungen gelten sollte. Wir werden die globale Orientiertheit jedoch nicht als Axiom zyklischer Ordnungen annehmen, da wir die Theorie zu einem großen Teil ohne diese Eigenschaft entwickeln können. Mit Genrichs Beispiel, in Form einer nicht global orientierten, zyklischen Ordnung werden wir uns später noch ausführlich beschäftigen.

Ein Ausweg nach Genrich wäre es, genau die Mengen von Tripeln als zyklische Halbordnungen zu definieren, die sich als Schnittmengen von zyklischen Vollordnungen ergeben. Diese Definition erfüllt gewissermaßen per Definition die oben genannte globale Orientiertheit. Leider ist eine solche Definition nicht sehr nützlich, wenn man für eine konkrete Relation entscheiden will, ob es sich um eine zyklische Halbordnung handelt.

Genrich beschreitet (offenbar aus diesem Grund) einen völlig anderen Weg zur Axiomatisierung von zyklischen Voll- und Halbordnungen. Die Theorie wird in einem recht allgemeinen Rahmen der Relative und Mutative entwickelt. Relative repräsentieren Strukturen und Mutative beschreiben deren (nebenläufige) Veränderungen. Netzsysteme sind in diesem Rahmen spezielle Relative, die durch eine Mutationsregel, das Markenspiel, verändert werden. Halbordnungen werden dabei als durch eine geeignete Mutationregel veränderbare Ordnungen dargestellt. Ein Nachteil dieses Ansatzes scheint sowohl die recht hohe Komplexität der Axiomatisierung als auch die (möglicherweise durch die Allgemeinheit bedingte) Unanschaulichkeit zu sein. Außerdem werden durch die inhärente Diskretheit des Schrittbegriffs viele unendliche (dichte und partiell dichte) zyklische Ordnungen mit diesem Ansatz nicht erfaßt. Nichtsdestotrotz handelt es sich um eine interessante Verallgemeinerung von elementaren Netzsystemen.

Die vorliegende Arbeit verfolgt in gewisser Weise die zuerst genannte Idee einer Verallgemeinerung von zyklischen Vollordnungen. Sie geht von totalen, zyklischen Ordnungen aus und versucht die angedeutete, direkte Verallgemeinerung trotz der genannten Probleme durchzuführen. Es wird dabei in Kauf genommen, daß nicht global orientierte, zyklische Ordnungen existieren. Es ist nur eine Definitionsfrage und ohne mathematische Relevanz, ob man die globale Orientiertheit als Axiom zyklischer Ordnungen implizit fordert oder explizit von global orientierten, zyklischen Ordnungen spricht.

1.10 Abwicklungen

Eine andere verbreitete Methode zyklische Strukturen zu handhaben ist es, sie zu (möglicherweise unendlichen) azyklischen Strukturen abzuwickeln und damit die zyklische Struktur als Zusammenfaltung einer azyklischen anzusehen. Diese Vorgehensweise wird beispielsweise in der Theorie der nebenläufigen Systeme (z.B. bei Netzsystemen) angewandt, um deren Verhalten als Menge ihrer Abläufe (repräsentiert als Beobachtungssequenzen oder Kausalordnungen) zu beschreiben. Nachteil dieser indirekten Vorgehensweise ist zum einen der Rückgriff auf eine möglicherweise unendliche azyklische Struktur sowie eine recht komplizierte Faltungsdefinition. Für unsere Zwecke ist diese Vorgehensweise nicht adäquat, da sie der intuitiven Einfachheit von zyklischen Ordnungen nicht gerecht wird.

1.11 Überblick

Nachdem im folgenden Kapitel 2 die verwendete Schreibweise für die formalen Teile dieser Arbeit erklärt und die elementaren mengentheoretischen Axiome und Grundbegriffe in dieser Schreibweise formuliert werden, dient das Kapitel 3 dazu, in knapper Form Wörter (d.h. endliche Sequenzen) und Operationen auf Wörtern sowie deren Eigenschaften aufzulisten. Das darauf folgende Kapitel 4 behandelt ausschließlich Mengen dieser Wörter, die wir als (verallgemeinerte) Relationen bezeichnen wollen und uns den Rahmen für die Repräsentation von Strukturen liefern werden. Wiederum werden eine Reihe von Operationen und Eigenschaften von Relationen definiert, meist indem sie von Wörtern ererbt werden.

Um einen Überblick über die Vorgehensweise in späteren Kapiteln zu geben, behandeln wir in Kapitel 5 die bekannten Ordnungen im Formalismus der verallgemeinerten Relationen. Um sie von den Ordnungen (als binäre Relationen) zu unterscheiden, bezeichnen wir sie als azyklische Ordnungen. Hier wird auch zum erstenmal eine anschauliche Interpretation von Wörtern als charakteristische Beobachtungen an einem azyklischen System gegeben. Diese Interpretation wird im Kapitel 6 für zyklische Systeme weiter ausgebaut und führt zur Axiomatisierung von totalen, zyklischen Ordnungen. Viele intuitiv erwartete Eigenschaften werden in diesem Kapitel formal abgeleitet. Viele Theoreme aus diesem Kapitel sind so allgemein gehalten, daß sie auch im nächsten Kapitel 7 verwendet werden können. Hier werden schließlich, ebenfalls motiviert durch eine Systeminterpretation, die (allgemeinen) zyklischen Ordnungen axiomatisiert. Diese werden daraufhin analog zur Vorgehensweise in Kapitel 5 und Kapitel 6 untersucht. Das Hauptresultat des Kapitels 6 und allgemeiner in 7 ist: Alle zyklischen Ordnungen sind durch Basen, d.h. Relationen mit maximal dreistelligen Wörtern darstellbar.

Noch eine Bemerkung zur Notation: Ein Teil der Theorie der zyklischen Ordnungen wurde mit Hilfe des interaktiven, mathematischen Beweissystems IMPS (für einen Überblick siehe *Farmer et al. 1993*) erarbeitet. Die Logik dieses Systems ist im wesentlichen eine Erweiterung der einfachen Typentheorie von Church (auch bekannt als einfach getyptes Lambda-Kalkül) um partielle Funktionen. Durch Hinzunahme geeigneter Axiome erhält man eine zur üblichen Mengenlehre äquivalente Theorie. Die Schreibweise entspricht jedoch nicht der üblichen mathematischen Notation. Ferner ist die Darstellung von Beweisen in diesem System sehr detailliert und einem menschlichen Leser kaum zuzumuten. Aus diesen Gründen wurde ein Kompromiß gewählt: Verwendet wird hier eine Variante der üblichen Prädikatenlogik. Die Beweise wurden in der im folgenden Kapitel zu erläuterten semi-formalen Notation neu ausgearbeitet. Somit sind die in dieser Arbeit angegeben Beweise weder vollständig formalisiert noch mechanisch verifiziert.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel wird zunächst die verwendete Logik, der Aufbau des Dokuments und die Bedeutung der einzelnen Konstrukte beschrieben. Diese Beschreibung ist sehr knapp und in keiner Weise formal. Daraufhin verwenden wir die eingeführte Notation zur Axiomatisierung der Mengenlehre sowie zur Festlegung der (wenigen) benötigten mathematischen Grundbegriffe, wie Relationen, Funktionen und Zahlen.

2.1 Logik

Ausgangspunkt ist Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit, undefinierten Termen und Kennzeichnungsoperator. Sie entspricht genau der klassischen Version der in *Troelstra und van Dalen 1988* ausführlich beschriebenen Logik IQCE+. Zunächst wird die Notation für Terme, Formeln und Schemata festgelegt. Die üblichen Axiome und Inferenzregeln dieser Logik sind in Beweisen informal zu verwenden. Konstrukte zur Strukturierung dieser Beweise werden weiter unten beschrieben.

Terme und Formeln

Ein abzählbar unendlicher Vorrat an Variablen wird angenommen. Jede Variable ist ein Term. Das ausgezeichnete Konstantensymbol $\perp$ bezeichnet den undefinierten Term. Funktionssymbole (in Form von definierten Textfragmenten) bezeichnen ebenfalls Terme. Weitere Terme können aus Formeln A durch den Kennzeichnungsoperator ι x $\bullet$ A gebildet werden. Dieser Term bezeichnet dasjenige x, für das A gilt. Existiert kein solches x oder ist dieses nicht eindeutig, dann ist der Term undefiniert. Für Formeln verwenden wir die üblichen logischen Verknüpfungen und Quantoren: $\mathbb{F}$ (falsch), $\mathbb{T}$ (wahr), A $\wedge$ B (A und B), A $\vee$ B (A oder B), A $\Rightarrow$ B (A impliziert B), A $\Leftrightarrow$ B (A und B sind äquivalent), $\forall$ x $\bullet$ A (für alle x gilt A), $\exists$ x $\bullet$ A (es gibt ein x mit A), $\exists!$ x $\bullet$ A (es gibt genau ein x mit A). Weitere Formeln können mit (in Form von Textfragmenten definierten) Prädikatensymbolen gebildet werden. Das zweistellige Prädikat A = B bedeutet: A und B sind definiert und gleich. Als nützliche Abkürzungen (keine Prädikate) verwenden wir den Definiertheitsoperator $\downarrow$(A) $:\Leftrightarrow$ A = A und die Quasigleichheit A $\cong$ B $:\Leftrightarrow$ ($\downarrow$(A) $\vee$ $\downarrow$(B)) $\Rightarrow$ A = B. Prioritäten und Assoziativität sind wie üblich definiert. Insbesondere bindet $\neg$ Formeln stärker als $\wedge$, $\wedge$ stärker als $\vee$ und $\vee$ stärker als $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$. Ferner ist IMPLIES links-assoziativ. Quantoren besitzen die schwächste Priorität. Bei Termen verwenden wir meist eine explizite Klammerung.

Schemata

Schemata stellen eine endliche Formulierung für eine möglicherweise unendliche Zahl von Ausdrücken dar. Da wir die Logik und Mengenlehre selbst hier nicht in einer Metalogik formalisieren, werden Schemata nur informal angegeben, indem wir die intuitive .. -Notation verwenden. Häufig werden hierzu Metavariablen zur Bezeichnung beliebiger Terme und Formeln benötigt. Diese seien mit ψ, ψ_1, ψ_2, ... , χ, χ_1, χ_2, ... (für beliebige Terme) und mit ϕ, ϕ_1, ϕ_2, ... (für beliebige Formeln) benannt. Ferner verwenden wir Metavariablen μ, μ_1, μ_2, ..., ν, ν_1, ν_2, ... zur Bezeichnung beliebiger voneinander verschiedener Variablen, die in keinem der Terme ψ, ψ_1, ψ_2,... und Formeln ϕ, ϕ_1, ϕ_2,... vorkommen. Weiterhin wird ein elementarer Substitutionsbegriff für Variablen benötigt: Substituiert werden können nur die ausgezeichneten Variablen κ_1, κ_2, ..., die von den oben genannten Variablen μ, μ_1, μ_2, ..., ν, ν_1, ν_2, .. verschieden sind und in Termen ψ, ψ_1, ψ_2, ... und Formeln ϕ, ϕ_1, ϕ_2, ... frei aber nicht gebunden vorkommen können. ϕ $(\nu_1,...,\nu_n)$ bezeichne die Substitution aller Vorkommen der Variablen $\kappa_1,...,\kappa_n$ in der Formel ϕ durch die Variablen $\nu_1,...,\nu_n$. Entsprechendes gilt für Terme ψ $(\nu_1,...,\nu_n)$.

Anonyme, numerierte Blöcke und Schritte

Ein anonymer Block ist leer oder eine Folge von Schritten. Ein Schritt ist eine Definition, eine Makrodefinition, eine Annahme, ein Axiom, ein Theorem, ein Ziel oder ein numerierter Block. Ein numerierter Block wird durch den Buchstaben **S** gefolgt von seiner Nummer gekennzeichnet. Der numerierte Block besitzt einen untergeordneten anonymen Block.

Definitionen und Makros

Eine Definition wird mit dem Buchstaben **D** gefolgt von ihrer Nummer eingeleitet. Daraufhin folgt eine Sequenz der Form A $:=$ ψ oder A $:\Leftrightarrow$ ϕ, wobei ψ ein Term, ϕ eine Formel ist und A durch ψ bzw. ϕ definiert wird. A ist ein Textfragment, das das zu definierende Prädikat bzw. die Funktion bezeichnet, wobei an beliebigen Stellen in A formale Parameter auftreten können. Der Kontext K einer Definition ist die Menge der Annahmen aller übergeordneten Blöcke. Der Kontext kann Bedingungen an in A auftretende Variablen enthalten. Eine Definition ist global gültig, d.h. sie kann in allen folgenden Schritten verwendet werden, deshalb ist der Kontext K bei der Verwendung der Definition zu berücksichtigen, d.h. A $:=$ ψ definiert A als ψ, falls K gilt, und ist ansonsten undefiniert, und A $:\Leftrightarrow$ ϕ ist C, falls K gilt, und ansonsten logisch falsch. Ferner gilt bei Verwendung einer Definition: Ist mindestens einer der für die Variablen in A eingesetzten Terme undefiniert, so ist der definierte Term undefiniert, bzw. die definierte Formel logisch falsch, d.h. wir verwenden eine strikte Semantik.

Makrodefinitionen beginnen mit dem Buchstaben **M** und ihrer Nummer. Die Syntax ist wie bei Definitionen, allerdings definieren sie eine reine Textersetzung.

Mehrdeutigkeiten, die durch Fehlen von Vorrangregeln oder durch Überladen von Textfragmenten (Overloading) entstehen, müssen vom Leser wie üblich anhand des Kontextes aufgelöst werden.

Annahmen und Axiome

Eine Annahme beginnt mit dem Prefix **A** oder **VA** gefolgt von ihrer Nummer. Im ersten Fall ist als Annahme ist jede Formel ϕ zulässig. Im zweiten Fall muß eine Variablenliste gefolgt von einer optionalen Formel angegeben werden, d.h. a,b,c... oder a,b,c... $\bullet$ ϕ . Wird keine Formel ϕ angegeben, so ist die Formel $\mathbb{T}$ anzunehmen. Eine Variablenliste ist eine Sequenz von Elementen der Form x oder x $\in$ ψ . Jeder Annahme ist ein Block untergeordnet. Dieser untergeordnete Block wird im allgemeinen eingerückt. Die Einrückung kann jedoch entfallen, falls der Annahme im aktuellen Block keine weiteren

Schritte folgen. Die Gültigkeit der Annahme ϕ erstreckt sich nur auf alle Schritte im untergeordneten Block. Wurde eine Variablenliste angegeben, handelt es sich um eine Existenzannahme $\exists$ a,b,c... $\bullet$ A und die existierenden Objekte sind im untergeordneten Block an diese Variablen gebunden. Im Gegensatz zu Definitionen sind Annahmen also nur lokal gültig.

Axiome werden durch den Buchstaben **X** gekennzeichnet. Ihre Syntax ist ähnlich zu der Syntax der Annahmen. Anders als Annahmen gelten sie jedoch nicht nur lokal, sondern für alle folgenden Schritte. Wie bei Definitionen ist deshalb wieder der Kontext zu berücksichtigen.

Theoreme

Ein Theorem wird mit dem Prefix **T** oder **VT** gefolgt von seiner Nummer gekennzeichnet. Analog zur Syntax bei Annahmen, folgt daraufhin entweder (im ersten Fall) eine Formel ϕ oder (im zweitem Fall) eine Variablenliste gefolgt von einer Formel, d.h. a,b,c... $\bullet$ ϕ . Die letztere Form entspricht wieder einer Existenzaussage $\exists$ a,b,c... $\bullet$ ϕ . Schließlich kann eine Referenzliste folgen d.h. eine Liste von Nummern, die auf vorangegangene Schritte verweisen und die logische Gültigkeit des aktuellen Theorems rechtfertigen. Die Gültigkeit des Theorems ist global, d.h. das Theorem kann in allen folgenden Schritten referenziert werden. Wie bei Definitionen ist dabei jedoch der Kontext des Theorems zu berücksichtigen. Wurde eine Variablenliste angegeben, so werden die existierenden Objekte für die folgenden Schritte im aktuellen Block an diese Variablen gebunden. Ist ein Theorem nicht direkt durch Angabe von Referenzen zu rechtfertigen, kann eine Rechtfertigung in einem untergeordneten Block angegeben werden. Der untergeordnete Block wird immer unter dem Theorem eingerückt. Das initiale Ziel dieses Blocks ist dann das Theorem selbst. Durch schrittweise Verfeinerung wird das Ziel zum immer erfüllten Ziel $\mathbb{T}$ reduziert, womit die logische Gültigkeit des Theorems gezeigt ist. Alternativ kann die Negation des zu zeigenden Theorems angenommen werden, und das Theorem $\mathbb{F}$ abgeleitet werden, was einem indirekten Beweis entspricht.

Ziele

Das aktuelle Ziel eines Blocks kann durch eine neues Ziel ersetzt werden. Eine Zieldeklaration beginnt mit dem Buchstaben **G** gefolgt von einer Nummer. Dann folgt das neue Ziel, beschrieben durch eine Formel ϕ . Als Rechtfertigung, daß das neue Ziel das ursprüngliche Ziel eines Blocks logisch impliziert, kann eine Referenzliste angegeben werden. Annahmen verändern das aktuelle Ziel nicht, d.h. das initiale Ziel eines einer Annahme untergeordneten Blocks ist das aktuelle Ziel des übergeordneten Blocks.

Beweisstruktur

Das gesamte Dokument ist ein anonymer Block. Die Struktur im Kleinen entspricht der Struktur im Großen. Durch geschickte Kombination der oben eingeführten orthogonalen Konstrukte können verschiedene Beweistechniken je nach Bedarf und Übersichtlichkeit vermischt werden. Vorwärtsbeweise werden durch Folgen von Theorem-Schritten, Rückwärtsbeweise durch Folgen von Ziel-Schritten ausgeführt. Fallunterscheidungen sind Folgen von sich logisch ergänzenden Annahmen, wobei die jeweiligen Fälle in den untergeordneten Blöcken behandelt werden. Wird eine Annahme zum Widerspruch geführt ergibt sich daraus die Negation der Annahme als Theorem. Zum Beweis einer Implikation wird die Prämisse angenommen und unter dieser Annahme die Konklusion als Ziel definiert. Zum Beweis einer all-quantifizierten Formel werden die Variablen angenommen und die Formel als Ziel definiert. Zum Beweis einer existentiell-quantifizierten Formel wird entweder die indirekte Beweistechnik verwendet, oder es wird das gesuchte Objekt explizit konstruiert.

Beweise können durch den hierarchischen Aufbau auf verschiedenen Detaillierungsebenen geschrieben und gelesen werden. Theoreme dürfen ohne Beweis zitiert werden: In diesem Fall gibt es weder eine Referenzliste noch einen untergeordneten Block. Um verschiedene häufig verwendete Theoreme und Definitionen nicht immer explizit angeben zu müssen, ist es möglich diese durch Markierung mit * als implizite Rechtfertigungen für alle folgenden Schritte zu verwenden. Kandidaten hierfür sind insbesondere die Basisaxiome und -theoreme der Mengenlehre sowie Typen von Variablen und Funktionen.

2.2 Mengenlehre

Das beschriebene System der Prädikatenlogik wird ergänzt um die Axiome und Axiomschemata der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre ohne Individuen mit Auswahlaxiom (ZFC). Jeder Term bezeichnet also eine Menge oder ist undefiniert. $A \in B$ bedeutet: A und B sind definiert (also Mengen) und die Menge A ist in der Menge B enthalten.

$A \notin B$ ist ein Makro, d.h. eine Abkürzung, für $\neg A \in B$. $A \notin B$ impliziert also im Gegensatz zu $A \in B$ nicht, daß A und B definiert sind.

M0001∗ $A \notin B :\Leftrightarrow \neg A \in B$

Mengeninklusion $A \subseteq B$ ist dagegen kein Makro, sondern ein neues Prädikat. $A \subseteq B$ impliziert also die Definiertheit von A und B.

D0002∗ $A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x \in A \bullet x \in B$

Durch das Extensionalitätsaxiom erzwingen wir, daß die Gleichheit der Logik mit der extensionalen Gleichheit auf Mengen koinzidiert.

X0003∗ $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

Gleichheit ist ein Prädikat, $A = B$ impliziert also die Definiertheit von A und B. Ungleichheit ist wieder ein Makro: $A \neq B$ gilt also auch, wenn A oder B undefiniert ist.

M0004∗ $A \neq B :\Leftrightarrow \neg A = B$

Echte Mengeninklusion ist wieder ein Prädikat:

D0005∗ $A \subset B :\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

Die folgende Makrodefinition ist ein Makroschema. Sie steht also für eine unendliche Menge von Makros: n läuft über positive Zahlen, $\nu_1,...,\nu_n$ laufen über Variablen und $\phi\ (\nu_1,...,\nu_n)$ über Formeln mit freien Variablen $\nu_1,...,\nu_n$. Entsprechendes gilt für $\nu_1,...,\mu_n$ und $\phi\ (\mu_1,...,\mu_n)$. Eindeutige Existenz von Objekten $\nu_1,...,\nu_n$ mit Eigenschaft $\phi\ (\nu_1,...,\nu_n)$ bedeutet sowohl Existenz als auch Gleichheit mit allen anderen Objekten $\mu_1,...,\mu_n$ mit derselben Eigenschaft $\phi\ (\mu_1,...,\mu_n)$.

M0006∗ $\exists!\ \nu_1,...,\nu_n \bullet \phi\ (\nu_1,...,\nu_n) :=$
$\exists\ \nu_1,...,\nu_n \bullet \phi\ (\nu_1,...,\nu_n) \wedge \forall\ \mu_1,...,\mu_n \bullet \phi\ (\mu_1,...,\mu_n) \Rightarrow (\mu_1 = \nu_1 \wedge ... \wedge \mu_n = \nu_n)$

Typangaben für die einzelnen Variablen sind bei allen Quantoren zulässig:

M0007∗ $\exists\ \nu_1 \in \chi_1,...,\nu_n \in \chi_n \bullet \phi\ (\nu_1,...,\nu_n) :=$
$\exists\ \mu_1,...,\mu_n \bullet \mu_1 \in \chi_1 \wedge ... \wedge \mu_n \in \chi_n \wedge \phi\ (\mu_1,...,\mu_n)$

M0008∗ $\forall\ \nu_1 \in \chi_1,...,\nu_n \in \chi_n \bullet \phi\ (\nu_1,...,\nu_n) :=$
$\forall\ \mu_1,...,\mu_n \bullet \mu_1 \in \chi_1 \wedge ... \wedge \mu_n \in \chi_n \Rightarrow \phi\ (\mu_1,...,\mu_n)$

M0009∗ $\exists!\ \nu_1 \in \chi_1,...,\nu_n \in \chi_n \bullet \phi\ (\nu_1,...,\nu_n) :=$
$\exists!\ \mu_1,...,\mu_n \bullet \mu_1 \in \chi_1 \wedge ... \wedge \mu_n \in \chi_n \wedge \phi\ (\mu_1,...,\mu_n)$

Für den Kennzeichnungsoperator ι der Logik erlauben wir auch die folgende Schreibweise:

M0010∗ $\iota\ \psi\ (\nu_1,...,\nu_n) \bullet \nu_1,...,\nu_n \bullet \phi\ (\nu_1,...,\nu_n) :=$
$\iota\ \nu \bullet \exists\ \nu_1,...,\nu_n \bullet \phi\ (\nu_1,...,\nu_n) \wedge \nu = \psi\ (\nu_1,...,\nu_n)$

Die Angabe der Variablen $\nu_1,...,\nu_n$ kann entfallen, wenn gerade die freien Variablen von $\psi\ (\nu_1,...,\nu_n)$ gemeint sind.

S0011

A0012 $\nu_1,...,\nu_n$ sind alle freien Variablen von $\psi\ (\nu_1,...,\nu_n)$.

M0013∗ $\iota\ \psi\ (\nu_1,...,\nu_n) \bullet \phi\ (\nu_1,...,\nu_n) :=$
$\iota\ \psi\ (\nu_1,...,\nu_n) \bullet \nu_1,...,\nu_n \bullet \phi\ (\nu_1,...,\nu_n)$

Zum Binden von Variablen innerhalb eines Terms verwenden wir den SEI -Operator.

S0014

A0015 In $\nu_1,...,\nu_n$ sind alle freien Variablen von $\psi\ (\nu_1,...,\nu_n)$ und in $\nu,\nu_1,...,\nu_n$ sind alle freien Variablen von $\chi\ (\nu,\nu_1,...,\nu_n)$ enthalten.

M0016∗ SEI $\nu = \psi\ (\nu_1,...,\nu_n) \bullet \chi\ (\nu,\nu_1,...,\nu_n) :=$
$\iota\ \chi\ (\nu,\nu_1,...,\nu_n) \bullet \nu \bullet \nu = \psi\ (\nu_1,...,\nu_n)$

Der folgende bedingte Term liefert ψ_1 falls ϕ gilt, ansonsten ψ_2 . Ist der entsprechende Term ψ_1 oder ψ_2 nicht definiert, so ist auch der bedingte Term nicht definiert.

M0017∗ FALLS ϕ DANN ψ_1 SONST $\psi_2 :=$
$\iota\ \nu \bullet (\phi \wedge \nu = \psi_1) \vee (\neg\ \phi \wedge \nu = \psi_2)$

Hier noch zwei Kurzschreibweisen. Bei Mehrdeutigkeit wählen wir ψ bzw. ψ_2 maximal.

M0018∗ FALLS ϕ DANN $\psi := \iota\ \nu \bullet \phi \wedge \nu = \psi$
M0019∗ $\psi_1\ ;\ \psi_2 :=$ FALLS $\downarrow(\psi_1)$ DANN ψ_1 SONST ψ_2

Zur Definition von Funktionen wird die folgende Schreibweise für Pattern-Matching nützlich sein. ψ ist ein Term, $\psi_1\ (\nu_1,...,\nu_n)$ das Pattern mit freien Variablen $\nu_1,...,\nu_n$, die gebunden werden. ψ_2 ist der eindeutige Ergebnisterm falls das Matching $\nu_1,...,\nu_2$ eindeutig bestimmt. Ansonsten ist das Ergebnis undefiniert (dies erlaubt eine Kombination mit 0019).

S0020

A0021 $\nu_1,...,\nu_n$ seien alle freien Variablen von $\psi_1\ (\nu_1,...,\nu_n)$

M0022∗ FÜR $\psi = \psi_1\ (\nu_1,...,\nu_n) \bullet \psi_2\ (\nu_1,...,\nu_n) :=$
$\iota\ \psi_2\ (\nu_1,...,\nu_n) \bullet \nu_1,...,\nu_n \bullet \psi = \psi_1\ (\nu_1,...,\nu_n)$

Jetzt folgen Axiome und Definitionen für die leere Menge, die große Vereinigungsmenge und die Potenzmenge. Zum Beweis der Definiertheit, also Existenz und Eindeutigkeit, ist die extensionale Gleichheit wesentlich.

X0023∗ $\exists\ C \bullet \forall\ x \bullet x \notin C$
D0024∗ $\emptyset := \iota\ C \bullet \forall\ x \bullet x \notin C$
X0025∗ $\forall\ A \bullet \exists\ C \bullet x \in C \Leftrightarrow \exists\ B \bullet x \in B \wedge B \in A$
D0026∗ $\bigcup A := \iota\ C \bullet x \in C \Leftrightarrow \exists\ B \bullet x \in B \wedge B \in A$
X0027∗ $\forall\ A \bullet \exists\ C \bullet x \in C \Leftrightarrow x \subseteq A$
D0028∗ $\mathcal{P}(A) := \iota\ C \bullet x \in C \Leftrightarrow x \subseteq A$

Um die Wohlfundiertheit der Elementbeziehung sicherzustellen, verwenden wir das folgende Fundierungsaxiom. Insbesondere werden damit natürlich auch Zyklen der Elementbeziehung ausgeschlossen.

X0029 $\forall \mathrm{B} \bullet \mathrm{B} \neq \emptyset \Rightarrow \exists \mathrm{A} \in \mathrm{B} \bullet \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$

Außerdem fordern wir das Axiom der Bildmenge: Das Bild einer Menge μ_1 unter einer eindeutigen Formel ϕ ist wieder eine Menge μ_2 .

X0030* $(\forall \nu_1,\nu_2,\nu_3 \bullet \phi\ (\nu_1,\nu_2) \wedge \phi\ (\nu_1,\nu_3) \Rightarrow \nu_2 = \nu_3) \Rightarrow$
$\forall \mu_1 \bullet \exists \mu_2 \bullet \forall \nu_2 \bullet \nu_2 \in \mu_2 \Leftrightarrow \exists \nu_1 \in \mu_1 \bullet \phi\ (\nu_1,\nu_2)$

Geschrieben wird die Bildmenge von χ unter $\phi\ (\nu_1,\nu_2)$ mit Hilfe des Ersetzungsoperators, wobei die gebundenen Variablen ν_2 und ν_1 explizit angegeben werden.

M0031* $\{\nu_2 \bullet \nu_1 \in \chi \bullet \phi\ (\nu_1,\nu_2)\} :=$
$\iota\ \mu_2 \bullet \forall \nu_2 \bullet \nu_2 \in \mu_2 \Leftrightarrow \exists \nu_1 \in \chi \bullet \phi\ (\nu_1,\nu_2)$

Hieraus können wir einen verallgemeinerten Ersetzungsoperator gewinnen, indem wir an der ersten Stelle einen beliebigen Ergebnisterm $\psi_2\ (\nu_1,...,\nu_n)$, an der zweiten Stelle einen beliebigen Selektionsterm $\psi_1\ (\nu_1,...,\nu_n) \in \chi$ und als Bedingung eine Formel $\phi\ (\nu_1,...,\nu_n)$ zulassen. Um die gebundenen Variablen nicht explizit angeben zu müssen treffen wir folgende Konvention: Gebunden werden die Variablen die in mindestens zwei der drei Ausdrücke erscheinen.

S0032

A0033 $\nu_1,...,\nu_n$ seien alle freien Variablen, die in mindestens zwei der drei Ausdrücke $\psi_1\ (\nu_1,...,\nu_n)$, $\psi_2\ (\nu_1,...,\nu_n)$ und $\phi\ (\nu_1,...,\nu_n)$ enthalten sind.

M0034* $\{\psi_2\ (\nu_1,...,\nu_n) \bullet \psi_1\ (\nu_1,...,\nu_n) \in \chi \bullet \phi\ (\nu_1,...,\nu_n)\} :=$
$\{\mu_2 \bullet \mu_1 \in \chi \bullet \exists \nu_1,...,\nu_n \bullet$
$\mu_2 = \psi_2\ (\nu_1,...,\nu_n) \wedge \mu_1 = \psi_1\ (\nu_1,...,\nu_n) \wedge \phi\ (\nu_1,...,\nu_n)\}$

Für den unbedingten Ersetzungsoperator und den Separationsoperator erlauben wir die bekannten mathematischen Notationen.

M0035* $\{\psi_2 \bullet \psi_1 \in \chi\} := \{\psi_2 \bullet \psi_1 \in \chi \bullet \mathbb{T}\}$

M0036* $\{\psi_1 \in \chi \bullet \phi\} := \{\psi_1 \bullet \psi_1 \in \chi \bullet \phi\}$

Nun definieren wir 0, 1 und die boolsche Menge $\mathbb{B}$ bestehend aus 0 und 1.

D0037* $0 := \emptyset\ ;\ 1 := \mathcal{P}(\emptyset)\ ;\ \mathbb{B} := \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$

Mit dem Ersetzungsoperator läßt sich daraus der Paarmengenoperator ableiten. Ohne weitere Axiome lassen sich dann Vereinigungsmenge, Schnittmenge, große Schnittmenge, Differenzmenge und der endliche Mengenkonstruktor definieren.

D0038* $\{\mathrm{A},\mathrm{B}\} := \{\mathsf{FALLS}\ \mathrm{x} = 0\ \mathsf{DANN}\ \mathrm{A}\ \mathsf{SONST}\ \mathrm{B} \bullet \mathrm{x} \in \mathbb{B}\}$

D0039* $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} := \bigcup \{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$

D0040* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} := \{\mathrm{x} \in \mathrm{A} \bullet \mathrm{x} \in \mathrm{B}\}$

D0041* $\bigcap \mathrm{A} := \mathsf{FALLS}\ \mathrm{A} \neq \emptyset\ \mathsf{DANN}\ \{\mathrm{x} \in \bigcup \mathrm{A} \bullet \forall \mathrm{B} \in \mathrm{A} \bullet \mathrm{x} \in \mathrm{B}\}$

D0042* $\mathrm{A} - \mathrm{B} := \{\mathrm{x} \in \mathrm{A} \bullet \mathrm{x} \notin \mathrm{B}\}$

M0043* $\{\mathrm{x}\} := \{\mathrm{x},\mathrm{x}\}$

M0044* $\{\mathrm{x},\mathrm{y},\ ...\} := \{\mathrm{x}\} \cup \{\mathrm{y},\ ...\}$

2.3 Binäre Relationen

Zuerst kodieren wir Paare und Tupel als Mengen. Dann definieren wir das kartesische Produkt A × B und A^2, sowie eine binäre Relation als Teilmenge eines solchen. $\mathcal{BR}$(A) bezeichnet die Menge der binären Relationen auf A.

D0045∗ (a,b) := {{a,b}, {a}}
M0046∗ (a,b,c ...) := (a,(b,c ...))
D0047∗ $A \times B := \bigcup \{\{(a,b) \bullet b \in B\} \bullet a \in A\}$
D0048∗ R ist eine binäre Relation :⇔ ∃ A,B • R ⊆ A × B
D0049∗ $A^2 := A \times A$
D0050∗ $\mathcal{BR}(A) := \mathcal{P}(A^2)$
D0051∗ $\mathcal{ID}(A) := \{(x,y) \bullet (x,y) \in A \times A \bullet x = y\}$

Die Identitätsrelation $\mathcal{ID}$(A) repräsentiert das Gleichheitsprädikat der Logik innerhalb der Mengenlehre. Inverse Relation, Grundmenge, Vor- und Nachbereich, relationales Bild und Restriktion sind wie üblich definierbar:

S0052
VA0053 R • R ist eine binäre Relation
D0054∗ $R^{-1} := \{(b,a) \bullet (a,b) \in R\}$
D0055∗ $\mathcal{F}(R) := \bigcup \bigcup R$
D0056∗ $\mathcal{D}(R) := \{a \in \mathcal{F}(R) \bullet \exists\, b \bullet (a,b) \in R\}$
D0057∗ $\mathcal{R}(R) := \{b \in \mathcal{F}(R) \bullet \exists\, a \bullet (b,a) \in R\}$
D0058∗ $R[A] := \{b \in \mathcal{R}(R) \bullet \exists\, a \in A \bullet (a,b) \in R\}$
T0059 $R \subseteq R' \wedge A \subseteq A' \Rightarrow R[A] \subseteq R'\,[A']$
D0060∗ $R|X := R \cap X^2$

Hinzu kommen noch die relationale und die funktionale Komposition, sowie reflexiver und symmetrischer Abschluß:

S0061
VA0062 R, S • R ist eine binäre Relation ∧ S ist eine binäre Relation
D0063∗ $R \odot S := \{(a,c) \in \mathcal{D}(R) \times \mathcal{R}(S) \bullet \exists\, b \bullet (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R\}$
D0064∗ $R \circ S := S \odot R$
D0065 $\underline{R}_X := R \cup \mathcal{ID}(X)$
D0066 $\widehat{\underline{R}}_X := R \cup R^{-1} \cup \mathcal{ID}(X)$
D0067 $\updownarrow R := R \cup R^{-1}$

Es folgt eine Zusammenstellung wichtiger Eigenschaften von binären Relationen.

S0068
VA0069 R, R′ • R ist eine binäre Relation ∧ R′ ist eine binäre Relation
D0070 R ist reflexiv :⇔ $\forall\, x \in \mathcal{F}(R) \bullet (x,x) \in R$
T0071 R ist reflexiv ⇔ $\mathcal{ID}(\mathcal{F}(R)) \subseteq R$
T0072∗ R ist reflexiv ⇔ R^{-1} ist reflexiv
D0073 R ist irreflexiv :⇔ $\forall\, x \bullet (x,x) \notin R$
T0074 R ist irreflexiv ∧ R′ ⊆ R ⇒ R′ ist irreflexiv
T0075 R ist irreflexiv ⇒ $\forall\, X \bullet R \cap \mathcal{ID}(X) = \emptyset$
D0076 R ist symmetrisch :⇔ $\forall\, x,y \bullet (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$
T0077 R ist symmetrisch ⇔ $\forall\, x,y \bullet (x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R$
T0078 R ist symmetrisch ⇔ $R = R^{-1}$

T0079∗ R ist symmetrisch $\Leftrightarrow$ R^{-1} ist symmetrisch
T0080 $\mathcal{ID}$(X) ist symmetrisch
T0081 R ist symmetrisch $\wedge$ R′ ist symmetrisch $\Rightarrow$ (R $\cup$ R′) ist symmetrisch
D0082 R ist asymmetrisch :$\Leftrightarrow$ $\forall$ x,y $\bullet$ (x,y) $\in$ R $\Rightarrow$ (y,x) $\notin$ R
D0083 R ist antisymmetrisch :$\Leftrightarrow$ $\forall$ x,y $\bullet$ (x,y) $\in$ R $\wedge$ (y,x) $\in$ R $\Rightarrow$ x = y
D0084 R ist transitiv :$\Leftrightarrow$ $\forall$ x,y,z $\bullet$ (x,y) $\in$ R $\wedge$ (y,x) $\in$ R $\Rightarrow$ (x,z) $\in$ R
T0085∗ R ist transitiv $\Leftrightarrow$ R^{-1} ist transitiv
D0086 R ist schwach total :$\Leftrightarrow$ $\forall$ x $\in \mathcal{F}$(R), y $\in \mathcal{F}$(R) $\bullet$ (x,y) $\in$ R $\vee$ (y,x) $\in$ R $\vee$ x = y
D0087 R ist total :$\Leftrightarrow$ $\forall$ x $\in \mathcal{F}$(R), y $\in \mathcal{F}$(R) $\bullet$ (x,y) $\in$ R $\vee$ (y,x) $\in$ R
D0088 R ist eine Ähnlichkeitsrelation :$\Leftrightarrow$ R ist reflexiv $\wedge$ R ist symmetrisch
D0089 R ist eine Äquivalenzrelation :$\Leftrightarrow$ R ist reflexiv $\wedge$ R ist symmetrisch $\wedge$ R ist transitiv
D0090 R ist eine Quasiordnung :$\Leftrightarrow$ R ist reflexiv $\wedge$ R ist transitiv
D0091 R ist eine Ordnung :$\Leftrightarrow$ R ist reflexiv $\wedge$ R ist transitiv $\wedge$ R ist antisymmetrisch
D0092 R ist eine strenge Ordnung :$\Leftrightarrow$ R ist irreflexiv $\wedge$ R ist transitiv
T0093 R ist eine strenge Ordnung $\Leftrightarrow$ R ist asymmetrisch $\wedge$ R ist transitiv
D0094 R ist eine totale Ordnung :$\Leftrightarrow$ R ist eine Ordnung $\wedge$ R ist schwach total
D0095 R ist eine strenge, totale Ordnung :$\Leftrightarrow$ R ist eine strenge Ordnung $\wedge$ R ist total

Man beachte hierbei, daß wir unter einer Ordnung immer eine reflexive, partielle Ordnung verstehen. Strenge Ordnungen und totale Ordnungen werden explizit als solche bezeichnet.

Für Quasiordnungen (und somit auch für Ordnungen) definieren wir nun maximale, minimale, größte und kleinste Elemente.

S0096
VA0097 ($\leq$) $\bullet$ ($\leq$) ist eine Quasiordnung
D0098 y ist maximal bzgl. ($\leq$) :$\Leftrightarrow$ y $\in \mathcal{F}(\leq)$ $\wedge$ $\forall$ z $\bullet$ (y,z) $\in$ ($\leq$) $\Rightarrow$ (z,y) $\in$ ($\leq$)
D0099 y ist minimal bzgl. ($\leq$) :$\Leftrightarrow$ y $\in \mathcal{F}(\leq)$ $\wedge$ $\forall$ z $\bullet$ (z,y) $\in$ ($\leq$) $\Rightarrow$ (y,z) $\in$ ($\leq$)
D0100 y ist ein größtes Element bzgl. ($\leq$) :$\Leftrightarrow$ y $\in \mathcal{F}(\leq)$ $\wedge$ $\forall$ z $\in \mathcal{F}(\leq)$ $\bullet$ (z,y) $\in$ ($\leq$)
D0101 y ist ein kleinstes Element bzgl. ($\leq$) :$\Leftrightarrow$ y $\in \mathcal{F}(\leq)$ $\wedge$ $\forall$ z $\in \mathcal{F}(\leq)$ $\bullet$ (y,z) $\in$ ($\leq$)

Kliquen einer binären Relation sind Mengen, deren Elemente paarweise in der Relation stehen. Meist ist es nur sinnvoll, Kliquen von reflexiven und symmetrischen binären Relationen zu bilden.

S0102
VA0103 R $\bullet$ R ist eine binäre Relation
D0104 R -Kliquen := {C $\in \mathcal{P}(\mathcal{F}$(R)) $\bullet$ $\forall$ x $\in$ C, y $\in$ C $\bullet$ (x,y) $\in$ R}
T0105 R $\in \mathcal{BR}$(X) $\wedge$ C $\in$ R -Kliquen $\Rightarrow$ C $\subseteq$ X
T0106 C $\in$ R -Kliquen $\Leftrightarrow$ $\forall$ x $\in$ C, y $\in$ C $\bullet$ (x,y) $\in$ R
T0107 C $\in$ R -Kliquen $\Leftrightarrow$ $C^2 \subseteq$ R
S0108
VA0109 R $\bullet$ R ist eine binäre Relation
T0110 $\emptyset \in$ R -Kliquen
T0111 (x,x) $\in$ R $\Leftrightarrow$ {x} $\in$ R -Kliquen
T0112 R ist reflexiv $\wedge$ R ist symmetrisch $\Rightarrow$ ((x,y) $\in$ R $\Leftrightarrow$ {x,y} $\in$ R -Kliquen)
T0113 R ist reflexiv $\wedge$ R ist symmetrisch $\Rightarrow$
((x,y) $\in$ R $\wedge$ (y,z) $\in$ R $\wedge$ (x,z) $\in$ R $\Leftrightarrow$ {x,y,z} $\in$ R -Kliquen)
S0114
VA0115 R, R′ $\bullet$ R ist eine binäre Relation $\wedge$ R′ ist eine binäre Relation

Kliquenbildung ist monoton in der Relation.

T0116 R $\subseteq$ R′ $\Rightarrow$ R -Kliquen $\subseteq$ R′ -Kliquen

Die Menge der Kliquen ist abgeschlossen bzgl. Mengeninklusion.

T0117 $C \in R$ -Kliquen $\wedge C' \subseteq C \Rightarrow C' \in R$ -Kliquen

Die Kliquen einer auf eine Menge eingeschränkten Relation ergeben sich durch Schnitt der ursprünglichen Kliquen mit dieser Menge.

T0118 $C \in R$ -Kliquen $\Rightarrow (C \cap X) \in (R|X)$ -Kliquen

Eine Klique läßt sich um ein Element erweitern, wenn dieses zu sich selbst und zur gesamten Klique in der Relation steht.

T0119 R ist symmetrisch $\wedge\ C \in R$ -Kliquen $\wedge\ (y,y) \in R \wedge (\forall\, x \in C \bullet (x,y) \in R) \Rightarrow$
$(C \cup \{y\}) \in R$ -Kliquen

Kens einer binären Relation sind Kliquen, die maximal sind bzgl. der Mengeninklusion. Auch sie werden üblicherweise nur von reflexiven und symmetrischen Relationen gebildet. Da die Relationen nicht transitiv sein müssen, handelt es sich bei Kens um eine echte Verallgemeinerung von Äquivalenzklassen, genauso wie Ähnlichkeitsrelationen, die Äquivalenzrelationen verallgemeinern.

S0120
VA0121 $R, R' \bullet$ R ist eine binäre Relation $\wedge\ R'$ ist eine binäre Relation
D0122 $(\subseteq|X) := \{(A,B) \in X^2 \bullet A \subseteq B\}$
D0123 R -Kens $:= \{C \in \mathcal{P}(\mathcal{F}(R)) \bullet C$ ist maximal bzgl. $(\subseteq|R$ -Kliquen$)\}$
T0124 $R \in \mathcal{BR}(X) \wedge K \in R$ -Kens $\Rightarrow K \subseteq X$
T0125 R -Kens $\subseteq$ R -Kliquen
T0126 $K \in R$ -Kens $\Leftrightarrow K \in R$ -Kliquen $\wedge \neg\exists\, K' \in R$ -Kliquen $\bullet\ K \subset K'$
T0127 $R \subseteq R' \Rightarrow R$ -Kens $\subseteq R'$ -Kens

Ein Ken ist eine Klique, die jedes Element, das zu sich selbst und zur gesamten Klique in der Relation steht, schon enthält.

S0128
VA0129 $R \bullet$ R ist eine binäre Relation
A0130 R ist symmetrisch
T0131 $K \in R$ -Kens $\Leftrightarrow K \in R$ -Kliquen $\wedge$
$\forall\, y \bullet (y,y) \in R \wedge (\forall\, x \in K \bullet (x,y) \in R) \Rightarrow y \in K$

Mit Hilfe des Zornschen Lemmas läßt sich zeigen, daß jede Klique zu einem Ken erweitert werden kann, ein Theorem, das für diese Arbeit von zentraler Bedeutung ist. Insbesondere bedeutet dies, daß aus der Menge der Kens einer Relation alle Kliquen als Teilmengen dieser Kens generierbar sind. Die Menge der Kens und die Menge der Kliquen besitzen also die gleiche Aussagekraft. Insbesondere läßt sich aus ihnen auch die unterliegende Relation rekonstruieren, sofern sie reflexiv und symmetrisch ist.

S0132
VA0133 $R \bullet$ R ist eine binäre Relation
T0134 $C \in R$ -Kliquen $\Rightarrow \exists\, K \in R$ -Kens $\bullet\ C \subseteq K$

Haben wir es mit einer Äquivalenzrelation zu tun, dann können wir auf die übliche Weise Äquivalenzklassen, Quotienten von Mengen und binären Relationen definieren.

S0135
VA0136 $E \bullet$ E ist eine Äquivalenzrelation
D0137 $[x]_E := E[\{x\}]$
D0138 $Y/E := \{[y]_E \bullet y \in Y\}$

D0139 $S/E := \{([a]_E,[b]_E) \bullet (a,b) \in S\}$

2.4 Funktionen

Funktionen sind eindeutige, binäre Relationen, Die Funktionsapplikation der Funktion F auf Argument x schreiben wir als F x oder F (x). Bei Nichtexistenz oder Nichteindeutigkeit des Funktionswertes ist dieser Term undefiniert.

S0140
- **VA0141** $F \bullet F$ ist eine binäre Relation
- **D0142∗** F ist eine Funktion $:\Leftrightarrow \forall\, x,y,z \bullet (x,y) \in F \land (x,z) \in F \Rightarrow y = z$
- **D0143∗** $F\ x := \iota\, y \bullet (x,y) \in F$

S0144
- **VA0145** $F \bullet F$ ist eine Funktion
- **T0146** $x \in \mathcal{D}(F) \Leftrightarrow \downarrow(F\ x)$
- **T0147** $\downarrow(F^{-1}\ x) \Rightarrow F\ (F^{-1}\ x) = x$

Es folgt die übliche Klassifikation von Funktionen. $A \to B$ bezeichnet die Menge der totalen Funktionen von A nach B. Mit $A \rightsquigarrow B$ ist die Menge der (partiellen) Funktionen von A nach B gemeint.

S0148
- **VA0149** $F \bullet F$ ist eine Funktion
- **D0150∗** F ist total auf A $:\Leftrightarrow \mathcal{D}(F) = A$
- **D0151∗** F ist surjektiv auf B $:\Leftrightarrow \mathcal{R}(F) = B$
- **D0152∗** F ist injektiv $:\Leftrightarrow F^{-1}$ ist eine Funktion
- **T0153** F ist injektiv $\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathcal{D}(F),\ y \in \mathcal{D}(F) \bullet x \neq y \Rightarrow F\ x \neq F\ y$
- **T0154** F ist injektiv $\Rightarrow \forall\, y \in \mathcal{R}(F) \bullet F^{-1}\ y \in \mathcal{D}(F)$
- **D0155∗** F ist bijektiv von A auf B $:\Leftrightarrow$ F ist total auf A $\land$ F ist injektiv $\land$ F ist surjektiv auf B
- **D0156∗** $A \rightsquigarrow B := \{F \in \mathcal{P}(A \times B) \bullet F$ ist eine Funktion$\}$
- **D0157∗** $A \to B := \{F \in A \rightsquigarrow B \bullet F$ ist total auf $A\}$

Wir verwenden die funktionale Formulierung des Auswahlaxioms. Eine Auswahlfunktion für eine Menge S wählt aus jeder Menge in S ein Element aus. Das Auswahlaxiom garantiert, daß eine Auswahlfunktion immer existiert, sofern alle Mengen in S mindestens ein auswählbares Element enthalten. Dies Besonderheit des Auswahlaxioms liegt darin, daß die Menge S unendlich sein kann und das Axiom damit in diesem Fall die Existenz einer Funktion liefert, die unendlich viele Entscheidungen zwischen jeweils möglicherweise unendlich vielen Möglichkeiten repräsentiert. Anstatt das Auswahlaxiom direkt zu verwenden, benutzen wir das äquivalente Theorem, daß jede binäre Relation sich zu einer Funktion mit unverändertem Vorbereich einschränken läßt.

S0158
- **D0159∗** F ist eine Auswahlfunktion für S $:\Leftrightarrow \mathcal{D}(F) = S \land \forall\, X \in S \bullet (F\ X) \in X$
- **X0160∗** $(\forall\, X \in S \bullet X \neq \emptyset) \Rightarrow \exists\, F \bullet F$ ist eine Auswahlfunktion für S
- **T0161** R ist eine binäre Relation $\Rightarrow \exists\, F \bullet F$ ist eine Funktion $\land F \subseteq R \land \mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(R)$

Die in der Informatik bekannte λ – Schreibweise ist eine nützliche Abkürzung. Analog zum Ersetzungsoperator, der aus existierenden Mengen und zusätzlichen Bedingungen neue Mengen konstruiert, liefert uns die λ – Abstraktion neue Funktionen aus gegebenen Funktionen und Termen.

D0162∗ $\lambda\, \nu \in \chi \bullet \psi\ (\nu) := \{(\nu,\mu) \bullet \nu \in \chi \bullet \mu = \psi\ (\nu)\}$

Rekursive Definitionen von Funktionen fassen wir als Fixpunkte einer höheren Funktion (d.h. eines Funktionals) auf. Daher die folgenden Definitionen. $\mathcal{FIX}$(F) bezeichnet die Fixpunkte einer Funktion.

S0163
VA0164 F • F ist eine Funktion
D0165 $\mathcal{FIX}(F) := \{x \in \mathcal{D}(F) \bullet F\ x = x\}$
D0166 F ist monoton $:\Leftrightarrow \forall A,B \in \mathcal{D}(F) \bullet A \subseteq B \Rightarrow F\ A \subseteq F\ B$

Daß der kleinste Fixpunkt einer monotonen Funktion immer existiert, ist die Aussage des Knaster-Tarski-Fixpunkttheorems.

S0167
VA0168 F • F ist eine Funktion $\wedge$ F ist monoton
D0169 kleinster Fixpunkt von F :=
ι x • x ist das kleinste Element in $\mathcal{FIX}$(F) bzgl. $(\subseteq|\mathcal{FIX}(F))$
T0170 $\downarrow$(kleinster Fixpunkt von F)

2.5 Natürliche Zahlen

Um natürliche Zahlen zu kodieren, definieren den Nachfolger einer Menge.

D0171$*$ succ x := $x \cup \{x\}$

Damit können wir die Existenz einer unendlichen Menge, der natürlichen Zahlen (als endliche Ordinalzahlen) fordern.

X0172$*$ $0 \in \mathbb{N} \wedge \forall x \in \mathbb{N} \bullet \text{succ } x \in \mathbb{N}$
X0173 $\forall y \in \mathbb{N} \bullet y \neq 0 \Rightarrow \exists x \bullet y = \text{succ } x$

0 und 1 hatten wir schon definiert (es gilt $0 = \emptyset$ und $1 = \text{succ } 0$). Alle weiteren Zahlen ergeben sich darauf aufbauend.

D0174$*$ 2 := succ 1 ; 3 := succ 2 ...

Die natürliche Ordnung auf $\mathbb{N}$ ist eine binäre Relation:

S0175
VA0176 n,m • n,m $\in \mathbb{N}$
D0177$*$ $(\leq) := \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \bullet n \subseteq m\}$
D0178$*$ $n \leq m :\Leftrightarrow (n,m) \in (\leq)$
D0179$*$ $(<) := \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \bullet n \subset m\}$
D0180$*$ $n < m :\Leftrightarrow (n,m) \in (<)$
D0181$*$ $\mathbb{N}^+ := \{x \in \mathbb{N} \bullet 1 \leq x\}$

Diese Ordnung wird häufig verwendet, deshalb die Definition von maximalen und minimalen Elementen einer Teilmenge von $\mathbb{N}$.

S0182
VA0183 $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ y \in \mathbb{N}$
D0184 y ist minimal in Y $:\Leftrightarrow$ y ist minimal bzgl. $(\leq)|Y$
D0185 y ist maximal in Y $:\Leftrightarrow$ y ist maximal bzgl. $(\leq)|Y$
T0186 $Y \subseteq \mathbb{N} \wedge Y \neq \emptyset \Rightarrow \exists!\ y \bullet$ y ist minimal in Y
T0187 y ist minimal in Y $\Rightarrow y \in Y$

T0188 y ist minimal in Y $\Rightarrow \forall$ z $\in$ Y $\bullet$ y $\leq$ z

Schließlich haben wir noch Definitionen von geschlossenen, offenen und gemischten Intervallen:

S0189

D0190$*$ $[a \ldots b] := \{x \in \mathbb{N} \bullet a \leq x \wedge x \leq b\}$

D0191$*$ $(a \ldots b) := \{x \in \mathbb{N} \bullet a < x \wedge x < b\}$

D0192$*$ $(a \ldots b] := \{x \in \mathbb{N} \bullet a < x \wedge x \leq b\}$

D0193$*$ $[a \ldots b) := \{x \in \mathbb{N} \bullet a \leq x \wedge x < b\}$

Besonders wichtig sind noch die Induktionsschemata der vollständigen und der schwachen Induktion:

S0194

T0195$*$ $(\forall\, n \in \mathbb{N} \bullet \phi\,(n)) \Leftrightarrow \forall\, k \in \mathbb{N} \bullet (\forall\, i \in \mathbb{N} \bullet i < k \Rightarrow \phi\,(i)) \Rightarrow \phi\,(k)$

T0196$*$ $(\forall\, n \in \mathbb{N} \bullet \phi\,(n)) \Leftrightarrow \phi\,(0) \wedge (\forall\, i \in \mathbb{N} \bullet \phi\,(i) \Rightarrow \phi\,(\mathrm{succ}\ i))$

Die Additionsfunktion auf $\mathbb{N}$ läßt sich rekursiv definieren. Die Funktion ist der kleinste Fixpunkt des angegeben Funktionals F. Zum Beweis der Definiertheit von (+) genügt es nach dem Fixpunkttheorem 0170 die Monotonie (nach Definition 0166) von F nachzuweisen: Das Funktional erhält eine möglicherweise partielle (+) – Funktion und erweitert sie.

S0197

M0198$*$ $x + y := (+)\ (x,y)$

D0199$*$ $F := \lambda\, (+) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N} \bullet$
$\quad \lambda\, (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \bullet$
$\quad\quad$ FÜR $y = 0 \bullet x$;
$\quad\quad$ FÜR $y = \mathrm{succ}\ z \bullet \mathrm{succ}\ (x + z))$

D0200$*$ $(+)$:= der kleinste Fixpunkt von F

D0201$*$ $x - y := \iota\, z \bullet x = y + z$

Gelegentlich benötigen wir neben den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ noch die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Diese seien so kodiert, daß $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ gilt. Ferner seien die üblichen Relationen und Operationen verfügbar.

2.6 Kardinalität

Wir können die Kardinalität beliebiger Mengen vergleichen: Wenn A und B gleichmächtig sind, schreiben wir A $|{=}|$ B. Ist A weniger oder genauso mächtig wie B, verwenden wir die Notation A $|{\leq}|$ B. Zur Definition der Kardinalität $|A|$ einer endlichen Menge A nutzen wir eine Eigenschaft der Ordinalzahlen: Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge seiner Vorgänger. Damit erhält man die folgenden Definitionen. Unendliche Kardinalzahlen benötigen wir nicht: Die Kardinalität für unendliche Mengen ist hier undefiniert.

D0202$*$ A $|{\leq}|$ B $:\Leftrightarrow \exists\, F \in (A \rightarrow B) \bullet$ F ist injektiv

D0203$*$ A $|{=}|$ B $:\Leftrightarrow \exists\, F \in (A \rightarrow B) \bullet$ F ist bijektiv von A auf B

D0204$*$ A $|{<}|$ B $:\Leftrightarrow$ A $|{\leq}|$ B $\wedge \neg$ A $|{=}|$ B

D0205$*$ $|A| := \iota\, n \in \mathbb{N} \bullet A\ |{=}|\ n$

D0206$*$ A ist abzählbar $:\Leftrightarrow$ A ist endlich $\vee$ A $|{=}|$ $\mathbb{N}$

2.7 Grundmengen

Wir wählen nun Grundmengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{X}$, die während der gesamten Arbeit unverändert bleiben. Die Menge $\mathbb{A}$ dient später als Grundmenge zur Definition von Wörtern: Die in Wörtern auftretenden Elemente müssen aus $\mathbb{A}$ stammen. Die Menge $\mathbb{X}$ dient als Grundmenge für binäre Relationen und Funktionen: Die Komponenten der Paare sollen aus $\mathbb{X}$ stammen. Da wir binäre Relationen und Funktionen über Zahlen benötigen, nehmen wir an, das $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{X}$ und, damit wir auch binäre Relationen über Elementen von Wörtern bilden können, nehmen wir zusätzlich $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ an. Schließlich bilden wir auch noch binäre Relationen über Wörtern (die später als Elemente von $(\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{A})$ repräsentiert werden), also nehmen wir noch $(\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{A}) \subseteq \mathbb{X}$ hinzu. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$ benötigen wir für Beispiele, in denen wir natürliche Zahlen als voneinander verschiedene Elemente verwenden werden. Alle diese Annahmen sind sicherlich erfüllbar.

VA0207 $\mathbb{A}, \mathbb{X}$
A0208$*$ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$
A0209$*$ $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{X}$
A0210$*$ $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$
A0211$*$ $(\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{A}) \subseteq \mathbb{X}$

Glücklicherweise brauchen wir nur binäre Relationen auf Wörtern, aber keine Wörter über binären Relationen, so daß dieser einfache, hierarchische Ansatz für unsere Zwecke ausreicht. Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist, daß Relationen und Funktionen auf generischen Datentypen (wie Wörtern) als Mengen (d.h. innerhalb der Mengenlehre) repräsentiert werden können und für diesen Zweck nicht auf Metarelationen (d.h. Prädikate) und Metafunktionen der Logik (bzw. ihrer Semantik) zurückgegriffen werden muß. Das hat wiederum den Vorteil, daß diese Objekte an höhere Funktionen übergeben werden können. Dies erlaubt insbesondere bei rekursiven (Fixpunkt-)Definitionen, daß sogar das definierende Funktional und damit auch seine Fixpunkte Mengen sind.

Die folgenden beiden Definitionen der Iteration und der transitiven Hülle sind anwendbar auf Funktionen in $(\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathbb{X})$ bzw. Relationen in $\mathcal{BR}(\mathbb{X})$.

2.8 Iteration

S0212

M0213$*$ $f^n := (\square^\square)\ (f,n)$
D0214 $F := \lambda\ (\square^\square) \in ((\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathbb{X}) \times \mathbb{N}) \rightsquigarrow (\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathbb{X}) \bullet$
$\lambda\ (f,n) \in (\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathbb{X}) \times \mathbb{N} \bullet$
FALLS $n = 1$ DANN f ;
FALLS $n > 1$ DANN $f \circ f^{n-1}$
D0215 $(\square^\square) :=$ der kleinste Fixpunkt von F
T0216$*$ $\square^\square \in (\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathbb{X}) \times \mathbb{N}^+ \rightarrow (\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathbb{X})$
VA0217 $f \in (\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathbb{X}),\ n \in \mathbb{N}^+$
T0218 $f^1 = f$
T0219 $f^{n+1} = f \circ f^n$

Man beachte, daß in 0213 ein Macro (d.h. eine Textersetzung) definiert wird, das in 0214 und 0218 sowie 0219 benutzt wird. $(\square^\square)$ wird in 0215 als Konstantensymbol definiert, das einer Funktion (also einer Menge) entspricht.

2.9 Transitive Hülle

S0220

M0221$*$ $R^n := (\square^\square)\ (R,n)$

D0222 $F := \lambda\ (\square^\square) \in \mathcal{BR}(\mathbb{X}) \times \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathcal{BR}(\mathbb{X}) \bullet$
$\lambda\ (R,n) \in \mathcal{BR}(\mathbb{X}) \times \mathbb{N} \bullet$
FALLS $n = 1$ DANN R ;
FALLS $n > 1$ DANN $R \odot (R^{n-1})$

D0223 $(\square^\square)$:= der kleinste Fixpunkt von F

T0224$*$ $\square^\square \in \mathcal{BR}(\mathbb{X}) \times \mathbb{N}^+ \to \mathcal{BR}(\mathbb{X})$

VA0225 $R \in \mathcal{BR}(\mathbb{X}),\ n \in \mathbb{N}^+$

T0226$*$ $R^1 = R$

T0227$*$ $R^{n+1} = R \odot R^n$

D0228 $R^+ := \bigcup \{R^n \bullet n \in \mathbb{N}^+\}$

D0229 $R^*_A := R^+ \cup \mathcal{ID}(A)$

Das Symbol $(\square^\square)$, das oben schon für die Iteration verwendet wurde, wird in 0223 überladen. Es bezeichnet ab jetzt je nach Kontext die Iteration von Funktionen oder die Potenz einer Relation.

Kapitel 3

Wörter

Da wir in der gesamten Arbeit hauptsächlich mit Wörtern und mit Mengen von Wörtern arbeiten, ist es hierfür hilfreich zunächst einige Schreibweisen einzuführen und einige bekannte Theoreme aufzulisten. Beweise werden wir in diesem Kapitel kaum ausführen, da sie, obwohl einfach, formal recht aufwendig sind und zum Thema dieser Arbeit, den zyklischen Ordnungen, wenig beitragen. Nichtsdestotrotz ist es wünschenswert alle verwendeten (auch triviale) Theoreme aufzuzählen, um sie referenzieren zu können und zu erkennen auf welchen Eigenschaften der Wörter und ihrer Operationen die Theorie basiert.

Dieses und das nachfolgende Kapitel, das sich mit Wortmengen beschäftigen wird, dienen also im wesentlichen zur Einführung zunächst bekannter, später weniger bekannter Begriffe. Diese Einführung wird rein mathematischen Charakter haben. Interpretationen, die zeigen warum diese Begriffe für uns interessant sind, werden erst in späteren Kapiteln gegeben, wo die (zyklische) Ordnungen unter Rückgriff auf die folgenden beiden Kapitel axiomatisiert und untersucht werden.

Wörter werden hier als Familien mit einer endlichen Indexmenge $[0 \ldots n)$ für $n \in \mathbb{N}$ repräsentiert. Der Wertebereich der Familie ist eine Teilmenge der Grundmenge $\mathbb{A}$. Tatsächlich wird später von dieser Repräsentation kein Gebrauch gemacht, sondern nur die abstrakten Eigenschaften verwendet. Damit ist eine andere äquivalente Repräsentation genauso geeignet.

S0230

VA0231 $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$

X^* bezeichnet die Menge aller Wörter auf X und ist monoton in diesem Argument.

D0232 $X^* := \{w \in \mathbb{N} \leadsto X \bullet \exists\, n \in \mathbb{N} \bullet \mathcal{D}(w) = [0 \ldots n)\}$

T0233 $\forall\, X \in \mathcal{P}(\mathbb{A}),\ Y \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \bullet X \subseteq Y \Rightarrow X^* \subseteq Y^*$

Die Indizes eines Wortes $\mathcal{I}(w)$ bezeichnen den Definitionsbereich der entsprechenden Familie. Das Alphabet $\mathcal{A}(w)$ bezeichnet den Wertebereich. Zur Konstruktion von Wörtern verwenden wir den aus LISP bekannten, elementaren CONS-Operator $[x : w]$. Weiterhin definieren wir noch die Länge von Wörtern $\mathcal{L}(w)$ als Kardinalität ihrer Indexmenge.

S0234

VA0235 $x \in \mathbb{A},\ w \in \mathbb{A}^*$

D0236 $\mathcal{I}(w) := \mathcal{D}(w)$

T0237∗ $\mathcal{I}(w) \subseteq \mathbb{N}$

D0238 $\mathcal{A}(w) := \mathcal{R}(w)$

T0239∗ $\mathcal{A}(w) \subseteq \mathbb{A}$

T0240 $\mathcal{A}(\mathrm{w})$ ist endlich
D0241 $[\mathrm{x} : \mathrm{w}] := \lambda\, \mathrm{i} \in \mathbb{N} \bullet \mathsf{FALLS}\ \mathrm{i} = 0\ \mathsf{DANN}\ \mathrm{x}\ \mathsf{SONST}\ \mathrm{w}\ (\mathrm{i} - 1)$
D0242 $\mathcal{L}(\mathrm{w}) := |\mathcal{I}(\mathrm{w})|$
T0243∗ $\mathcal{L}(\mathrm{w}) \in \mathbb{N}$

Man beachte, daß das triviale Theorem 0237, also $\mathcal{I}(\mathrm{w}) \subseteq \mathbb{N}$, impliziert das $\mathcal{I}(\mathrm{w})$ definiert ist. Entsprechendes gilt für Theorem 0243, $\mathcal{L}(\mathrm{w}) \in \mathbb{N}$, d.h. $\mathcal{L}(\mathrm{w})$ ist definiert und in $\mathbb{N}$ enthalten, da hier alle Wörter endliche Familien sind.

Die n -stelligen Wörter X^{n} sind die Wörter der Länge n.

S0244
VA0245 $\mathrm{X} \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$, $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$
D0246 $\mathrm{X}^{\mathrm{n}} := \{\mathrm{w} \in \mathrm{X}^* \bullet \mathcal{L}(\mathrm{w}) = \mathrm{n}\}$

Für die häufig benötigten kurzen Wörter verwenden wir die folgende Schreibweise.

S0247
D0248∗ $[] := \emptyset$
D0249∗ $[\mathrm{a}] := [\mathrm{a} : []]$
D0250∗ $[\mathrm{a,b}] := [\mathrm{a} : [\mathrm{b}]]$
D0251∗ $[\mathrm{a,b,c}] := [\mathrm{a} : [\mathrm{b,c}]]$
D0252∗ $[\mathrm{a,b,c,d}] := [\mathrm{a} : [\mathrm{b,c,d}]]$

Da die Schemata-Notation nicht formalisiert wurde, wird deren deren Verwendung sowohl für Definitionen als auch für Theoreme vermieden. Die benötigen Instanzen werden vollständig ausgeschrieben. Da wir nur wenige Instanzen tatsächlich benötigen, ist der Aufwand nicht allzu groß.

B0253

Es gilt $[4,6,3,2] = [4 : [6 : [3 : [2 : []]]]] = \{(0,4), (1,6), (2,3), (3,2)\}$, $[4,6,3,2] \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}([4,6,3,2]) = 4$, $[4,6,3,2] \in \mathbb{N}^4$, $\mathcal{I}([4,6,3,2]) = \{0,1,2,3\}$, $\mathcal{A}([4,6,3,2]) = \{2,3,4,6\}$.

Direkt aus den Definitionen folgt:

S0254
VA0255 $\mathrm{w} \in \mathbb{A}^*$
T0256 $\mathcal{I}(\mathrm{w}) = \emptyset \Rightarrow \mathrm{w} = []$
T0257 $\mathcal{A}(\mathrm{w}) = \emptyset \Rightarrow \mathrm{w} = []$
T0258 $\mathcal{L}(\mathrm{w}) = 0 \Rightarrow \mathrm{w} = []$
T0259 $|\mathcal{A}(\mathrm{w})| \leq \mathcal{L}(\mathrm{w})$

Für den Wortkonstruktor können wir die folgenden Typaussagen ableiten:

S0260
VA0261 $\mathrm{X} \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$
T0262∗ $\forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{X}, \mathrm{w} \in \mathrm{X}^* \bullet [\mathrm{x} : \mathrm{w}] \in \mathrm{X}^*$
T0263 $\forall\, \mathrm{x,w} \bullet [\mathrm{x} : \mathrm{w}] \in \mathrm{X}^* \Rightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{X}, \mathrm{w} \in \mathrm{X}^*$

Hieraus ergeben sich Typaussagen für konstruierte Worte:

S0264
VA0265 $\mathrm{X} \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$, $\mathrm{a} \in \mathrm{X}$, $\mathrm{b} \in \mathrm{X}$, $\mathrm{c} \in \mathrm{X}$, $\mathrm{d} \in \mathrm{X}$
T0266∗ $[] \in \mathrm{X}^*$
T0267∗ $[\mathrm{a}] \in \mathrm{X}^*$

T0268∗ $[a,b] \in X^*$
T0269∗ $[a,b,c] \in X^*$
T0270∗ $[a,b,c,d] \in X^*$

S0271
VA0272 $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$
T0273∗ $[a] \in X^* \Rightarrow a \in X$
T0274∗ $[a,b] \in X^* \Rightarrow a \in X \wedge b \in X$
T0275∗ $[a,b,c] \in X^* \Rightarrow a \in X \wedge b \in X \wedge c \in X$
T0276∗ $[a,b,c,d] \in X^* \Rightarrow a \in X \wedge b \in X \wedge c \in X \wedge d \in X$

Jedes Wort ist schon das leere Wort, oder es ist aufspaltbar in ein Kopfelement und ein Restwort.

S0277
VA0278 $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$
T0279 $\forall\, w \in X^* \bullet w = [] \vee \exists\, x \in X,\, u \in X^* \bullet w = [x : u]$

Strukturelle (induktive) Gleichheit von Wörtern ist identisch mit der extensionalen Gleichheit der Mengenlehre. Wir benötigen also kein spezielles Gleichheitsprädikat für Wörter.

S0280
VA0281 $x \in \mathbb{A},\, y \in \mathbb{A},\, u \in \mathbb{A}^*,\, v \in \mathbb{A}^*,\, w \in \mathbb{A}^*$
T0282 $[] \neq [x : w]$
T0283 $[x : u] = [y : v] \Leftrightarrow x = y \wedge u = v$

S0284
VA0285 $a \in \mathbb{A},\, b \in \mathbb{A},\, c \in \mathbb{A},\, a' \in \mathbb{A},\, b' \in \mathbb{A},\, c' \in \mathbb{A}$
T0286 $[a] = [a'] \Leftrightarrow a = a'$
T0287 $[a,b] = [a',b'] \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$
T0288 $[a,b,c] = [a',b',c'] \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b' \wedge c = c'$

Eine häufig verwendete Äquivalenzrelation ist die Identität auf einer Menge von Wörtern.

S0289
VA0290 $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$
T0291∗ $\mathcal{ID}(X^*) \in \mathcal{BR}(X^*)$
T0292 $\mathcal{ID}(X^*)$ ist reflexiv
T0293 $\mathcal{ID}(X^*)$ ist symmetrisch
T0294 $\mathcal{ID}(X^*)$ ist transitiv
T0295 $\mathcal{ID}(X^*)$ ist eine Äquivalenzrelation

Einfache Beziehungen zwischen der Wortlänge und der Indexmenge folgen direkt aus den Definitionen.

S0296
VA0297 $w \in \mathbb{A}^*$
T0298 $\forall\, i \in \mathbb{N} \bullet i \in \mathcal{I}(w) \Leftrightarrow i < \mathcal{L}(w)$
T0299 $\mathcal{I}(w) = [0 \ldots \mathcal{L}(w))$
T0300 $\forall\, j \in \mathcal{I}(w),\, k \in \mathbb{N} \bullet k \leq j \Rightarrow k \in \mathcal{I}(w)$

Aus der Definition der Wortlänge ergibt sich auch eine induktive Formulierung.

S0301
VA0302 $x \in \mathbb{A},\, w \in \mathbb{A}^*$
T0303 $\mathcal{L}([]) = 0$
T0304 $\mathcal{L}([x : w]) = \mathcal{L}(w) + 1$

Hiermit lassen sich leicht die Wortlängen und damit auch die Indexmengen für mit dem Wortkonstruktor erzeugte Worte ableiten.

S0305

VA0306 $a \in \mathbb{A}$, $b \in \mathbb{A}$, $c \in \mathbb{A}$, $d \in \mathbb{A}$
T0307 $\mathcal{L}([a]) = 1$
T0308 $\mathcal{L}([a,b]) = 2$
T0309 $\mathcal{L}([a,b,c]) = 3$
T0310 $\mathcal{L}([a,b,c,d]) = 4$

S0311

VA0312 $a \in \mathbb{A}$, $b \in \mathbb{A}$, $c \in \mathbb{A}$
T0313 $\mathcal{I}([]) = \emptyset$
T0314 $\mathcal{I}([a]) = \{0\}$
T0315 $\mathcal{I}([a,b]) = \{0,1\}$
T0316 $\mathcal{I}([a,b,c]) = \{0,1,2\}$

Für Wörter auf einer Menge lassen sich folgende Typbeziehungen zum Alphabet aufstellen.

S0317

T0318 $\forall\, w \in \mathbb{A}^* \bullet w \in \mathcal{A}(w)^*$
T0319∗ $\forall\, X \in \mathcal{P}(\mathbb{A}),\ w \in X^* \bullet \mathcal{A}(w) \subseteq X$
T0320 $\forall\, X \in \mathcal{P}(\mathbb{A}),\ w \in \mathbb{A}^* \bullet \mathcal{A}(w) \subseteq X \Rightarrow w \in X^*$

Das Alphabet ist auch induktiv beschreibbar.

S0321

VA0322 $x \in \mathbb{A}$, $w \in \mathbb{A}^*$
T0323 $\mathcal{A}([]) = \emptyset$
T0324 $\mathcal{A}([x : w]) = \{x\} \cup \mathcal{A}(w)$

Hieraus folgt:

S0325

VA0326 $a \in \mathbb{A}$, $b \in \mathbb{A}$, $c \in \mathbb{A}$, $d \in \mathbb{A}$
T0327 $\mathcal{A}([a]) = \{a\}$
T0328 $\mathcal{A}([a,b]) = \{a,b\}$
T0329 $\mathcal{A}([a,b,c]) = \{a,b,c\}$
T0330 $\mathcal{A}([a,b,c,d]) = \{a,b,c,d\}$

3.1 Indizierung

Die Indizierung, d.h. das Extrahieren eines Elements an einer bestimmten Position im Wort, wird ohne Rückgriff auf die bekannte Repräsentation definiert, sondern rekursiv mit Hilfe des Wortkonstruktors.

S0331

M0332∗ $w_n := (\square_\square)\ (w,n)$
D0333 $F := \lambda\ (\square_\square) \in \mathbb{A}^* \times \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{A} \bullet$
$\lambda\ ([x : t],n) \in \mathbb{A}^* \times \mathbb{N} \bullet$
$\textsf{FALLS}\ n = 0\ \textsf{DANN}\ x\ \textsf{SONST}\ t_{n\,-\,1}$
D0334 $(\square_\square) :=$ der kleinste Fixpunkt von F
T0335∗ $(\square_\square) \in (\mathbb{A}^* \times \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{A})$

Hierzu einige Bemerkungen, die analog auch für die weiteren rekursiven Definitionen gelten: 0332 definiert eine rein textuelle Abkürzung, die auch in 0333 verwendet wird. 0333 definiert ein Funktional, das als Lambda-Ausdruck auf jeden Fall definiert ist. 0334 definiert die eigentlich interessierende Funktion als kleinsten Fixpunkt dieses Funktionals. Daß dieser Fixpunkt existiert und eindeutig ist, ist beweispflichtig, und wird in Theorem 0335 behauptet, wobei noch eine zusätzliche Typaussage getroffen wird. Für den Beweis wird man das Knaster-Tarski-Fixpunkt-Theorem verwenden, wobei die Monotonie des Funktionals F zu zeigen bleibt.

B0336

Es gilt $[5{,}3{,}9]_0 = 5$, $[5{,}3{,}9]_1 = 3$, $[5{,}3{,}9]_2 = 9$, $\neg\downarrow([5{,}3{,}9]_3)$.

Die oben definierte Funktion hat die gewünschten Eigenschaften:

S0337

VA0338	$x \in \mathbb{A}$, $w \in \mathbb{A}^*$, $n \in \mathbb{N}$
T0339	$[]_n \cong \perp$
T0340	$[x : w]_0 = x$
T0341	$[x : w]_{n+1} \cong w_n$

Daraus folgt sofort:

S0342

VA0343	$a \in \mathbb{A}$, $b \in \mathbb{A}$
T0344	$[a]_0 = a$
T0345	$[a,b]_0 = a$
T0346	$[a,b]_1 = b$

Als Typaussagen ergeben sich für die Indizierungsfunktion:

S0347

VA0348	$w \in \mathbb{A}^*$, $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$
T0349	$\forall\, i \bullet \downarrow(w_i) \Rightarrow w_i \in \mathcal{A}(w)$
T0350	$\forall\, i \in \mathcal{I}(w) \bullet w_i \in \mathcal{A}(w)$
T0351	$\forall\, i \in \mathbb{N} \bullet i < \mathcal{L}(w) \Rightarrow w_i \in \mathcal{A}(w)$
T0352*	$\forall\, w \in X^*, i \in \mathcal{I}(w) \bullet w_i \in X$
T0353	$\forall\, w \in X^*, i \in \mathbb{N} \bullet i < \mathcal{L}(w) \Rightarrow w_i \in X$

Ein Element ist im Alphabet eines Wortes gdw. es einen Index besitzt.

S0354

VA0355	$w \in \mathbb{A}^*$
T0356	$\forall\, x \bullet x \in \mathcal{A}(w) \Leftrightarrow \exists\, i \in \mathcal{I}(w) \bullet w_i = x$

Die Gleichheit von Wörtern läßt sich auch mit Hilfe der Indizes und der Indizierungsfunktion charakterisieren.

S0357

VA0358	$u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$, $w \in \mathbb{A}^*$
T0359	$u = v \Leftrightarrow \mathcal{I}(u) = \mathcal{I}(v) \wedge \forall\, i \in \mathcal{I}(u) \bullet u_i = v_i$

Weiterhin gelten die trivialen aber immer wieder benötigten Theoreme.

S0360

VA0361	$u \in \mathbb{A}^*$

T0362 $\mathcal{L}(u) = 0 \Rightarrow u = []$
T0363 $\mathcal{L}(u) = 1 \Rightarrow u = [u_0]$
T0364 $\mathcal{L}(u) = 2 \Rightarrow u = [u_0,\ u_1]$
T0365 $\mathcal{L}(u) = 3 \Rightarrow u = [u_0,\ u_1,\ u_2]$
T0366 $\mathcal{L}(u) = 1 \Rightarrow \exists\ a \in \mathbb{A} \bullet u = [a]$
T0367 $\mathcal{L}(u) = 2 \Rightarrow \exists\ a \in \mathbb{A},\ b \in \mathbb{A} \bullet u = [a,b]$
T0368 $\mathcal{L}(u) = 3 \Rightarrow \exists\ a \in \mathbb{A},\ b \in \mathbb{A},\ c \in \mathbb{A} \bullet u = [a,b,c]$
T0369 $\mathcal{L}(u) \leq 1 \land \mathcal{L}(v) \leq 1 \land \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v) \Rightarrow u = v$

Wir zeichnen nun bestimmte Wörter als einfach aus, und zwar solche in denen verschiedene Indizes verschiedene Elemente liefern. Nahezu alle Wörter, mit denen wir uns später beschäftigen, werden von dieser Art sein.

S0370
VA0371 $u \in \mathbb{A}^*,\ v \in \mathbb{A}^*$
D0372 u ist einfach $:\Leftrightarrow \forall\ i \in \mathcal{I}(u),\ j \in \mathcal{I}(u) \bullet i \neq j \Rightarrow u_i \neq u_j$
T0373 u ist einfach $:\Leftrightarrow |\mathcal{A}(u)| = \mathcal{L}(u)$
T0374 $\mathcal{L}(u) \leq 1 \Rightarrow$ u ist einfach
VA0375 $a \in \mathbb{A},\ b \in \mathbb{A},\ c \in \mathbb{A}$
T0376 [] ist einfach
T0377 [a] ist einfach
T0378 [a,b] ist einfach $\Leftrightarrow a \neq b$
T0379 [a,b,c] ist einfach $\Leftrightarrow a \neq b \land b \neq c \land a \neq c$

B0380

Es gilt: [1,3,6,4] ist einfach, [2] ist einfach, [] ist einfach, [1,4,3,5,3] ist nicht einfach.

Um die Anzahl der Vorkommen eines Elementes in einem Wort festzustellen, führen wir noch die folgende Notation ein, mit der wir auch die Einfachheit charakterisieren können.

S0381
VA0382 $u \in \mathbb{A}^*,\ x \in \mathbb{A}$
D0383 $\text{OCC } x\ u := |\{i \in \mathcal{I}(u) \bullet u_i = x\}|$
T0384$*$ $(\text{OCC } x\ u) \in \mathbb{N}$
T0385 $x \in \mathcal{A}(u) \Leftrightarrow 1 \leq (\text{OCC } x\ u)$
T0386 u ist einfach $\Leftrightarrow \forall\ x \in \mathcal{A}(u) \bullet (\text{OCC } x\ u) = 1$

B0387

Es gilt (OCC 2 [1,3,4,2,3,2,4,2]) = 3, (OCC 1 [2,3,4]) = 0.

Eine binäre Relation über Wörtern ist konservativ gdw. sie die Anzahl der Vorkommen jedes einzelnen Elements erhält. Dies bedeutet natürlich auch, daß Alphabet, Länge und die Eigenschaft der Einfachheit erhalten bleiben.

S0388
VA0389 $E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$
D0390 E ist konservativ $:\Leftrightarrow \forall\ u,v \bullet (u,v) \in E \Rightarrow \forall\ x \in \mathbb{A} \bullet (\text{OCC } x\ u) = (\text{OCC } x\ v)$
T0391 $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*)$ ist konservativ
A0392 E ist konservativ
T0393 $(u,v) \in E \Rightarrow \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v)$
T0394 $(u,v) \in E \Rightarrow \mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(v)$
T0395 $(u,v) \in E \Rightarrow$ (u ist einfach $\Leftrightarrow$ v ist einfach)

T0396 $\forall$ x $\in \mathbb{A} \bullet$ ([x],[x,x]) $\notin$ E

B0397

Sei E = {([1,2,3,4], [1,3,2,4]), ([1,1,2,3], [2,1,1,3])}. Es gilt E $\in \mathcal{BR}(\mathbb{N}^*)$. E ist konservativ.

3.2 Verkettung (Katenation)

Wir definieren nun rekursiv die Verkettungsfunktion, die zwei Worte in der Reihenfolge der Argumente aneinanderhängt.

S0398

M0399∗ $u * v := (*)\ (u,v)$

D0400 $F := \lambda\ (*) \in \mathbb{A}^* \times \mathbb{A}^* \rightsquigarrow \mathbb{A}^* \bullet$
$\lambda\ (u,v) \in \mathbb{A}^* \times \mathbb{A}^* \bullet$
FALLS $u = [] \bullet v$;
FÜR $u = [x : w] \bullet [x : w * v]$

D0401 $(*)$:= der kleinste Fixpunkt von F

T0402∗ $(*) \in (\ \mathbb{A}^* \times \mathbb{A}^* \rightarrow \mathbb{A}^*\ )$

Die so definierte Funktion besitzt die gewünschten Eigenschaften:

S0403

VA0404 $u \in \mathbb{A}^*,\ v \in \mathbb{A}^*$

T0405 $[] * v = v$

T0406 $[x : u] * v = [x : u * v]$

B0407

Es gilt [1,2,3] ∗ [4,5] = [1,2,3,4,5], [1] ∗ [2] = [1,2], [1,2,3,4] ∗ [] = [1,2,3,4].

Weitere nützliche Eigenschaften der Verkettung sind im folgenden aufgelistet.

S0408

VA0409 $x \in \mathbb{A},\ u \in \mathbb{A}^*,\ v \in \mathbb{A}^*,\ w \in \mathbb{A}^*$

T0410 $[x : u] = [x] * u$

T0411 $u * [] = u$

T0412∗ $(u * v) * w = u * (v * w)$

T0413 $\mathcal{L}(u * v) = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v)$

T0414 $\mathcal{A}(u * v) = \mathcal{A}(u) \cup \mathcal{A}(v)$

T0415 $\forall\ i \in \mathbb{N} \bullet i < \mathcal{L}(u) \Rightarrow (u * v)_i = u_i$

T0416 $\forall\ i \in \mathcal{I}(u * v) \bullet \mathcal{L}(u) \leq i \Rightarrow (u * v)_i = v_{i\ -\ \mathcal{L}(u)}$

T0417 $([x] * u)_0 = x$

T0418 $(u * [x])_{\mathcal{L}(u)} = x$

T0419 u ist einfach $\wedge$ v ist einfach $\wedge\ \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v) = \emptyset \Rightarrow (u * v)$ ist einfach

3.3 Spiegelung

Die Spiegelung eines Wortes liefert ein neues Wort, das die ursprünglichen Elemente in umgekehrter Reihenfolge enthält. Wir verwenden wieder eine rekursive Definition.

S0420

D0421 $F := \lambda\ \mathrm{REV} \in \mathbb{A}^* \rightsquigarrow \mathbb{A}^* \bullet$
$\lambda\ w \in \mathbb{A}^* \bullet$
$\mathsf{FALLS}\ w = [] \bullet []\ ;$
$\mathsf{FÜR}\ w = [x : u] \bullet (\mathrm{REV}\ u) * [x]$

D0422 REV := der kleinste Fixpunkt von (F)

T0423∗ $\mathrm{REV} \in (\mathbb{A}^* \to \mathbb{A}^*)$

Die gewünschten Eigenschaften sind ableitbar:

S0424

VA0425 $x \in \mathbb{A},\ w \in \mathbb{A}^*$

T0426 $(\mathrm{REV}\ []) = []$

T0427 $(\mathrm{REV}\ [x : w]) = (\mathrm{REV}\ w) * [x]$

B0428

Es gilt (REV [0,1,2,3]) = [3,2,1,0], (REV [0,1,0]) = [0,1,0], (REV [5]) = [5].

Eine Spiegelung erhält Alphabet, Länge und Einfachheit der Wörter. Zweimalige Spiegelung verändert das Wort nicht.

S0429

VA0430 $u \in \mathbb{A}^*$

T0431 $\mathcal{A}(\mathrm{REV}\ u) = \mathcal{A}(u)$

T0432 $\mathcal{L}(\mathrm{REV}\ u) = \mathcal{L}(u)$

T0433 u ist einfach $\Rightarrow$ (REV u) ist einfach

T0434 $(\mathrm{REV}\ (\mathrm{REV}\ u)) = u$

Einfache Wörter mit mindestens zwei Elementen verändern sich unter Spiegelung. Leere und einstellige Wörter bleiben immer unverändert.

S0435

VA0436 $a \in \mathbb{A},\ b \in \mathbb{A},\ c \in \mathbb{A},\ u \in \mathbb{A}^*$

T0437 $(\mathrm{REV}\ [a]) = [a]$

T0438 $(\mathrm{REV}\ [a,b]) = [b,a]$

T0439 $(\mathrm{REV}\ [a,b,c]) = [c,b,a]$

T0440 u ist einfach $\wedge\ 2 \leq \mathcal{L}(u) \Rightarrow (\mathrm{REV}\ u) \neq u$

Eine binäre Relation auf Wörtern (wie z.B. die Identität) ist spiegelinvariant gdw. für jedes Paar von Wörtern auch ihre gespiegelten Versionen in der Relation stehen.

S0441

VA0442 $E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$

D0443 E ist spiegelinvariant $:\Leftrightarrow \forall\ u,v \bullet (u,v) \in E \Rightarrow ((\mathrm{REV}\ u), (\mathrm{REV}\ v)) \in E$

T0444 $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*)$ ist spiegelinvariant

3.4 Spiegelungsäquivalenz

Auf natürliche Weise läßt sich mit der Spiegelungsfunktion eine binäre Relation ($\overset{\text{rev}}{\equiv}$) auf Wörtern definieren: Zwei Elemente stehen in dieser Relation gdw. sie gleich sind oder das eine eine Spiegelung des anderen ist. Wir bezeichnen ($\overset{\text{rev}}{\equiv}$) als Relation der Spiegelungsäquivalenz.

S0445

VA0446	$u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$
D0447	$(\overset{\text{rev}}{\equiv}) := \{(u,v) \in \mathbb{A}^* \times \mathbb{A}^* \bullet u = v \vee u = (\text{REV } v)\}$
T0448∗	$(\overset{\text{rev}}{\equiv}) \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$
D0449∗	$u \overset{\text{rev}}{\equiv} v :\Leftrightarrow (u,v) \in (\overset{\text{rev}}{\equiv})$

B0450

Es gilt $[1,2,3] \overset{\text{rev}}{\equiv} [3,2,1]$, $\neg\, [1,2] \overset{\text{rev}}{\equiv} [1,2]$, $[1] \overset{\text{rev}}{\equiv} [1]$, $[] \overset{\text{rev}}{\equiv} []$, $[1,0,1] \overset{\text{rev}}{\equiv} [1,0,1]$, $[1,2,3] \overset{\text{rev}}{\equiv} [1,2,3]$.

Es ist leicht zu prüfen, daß es sich bei dieser Relation auf Wörtern um eine Äquivalenzrelation handelt, die auch noch konservativ ist, d.h. die Anzahl der Vorkommen von Elementen in Wörtern erhält. Somit bleiben auch Alphabet, Länge und Einfachheit erhalten.

S0451

VA0452	$n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$, $w \in \mathbb{A}^*$
T0453	$u \overset{\text{rev}}{\equiv} u$
T0454	$u \overset{\text{rev}}{\equiv} (\text{REV } u)$
T0455	$u \overset{\text{rev}}{\equiv} v \wedge v \overset{\text{rev}}{\equiv} w \Rightarrow u \overset{\text{rev}}{\equiv} w$
T0456	$u \overset{\text{rev}}{\equiv} v \Rightarrow v \overset{\text{rev}}{\equiv} u$
T0457	$(\overset{\text{rev}}{\equiv})$ ist eine Äquivalenzrelation
T0458	$(\overset{\text{rev}}{\equiv})$ ist konservativ
T0459	$u \overset{\text{rev}}{\equiv} v \Rightarrow \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v)$
T0460	$u \overset{\text{rev}}{\equiv} v \Rightarrow \mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(v)$
T0461	u ist einfach $\wedge\ u \overset{\text{rev}}{\equiv} v \Rightarrow$ v ist einfach

3.5 Rotation

Mit Rotation bezeichnen wir das zyklische Vertauschen von Elementen eines Wortes. Wie man schon vermuten kann, wird diese Operation extensiv bei der Definition der zyklischen Ordnungen verwendet.

Wir definieren zunächst die einschrittige Linksrotation und analog die Rechtsrotation:

S0462

D0463	$\text{ROL} := \lambda\, w \in \mathbb{A}^* \bullet$
	FALLS $w = [] \bullet []$;
	FÜR $w = [x] * u \bullet u * [x]$
T0464∗	$\text{ROL} \in (\mathbb{A}^* \to \mathbb{A}^*)$
D0465	$\text{ROR} := \lambda\, w \in \mathbb{A}^* \bullet$
	FALLS $w = [] \bullet []$;
	FÜR $w = u * [x] \bullet [x] * u$
T0466∗	$\text{ROR} \in (\mathbb{A}^* \to \mathbb{A}^*)$

Hieraus folgen direkt die Eigenschaften:

S0467

VA0468 $x \in \mathbb{A}$, $u \in \mathbb{A}^*$
T0469 ROL [] = []
T0470 ROL $[x] * u = u * [x]$
T0471 ROR [] = []
T0472 ROR $u * [x] = [x] * u$

B0473

Es gilt ROL [1,2,3] = [2,3,1], ROR [1,2,3] = [3,1,2]. ROL [1] = [1], ROR [2] = [2], ROL [1,2] = [2,1] = ROR [2,1].

Für die mehrschrittige Rotation iterieren wir die beiden Funktionen ROL und ROR. Die Zahl der Iterationen wird durch einen zusätzlichen Parameter aus $\mathbb{Z}$ bestimmt, wobei eine positive Zahl Rechtsrotation und eine negative Zahl Linksrotation bezeichnet.

S0474
D0475 $(\gg) := \lambda\ (w,i) \in \mathbb{A}^* \times \mathbb{Z} \bullet$
FALLS $i = 0 \bullet w$;
FALLS $i > 0 \bullet \mathrm{ROR}^i\ w$;
FALLS $i < 0 \bullet \mathrm{ROL}^{-i}\ w$
T0476∗ $(\gg) \in (\ \mathbb{A}^* \times \mathbb{Z} \to \mathbb{A}^*\ )$
M0477∗ $w \gg i := (\gg)\ (w,i)$

B0478

Es gilt ([1,2,3,4] $\gg$ 0) = [1,2,3,4], ([1,2,3,4] $\gg$ 1) = [4,1,2,3] = ([1,2,3,4] $\gg -$ 3), ([1,2,3,4] $\gg$ 2) = [3,4,1,2] = ([1,2,3,4] $\gg -$ 2), ([1,2,3,4] $\gg$ 3) = [2,3,4,1] = ([1,2,3,4] $\gg -$ 1), ([1,2,3,4] $\gg$ 4) = [1,2,3,4] = ([1,2,3,4] $\gg -$ 4).

Die folgenden Eigenschaften der so definierten Rotationsfunktion betreffen wiederholte Rotation, Verschiebung der Indizierung sowie Erhaltung der Indexmenge, der Länge, des Alphabets und der Einfachheit. Ferner kann Spiegelung von Wörtern bis zur Länge 2 durch einfache Rotation ausgedrückt werden.

S0479
VA0480 $u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$
T0481 $\forall\ i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z} \bullet (u \gg i) \gg j = u \gg (i + j)$
T0482 $\forall\ k \in \mathbb{Z} \bullet u \gg (k * \mathcal{L}(u)) = u$
T0483 $\forall\ i \in \mathcal{I}(u) \bullet u_i = (u \gg - i)_0$
T0484 $\forall\ i \in \mathbb{Z} \bullet \mathcal{I}(u \gg i) = \mathcal{I}(u)$
T0485 $\forall\ i \in \mathbb{Z} \bullet \mathcal{L}(u \gg i) = \mathcal{L}(u)$
T0486 $\forall\ i \in \mathbb{Z} \bullet \mathcal{A}(u \gg i) = \mathcal{A}(u)$
T0487 u ist einfach $\Rightarrow \forall\ i \in \mathbb{Z} \bullet (u \gg i)$ ist einfach
T0488 $\mathcal{L}(u) < 3 \Rightarrow (\mathrm{REV}\ u) = (u \gg 1)$

3.6 Rotationsäquivalenz

Ebenso wie bei der Spiegelung läßt sich auf natürliche Weise eine binäre Relation ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) auf Wörtern mit Hilfe der Rotationsfunktion definieren: Zwei Wörter sind in dieser Relation gdw. eines durch eine beliebige (evtl. mehrschrittige) Rotation aus dem anderen hervorgeht. ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) wird als Relation der Rotationsäquivalenz bezeichnet.

S0489

VA0490	$u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$, $i \in \mathbb{Z}$
D0491	$(\overset{\text{rot}}{\equiv}) := \{(u,v) \in \mathbb{A}^* \times \mathbb{A}^* \bullet \exists\, i \in \mathbb{Z} \bullet u = v \gg i\}$
T0492∗	$(\overset{\text{rot}}{\equiv}) \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$
M0493∗	$u \overset{\text{rot}}{\equiv} v :\Leftrightarrow (u,v) \in (\overset{\text{rot}}{\equiv})$

B0494

Es gilt $[1,2,3] \overset{\text{rot}}{\equiv} [1,2,3]$, $[1,2,3] \overset{\text{rot}}{\equiv} [2,3,1]$, $[1,2,3] \overset{\text{rot}}{\equiv} [3,1,2]$, $[1,2] \overset{\text{rot}}{\equiv} [2,1]$, $\neg\, [1,2,3] \overset{\text{rot}}{\equiv} [3,2,1]$.

Intuitiv ist sofort klar, daß die folgenden Beziehungen gelten.

S0495

VA0496	$a \in \mathbb{A}$, $b \in \mathbb{A}$, $c \in \mathbb{A}$, $d \in \mathbb{A}$
T0497	$[] \overset{\text{rot}}{\equiv} []$
T0498	$[a] \overset{\text{rot}}{\equiv} [a]$
T0499	$[a,b] \overset{\text{rot}}{\equiv} [b,a]$
T0500	$[a,b,c] \overset{\text{rot}}{\equiv} [b,c,a]$
T0501	$[a,b,c] \overset{\text{rot}}{\equiv} [c,a,b]$
T0502	$[a,b,c,d] \overset{\text{rot}}{\equiv} [b,c,d,a]$
T0503	$[a,b,c,d] \overset{\text{rot}}{\equiv} [c,d,a,b]$
A0504	$a \neq b \wedge b \neq c \wedge a \neq c$
T0505	$\neg\, [a,b,c] \overset{\text{rot}}{\equiv} [c,b,a]$
T0506	$\neg\, [a,b,c] \overset{\text{rot}}{\equiv} [a,c,b]$

Da die Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist handelt es sich um eine Äquivalenzrelation, die sogar noch konservativ ist, d.h. Vorkommen von Elementen, also auch Alphabet, Länge und Einfachheit, erhält.

S0507

VA0508	$u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$, $w \in \mathbb{A}^*$, $i \in \mathbb{Z}$
T0509	$u \overset{\text{rot}}{\equiv} u$
T0510	$\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*) \subseteq (\overset{\text{rot}}{\equiv})$
T0511	$(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ ist reflexiv
T0512	$u \overset{\text{rot}}{\equiv} (u \gg i)$
T0513	$u \overset{\text{rot}}{\equiv} v \Rightarrow v \overset{\text{rot}}{\equiv} u$
T0514	$(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ ist symmetrisch
T0515	$u \overset{\text{rot}}{\equiv} v \wedge v \overset{\text{rot}}{\equiv} w \Rightarrow u \overset{\text{rot}}{\equiv} w$
T0516	$(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ ist transitiv
T0517	$(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ ist eine Äquivalenzrelation
T0518	$(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ ist konservativ
T0519	$u \overset{\text{rot}}{\equiv} v \Rightarrow \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v)$
T0520	$u \overset{\text{rot}}{\equiv} v \Rightarrow \mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(v)$
T0521	u ist einfach $\wedge\ u \overset{\text{rot}}{\equiv} v \Rightarrow$ v ist einfach

Ferner ist die Rotationsäquivalenz spiegelinvariant. In Ergänzung zu Theorem 0488 kann die Spiegelung von einfachen Wörtern mit mindestens 3 Elementen nicht mehr durch Rotation ausgedrückt werden. Zwei Wörter der Länge zwei mit gleichem Alphabet sind immer rotationsäquivalent.

S0522

VA0523∗	u in $\mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$
T0524	$u \overset{\text{rot}}{\equiv} v \Rightarrow (\text{REV } u) \overset{\text{rot}}{\equiv} (\text{REV } v)$
T0525	$(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ ist spiegelinvariant

T0526 u ist einfach $\wedge$ $3 \leq \mathcal{L}(\mathrm{u}) \Rightarrow \neg\, \mathrm{u} \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} (\mathrm{REV\ u})$
T0527 $\mathcal{L}(\mathrm{u}) = 2 \wedge \mathcal{L}(\mathrm{v}) = 2 \wedge \mathcal{A}(\mathrm{u}) = \mathcal{A}(\mathrm{v}) \Rightarrow \mathrm{u} \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} \mathrm{v}$

Man vergleiche Theorem 0369 mit 0527. Einstellige Wörter mit gleichem Alphabet sind bzgl. Identität ununterscheidbar. Zweistellige Wörter mit gleichem Alphabet sind bzgl. Rotationsäquivalenz ununterscheidbar. Erhöhen wir die Wortlänge in beiden Fällen um eins, so gibt es unterscheidbare Wörter (Theorem 0287 bzw. 0505).

Zur Prüfung der Rotationsäquivalenz für ein Paar von Wörtern kann folgendes Theorem verwendet werden, in dem nur eine endliche Zahl von Rotationen durchgeführt werden muß.

S0528
VA0529 $\mathrm{u} \in \mathbb{A}^*, \mathrm{v} \in \mathbb{A}^*$
T0530 $\mathrm{u} \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} \mathrm{v} \Leftrightarrow \exists\, \mathrm{i} \in \mathcal{I}(\mathrm{v}) \bullet (\mathrm{u} \gg \mathrm{i}) = \mathrm{v}$

Zwei einfache, rotationsäquivalente Wörter, die an mindestens einer gemeinsamen Stelle die gleichen Elemente haben, sind identisch.

S0531
VA0532 $\mathrm{u} \in \mathbb{A}^*, \mathrm{v} \in \mathbb{A}^*, \mathrm{i} \in \mathbb{N}$
T0533 u ist einfach $\wedge$ v ist einfach $\wedge\ \mathrm{u} \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} \mathrm{v} \wedge \mathrm{u_i} = \mathrm{v_i} \Rightarrow \mathrm{u} = \mathrm{v}$

Es folgen nun noch zwei spezielle Theoreme, die unter geeigneten Bedingungen Aussagen über die Form von zweistelligen und dreistelligen Wörtern liefern.

S0534
VA0535 $\mathrm{a} \in \mathbb{A}, \mathrm{b} \in \mathbb{A}, \mathrm{c} \in \mathbb{A}, \mathrm{d} \in \mathbb{A}, \mathrm{w} \in \mathbb{A}^*$
T0536 $\mathrm{w} \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} [] \Leftrightarrow \mathrm{w} = []$
T0537 $\mathrm{w} \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} [\mathrm{a,b}] \Leftrightarrow \mathrm{w} = [\mathrm{a,b}] \vee \mathrm{w} = [\mathrm{b,a}]$
T0538 $\mathrm{w} \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} [\mathrm{a,b,c}] \Leftrightarrow \mathrm{w} = [\mathrm{a,b,c}] \vee \mathrm{w} = [\mathrm{b,c,a}] \vee \mathrm{w} = [\mathrm{c,a,b}]$
T0539 w ist einfach $\wedge\ \mathcal{L}(\mathrm{w}) = 3 \wedge \mathcal{A}(\mathrm{w}) = \{\mathrm{a,b,c}\} \Rightarrow \mathrm{w} \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} [\mathrm{a,b,c}] \vee \mathrm{w} \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} [\mathrm{c,b,a}]$

3.7 Teilwörter

Ebenso wichtig für den im dieser Arbeit vorgeschlagenen Aufbau der zyklischen Ordnungen wie die Rotation ist die Bildung von Teilwörtern von einem Wort. Wir bezeichnen ein Wort u als (verteiltes) Teilwort eines Wortes v, wenn sich alle Elemente von u in der gleichen Reihenfolge in dem Wort v wiederfinden. v kann noch weitere Elemente besitzen (in diesen Fall sprechen wir von einem echten Teilwort), u und v können jedoch auch gleich sein.

Die folgende Definition formalisiert diese Vorstellung. Die Relation ($\sqsubseteq$) ist danach die kleinste aller Relationen, die in der Menge unter dem $\bigcap$ stehen. Es ist klar daß diese Menge nicht leer ist (sie enthält $\mathbb{A}^* \times \mathbb{A}^*$). Somit ist ($\sqsubseteq$) definiert und sogar eine binäre Relation über Wörtern. u ist ein Teilwort von v gdw. $\mathrm{u} \sqsubseteq \mathrm{v}$ gilt.

S0540
M0541$*$ $\mathrm{u} \sqsubseteq \mathrm{v} :\Leftrightarrow (\mathrm{u,v}) \in (\sqsubseteq)$
D0542 $(\sqsubseteq) := \bigcap \{(\sqsubseteq) \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*) \bullet$
$(\forall\, \mathrm{w} \in \mathbb{A}^* \bullet [] \sqsubseteq \mathrm{w}\ \wedge$
$(\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{A}, \mathrm{y} \in \mathbb{A}, \mathrm{u} \in \mathbb{A}^*, \mathrm{v} \in \mathbb{A}^* \bullet$
$(\mathrm{x} = \mathrm{y} \wedge \mathrm{u} \sqsubseteq \mathrm{v} \Rightarrow [\mathrm{x} : \mathrm{u}] \sqsubseteq [\mathrm{y} : \mathrm{v}])\ \wedge$
$(\mathrm{x} \neq \mathrm{y} \wedge [\mathrm{x} : \mathrm{u}] \sqsubseteq \mathrm{v} \Rightarrow [\mathrm{x} : \mathrm{u}] \sqsubseteq [\mathrm{y} : \mathrm{v}])))\}$

T0543∗ $(\sqsubseteq) \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$
D0544∗ $(\sqsupseteq) := (\sqsubseteq)^{-1}$
T0545∗ $(\sqsupseteq) \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$

Die gewünschten Eigenschaften ergeben sich hieraus sofort.

S0546
VA0547 $x \in \mathbb{A}$, $y \in \mathbb{A}$, $u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$
T0548 $[] \sqsubseteq v$
T0549 $u \sqsubseteq [] \Leftrightarrow u = []$
T0550 $x = y \Rightarrow ([x : u] \sqsubseteq [y : v] \Leftrightarrow u \sqsubseteq v)$
T0551 $x \neq y \Rightarrow ([x : u] \sqsubseteq [y : v] \Leftrightarrow [x : u] \sqsubseteq y)$

B0552

Es gilt $[1,3,5] \sqsubseteq [1,2,3,4,5]$, $[1,2,3] \sqsubseteq [0,1,2,3,4]$, $[2] \sqsubseteq [1,2,3,4]$, $\neg\ [2,1] \sqsubseteq [1,2,3]$, $\neg\ [1,2,3] \sqsubseteq [1,3]$.

Konkret benötigen wir die folgenden Beziehungen:

S0553
VA0554 $a \in \mathbb{A}$, $b \in \mathbb{A}$, $c \in \mathbb{A}$, $d \in \mathbb{A}$
T0555 $[a,b] \sqsubseteq [a,b,c]$
T0556 $[b,c] \sqsubseteq [a,b,c]$
T0557 $[a,c] \sqsubseteq [a,b,c]$
T0558 $[a,c,d] \sqsubseteq [a,b,c,d]$

Die so definierte Teilwortrelation ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch. Es handelt sich demnach um eine Ordnung. Alphabet und Länge wachsen monoton mit dieser Ordnung. Spiegelung erhält die Ordnung.

S0559
VA0560 $u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$
T0561 $u \sqsubseteq u$
T0562 $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*) \subseteq (\sqsubseteq)$
T0563 $(\sqsubseteq)$ ist reflexiv
T0564 $u \sqsubseteq v \wedge v \sqsubseteq w \Rightarrow u \sqsubseteq w$
T0565 $(\sqsubseteq)$ ist transitiv
T0566 $u \sqsubseteq v \wedge v \sqsubseteq u \Rightarrow u = v$
T0567 $(\sqsubseteq)$ ist antisymmetrisch
T0568 $(\sqsubseteq)$ ist eine Ordnung
T0569 $u \sqsubseteq v \Rightarrow \mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(v)$
T0570 $u \sqsubseteq v \Rightarrow \mathcal{L}(u) \leq \mathcal{L}(v)$
T0571 $u \sqsubseteq v \wedge u \neq v \Rightarrow \mathcal{L}(u) < \mathcal{L}(v)$
T0572 $u \sqsubseteq v \Leftrightarrow (\mathrm{REV}\ u) \sqsubseteq (\mathrm{REV}\ v)$
T0573 $(\sqsubseteq)$ ist spiegelinvariant

Teilwörter von einfachen Wörtern sind wieder einfach. Sind alle zweistelligen Teilwörter eines Wortes einfach, dann ist das Wort selbst einfach.

S0574
VA0575 $u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$
T0576 v ist einfach $\wedge\ u \sqsubseteq v \Rightarrow$ u ist einfach
T0577 $(\forall\ u \in \mathbb{A}^* \bullet \mathcal{L}(u) = 2 \wedge u \sqsubseteq v \Rightarrow$ u ist einfach$) \Rightarrow$ v ist einfach

Zwei verschiedene, einfache Wörter mit gleichem Alphabet sind schon anhand ihrer zweistelligen Teilwörter unterscheidbar.

S0578

VA0579∗ $u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$

T0580 u ist einfach $\wedge$ v ist einfach $\wedge\ \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v) \wedge u \neq v \Rightarrow$
$\exists\, x,y \bullet x \neq y \wedge [x,y] \sqsubseteq u \wedge [y,x] \sqsubseteq v$

Ein-, zwei- und dreistellige Teilwörter werden häufig benötigt und haben die folgende Form.

S0581

VA0582 $u \in \mathbb{A}^*$, $i \in \mathcal{I}(u)$, $j \in \mathcal{I}(u)$, $k \in \mathcal{I}(u)$

T0583 $[u_i] \sqsubseteq u$

T0584 $i < j \Rightarrow [u_i,\ u_j] \sqsubseteq u$

T0585 $i < j \wedge j < k \Rightarrow [u_i,\ u_j,\ u_k] \sqsubseteq u$

S0586

VA0587 $u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$

T0588 $\mathcal{L}(u) = 2 \wedge u \sqsubseteq v \Rightarrow \exists\, i \in \mathcal{I}(v),\ j \in \mathcal{I}(v) \bullet i < j \wedge u = [v_i,\ v_j]$

T0589 $\mathcal{L}(u) = 3 \wedge u \sqsubseteq v \Rightarrow \exists\, i \in \mathcal{I}(v),\ j \in \mathcal{I}(v),\ k \in \mathcal{I}(v) \bullet i < j \wedge j < k \wedge u = [v_i,\ v_j,\ v_k]$

Hier ein sehr spezielles Theorem: Gegeben zwei einfache Wörter u,v in der Teilwortrelation, wobei das Teilwort u genau ein Element x weniger als v besitzt, dann entsteht v aus u durch Einfügen des Elements x.

S0590

VA0591 $u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$, $x \in \mathbb{A}$

T0592 u ist einfach $\wedge$ v ist einfach $\wedge\ u \sqsubseteq v \wedge x \notin \mathcal{A}(u) \wedge \mathcal{A}(v) = \mathcal{A}(u) \cup \{x\} \Rightarrow$
$\exists\, u' \in \mathbb{A}^*,\ u'' \in \mathbb{A}^* \bullet v = u' * [x] * u'' \wedge u = u' * u''$

Oben haben wir die Teilwortrelation induktiv definiert. Das folgende Theorem gibt eine nichtinduktive Charakterisierung mit Hilfe einer monotonen Einbettungsfunktion an. Das zweite Theorem ist nur eine einfache Abschwächung.

S0593

VA0594 $u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$

T0595 $u \sqsubseteq v \Leftrightarrow \exists\, f \in (\mathcal{I}(u) \to \mathcal{I}(v)) \bullet$
$(\forall\, i \in \mathcal{I}(u),\ j \in \mathcal{I}(u) \bullet i < j \Rightarrow f\,i < f\,j) \wedge (\forall\, i \in \mathcal{I}(u) \bullet u_i = v_{(f\,i)})$

T0596 $u \sqsubseteq v \Rightarrow \exists\, f \in (\mathcal{I}(u) \to \mathcal{I}(v)) \bullet$
$(\forall\, i \in \mathcal{I}(u),\ j \in \mathcal{I}(u) \bullet i \neq j \Rightarrow f\,i \neq f\,j) \wedge (\forall\, i \in \mathcal{I}(u) \bullet u_i = v_{(f\,i)})$

Kennen wir zwei geeignete Teilworte eines einfachen, dreistelligen Wortes, so ist das Wort eindeutig bestimmt.

S0597

VA0598 $a \in \mathbb{A}$, $b \in \mathbb{A}$, $c \in \mathbb{A}$

T0599 w ist einfach $\wedge\ \mathcal{L}(w) = 3 \wedge \mathcal{A}(w) = \{a,b,c\} \wedge [a,b] \sqsubseteq w \wedge [b,c] \sqsubseteq w \Rightarrow w = [a,b,c]$

3.8 Extraktion

Gelegentlich benötigen wir nicht nur die Extraktion eines Elements, sondern eines Teilwortes, gegeben durch die Indexmenge der zu extrahierenden Elemente. Um dies rekursiv zu definieren, verwenden wir eine Hilfsfunktion DEC I, die alle Elemente in I um eins verkleinert.

S0600

VA0601 $\mathrm{I} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$
D0602 $\mathrm{DEC\ I} := \{\mathrm{i} \in \mathbb{N} \bullet \exists\, \mathrm{j} \in \mathrm{I} \bullet \mathrm{i} = \mathrm{j} - 1\}$
M0603∗ $\mathrm{u} \lhd \mathrm{I} := (\lhd)\ (\mathrm{u,I})$
D0604 $\mathrm{F} := \lambda\ (\lhd) \in \mathbb{A}^* \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \leadsto \mathbb{A}^* \bullet$
$\quad\lambda\ (\mathrm{w,I}) \in \mathbb{A}^* \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \bullet$
$\quad\quad$ FALLS $\mathrm{w} = [\,] \bullet [\,]$;
$\quad\quad$ FÜR $\mathrm{w} = [\mathrm{x} : \mathrm{u}] \bullet$
$\quad\quad\quad$ FALLS $0 \in \mathrm{I}$ DANN $[\mathrm{x} : (\mathrm{u} \lhd \mathrm{DEC\ I})]$
$\quad\quad\quad$ SONST $(\mathrm{u} \lhd \mathrm{DEC\ I})$
D0605 $(\lhd) :=$ der kleinste Fixpunkt von F
T0606∗ $(\lhd) \in \mathbb{A}^* \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{A}^*$

Die gewünschten Eigenschaften sind wieder leicht zu prüfen:

S0607

VA0608 $\mathrm{I} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mathrm{w} \in \mathbb{A}^*,\ \mathrm{x} \in \mathbb{A}$
T0609 $[\,] \lhd \mathrm{I} = [\,]$
T0610 $0 \in \mathrm{I} \Rightarrow [\mathrm{x} : \mathrm{w}] \lhd \mathrm{I} = [\mathrm{x} : (\mathrm{u} \lhd \mathrm{DEC\ I})]$
T0611 $0 \notin \mathrm{I} \Rightarrow [\mathrm{x} : \mathrm{w}] \lhd \mathrm{I} = (\mathrm{u} \lhd \mathrm{DEC\ I})$

B0612

Es gilt $([0,1,2,3,4] \lhd \{1,2,4\}) = [1,2,4]$, $([5,3,6,4,1,2,1] \lhd \{0,2,5\}) = [5,6,2]$, $([1,1,2,2] \lhd \{0,5,6,7\}) = [1]$, $([7] \lhd \{1\}) = [\,]$.

Die leere Extraktion und die volle Extraktion sind trivial.

S0613

VA0614 $\mathrm{I} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mathrm{u} \in \mathbb{A}^*$
T0615 $(\mathrm{u} \lhd \emptyset) = [\,]$
T0616 $\mathcal{I}(\mathrm{u}) \subseteq \mathrm{I} \Rightarrow (\mathrm{u} \lhd \mathrm{I}) = \mathrm{u}$
T0617 $\mathrm{u} \lhd [0 \ldots \mathcal{L}(\mathrm{u})) = \mathrm{u}$

Folgende Aussagen über Alphabet und Länge der extrahierten Wörter sind offensichtlich.

S0618

VA0619 $\mathrm{I} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mathrm{u} \in \mathbb{A}^*$
T0620 $\forall\, \mathrm{i} \in \mathcal{I}(\mathrm{u}) \bullet \mathrm{i} \in \mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{u_i} \in \mathcal{A}(\mathrm{u} \lhd \mathrm{I})$
T0621 $\mathrm{I} \subseteq \mathcal{I}(\mathrm{u}) \Rightarrow \mathcal{L}(\mathrm{u} \lhd \mathrm{I}) = |\mathrm{I}|$

Wie schon erwähnt ist das extrahierte Wort tatsächlich ein Teilwort. Somit verkleinert sich das Alphabet oder bleibt unverändert. Ferner wird die Eigenschaft der Einfachheit nicht zerstört.

S0622

VA0623 $\mathrm{I} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mathrm{u} \in \mathbb{A}^*$
T0624 $(\mathrm{u} \lhd \mathrm{I}) \sqsubseteq \mathrm{u}$
T0625 $\mathcal{A}(\mathrm{u} \lhd \mathrm{I}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{u})$

T0626 u ist einfach $\Rightarrow$ (u $\triangleleft$ I) ist einfach

Die Extraktion einer Indexmenge [0...n) liefert einen Prefix. Wird dieser mit dem Suffix $[n \ldots \mathcal{L}(u))$ verkettet, ergibt sich wieder das ursprüngliche Wort. Ferner ist der Prefix von einem Prefix wieder ein Prefix des ursprünglichen Wortes.

S0627

VA0628 $u \in \mathbb{A}^*$

T0629 $\forall\, n \in \mathbb{N},\, j \in \mathcal{I}(u) \bullet j < n \Rightarrow (u \triangleleft [0 \ldots n))_j = u_j$

T0630 $\forall\, n \in \mathbb{N} \bullet (u \triangleleft [0 \ldots n)) * (u \triangleleft [n \ldots \mathcal{L}(u))) = u$

T0631 $\forall\, i \in \mathcal{I}(u) \bullet (u \triangleleft [i \ldots i+1)) = [u_i]$

T0632 $\forall\, n \in \mathbb{N},\, m \in \mathbb{N} \bullet n \leq m \Rightarrow (u \triangleleft [0 \ldots m)) \triangleleft [0 \ldots n) = u \triangleleft [0 \ldots n)$

3.9 Projektion

Eine weitere Möglichkeit Teilwörter von gegebenen Wörtern zu bilden ist die Projektion auf eine Menge. Hierbei werden einfach die nicht in der Menge enthaltenen Elemente des Wortes entfernt. Genau dies wird durch die folgende rekursive Definition beschrieben.

S0633

M0634∗ $u \triangleright A := (\triangleright)\ (u,A)$

D0635 $F := \lambda\ (\triangleright) \in \mathbb{A}^* \times \mathcal{P}(\mathbb{A}) \rightsquigarrow \mathbb{A}^* \bullet$
$\quad \lambda\ (w,X) \in \mathbb{A}^* \times \mathcal{P}(\mathbb{A}) \bullet$
$\quad\quad$ FALLS $w = [] \bullet []$;
$\quad\quad$ FÜR $w = [x : u] \bullet$ FALLS $x \in X$ DANN $[x : (u \triangleright X)]$ SONST $(u \triangleright X)$

D0636 $(\triangleright) :=$ der kleinste Fixpunkt von F

T0637∗ $(\triangleright) \in (\ \mathbb{A}^* \times \mathcal{P}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{A}^*\ )$

Die Projektion besitzt somit die Eigenschaften:

S0638

VA0639 $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A}),\, x \in \mathbb{A},\, w \in \mathbb{A}^*$

T0640 $([] \triangleright X) = []$

T0641 $x \in X \Rightarrow ([x : w] \triangleright X) = [x : (w \triangleright X)]$

T0642 $x \notin X \Rightarrow ([x : w] \triangleright X) = (w \triangleright X)$

B0643

Es gilt $([1,5,2,3,4,5,2] \triangleright \{2,4,5\}) = [5,2,4,5,2]$, $([1,2,3] \triangleright \{2,4,5\}) = [2]$, $([1,2,2,1] \triangleright [1,2,3]) = [1,2,2,1]$.

Hier zunächst die leere und die volle Projektion:

S0644

VA0645 $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A}),\, w \in \mathbb{A}^*$

T0646 $(w \triangleright \emptyset) = []$

T0647 $\mathcal{A}(w) \subseteq X \Rightarrow (w \triangleright X) = w$

T0648 $(w \triangleright \mathcal{A}(w)) = w$

Wiederholte Projektion läßt sich im einem Schritt ausführen:

S0649

VA0650 $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A}),\, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{A}),\, w \in \mathbb{A}^*$

T0651 $((w \triangleright X) \triangleright Y) = (w \triangleright (X \cap Y))$

T0652 $((w \rhd X) \rhd Y) = ((w \rhd Y) \rhd X)$

Wie erwähnt entsteht bei Projektion auf eine Menge tatsächlich ein Teilwort. Einfachheit bleibt also erhalten. Das Alphabet wird bei Projektion mit der Menge geschnitten. Die Zahl der Vorkommen von Elementen dieser Menge verändert sich bei Projektion nicht. Schließlich lassen sich Spiegelung und Projektion vertauschen.

S0653

VA0654 $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$, $w \in \mathbb{A}^*$

T0655 $(w \rhd X) \sqsubseteq w$

T0656 w ist einfach $\Rightarrow$ $(w \rhd X)$ ist einfach

T0657 $\mathcal{A}(w \rhd X) = \mathcal{A}(w) \cap X$

T0658 $\mathcal{A}(w \rhd X) \subseteq \mathcal{A}(w)$

T0659 $\mathcal{A}(w \rhd X) \subseteq X$

T0660 $X \subseteq \mathcal{A}(w) \Rightarrow \mathcal{A}(w \rhd X) = X$

T0661 $\forall\, x \in X \bullet (\mathrm{OCC}\ x\ w) = (\mathrm{OCC}\ x\ (w \rhd X))$

T0662 $((\mathrm{REV}\ w) \rhd X) = (\mathrm{REV}\ (w \rhd X))$

Teilwörter von einfachen Wörtern können immer durch Projektion gebildet werden.

S0663

VA0664 $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$, $w \in \mathbb{A}^*$

T0665 v ist einfach $\wedge\ u \sqsubseteq v \Rightarrow u = (v \rhd \mathcal{A}(u))$

Zur Ergänzung der rekursiven Definition der Projektion ist es nützlich auch (ähnlich wie bei der Teilwortrelation) eine nichtrekursive Charakterisierung mit Hilfe einer monotonen Einbettung anzugeben, mit der zusätzlichen Eigenschaft, das ihr Bild gerade die Indizes der zu projizierenden Elemente umfaßt. Das zweite Theorem ist wieder eine einfache Abschwächung.

S0666

VA0667 $u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$, $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$

T0668 $u = (v \rhd X) \Leftrightarrow \exists\, f \in (\mathcal{I}(u) \rightarrow \mathcal{I}(v)) \bullet$
$(\forall\, i \in \mathcal{I}(u), j \in \mathcal{I}(u) \bullet i < j \Rightarrow f\ i < f\ j) \wedge (\forall\, i \in \mathcal{I}(u) \bullet u_i = v_{(f\ i)}) \wedge$
$\mathcal{R}(f) = \{k \in \mathcal{I}(v) \bullet v_k \in X\}$

T0669 $u = (v \rhd X) \Rightarrow \exists\, f \in (\mathcal{I}(u) \rightarrow \mathcal{I}(v)) \bullet$
$(\forall\, i \in \mathcal{I}(u), j \in \mathcal{I}(u) \bullet i \neq j \Rightarrow f\ i \neq f\ j) \wedge (\forall\, i \in \mathcal{I}(u) \bullet u_i = v_{(f\ i)}) \wedge$
$\mathcal{R}(f) = \{k \in \mathcal{I}(v) \bullet v_k \in X\}$

Nun folgt noch ein Zusammenhang zwischen Projektion und Rotation: Haben wir zwei rotationsäquivalente Wörter u und v, wobei eines, z.B. u, aus einem anderen u' durch Projektion hervorgeht, so finden wir ein Wort v', so daß u' und v' rotationsäquivalent sind und sich v durch die gleiche Projektion aus v' ergibt.

S0670

VA0671 $u \in \mathbb{A}^*$, $u' \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$, $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$

T0672 $u \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} v \wedge u = (u' \rhd X) \Rightarrow \exists\, v' \bullet u' \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} v' \wedge v = (v' \rhd X)$

Ist das erste Element eines Wortes in der Projektionsmenge enthalten, so wird es durch Projektion nicht verändert.

S0673

VA0674 $u \in \mathbb{A}^*$, $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$

T0675 $u_0 \in X \Rightarrow u \rhd X_0 = u_0$

Äquivalenzrelationen auf Wörtern nennen wir projektiv gdw. die Relation zwischen zwei Wörtern nach Projektion bestehen bleibt. Zwei projektive Relationen haben wir, abgesehen von der Identität, schon kennengelernt: Die Rotationsäquivalenz und die Spiegelungsäquivalenz.

S0676

VA0677 $E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$

D0678 E ist projektiv $:\Leftrightarrow$
$\forall\, u \in \mathbb{A}^*,\, v \in \mathbb{A}^* \bullet (u,v) \in E \Rightarrow \forall\, X \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \bullet ((u \triangleright X), (v \triangleright X)) \in E$

T0679 $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*)$ ist projektiv

T0680 $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ ist projektiv

T0681 $(\overset{\text{rev}}{\equiv})$ ist projektiv

3.10 Rotierte Teilwörter

Für unsere Zwecke ist es bequem die Rotationsäquivalenz und die Teilwortrelation zu einer neuen Relation $(\overset{\text{rot}}{\sqsubseteq})$ zusammenzufassen. Für $u \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} v$ sagen wir auch: u ist ein rotiertes Teilwort von v.

S0682

VA0683 $u \in \mathbb{A}^*,\, v \in \mathbb{A}^*$

D0684 $(\overset{\text{rot}}{\sqsubseteq}) := \{(u,v) \in \mathbb{A}^* \times \mathbb{A}^* \bullet \exists\, u',v' \bullet u \overset{\text{rot}}{\equiv} u' \wedge v \overset{\text{rot}}{\equiv} v' \wedge u' \sqsubseteq v'\}$

T0685∗ $(\overset{\text{rot}}{\sqsubseteq}) \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$

M0686∗ $u \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} v :\Leftrightarrow (u,v) \in (\overset{\text{rot}}{\sqsubseteq})$

D0687∗ $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq}) := (\overset{\text{rot}}{\sqsubseteq})^{-1}$

T0688∗ $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq}) \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$

B0689

Es gilt $[6,1,1] \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} [1,3,4,6,1,2]$, $[1,2] \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} [1,1,2]$, $[2,1] \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} [1,1,2]$, $[1,1] \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} [1,1,1]$, $[2] \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} [4,2,3]$, $[] \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} [1,2]$, $\neg\, [1,2] \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} [1,2]$, $[2,1] \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} [1,2]$, $[3,2,1] \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} [0,1,2,3,4]$.

Es ergeben sich die folgende Theoreme.

S0690

VA0691 $u \in \mathbb{A}^*,\, v \in \mathbb{A}^*$

T0692 $u \sqsubseteq v \Rightarrow u \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} v$

T0693 $(\sqsubseteq) \subseteq (\overset{\text{rot}}{\sqsubseteq})$

T0694 $u \overset{\text{rot}}{\equiv} v \Leftrightarrow u \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} v \wedge v \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} u$

T0695 $(\overset{\text{rot}}{\equiv}) \subseteq (\overset{\text{rot}}{\sqsubseteq})$

T0696 $u \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} v \Leftrightarrow \exists\, w \in \mathbb{A}^* \bullet u \sqsubseteq w \wedge w \overset{\text{rot}}{\equiv} v$

T0697 $u \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} v \Leftrightarrow \exists\, w \in \mathbb{A}^* \bullet u \overset{\text{rot}}{\equiv} w \wedge w \sqsubseteq v$

Die neue Relation erbt Eigenschaften, die beide Konstituenten besitzen, insbesondere Reflexivität und Transitivität. Es handelt sich also um eine Quasiordnung, der gemeinsame Nenner von Ordnung und Äquivalenzrelation.

S0698

VA0699 $u \in \mathbb{A}^*,\, v \in \mathbb{A}^*,\, w \in \mathbb{A}^*$

T0700 $u \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} u$

T0701 $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*) \subseteq (\overset{\text{rot}}{\sqsubseteq})$

T0702 $(\stackrel{\text{rot}}{\sqsubseteq})$ ist reflexiv
T0703 u $\stackrel{\text{rot}}{\sqsubseteq}$ v $\wedge$ v $\stackrel{\text{rot}}{\sqsubseteq}$ w $\Rightarrow$ u $\stackrel{\text{rot}}{\sqsubseteq}$ w
T0704 $(\stackrel{\text{rot}}{\sqsubseteq})$ ist transitiv
T0705 $(\stackrel{\text{rot}}{\sqsubseteq})$ ist eine Quasiordnung

Alphabet, Länge und Einfachheit verhalten sich wie bei der Teilwortrelation. Auch die Form des letzten Theorems ist von dort bekannt.

S0706
VA0707 u $\in \mathbb{A}^*$, v $\in \mathbb{A}^*$
T0708 u $\stackrel{\text{rot}}{\sqsubseteq}$ v $\Rightarrow \mathcal{A}$(u) $\subseteq \mathcal{A}$(v)
T0709 u $\stackrel{\text{rot}}{\sqsubseteq}$ v $\Rightarrow \mathcal{L}$(u) $\leq \mathcal{L}$(v)
T0710 v ist einfach $\wedge$ u $\stackrel{\text{rot}}{\sqsubseteq}$ v $\Rightarrow$ u ist einfach
T0711 v ist einfach $\wedge$ u $\stackrel{\text{rot}}{\sqsubseteq}$ v $\Rightarrow$ u $\stackrel{\text{rot}}{\equiv}$ (v $\triangleright \mathcal{A}$(u))

Abschließend haben wir noch ein spezielles Theorem für einfache Wörter der Länge vier, das es uns erlaubt aus der Existenz zweier rotierter Teilwörter die Form des ursprünglichen Wortes zu erschließen.

S0712
VA0713 a $\in \mathbb{A}$, b $\in \mathbb{A}$, c $\in \mathbb{A}$, d $\in \mathbb{A}$
T0714 w ist einfach $\wedge$ $\mathcal{L}$(w) = 4 $\wedge$ $\mathcal{A}$(w) = {a,b,c,d} $\wedge$
[a,b,c] $\stackrel{\text{rot}}{\sqsubseteq}$ w $\wedge$ [a,c,d] $\stackrel{\text{rot}}{\sqsubseteq}$ w $\Rightarrow$ w $\stackrel{\text{rot}}{\equiv}$ [a,b,c,d]

3.11 Konsistente Wörter

Es wird jetzt einen Begriff eingeführt, den wir ausführlicher behandeln werden, da er wohl in dieser allgemeinen Form noch nicht verwendet wurde und zunächst etwas ungewohnt erscheinen könnte. Später werden wir sehen, daß er eine Schlüsselrolle bei der Axiomatisierung zyklischer Ordnungen einnimmt.

Der Begriff, um den es sich handelt, ist die Konsistenz zwischen Wörtern. Wir beginnen zuerst mit der einfachen Variante: Zwei Wörter sind miteinander konsistent (u $\sim$ v) gdw. ihre jeweiligen Projektionen auf das Alphabet des anderen gleich sind. Dies wird sofort verallgemeinert: Gegeben sei eine beliebige, binäre Relation E auf Wörtern (die im obigen Spezialfall die Identität ist). Aus dieser gewinnen wir eine neue Relation $\stackrel{\text{E}}{\sim}$, die Konsistenz modulo E: Zwei Wörter sind miteinander konsistent modulo E (u $\stackrel{\text{E}}{\sim}$ v), gdw. ihre jeweiligen Projektionen auf das Alphabet in E enthalten sind.

Bei uns wird es sich bei E immer um eine Äquivalenzrelation handeln, die sogar konservativ und projektiv ist. Da wir für die meisten Theoreme nicht alle diese Eigenschaften benötigen, listen wir die Forderungen an E bei jedem Theorem explizit auf.

S0715
VA0716∗ u $\in \mathbb{A}^*$, v $\in \mathbb{A}^*$, E $\in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$
M0717∗ u $\sim$ v :$\Leftrightarrow$ (u,v) $\in$ ($\sim$)
D0718 ($\sim$) := {(u,v) $\in \mathbb{A}^* \times \mathbb{A}^* \bullet$ (u $\triangleright \mathcal{A}$(v)) = (v $\triangleright \mathcal{A}$(u))}
T0719∗ ($\sim$) $\in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$ 0718
M0720∗ u $\stackrel{\text{E}}{\sim}$ v :$\Leftrightarrow$ (u,v) $\in$ ($\stackrel{\text{E}}{\sim}$)
D0721 ($\stackrel{\text{E}}{\sim}$) := {(u,v) $\in \mathbb{A}^* \times \mathbb{A}^* \bullet$ ((u $\triangleright \mathcal{A}$(v)), (v $\triangleright \mathcal{A}$(u))) $\in$ E}
T0722∗ ($\stackrel{\text{E}}{\sim}$) $\in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$ 0721

T0723∗ $(\sim) = \mathsf{SEI}\ \mathrm{I} = \mathcal{ID}(\mathbb{A}^*) \bullet (\overset{\mathrm{I}}{\sim})$ 0718, 0721

B0724

Es gilt [1,2,3,4] $\sim$ [0,3,4,5,6], [1,2,3] $\sim$ [2,3,4], [] $\sim$ [1,2,3], [1] $\sim$ [2,3], $\neg$ [1,2] $\sim$ [1,2], $\neg$ [3,5,1] $\sim$ [1,2,3,4,5].

Jetzt zeigen wir einige elementare Eigenschaften für die allgemeine Variante.

S0725

VA0726∗ $\mathrm{u} \in \mathbb{A}^*$, $\mathrm{v} \in \mathbb{A}^*$, $\mathrm{E} \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$, $\mathrm{E'} \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$

Direkt aus der Definition folgt: Die Konsistenz modulo E ist monoton in der Relation E.

T0727 $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{E'} \wedge \mathrm{u} \overset{\mathrm{E}}{\sim} \mathrm{v} \Rightarrow \mathrm{u} \overset{\mathrm{E'}}{\sim} \mathrm{v}$ 0721

Enthält E die Identität, dann gilt dies auch für $(\overset{\mathrm{E}}{\sim})$ und somit ist $(\overset{\mathrm{E}}{\sim})$ reflexiv.

T0728 $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*) \subseteq \mathrm{E} \Rightarrow \mathcal{ID}(\mathbb{A}^*) \subseteq (\overset{\mathrm{E}}{\sim})$

A0729 $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*) \subseteq \mathrm{E}$
G0730 $\forall\, \mathrm{u} \in \mathbb{A}^* \bullet \mathrm{u} \overset{\mathrm{E}}{\sim} \mathrm{u}$
VA0731∗ $\mathrm{u} \in \mathbb{A}^*$
G0732 $\mathrm{u} \overset{\mathrm{E}}{\sim} \mathrm{u}$
G0733 $((\mathrm{u} \triangleright \mathcal{A}(\mathrm{u})), (\mathrm{u} \triangleright \mathcal{A}(\mathrm{u}))) \in \mathrm{E}$ 0721
T0734 $((\mathrm{u} \triangleright \mathcal{A}(\mathrm{u})), (\mathrm{u} \triangleright \mathcal{A}(\mathrm{u}))) \in \mathcal{ID}(\mathbb{A}^*)$
G0735 $\mathbb{T}$ 0729, 0734

T0736 $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*) \subseteq \mathrm{E} \Rightarrow (\overset{\mathrm{E}}{\sim})$ ist reflexiv 0728, 0071

Symmetrie vererbt sich von E auf $(\overset{\mathrm{E}}{\sim})$.

T0737 E ist symmetrisch $\Rightarrow (\overset{\mathrm{E}}{\sim})$ ist symmetrisch

A0738 E ist symmetrisch
G0739 $\forall\, \mathrm{u,v} \bullet \mathrm{u} \overset{\mathrm{E}}{\sim} \mathrm{v} \Rightarrow \mathrm{v} \overset{\mathrm{E}}{\sim} \mathrm{u}$ 0076
VA0740 $\mathrm{u,v} \bullet \mathrm{u} \overset{\mathrm{E}}{\sim} \mathrm{v}$
T0741∗ $\mathrm{u} \in \mathbb{A}^* \wedge \mathrm{v} \in \mathbb{A}^*$ 0740
G0742 $\mathrm{v} \overset{\mathrm{E}}{\sim} \mathrm{u}$
T0743 $((\mathrm{u} \triangleright \mathcal{A}(\mathrm{v})), (\mathrm{v} \triangleright \mathcal{A}(\mathrm{u}))) \in \mathrm{E}$ 0740, 0721
T0744 $((\mathrm{v} \triangleright \mathcal{A}(\mathrm{u})), (\mathrm{u} \triangleright \mathcal{A}(\mathrm{v}))) \in \mathrm{E}$ 0076, 0738, 0743
G0745 $\mathbb{T}$ 0721, 0744

Unter den in vorigen Theoremen genannten Bedingungen ist $(\overset{\mathrm{E}}{\sim})$ also eine Ähnlichkeitsrelation.

T0746 $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*) \subseteq \mathrm{E} \wedge \mathrm{E}$ ist symmetrisch $\Rightarrow (\overset{\mathrm{E}}{\sim})$ ist eine Ähnlichkeitsrelation 0088, 0736, 0737

Schließlich ist das leere Wort konsistent mit jedem anderen Wort, sofern $([],[]) \in \mathrm{E}$ gilt.

T0747 $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*) \subseteq \mathrm{E} \Rightarrow \forall\, \mathrm{w} \in \mathbb{A}^* \bullet [] \overset{\mathrm{E}}{\sim} \mathrm{w}$

A0748 $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*) \subseteq \mathrm{E}$
VA0749∗ $\mathrm{w} \in \mathbb{A}^*$
G0750 $[] \overset{\mathrm{E}}{\sim} \mathrm{w}$
G0751 $(([] \triangleright \mathcal{A}(\mathrm{w})), (\mathrm{w} \triangleright \mathcal{A}([]))) \in \mathrm{E}$ 0721
G0752 $(([] \triangleright \mathcal{A}(\mathrm{w})), (\mathrm{w} \triangleright \emptyset)) \in \mathrm{E}$ 0323
G0753 $([], []) \in \mathrm{E}$ 0640, 0646
T0754 $([], []) \in \mathcal{ID}(\mathbb{A}^*)$

G0755 T . . . 0748, 0754

Eine einfache aber nützliche Charakterisierung der Konsistenz ist die folgende: Zwei Wörter sind miteinander konsistent modulo E, gdw. die Projektionen auf das Schnittalphabet in der Relation E stehen.

S0756

VA0757∗ $u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$, $E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$

D0758 $D := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)$

T0759∗ $D \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ . . . 0758

T0760 $u \overset{E}{\sim} v \Leftrightarrow ((u \triangleright D), (v \triangleright D)) \in E$

G0761 $((u \triangleright \mathcal{A}(v)), (v \triangleright \mathcal{A}(u))) \in E \Leftrightarrow ((u \triangleright D), (v \triangleright D)) \in E$ . . . 0721

G0762 $(((u \triangleright \mathcal{A}(u)) \triangleright \mathcal{A}(v)), ((v \triangleright \mathcal{A}(v)) \triangleright \mathcal{A}(u))) \in E \Leftrightarrow ((u \triangleright D), (v \triangleright D)) \in E$ . . . 0648

G0763 $((u \triangleright (\mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v))), (v \triangleright (\mathcal{A}(v) \cap \mathcal{A}(u)))) \in E \Leftrightarrow ((u \triangleright D), (v \triangleright D)) \in E$ . . . 0651

G0764 T . . . 0758

Wir zeigen nun einige elementare Eigenschaften der Konsistenzrelation. Gelegentlich brauchen wir hier zusätzliche Annahmen über die unterliegende Relation, z.B. Transitivität, Konservativität, Projektivität.

S0765

VA0766∗ $u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$, $w \in \mathbb{A}^*$, $E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$

Zwei miteinander konsistente Wörter mit gleichem Alphabet sind auch in E enthalten.

T0767 $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v) \wedge u \overset{E}{\sim} v \Rightarrow (u,v) \in E$

A0768 $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v)$

A0769 $u \overset{E}{\sim} v$

G0770 $(u,v) \in E$

T0771 $((u \triangleright \mathcal{A}(v)), (v \triangleright \mathcal{A}(u))) \in E$ . . . 0721, 0769

T0772 $((u \triangleright \mathcal{A}(u)), (v \triangleright \mathcal{A}(v))) \in E$ . . . 0771, 0768

G0773 T . . . 0772, 0648

Ist E konservativ, so können wir das vorige Theorem anwenden. $(\overset{E}{\sim})$ ist also in diesem Fall eine Erweiterung von E.

T0774 E ist konservativ $\wedge$ $(u,v) \in E \Rightarrow u \overset{E}{\sim} v$ . . . 0767, 0393

$(\overset{E}{\sim})$ ist auch dann eine Erweiterung von E, wenn E projektiv ist.

T0775 E ist projektiv $\wedge$ $(u,v) \in E \Rightarrow u \overset{E}{\sim} v$

A0776 E ist projektiv

A0777 $(u,v) \in E$

G0778 $u \overset{E}{\sim} v$

D0779 $D := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)$

G0780 $((u \triangleright D), (v \triangleright D)) \in E$ . . . 0760, 0779

G0781 T . . . 0678, 0776, 0777

Für transitive E ist die Konsistenz auf Wörtern mit gleichem Alphabet transitiv. Die Transitivität wird in diesem Fall von E auf $(\overset{E}{\sim})$ vererbt.

T0782 E ist transitiv $\wedge$ $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v) \wedge \mathcal{A}(v) = \mathcal{A}(w) \wedge u \overset{E}{\sim} v \wedge v \overset{E}{\sim} w \Rightarrow u \overset{E}{\sim} w$

A0783 E ist transitiv

A0784 $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v)$

A0785	$\mathcal{A}(v) = \mathcal{A}(w)$	
A0786	$u \overset{E}{\sim} v$	
A0787	$v \overset{E}{\sim} w$	
G0788	$u \overset{E}{\sim} w$	
T0789	$(u,v) \in E$	0767, 0784, 0786
T0790	$(v,w) \in E$	0767, 0785, 0787
T0791	$(u,w) \in E$	0084, 0783, 0789, 0790
T0792	$\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(w)$	0784, 0785
G0793	$\mathbb{T}$	0767, 0792, 0791

Ist E zusätzlich noch konservativ und projektiv, so wird die Konsistenz nicht durch Austausch von Wortpaaren aus E zerstört. $(\overset{E}{\sim})$ ist also mit E verträglich.

T0794 E ist transitiv $\wedge$ E ist konservativ $\wedge$ E ist projektiv $\wedge$ $u \overset{E}{\sim} v \wedge (v,w) \in E \Rightarrow u \overset{E}{\sim} w$

A0795	E ist transitiv	
A0796	E ist konservativ	
A0797	E ist projektiv	
A0798	$u \overset{E}{\sim} v$	
A0799	$(v,w) \in E$	
G0800	$u \overset{E}{\sim} w$	
D0801	$D := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)$	
T0802	$((u \triangleright D), (v \triangleright D)) \in E$	0760, 0801, 0798
T0803	$\mathcal{A}(v) = \mathcal{A}(w)$	0393, 0796, 0799
T0804	$D = \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(w)$	0803, 0801
G0805	$((u \triangleright D), (w \triangleright D)) \in E$	0760, 0804
T0806	$((v \triangleright D), (w \triangleright D)) \in E$	0678, 0797, 0799
G0807	$\mathbb{T}$	0084, 0795, 0802, 0806

Jetzt untersuchen wir das Verhalten der Konsistenzrelation unter Projektionen. Die unterliegende, binäre Relation wird dafür als projektiv angenommen. Das Hauptresultat ist, daß sich die Projektivität nicht nur auf die Konsistenzrelation vererbt, sondern sogar dabei in gewissem Sinne noch verstärkt.

S0808

VA0809$*$ $u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$, $u' \in \mathbb{A}^*$, $v' \in \mathbb{A}^*$, $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$, $E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$

A0810 E ist projektiv

Wir stellen zunächst fest: Die Konsistenzrelation ist projektiv, d.h. sie bleibt bei beidseitiger Projektion erhalten.

T0811 $u \overset{E}{\sim} v \Rightarrow (u \triangleright X) \overset{E}{\sim} (v \triangleright X)$

A0812	$u \overset{E}{\sim} v$	
G0813	$(u \triangleright X) \overset{E}{\sim} (v \triangleright X)$	
T0814	$((u \triangleright \mathcal{A}(v)), (v \triangleright \mathcal{A}(u))) \in E$	0721, 0812
T0815	$(((u \triangleright \mathcal{A}(v)) \triangleright X), ((v \triangleright \mathcal{A}(u)) \triangleright X)) \in E$	0678, 0810, 0814
T0816	$(((u \triangleright X) \triangleright \mathcal{A}(v)),((v \triangleright X) \triangleright \mathcal{A}(u))) \in E$	0652, 0815
T0817	$((((u \triangleright X) \triangleright \mathcal{A}(v)) \triangleright X), (((v \triangleright X) \triangleright \mathcal{A}(u)) \triangleright X)) \in E$	0678, 0810, 0816
T0818	$(((u \triangleright X) \triangleright (\mathcal{A}(v) \cap X)), ((v \triangleright X) \triangleright (\mathcal{A}(u) \cap X))) \in E$	0651, 0817
T0819	$(((u \triangleright X) \triangleright \mathcal{A}(v \triangleright X)), ((v \triangleright X) \triangleright \mathcal{A}(u \triangleright X))) \in E$	0657, 0818
G0820	$\mathbb{T}$	0721, 0819

Eine linksseitige oder rechtsseitige Projektion der Konsistenzrelation ist äquivalent zu einer beidseitigen Projektion derselben.

T0821 $(u \triangleright X) \overset{E}{\sim} v \Rightarrow (u \triangleright X) \overset{E}{\sim} (v \triangleright X)$

A0822	$(u \triangleright X) \overset{E}{\sim} v$	
G0823	$(u \triangleright X) \overset{E}{\sim} (v \triangleright X)$	
T0824	$((u \triangleright X) \triangleright X) \overset{E}{\sim} (v \triangleright X)$	0811, 0822
T0825	$\mathbb{T}$	0651, 0824

T0826 $u \overset{E}{\sim} (v \triangleright X) \Rightarrow (u \triangleright X) \overset{E}{\sim} (v \triangleright X)$

A0827	$u \overset{E}{\sim} (v \triangleright X)$	
G0828	$(u \triangleright X) \overset{E}{\sim} (v \triangleright X)$	
T0829	$(u \triangleright X) \overset{E}{\sim} ((v \triangleright X) \triangleright X)$	0811, 0827
T0830	$\mathbb{T}$	0651, 0829

T0831 $(u \triangleright X) \overset{E}{\sim} (v \triangleright X) \Rightarrow (u \triangleright X) \overset{E}{\sim} v \wedge u \overset{E}{\sim} (v \triangleright X)$

A0832	$(u \triangleright X) \overset{E}{\sim} (v \triangleright X)$	
G0833	$(u \triangleright X) \overset{E}{\sim} v \wedge u \overset{E}{\sim} (v \triangleright X)$	
D0834	$D := \mathcal{A}(u \triangleright X) \cap \mathcal{A}(v \triangleright X)$	
T0835*	$D \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	0834
T0836	$D = \mathcal{A}(u) \cap X \cap \mathcal{A}(v) \cap X$	0657, 0834
T0837	$D = \mathcal{A}(u) \cap X \cap \mathcal{A}(v)$	0836
T0838	$(((u \triangleright X) \triangleright D), ((v \triangleright X) \triangleright D)) \in E$	0760, 0834, 0832
T0839	$((v \triangleright X) \triangleright D) = (v \triangleright (X \cap D))$	0651
T0840	$((u \triangleright X) \triangleright D) = (u \triangleright (X \cap D))$	0651
T0841	$D \subseteq X$	0837
T0842	$X \cap D = D$	0841
T0843	$(((u \triangleright X) \triangleright D), (v \triangleright D)) \in E$	0838, 0839, 0842
T0844	$((u \triangleright D), ((v \triangleright X) \triangleright D)) \in E$	0838, 0840, 0842
T0845	$D = \mathcal{A}(u \triangleright X) \cap \mathcal{A}(v)$	0657
T0846	$D = \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v \triangleright X)$	0657
T0847	$(u \triangleright X) \overset{E}{\sim} v$	0760, 0845, 0843
T0848	$u \overset{E}{\sim} (v \triangleright X)$	0760, 0846, 0844
G0849	$\mathbb{T}$	0847, 0848

Links- und rechtsseitige Projektionen der Konsistenzrelation sind also äquivalent.

T0850	$(u \triangleright X) \overset{E}{\sim} v \Leftrightarrow (u \triangleright X) \overset{E}{\sim} (v \triangleright X)$	0821, 0831
T0851	$u \overset{E}{\sim} (v \triangleright X) \Leftrightarrow (u \triangleright X) \overset{E}{\sim} (v \triangleright X)$	0826, 0831
T0852	$(u \triangleright X) \overset{E}{\sim} v \Leftrightarrow u \overset{E}{\sim} (v \triangleright X)$	0850, 0851

Für die Konsistenzrelation gilt also nicht nur die Invarianz gegenüber beidseitiger Projektion (Projektivität), wie wir sie für E voraussetzten, sondern auch die Invarianz gegenüber einseitiger Projektion.

T0853	$u \overset{E}{\sim} v \Rightarrow (u \triangleright X) \overset{E}{\sim} v \wedge u \overset{E}{\sim} (v \triangleright X)$	0811, 0831

Da Teilwortbildung von einfachen Wörtern nach Theorem 0665 eine Projektion ist, gilt die Konsistenz zwischen zwei Wörtern auch für deren Teilwörter.

T0854 v ist einfach $\wedge\, u \overset{E}{\sim} v \wedge w \sqsubseteq v \Rightarrow u \overset{E}{\sim} w$

A0855	v ist einfach	
A0856	$u \overset{E}{\sim} v$	
A0857	$w \sqsubseteq v$	
G0858	$u \overset{E}{\sim} w$	
T0859	$w = (v \triangleright \mathcal{A}(w))$	0665, 0855, 0857
G0860	$u \overset{E}{\sim} (v \triangleright \mathcal{A}(w))$	0859

G0861 $\mathbb{T}$ . . . 0853, 0856

T0862 u ist einfach $\wedge$ v ist einfach $\wedge\ u' \sqsubseteq u \wedge v' \sqsubseteq v \wedge u \overset{E}{\sim} v \Rightarrow u' \overset{E}{\sim} v'$

A0863 u ist einfach $\wedge$ v ist einfach
A0864 $u' \sqsubseteq u \wedge v' \sqsubseteq v$
A0865 $u \overset{E}{\sim} v$
G0866 $u' \overset{E}{\sim} v'$
T0867 $u' = (u \triangleright \mathcal{A}(u')) \wedge v' = (v \triangleright \mathcal{A}(v'))$ . . . 0665, 0863, 0864
T0868 $u \overset{E}{\sim} (v \triangleright \mathcal{A}(v'))$ . . . 0853, 0865
T0869 $(u \triangleright \mathcal{A}(u')) \overset{E}{\sim} (v \triangleright \mathcal{A}(v'))$ . . . 0853, 0868
G0870 $\mathbb{T}$ . . . 0867, 0869

3.12 Konsistenz modulo Identität

Die im vorigen Abschnitt entwickelten Theoreme über die Konsistenz von Wörtern werden nun spezialisiert. Wählen wir für E die projektive Äquivalenzrelation $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*)$, dann erhalten wir die für die Konsistenzrelation $(\sim)$ spezialisierten Versionen der Theoreme.

S0871
VA0872$*$ $u \in \mathbb{A}^*, v \in \mathbb{A}^*$
T0873 $u \sim v \Leftrightarrow (u \triangleright \mathcal{A}(v)) = (v \triangleright \mathcal{A}(u))$ . . . 0721
T0874 $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*) \subseteq (\sim)$ . . . 0728
T0875 $(\sim)$ ist reflexiv . . . 0736
T0876 $(\sim)$ ist symmetrisch . . . 0737, 0293
D0877 $D := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)$
T0878 $u \sim v \Leftrightarrow (u \triangleright D) = (v \triangleright D)$ . . . 0760, 0877
S0879
VA0880$*$ $u \in \mathbb{A}^*, v \in \mathbb{A}^*, w \in \mathbb{A}^*$
T0881 $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v) \wedge u \sim v \Rightarrow u = v$ . . . 0767
T0882 $\forall\, x \in \mathbb{A}, y \in \mathbb{A} \bullet [x,y] \sim [y,x] \Rightarrow x = y$ . . . 0881, 0328, 0287
T0883 $u = v \Rightarrow u \sim v$ . . . 0774, 0391
T0884 $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v) \wedge \mathcal{A}(v) = \mathcal{A}(w) \wedge u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$ . . . 0782, 0294
S0885
VA0886$*$ $u \in \mathbb{A}^*, v \in \mathbb{A}^*, X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$
T0887 $u \sim v \Rightarrow (u \triangleright X) \sim (v \triangleright X)$ . . . 0811, 0679
T0888 $(u \triangleright X) \sim v \Leftrightarrow (u \triangleright X) \sim (v \triangleright X)$ . . . 0850, 0679
T0889 $u \sim (v \triangleright X) \Leftrightarrow (u \triangleright X) \sim (v \triangleright X)$ . . . 0851, 0679
T0890 $(u \triangleright X) \sim v \Leftrightarrow u \sim (v \triangleright X)$ . . . 0852, 0679
T0891 $u \sim v \Rightarrow (u \triangleright X) \sim v \wedge u \sim (v \triangleright X)$ . . . 0853, 0679
T0892 v ist einfach $\wedge\ u \sim v \wedge w \sqsubseteq v \Rightarrow u \sim w$ . . . 0854, 0679
T0893 u ist einfach $\wedge$ v ist einfach $\wedge\ u' \sqsubseteq u \wedge v' \sqsubseteq v \wedge u \sim v \Rightarrow u' \sim v'$ . . . 0862, 0679

Anders als bei diesen aus dem vorigen Abschnitt stammenden allgemeinen Theoremen, werden wir nun von den speziellen Eigenschaften der Konsistenz modulo Identität Gebrauch machen. Man beachte, daß wir im folgenden nur einfache Wörter betrachten.

S0894
VA0895$*$ $u \in \mathbb{A}^*, v \in \mathbb{A}^*$
A0896 u ist einfach $\wedge$ v ist einfach
D0897 $D := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)$
T0898$*$ $D \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ . . . 0897

Sind zwei Wörter konsistent, so sind natürlich nicht nur die Projektionen auf das Schnittalphabet selbst, sondern auch alle Projektionen auf Teilmengen des Schnittalphabets identisch.

T0899 $u \sim v \Rightarrow \forall\, C \bullet C \subseteq D \Rightarrow (u \triangleright C) = (v \triangleright C)$

A0900	$u \sim v$	
VA0901	$C \bullet C \subseteq D$	
G0902	$(u \triangleright C) = (v \triangleright C)$	
T0903∗	$C \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	0901
T0904	$(u \triangleright D) = (v \triangleright D)$	0878, 0897
T0905	$((u \triangleright D) \triangleright C) = ((v \triangleright D) \triangleright C)$	0904
T0906	$(u \triangleright (D \cap C)) = (v \triangleright (D \cap C))$	0651, 0905
G0907	$\mathbb{T}$	0906, 0901

Die Umkehrung des vorigen Theorems gilt auch. Tatsächlich können wir die Prämisse sogar noch abschwächen: Es reicht aus alle zweielementigen Projektionen auf das Schnittalphabet zu betrachten.

T0908 $(\ \forall\, C \bullet C \subseteq D \wedge |C| = 2 \Rightarrow (u \triangleright C) = (v \triangleright C)\ ) \Rightarrow u \sim v$

A0909	$\forall\, C \bullet C \subseteq D \wedge \|C\| = 2 \Rightarrow (u \triangleright C) = (v \triangleright C)$	
A0910	$\neg\, u \sim v$	
T0911	$(u \triangleright D) \neq (v \triangleright D)$	0878, 0897, 0910
T0912	$D \subseteq \mathcal{A}(u) \wedge D \subseteq \mathcal{A}(v)$	0897
T0913	$\mathcal{A}(u \triangleright D) = D \wedge \mathcal{A}(v \triangleright D) = D$	0657, 0912
T0914	$\mathcal{A}(u \triangleright D) = \mathcal{A}(v \triangleright D)$	0913
T0915	$(u \triangleright D)$ ist einfach $\wedge$ $(v \triangleright D)$ ist einfach	0656, 0896
VT0916	$x,y \bullet x \neq y \wedge [x,y] \sqsubseteq (u \triangleright D) \wedge [y,x] \sqsubseteq (v \triangleright D)$	0580, 0915, 0914, 0911
T0917∗	$x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A}$	0916
T0918	$\{x,y\} \subseteq D$	
T0919	$\mathcal{A}([x,y]) \subseteq \mathcal{A}(u \triangleright D)$	0569, 0916
T0920	$\{x,y\} \subseteq \mathcal{A}(u \triangleright D)$	0328, 0919
T0921	$\mathcal{A}(u \triangleright D) \subseteq D$	0659
G0922	$\mathbb{T}$	0920, 0921
T0923	$\|\{x,y\}\| = 2$	0916
T0924	$(u \triangleright \{x,y\}) = [x,y]$	
T0925	$[x,y] \sqsubseteq (u \triangleright D)$	0916
T0926	$[x,y] = ((u \triangleright D) \triangleright \mathcal{A}([x,y]))$	0665, 0915, 0925
T0927	$((u \triangleright D) \triangleright \{x,y\}) = [x,y]$	0328, 0926
T0928	$(u \triangleright (D \cap \{x,y\})) = [x,y]$	0651, 0927
G0929	$\mathbb{T}$	0918, 0928
T0930	$(v \triangleright \{x,y\}) = [y,x]$	
T0931	$[y,x] \sqsubseteq (v \triangleright D)$	0916
T0932	$[y,x] = ((v \triangleright D) \triangleright \mathcal{A}([y,x]))$	0665, 0915, 0931
T0933	$((v \triangleright D) \triangleright \{x,y\}) = [y,x]$	0328, 0932
T0934	$(v \triangleright (D \cap \{x,y\})) = [y,x]$	0651, 0933
G0935	$\mathbb{T}$	0918, 0934
T0936	$[x,y] = [y,x]$	0909, 0918, 0923, 0924, 0930
T0937	$x \neq y$	0916
T0938	$\mathbb{F}$	0287, 0936, 0937

Gibt es keine zweielementigen Projektionen, weil das Schnittalphabet kein oder nur ein Element erhält, so sind die einfachen Wörter natürlich konsistent.

T0939 $|\mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)| < 2 \Rightarrow u \sim v$

G0940	$\|D\| < 2 \Rightarrow u \sim v$	0897
A0941	$\|D\| < 2$	

G0942	$u \sim v$	
G0943	$\forall\, C \bullet C \subseteq D \wedge \lvert C\rvert = 2 \Rightarrow (u \triangleright C) = (v \triangleright C)$	0908
T0944	$\forall\, C \bullet C \subseteq D \Rightarrow \lvert C\rvert < 2$	0941
G0945	$\mathbb{T}$	0944

Nun zeigen wir noch einige einfache Beziehungen zwischen der Konsistenz und der Teilwortrelation. Wir beschränken uns dabei wieder auf einfache Wörter.

S0946

VA0947∗ $u \in \mathbb{A}^*$, $v \in \mathbb{A}^*$

Für einfache Wörter ist ein Teilwort konsistent mit dem ursprünglichen Wort. Wir nutzen dabei wieder aus, daß Teilwortbildung durch Projektion nach Theorem 0665 ausdrückbar ist.

T0948 v ist einfach $\wedge\ u \sqsubseteq v \Rightarrow u \sim v$

A0949	v ist einfach	
A0950	$u \sqsubseteq v$	
G0951	$u \sim v$	
G0952	$(u \triangleright \mathcal{A}(v)) = (v \triangleright \mathcal{A}(u))$	0873
T0953	$u = (v \triangleright \mathcal{A}(u))$	0665, 0949, 0950
G0954	$(u \triangleright \mathcal{A}(v)) = u$	0953
T0955	$\mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(v)$	0569, 0950
G0956	$\mathbb{T}$	0647, 0955

Hieraus folgt sofort, daß einfache und bzgl. der Teilwortrelation vergleichbare Wörter immer konsistent sind.

T0957 u ist einfach $\wedge$ v ist einfach $\wedge\ (u \sqsubseteq v \vee v \sqsubseteq u) \Rightarrow u \sim v$

A0958	u ist einfach $\wedge$ v ist einfach	
T0959	$u \sqsubseteq v \Rightarrow u \sim v$	0948, 0958
T0960	$v \sqsubseteq u \Rightarrow v \sim u$	0948, 0958
T0961	$v \sqsubseteq u \Rightarrow u \sim v$	0076, 0876, 0960
G0962	$\mathbb{T}$	0959, 0961

Die umgekehrte Implikation, nämlich das die Konsistenz zweier Wörter impliziert, daß eines ein Teilwort des anderen ist, gilt unter der Nebenbedingung, daß die Alphabete vergleichbar sind, im allgemeinen jedoch nicht.

T0963 $\mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(v) \wedge u \sim v \Rightarrow u \sqsubseteq v$

A0964	$\mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(v)$	
A0965	$u \sim v$	
G0966	$u \sqsubseteq v$	
D0967	$D := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)$	
T0968∗	$D \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	0967
T0969	$(u \triangleright D) = (v \triangleright D)$	0878, 0967, 0965
T0970	$D = \mathcal{A}(u)$	0967, 0964
T0971	$(u \triangleright \mathcal{A}(u)) = (v \triangleright \mathcal{A}(u))$	0970, 0969
T0972	$u = (v \triangleright \mathcal{A}(u))$	0648, 0971
T0973	$(v \triangleright \mathcal{A}(u)) \sqsubseteq v$	0655
G0974	$\mathbb{T}$	0972, 0973

Hier noch einige konkrete Aussagen für kleine Wörter:

S0975

VA0976∗ $a \in \mathbb{A}$, $b \in \mathbb{A}$

T0977 $[a] \sim [a]$ . . . 0883
T0978 $a \neq b \Rightarrow \neg\, [a,b] \sim [b,a]$

  A0979 $a \neq b$
  T0980 $[a,b] \neq [b,a]$ . . . 0287, 0979
  G0981 $\mathbb{T}$ . . . 0881, 0328, 0980

3.13 Konsistenz modulo Rotation

Eine andere Spezialisierung der allgemeinen Theoreme über Konsistenz modulo E erhalten wir, wenn wir die Rotationsäquivalenz als unterliegende Äquivalenzrelation verwenden, die wie schon festgestellt, zusätzlich noch konservativ und projektiv ist. $(\stackrel{\text{rot}}{\approx})$ bezeichnen wir als die Relation der Konsistenz modulo Rotation.

S0982

VA0983∗ $u \in \mathbb{A}^*,\ v \in \mathbb{A}^*$
D0984∗ $(\stackrel{\text{rot}}{\approx}) := \mathsf{SEI}\ E = (\stackrel{\text{rot}}{\equiv}) \bullet \stackrel{E}{\sim}$
T0985∗ $(\stackrel{\text{rot}}{\approx}) \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$ . . . 0722
T0986 $u \stackrel{\text{rot}}{\approx} v \Leftrightarrow (u \triangleright \mathcal{A}(v)) \stackrel{\text{rot}}{\equiv} (v \triangleright \mathcal{A}(u))$ . . . 0721
T0987 $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*) \subseteq (\stackrel{\text{rot}}{\approx})$ . . . 0728, 0510
T0988 $(\stackrel{\text{rot}}{\approx})$ ist reflexiv . . . 0736, 0510
T0989 $(\stackrel{\text{rot}}{\approx})$ ist symmetrisch . . . 0737, 0514
T0990 $u \sim v \Rightarrow u \stackrel{\text{rot}}{\approx} v$ . . . 0727, 0510
D0991 $D := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)$
T0992 $u \stackrel{\text{rot}}{\approx} v \Leftrightarrow (u \triangleright D) \stackrel{\text{rot}}{\equiv} (v \triangleright D)$ . . . 0760, 0991

B0993

Es gilt $[1,2] \stackrel{\text{rot}}{\approx} [0,1,2,3]$, $[1,2] \stackrel{\text{rot}}{\approx} [3,2,1,0]$, $[1,2,3] \stackrel{\text{rot}}{\approx} [2,3,1]$, $[2,3,1] \stackrel{\text{rot}}{\approx} [0,1,2,3,4]$, $[1,2,3,4,5] \stackrel{\text{rot}}{\approx} [7,8,3,9,4,1]$, $[1,2,3,4] \stackrel{\text{rot}}{\approx} [5,6,7]$, $\neg\ [1,2,3] \stackrel{\text{rot}}{\approx} [2,1,3]$, $\neg\ [1,3,4,5,7] \stackrel{\text{rot}}{\approx} [7,8,9,4,1,6]$, $[5,1,2,7,1] \stackrel{\text{rot}}{\approx} [3,1,4,1,2,3]$, $[1,3,6,9] \stackrel{\text{rot}}{\approx} [9,1,7,8]$, $[1,2,3] \stackrel{\text{rot}}{\approx} [3,4,5,6]$.

S0994

VA0995∗ $u \in \mathbb{A}^*,\ v \in \mathbb{A}^*,\ w \in \mathbb{A}^*,\ u' \in \mathbb{A}^*,\ v' \in \mathbb{A}^*$
T0996 $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v) \wedge u \stackrel{\text{rot}}{\approx} v \Rightarrow u \stackrel{\text{rot}}{\equiv} v$ . . . 0767
T0997 $u \stackrel{\text{rot}}{\equiv} v \Rightarrow u \stackrel{\text{rot}}{\approx} v$ . . . 0774, 0518
T0998 $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v) \wedge \mathcal{A}(v) = \mathcal{A}(w) \wedge u \stackrel{\text{rot}}{\approx} v \wedge v \stackrel{\text{rot}}{\approx} w \Rightarrow u \stackrel{\text{rot}}{\approx} w$ . . . 0782, 0516
T0999 $u \stackrel{\text{rot}}{\approx} v \wedge v \stackrel{\text{rot}}{\equiv} w \Rightarrow u \stackrel{\text{rot}}{\approx} w$ . . . 0794, 0516, 0518, 0680
T1000 $u \stackrel{\text{rot}}{\approx} v \wedge u \stackrel{\text{rot}}{\equiv} u' \wedge v \stackrel{\text{rot}}{\equiv} v' \Rightarrow u' \stackrel{\text{rot}}{\approx} v'$

  A1001 $u \stackrel{\text{rot}}{\approx} v$
  A1002 $u \stackrel{\text{rot}}{\equiv} u' \wedge v \stackrel{\text{rot}}{\equiv} v'$
  G1003 $u' \stackrel{\text{rot}}{\approx} v'$
  T1004 $u \stackrel{\text{rot}}{\approx} v'$ . . . 0999, 1001, 1002
  T1005 $v' \stackrel{\text{rot}}{\approx} u$ . . . 0076, 0989, 1004
  T1006 $v' \stackrel{\text{rot}}{\approx} u'$ . . . 0999, 1005, 1002
  G1007 $\mathbb{T}$ . . . 0076, 0989, 1006

S1008

VA1009∗ $u \in \mathbb{A}^*,\ v \in \mathbb{A}^*,\ X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$
T1010 $u \stackrel{\text{rot}}{\approx} v \Rightarrow (u \triangleright X) \stackrel{\text{rot}}{\approx} (v \triangleright X)$ . . . 0811, 0680
T1011 $(u \triangleright X) \stackrel{\text{rot}}{\approx} v \Leftrightarrow (u \triangleright X) \stackrel{\text{rot}}{\approx} (v \triangleright X)$ . . . 0850, 0680
T1012 $u \stackrel{\text{rot}}{\approx} (v \triangleright X) \Leftrightarrow (u \triangleright X) \stackrel{\text{rot}}{\approx} (v \triangleright X)$ . . . 0851, 0680

T1013 $(u \triangleright X) \overset{rot}{\approx} v \Leftrightarrow u \overset{rot}{\approx} (v \triangleright X)$ 0852, 0680
T1014 $u \overset{rot}{\approx} v \Rightarrow (u \triangleright X) \overset{rot}{\approx} v \wedge u \overset{rot}{\approx} (v \triangleright X)$ 0853, 0680
T1015 v ist einfach $\wedge\ u \overset{rot}{\approx} v \wedge w \sqsubseteq v \Rightarrow u \overset{rot}{\approx} w$ 0854, 0680
T1016 v ist einfach $\wedge\ u \overset{rot}{\approx} v \wedge w \overset{rot}{\sqsubseteq} v \Rightarrow u \overset{rot}{\approx} w$

- **A1017** v ist einfach
- **A1018** $u \overset{rot}{\approx} v$
- **A1019** $w \overset{rot}{\sqsubseteq} v$
- **G1020** $u \overset{rot}{\approx} w$
- **VT1021** $w' \in \mathbb{A}^* \bullet w \overset{rot}{\equiv} w' \wedge w' \sqsubseteq v$ 0697, 1019
- **T1022∗** $w' \in \mathbb{A}^*$ 1021
- **T1023** $u \overset{rot}{\approx} w'$ 1015, 1017, 1018, 1021
- **T1024** $w' \overset{rot}{\equiv} w$ 0513, 1021
- **G1025** $\mathbb{T}$ 0999, 1023, 1024

Nutzen wir die besonderen Eigenschaften der Rotationsäquivalenz aus, so können wir weitere Theoreme ableiten. Die Vorgehensweise ist ganz analog zu Konsistenz modulo Identität. Wieder beschränken wir uns auf die Konsistenz zwischen einfachen Wörtern.

S1026

VA1027∗ $u \in \mathbb{A}^*, v \in \mathbb{A}^*$
A1028 u ist einfach $\wedge$ v ist einfach
D1029 $D := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)$
T1030∗ $D \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ 1029

Für zwei miteinander konsistente Wörter sind die Projektionen auf alle Teilmengen des Schnittalphabets rotationsäquivalent.

T1031 $u \overset{rot}{\approx} v \Rightarrow \forall\, C \bullet C \subseteq D \Rightarrow (u \triangleright C) \overset{rot}{\equiv} (v \triangleright C)$

- **A1032** $u \overset{rot}{\approx} v$
- **VA1033** $C \bullet C \subseteq D$
- **T1034∗** $C \subseteq \mathbb{A}$ 1033
- **G1035** $(u \triangleright C) \overset{rot}{\equiv} (v \triangleright C)$
- **T1036** $(u \triangleright D) \overset{rot}{\equiv} (v \triangleright D)$ 0992, 1029, 1032
- **T1037** $((u \triangleright D) \triangleright C) \overset{rot}{\equiv} (v \triangleright D) \triangleright C)$ 0678, 0680, 1036
- **G1038** $\mathbb{T}$ 1037, 0651, 1033

Das folgende Theorem ist eine abgeschwächte Umkehrung des vorigen und gleichzeitig ein Schlüsseltheorem für die Theorie der zyklischen Ordnungen. Es wird schon hier deutlich, daß dreielementigen Mengen eine wesentliche Rolle zukommt. Die Aussage ist, daß eine hinreichende Bedingung für die Konsistenz zweier einfacher Wörter, die Äquivalenz aller Projektionen auf dreielementige Teilmengen des Schnittalphabets ist. Um die Konsistenz modulo Rotation nachzuweisen, genügt es also die Äquivalenz bestimmter dreistelliger Wörter zu prüfen.

T1039 $(\ \forall\, C \bullet C \subseteq D \wedge |C| = 3 \Rightarrow (u \triangleright C) \overset{rot}{\equiv} (v \triangleright C)\ ) \Rightarrow u \overset{rot}{\approx} v$

- **T1040** $\mathcal{A}(u \triangleright D) = \mathcal{A}(v \triangleright D) = D$ 1029, 0660
- **T1041** $\mathcal{L}(u \triangleright D) = \mathcal{L}(v \triangleright D) = |D|$ 1040, 1028, 0373
- **G1042** $\neg\, u \overset{rot}{\approx} v \Rightarrow (\ \exists\, C \bullet C \subseteq D \wedge |C| = 3 \wedge \neg\, (u \triangleright C) \overset{rot}{\equiv} (v \triangleright C)\ )$
- **A1043** $\neg\, u \overset{rot}{\approx} v$
- **T1044** $\neg\, (u \triangleright D) \overset{rot}{\equiv} (v \triangleright D)$ 0992, 1029, 1043
- **A1045** $\mathcal{L}(u \triangleright D) = 0$
  - **T1046** $\mathcal{L}(v \triangleright D) = 0$ 1041, 1045
  - **T1047** $\neg\, [] \overset{rot}{\equiv} []$ 1044, 0258, 1045, 1046
  - **T1048** $\mathbb{F}$ 1047, 0497

A1049	$\mathcal{L}(u \triangleright D) \neq 0$	
T1050	$\mathcal{L}(u \triangleright D) \geq 1$	1049
T1051	$0 \in \mathcal{I}(u \triangleright D)$	0298, 1050
T1052	$(u \triangleright D)_0 \in \mathcal{A}(v \triangleright D)$	
T1053	$(u \triangleright D)_0 \in \mathcal{A}(u \triangleright D)$	0350, 1051
G1054	$\mathbb{T}$	1040, 1053
VT1055	$n \in \mathcal{I}(v \triangleright D) \bullet (v \triangleright D)_n = (u \triangleright D)_0$	1052,0356
D1056	$u' := (u \triangleright D)$	
D1057	$v' := (v \triangleright D) \gg (-n)$	
T1058	$0 \in \mathcal{I}(u')$	1056, 1051
T1059	$u'_0 = v'_0$	1056, 1057, 0483, 1055
T1060	$\mathcal{A}(v') = \mathcal{A}(v \triangleright D)$	1057, 0486
T1061	$\mathcal{A}(v') \subseteq D$	1060, 0659
T1062	u' ist einfach	1028, 0656
T1063	v' ist einfach	1028, 0656, 0487
T1064	$\mathcal{A}(u') = \mathcal{A}(v')$	1056, 1060, 1040
T1065	$\mathcal{I}(u') = \mathcal{I}(v')$	
T1066	$\mathcal{L}(u') = \lvert\mathcal{A}(u')\rvert$	0373, 1062
T1067	$\mathcal{L}(v') = \lvert\mathcal{A}(v')\rvert$	0373, 1063
T1068	$\mathcal{L}(u') = \mathcal{L}(v')$	1064, 1066, 1067
G1069	$\mathbb{T}$	0299, 1068
D1070$*$	$I := \mathcal{I}(u')$	
T1071$*$	$I = \mathcal{I}(v')$	1065
T1072	$0 \in I$	1058
T1073	$\neg\, v' \stackrel{\text{rot}}{\equiv} u'$	
A1074	$v' \stackrel{\text{rot}}{\equiv} u'$	
T1075	$u' \stackrel{\text{rot}}{\equiv} v'$	0513, 1074
T1076	$v' \stackrel{\text{rot}}{\equiv} (v \triangleright D)$	1057, 0491
T1077	$u' \stackrel{\text{rot}}{\equiv} (v \triangleright D)$	0515, 1075, 1076
T1078	$\mathbb{F}$	1056, 1077, 1044
T1079	$v' \neq u'$	0509, 1073
VT1080	$i \bullet i$ ist minimal in $\{i \in I \bullet u'_i \neq v'_i\}$	
T1081	$\exists\, i \in I \bullet u'_i \neq v'_i$	0359, 1079, 1065
T1082	$\{i \in I \bullet u'_i \neq v'_i\} \neq \emptyset$	1081
T1083	$\{i \in I \bullet u'_i \neq v'_i\} \subseteq \mathbb{N}$	1082
G1084	$\mathbb{T}$	0186, 1083, 1082
T1085	$i \in \{i \in I \bullet u'_i \neq v'_i\}$	0187, 1080
T1086	$i \in I$	1085
T1087	$u'_i \neq v'_i$	1085
T1088	$i \neq 0$	1087, 1059
T1089	$0 < i$	1086, 1088
T1090	$\forall\, j \in I \bullet j < i \Rightarrow u'_j = v'_j$	
T1091	$\forall\, j \in \{i \in I \bullet u'_i \neq v'_i\} \bullet i \leq j$	0188, 1080
T1092	$\forall\, j \in I \bullet u'_j \neq v'_j \Rightarrow i \leq j$	1091
G1093	$\mathbb{T}$	1092
T1094	$\forall\, j \in I \bullet j \neq i \Rightarrow u'_i \neq u'_j$	
T1095	$\forall\, i \in \mathcal{I}(u'), j \in \mathcal{I}(u') \bullet i \neq j \Rightarrow u'_i \neq u'_j$	0372, 1062
G1096	$\mathbb{T}$	1095, 1086
T1097	$\forall\, j \in I \bullet j \neq i \Rightarrow v'_i \neq v'_j$	
T1098	$\forall\, i \in \mathcal{I}(v'), j \in \mathcal{I}(v') \bullet i \neq j \Rightarrow v'_i \neq v'_j$	0372, 1063
G1099	$\mathbb{T}$	1098, 1086
T1100	$\forall\, j \in I \bullet j < i \Rightarrow u'_i \neq v'_j$	1090, 1094
T1101	$\forall\, j \in I \bullet j < i \Rightarrow v'_i \neq u'_j$	1090, 1097
T1102	$\forall\, j \in I \bullet j \leq i \Rightarrow u'_i \neq v'_j$	1100, 1087
T1103	$\forall\, j \in I \bullet j \leq i \Rightarrow v'_i \neq u'_j$	1101, 1087
VT1104	$k \in I \bullet u'_i = v'_k$	

T1105	$u'_i \in \mathcal{A}(u')$	0350, 1086
T1106	$u'_i \in \mathcal{A}(v')$	1105, 1064
G1107	$\mathbb{T}$	0356, 1106
T1108	$i < k$	1102, 1104
VT1109	$l \in I \bullet v'_i = u'_l$	
T1110	$v'_i \in \mathcal{A}(v')$	0350, 1086
T1111	$v'_i \in \mathcal{A}(u')$	1110, 1064
G1112	$\mathbb{T}$	0356, 1111
T1113	$i < l$	1103, 1109
D1114	$u'' := [u'_0, u'_i, u'_l]$	
T1115∗	$u'' \in \mathbb{A}^*$	1114, 1072, 1086, 1109
D1116	$v'' := [v'_0, v'_i, v'_k]$	
T1117∗	$v'' \in \mathbb{A}^*$	1116, 1072, 1086, 1104
D1118	$C := \mathcal{A}(u'')$	
T1119	$C = \{u'_0, u'_i, u'_l\}$	1118, 1114, 0329
T1120	$C = \{v'_0, v'_i, v'_k\}$	1119, 1059, 1104, 1109
T1121	$C = \mathcal{A}(v'')$	1120, 1116, 0329
T1122	$u'_0 \neq u'_i$	1094, 1058, 1088
T1123	$u'_i \neq u'_l$	
T1124	$l \neq i$	1113
G1125	$\mathbb{T}$	1094, 1109, 1124
T1126	$u'_0 \neq u'_l$	
T1127	$v'_0 \neq v'_i$	1097, 1072, 1088
G1128	$\mathbb{T}$	?933.5, 1059, 1109
T1129	$\lvert C \rvert = 3$	1121, 0373
G1130	$\lvert \{u'_0, u'_i, u'_l\} \rvert = 3$	1119
G1131	$\mathbb{T}$	?933.1, 1123, 1126
T1132	$u'' \overset{\text{rot}}{\equiv} (u \triangleright C)$	
T1133	$u' \sqsubseteq u$	1056, 0655
T1134	$u'' \sqsubseteq u'$	1114, 0585 1072, 1086, 1109, 1089, 1113
T1135	$u'' \sqsubseteq u$	0564, 1134, 1133
T1136	$u' = (u \triangleright C)$	1118, 0665, 1028, 1135
G1137	$\mathbb{T}$	0509, 1136
T1138	$(v \triangleright C) \overset{\text{rot}}{\equiv} v''$	
T1139	$(v \triangleright D) \overset{\text{rot}}{\equiv} v'$	0491, 1057
T1140	$v' \overset{\text{rot}}{\equiv} (v \triangleright D)$	0513, 1139
T1141	$(v \triangleright D) \sqsubseteq v$	0655
T1142	$v' \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} v$	0697, 1141, 1140
T1143	$v'' \sqsubseteq v'$	1116, 0585, 1072, 1086, 1104, 1089, 1108
T1144	$v'' \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} v'$	0692, 1143
T1145	$v'' \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} v$	0703, 1144, 1142
T1146	$v'' \overset{\text{rot}}{\equiv} (v \triangleright C)$	1121, 0711, 1028, 1145
G1147	$\mathbb{T}$	0513, 1146
T1148	$C \subseteq D$	
T1149	$\mathcal{A}(v'') \subseteq \mathcal{A}(v')$	0569, 1143
G1150	$\mathbb{T}$	1121, 1149, 1061
T1151	$\neg\, (u \triangleright C) \overset{\text{rot}}{\equiv} (v \triangleright C)$	
A1152	$(u \triangleright C) \overset{\text{rot}}{\equiv} (v \triangleright C)$	
T1153	$\neg\, [u'_0, u'_i, u'_l] \overset{\text{rot}}{\equiv} [u'_0, u'_l, u'_i]$	0506, 1122, 1123, 1126
T1154	$\neg\, [u'_0, u'_i, u'_l] \overset{\text{rot}}{\equiv} [v'_0, v'_i, v'_k]$	1059, 1109, 1104
T1155	$\neg\, u'' \overset{\text{rot}}{\equiv} v''$	1114, 1116, 1154
T1156	$u'' \overset{\text{rot}}{\equiv} (v \triangleright C)$	0515, 1132, 1152
T1157	$u'' \overset{\text{rot}}{\equiv} v''$	0515, 1156, 1138
T1158	$\mathbb{F}$	1155, 1157

G1159 $\mathbb{T}$ . . . 1129, 1148, 1151

Als Spezialfall dieses Theorems sind einfache Wörter, die höchstens zwei Elemente gemeinsam haben, auf jeden Fall konsistent modulo Rotation. Man vergleiche dies mit Theorem 0939

T1160 $|\mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)| < 3 \Rightarrow u \overset{\text{rot}}{\approx} v$

G1161	$\lvert D\rvert < 3 \Rightarrow u \overset{\text{rot}}{\approx} v$	1029
A1162	$\lvert D\rvert < 3$	
G1163	$u \overset{\text{rot}}{\approx} v$	
G1164	$\forall\, C \bullet C \subseteq D \wedge \lvert C\rvert = 3 \Rightarrow (u \triangleright C) \overset{\text{rot}}{\equiv} (v \triangleright C)$	1039
T1165	$\forall\, C \bullet C \subseteq D \Rightarrow \lvert C\rvert < 3$	1162
G1166	$\mathbb{T}$	1165

Man vergleiche auch Theorem 1160 mit 0939 und Theorem 1039 mit 0908. Wir erkennen hier eine Verbindung zwischen Konsistenz und der Wortlänge zwei, sowie zwischen Konsistenz modulo Rotation und Wortlänge drei. Dieser Zusammenhang wird uns während der gesamten Arbeit begleiten.

Analog zum vorigen Abschnitt, stellen wir nun noch einige Verbindungen zwischen der Konsistenzrelation (modulo Rotation) und der Quasiordnung ($\overset{\text{rot}}{\sqsubseteq}$), die Rotationsäquivalenz und Teilwortrelation vereinigte, her.

S1167

VA1168∗ $u \in \mathbb{A}^*, v \in \mathbb{A}^*$

Für einfache Wörter ist ein rotiertes Teilwort konsistent mit dem ursprünglichen Wort.

T1169 v ist einfach $\wedge\, u \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} v \Rightarrow u \overset{\text{rot}}{\approx} v$

A1170	v ist einfach	
A1171	$u \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} v$	
G1172	$u \overset{\text{rot}}{\approx} v$	
VT1173	$w \in \mathbb{A}^* \bullet u \sqsubseteq w \wedge w \overset{\text{rot}}{\equiv} v$	0696, 1171
T1174	$v \overset{\text{rot}}{\equiv} w$	0513, 1173
T1175	w ist einfach	0521, 1170, 1174
G1176	$(u \triangleright \mathcal{A}(v)) \overset{\text{rot}}{\equiv} (v \triangleright \mathcal{A}(u))$	0721
T1177	$\mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(v)$	0708, 1171
G1178	$u \overset{\text{rot}}{\equiv} (v \triangleright \mathcal{A}(u))$	0647, 1177
T1179	$(w \triangleright \mathcal{A}(u)) \overset{\text{rot}}{\equiv} (v \triangleright \mathcal{A}(u))$	0678, 0680, 1174
G1180	$u \overset{\text{rot}}{\equiv} (w \triangleright \mathcal{A}(u))$	0515, 1179
G1181	$u = (w \triangleright \mathcal{A}(u))$	0509
G1182	$\mathbb{T}$	0665, 1170, 1173

Es folgt sofort, daß bzgl. der Quasiordnung ($\overset{\text{rot}}{\sqsubseteq}$) vergleichbare einfache Wörter immer konsistent modulo Rotation sind.

T1183 u ist einfach $\wedge$ v ist einfach $\wedge\, (u \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} v \vee v \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} u) \Rightarrow u \overset{\text{rot}}{\approx} v$

A1184	u ist einfach $\wedge$ v ist einfach	
T1185	$u \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} v \Rightarrow u \overset{\text{rot}}{\approx} v$	1169, 1184
T1186	$v \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} u \Rightarrow v \overset{\text{rot}}{\approx} u$	1169, 1184
T1187	$v \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} u \Rightarrow u \overset{\text{rot}}{\approx} v$	0076, 0989, 1186
G1188	$\mathbb{T}$	1185, 1187

Sind umgekehrt zwei modulo Rotation konsistente Wörter bzgl. des Alphabets vergleichbar, so ist das eine ein rotiertes Teilwort des anderen.

T1189	$\mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(v) \wedge u \overset{rot}{\approx} v \Rightarrow u \overset{rot}{\sqsubseteq} v$		
	A1190	$\mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(v)$	
	A1191	$u \overset{rot}{\approx} v$	
	G1192	$u \overset{rot}{\sqsubseteq} v$	
	G1193	$\exists\, w \in \mathbb{A}^* \bullet u \overset{rot}{\equiv} w \wedge w \sqsubseteq v$	0697
	D1194	$D := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)$	
	T1195*	$D \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	1194
	T1196	$(u \triangleright D) \overset{rot}{\equiv} (v \triangleright D)$	0992, 1194, 1191
	T1197	$D = \mathcal{A}(u)$	1194, 1190
	T1198	$(u \triangleright \mathcal{A}(u)) \overset{rot}{\equiv} (v \triangleright \mathcal{A}(u))$	1197, 1196
	T1199	$u \overset{rot}{\equiv} (v \triangleright \mathcal{A}(u))$	0648, 1198
	T1200	$(v \triangleright \mathcal{A}(u)) \sqsubseteq v$	0655
	G1201	$\mathbb{T}$	1199, 1200

Jetzt betrachten wir noch einmal die allgemeine Konsistenz modulo einer konservativen Relation und spezialisieren das Resultat auf die Rotationsäquivalenz: Zwei miteinander konsistente Wörter unterscheiden sich in den Vorkommen von Elementen aus dem Schnittalphabet nicht.

S1202

VA1203*	$u \in \mathbb{A}^*,\ v \in \mathbb{A}^*,\ E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$		
T1204	E ist konservativ $\wedge\ u \overset{E}{\approx} v \Rightarrow \forall\, x \in \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v) \bullet (OCC\ x\ u) = (OCC\ x\ v)$		
	A1205	E ist konservativ	
	A1206	$u \overset{E}{\approx} v$	
	VA1207	$x \in \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)$	
	G1208	$(OCC\ x\ u) = (OCC\ x\ v)$	
	D1209	$D := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)$	
	T1210	$((u \triangleright D), (v \triangleright D)) \in E$	0760, 1209, 1206
	T1211	$x \in D$	1209, 1207
	T1212	$(OCC\ x\ u) = (OCC\ x\ (u \triangleright D))$	0661, 1211
	T1213	$(OCC\ x\ v) = (OCC\ x\ (v \triangleright D))$	0661, 1211
	G1214	$(OCC\ x\ (u \triangleright D)) = (OCC\ x\ (v \triangleright D))$	1212, 1213
	G1215	$\mathbb{T}$	0390, 1205, 1210
T1216	$u \overset{rot}{\approx} v \Rightarrow \forall\, x \in \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v) \bullet (OCC\ x\ u) = (OCC\ x\ v)$		1204, 0518

Schließlich folgen noch einige Aussagen über die Konsistenz von konkreten, dreistelligen Wörtern, die später wiederholt benötigt werden.

S1217

VA1218*	$a \in \mathbb{A},\ b \in \mathbb{A},\ c \in \mathbb{A}$	
T1219	$[a] \overset{rot}{\approx} [a]$	0997, 0498
T1220	$[a,b] \overset{rot}{\approx} [b,a]$	0997, 0499
A1221	$a \neq b \wedge b \neq c \wedge a \neq c$	
T1222	$\neg\, [a,b,c] \overset{rot}{\approx} [c,b,a]$	0996, 0329, 0505, 1221
T1223	$\neg\, [a,b,c] \overset{rot}{\approx} [a,c,b]$	0996, 0329, 0506, 1221

3.14 Ketten und Zyklen von binären Relationen

Fassen wir eine binäre Relation als Graphen auf, dann sind Wörter geeignet endliche Ketten und endliche Zyklen mit ausgezeichnetem Anfangspunkt darzustellen.

S1224

VA1225∗ $S \in \mathcal{BR}(\mathbb{A})$, $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$, $w \in \mathbb{A}^*$, $u \in \mathbb{A}^*$, $v \in [\mathbb{A}]$, $x \in \mathbb{A}$

Eine Kette ist ein Wort, in dem benachbarte Elemente in der betrachteten binären Relation stehen. Dabei ist die Richtung der Relation zu berücksichtigen.

D1226 w ist eine S -Kette $:\Leftrightarrow \forall\, i \in \mathcal{I}(w),\, j \in \mathcal{I}(w) \bullet j = i + 1 \Rightarrow (w_i, w_j) \in S$

Triviale Ketten sind danach das leere und das einstellige Wort. Man beachte, daß im zweiten Fall das einzelne Element nicht in der Relation vorkommen muß.

T1227 [] ist eine S -Kette

T1228 $\forall\, x \in \mathbb{A} \bullet [x]$ ist eine S -Kette

Abgesehen von dieser Ausnahme stammen die Elemente eine Kette jedoch immer aus der unterliegenden Relation.

T1229 $\forall\, w \in \mathbb{A}^* \bullet$ w ist eine S -Kette $\wedge\, \mathcal{L}(w) \neq 1 \Rightarrow \mathcal{A}(w) \subseteq \mathcal{F}(S)$

Zwei Ketten können zu einer neuen Kette zusammengefügt werden, wenn eine Relation von dem Ende der ersten Kette zum Begin der zweiten Kette besteht.

T1230 u ist eine S -Kette $\wedge$ v ist eine S -Kette $\wedge\, 1 \leq \mathcal{L}(u) \wedge 1 \leq \mathcal{L}(v) \wedge (u_{\mathcal{L}(u)\,-\,1}, v_0) \in S$
$\Rightarrow (u * v)$ ist eine S -Kette

Zyklen sind spezielle, nichtleere Ketten: Zusätzlich fordert man eine Relation vom letzten zum ersten Element des Wortes. Wir fordern hier jedoch nicht die Einfachheit des Wortes, d.h. Zyklen, in denen Elemente wiederholt vorkommen, sind zulässig. Insbesondere kann auch ein Zyklus durch wiederholten Durchlauf vergrößert werden.

D1231 w ist ein S -Zyklus $:\Leftrightarrow$ w ist eine S -Kette $\wedge\, 1 \leq \mathcal{L}(w) \wedge (w_{\mathcal{L}(w)\,-\,1}, w_0) \in S$

Ein Zyklus enthält nur Elemente die in der zugrundeliegenden Relation vorkommen.

T1232 $\forall\, w \in \mathbb{A}^* \bullet$ w ist ein S -Zyklus $\Rightarrow \mathcal{A}(w) \subseteq \mathcal{F}(S)$

Das einstellige Wort ist genau dann ein Zyklus, wenn der Graph der Relation in diesem Element eine Schlinge besitzt.

T1233 [x] ist ein S -Zyklus $\Leftrightarrow (x,x) \in S$

Für Wörter mit einer Länge von mindestens zwei Elementen ist die Zyklus-Eigenschaft durch die Betrachtung der ersten beiden Elemente aller Rotationen überprüfbar.

T1234 $2 \leq \mathcal{L}(w) \Rightarrow$ (w ist ein S -Zyklus $\Leftrightarrow \forall\, w' \bullet w \stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv} w' \Rightarrow (w'_0, w'_1) \in S$)

Schließlich können wir noch aus einer Kette einen Zyklus extrahieren, wenn wir sicherstellen, daß sein letztes zu seinem ersten Element in der Relation steht.

T1235 $\forall\, w \in [\mathbb{A}],\, i \in \mathcal{I}(w),\, j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \leq j \wedge$ w ist eine S -Kette $\wedge\, (w_j, w_i) \in S \Rightarrow$
$(w \triangleleft [i \ldots j])$ ist ein S -Zyklus

Ketten und Zyklen werden uns insbesondere bei der bereits in der Einleitung erwähnten Sicht einer zyklischen Ordnung als Graph der binären Nachfolgerrelation gute Dienste leisten. Die Verhältnisse sind jedoch wieder nicht so einfach wie man meinen könnte: Zum einen sind Ketten und Zyklen endlich und können somit keine Kreise mit unendlicher Zahl von Elementen beschreiben. Zum anderen wird nicht jeder Zyklus einem Kreis in einer zyklischen Ordnung entsprechen, da ein Zyklus die Ordnung intuitiv mehrfach umlaufen kann. Noch unklar ist dabei jedoch, was einen mehrfachen Umlauf einer zyklischen Ordnung von einem einfachen unterscheidet.

Kapitel 4

Verallgemeinerte Relationen

Die im vorigen Kapitel eingeführten Wörter lassen sich als Verallgemeinerung von Paaren auffassen. Paare fassen zwei Elemente zu einen Objekt zusammen, so daß sie durch Projektion wieder getrennt werden können. Zu Wörtern lassen sich eine beliebige, endliche Zahl von Elementen zusammenfassen. Im Gegensatz zu Paaren ist die Länge variabel und bestimmbar, d.h. im Wort codiert. Aus diesem Grunde sind geschachtelte Paare als Repräsentation von Wörtern variabler Länge nicht adäquat.

Auf die gleiche Weise, wie wir eine Menge von Paaren als binäre Relation auffassen, können wir eine Menge von Wörtern als verallgemeinerte Relation bezeichnen. Die binären Relationen (genauer gesagt eine äquivalente Repräsentation) erhält man, indem man in der verallgemeinerten Relation nur Wörter der Länge zwei zuläßt.

Von nun an sprechen wir von verallgemeinerten Relationen kurz als Relationen und bezeichnen die konventionellen Relationen der Mengenlehre explizit als binäre Relationen, wenn die Gefahr einer Verwechslung besteht. Es folgt die formale Definition: $\mathcal{R}^*(\mathrm{X})$ ist die Menge der Relationen auf X. $\mathcal{R}^{\mathrm{n}}(\mathrm{X})$ enthält die n-stelligen Relationen auf X.

S1236

VA1237 $\mathrm{X} \in \mathcal{P}(\mathbb{A}),\ \mathrm{n} \in \mathbb{N}$
D1238∗ $\mathcal{R}^*(\mathrm{X}) := \mathcal{P}(\mathrm{X}^*)$
D1239∗ $\mathcal{R}^{\mathrm{n}}(\mathrm{X}) := \mathcal{P}(\mathrm{X}^{\mathrm{n}})$

Man beachte, daß eine Relation Wörter verschiedener Länge aufnehmen kann. Eine n-stellige Relation enthält dagegen nur Wörter der Länge n.

B1240

Eine endliche Relation auf $\mathbb{N}$ ist $\{[0,1,2,3], [3,2,1], [1], []\}$. Eine unendliche 4-stellige Relation auf $\mathbb{Z}$ ist $\{[\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{i} - \mathrm{j}, \mathrm{i} + \mathrm{j}] \bullet (\mathrm{i,j}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$. Eine Relation, die keine n-stellige Relation für ein n ist, wird durch $\mathbb{N}^*$ oder auch durch die Teilmenge $\{[0,\ldots,\mathrm{n}] \bullet \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$ gegeben.

Im folgenden definieren wir auf naheliegende Weise das Alphabet $\mathcal{A}(\mathrm{R})$ einer Relation als Vereinigung der Alphabete aller darin enthaltenen Wörter. Für binäre Relationen R entspricht dies der $\mathcal{F}(\mathrm{R})$ - Funktion. Wir bezeichnen die Elemente in $\mathcal{A}(\mathrm{R})$ auch als Elemente der Relation R, während wir die Elemente der Menge R als Wörter der Relation R bezeichnen.

S1241

VA1242 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
D1243 $\mathcal{A}(\mathrm{R}) := \bigcup \{\mathcal{A}(\mathrm{w}) \bullet \mathrm{w} \in \mathrm{R}\}$

T1244* $\mathcal{A}(\mathrm{R}) \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$
T1245 $\forall\ \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathcal{A}(\mathrm{w}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$
T1246 $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}' \Rightarrow \mathcal{A}(\mathrm{R}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R}')$
T1247 $\mathcal{A}(\mathrm{R} \cup \mathrm{R}') = \mathcal{A}(\mathrm{R}) \cup \mathcal{A}(\mathrm{R}')$
T1248 $\forall\ \mathrm{w} \in \mathbb{A}^* \bullet \mathcal{A}(\{\mathrm{w}\}) = \mathcal{A}(\mathrm{w})$

Eine andere Sichtweise auf Relationen dieser Art, ist sie als Verallgemeinerung von formalen Sprachen aufzufassen. Eine formale Sprache ist eine Menge von Wörtern über einem endlichen Alphabet. Die Verallgemeinerung liegt darin, das die Endlichkeit des Alphabets aufgegeben wird. Obwohl wir Relationen zunächst allgemein behandeln, werden wir uns später auch für endliche Relationen interessieren, deren Alphabet ebenfalls endlich ist, womit es sich tatsächlich um formale Sprachen handelt.

Wie bei binären Relationen, können wir eine Relation auf eine Menge einschränken.

S1249
VA1250 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ \mathrm{X} \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$
D1251 $\mathrm{R}|\mathrm{X} := \{\mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathcal{A}(\mathrm{w}) \subseteq \mathrm{X}\}$
T1252* $(\mathrm{R}|\mathrm{X}) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
T1253 $(\mathrm{R}|\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{R}$
T1254 $\mathcal{A}(\mathrm{R}|\mathrm{X}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$
T1255 $\mathcal{A}(\mathrm{R}|\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{X}$

Ferner ist es sinnvoll die Länge einer Relation, als Länge des maximalen Wortes definieren. Man beachte: Die leere Relation hat keine Länge, und auch in anderen Fällen muß die Länge nicht immer definiert sein. Analog zur Einschränkung auf ein Alphabet, können wir eine Relation auch auf eine maximale Länge einschränken.

S1256
VA1257 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ \mathrm{n} \in \mathbb{N}$
D1258 $\mathcal{L}(\mathrm{R}) := \iota\ \mathrm{n} \bullet \mathrm{n}$ ist maximal in $\{\mathcal{L}(\mathrm{w}) \bullet \mathrm{w} \in \mathrm{R}\}$
T1259* $\downarrow(\mathcal{L}(\mathrm{R})) \Rightarrow \mathcal{L}(\mathrm{R}) \in \mathbb{N}$
T1260 R ist endlich $\Rightarrow \downarrow(\mathcal{L}(\mathrm{R}))$
T1261 $\downarrow(\mathcal{L}(\mathrm{R})) \Rightarrow \forall\ \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathcal{L}(\mathrm{w}) \leq \mathcal{L}(\mathrm{R})$
T1262 $\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq \mathrm{n} \Leftrightarrow \forall\ \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathcal{L}(\mathrm{w}) \leq \mathrm{n}$

S1263
VA1264 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ \mathrm{X} \in \mathcal{P}(\mathbb{A}),\ \mathrm{n} \in \mathbb{N},\ \mathrm{m} \in \mathbb{N}$
D1265 $\mathrm{R}|\mathrm{n} := \{\mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathcal{L}(\mathrm{w}) \leq \mathrm{n}\}$
T1266* $\mathrm{R}|\mathrm{n} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
T1267 $(\mathrm{R}|\mathrm{n}) \subseteq \mathrm{R}$
T1268 $\mathcal{L}(\mathrm{R}|\mathrm{n}) \leq \mathrm{n}$
T1269 $\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq \mathrm{n} \Rightarrow \mathrm{R} = (\mathrm{R}|\mathrm{n})$
T1270 $\mathrm{n} \leq \mathrm{m} \Rightarrow (\mathrm{R}|\mathrm{n}) \subseteq (\mathrm{R}|\mathrm{m})$
T1271 $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}' \Rightarrow (\mathrm{R}|\mathrm{n}) \subseteq (\mathrm{R}'|\mathrm{n})$
T1272 X ist endlich $\Rightarrow (\mathrm{X}^*|\mathrm{n})$ ist endlich
T1273 $[] \in \mathrm{R} \Leftrightarrow [] \in (\mathrm{R}|\mathrm{n})$
T1274 $1 \leq \mathrm{n} \Rightarrow ([\mathrm{a}] \in \mathrm{R} \Leftrightarrow [\mathrm{a}] \in (\mathrm{R}|\mathrm{n})\ )$
T1275 $2 \leq \mathrm{n} \Rightarrow ([\mathrm{a,b}] \in \mathrm{R} \Leftrightarrow [\mathrm{a,b}] \in (\mathrm{R}|\mathrm{n})\ )$
T1276 $3 \leq \mathrm{n} \Rightarrow ([\mathrm{a,b,c}] \in \mathrm{R} \Leftrightarrow [\mathrm{a,b,c}] \in (\mathrm{R}|\mathrm{n})\ )$

Die schon für Wörter definierte Einfachheit übertragt sich auf natürliche Weise auf Relationen, die einfach sind, wenn sie nur einfache Wörter enthalten. Jede Teilmenge einer einfachen Relation ist somit einfach.

S1277

VA1278∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

D1279 R ist einfach $:\Leftrightarrow \forall\, \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{w}$ ist einfach

Einfachheit ist eine Eigenschaft, die sich von einer Relation auf alle ihre Teilrelationen überträgt.

T1280 R ist einfach $\Leftrightarrow \forall\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R}' \subseteq \mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{R}'$ ist einfach 1279

Außerdem wird noch der Begriff der totalen Relation eingeführt: Eine Relation ist total gdw. jedes Paar aus dem Alphabet in einem Wort vorkommt. Jede Obermenge einer totaler Relation ist total, wenn sich das Alphabet nicht verändert.

S1281

VA1282∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

D1283 R ist total $:\Leftrightarrow \forall\, \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}),\, \mathrm{y} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}) \bullet \exists\, \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{w}) \wedge \mathrm{y} \in \mathcal{A}(\mathrm{w})$

Anders als bei der Einfachheit (Theorem 1280) ist jede Erweiterung einer totalen Relation mit gleichem Alphabet total.

T1284 R ist total $\Rightarrow \forall\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathcal{A}(\mathrm{R}') = \mathcal{A}(\mathrm{R}) \wedge \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}' \Rightarrow \mathrm{R}'$ ist total 1283

Relationen, die nur ein Wort enthalten, sind trivialerweise total.

T1285 $\forall\, \mathrm{w} \in \mathbb{A}^* \bullet \{\mathrm{w}\}$ ist total

VA1286∗ $\mathrm{w} \in \mathbb{A}^*$
G1287 $\forall\, \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\{\mathrm{w}\}),\, \mathrm{y} \in \mathcal{A}(\{\mathrm{w}\}) \bullet \exists\, \mathrm{w} \in \{\mathrm{w}\} \bullet \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{w}) \wedge \mathrm{y} \in \mathcal{A}(\mathrm{w})$ 1283
T1288 $\mathcal{A}(\{\mathrm{w}\}) = \mathcal{A}(\mathrm{w})$ 1243
G1289 $\mathbb{T}$ 1288

B1290

Wir setzen $\mathrm{R} = \{[0{,}1{,}3], [0{,}0{,}3], [2{,}3], [3{,}0{,}2], [1{,}2{,}3]\}$. Wir haben das Alphabet $\mathcal{A}(\mathrm{R}) = \{0{,}1{,}2{,}3\}$. R ist nicht einfach, da $[0{,}0{,}3] \in \mathrm{R}$ nicht einfach ist. R ist jedoch total, da jedes Paar aus $\{0{,}1{,}2{,}3\}$ in einem Wort vorkommt. $\mathrm{R}' = \{[0{,}1], [2{,}3{,}4]\}$ mit $\mathcal{A}(\mathrm{R}) = \{0{,}1{,}2{,}3{,}4\}$ ist einfach, aber nicht total, da die Elemente 0 und 2 nicht gemeinsam in einem Wort enthalten sind. Ferner haben wir natürlich $\mathcal{L}(\mathrm{R}) = \mathcal{L}(\mathrm{R}') = 3$.

4.1 Endlichkeit

Hier werden kurz einige Endlichkeitseigenschaften von Relationen zusammengestellt. Die stärkste ist die Endlichkeit der Relation selbst.

S1291

VA1292∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Eine Relation mit endlichem Alphabet ist eine formale Sprache. Endlichkeit der Relation impliziert natürlich Endlichkeit des Alphabets, da Wörter in unserem Sinne immer endlich sind.

T1293 R ist endlich $\Rightarrow \mathcal{A}(\mathrm{R})$ ist endlich

A1294 R ist endlich
G1295 $\mathcal{A}(\mathrm{R})$ ist endlich
G1296 $\bigcup \{\mathcal{A}(\mathrm{w}) \bullet \mathrm{w} \in \mathrm{R}\}$ ist endlich 1243
T1297 $\forall\, \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathcal{A}(\mathrm{w})$ ist endlich 0240

G1298 $\mathbb{T}$ 1294, 1297

Sicherlich ist die Menge aller einfachen Wörter über einem endlichen Alphabet endlich. Hieraus folgt unmittelbar für einfache Relationen mit endlichem Alphabet die Endlichkeit der Relation selbst.

T1299 $\forall\, X \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \bullet X$ ist endlich $\Rightarrow \{w \in \mathbb{A}^* \bullet w$ ist einfach $\wedge\, \mathcal{A}(w) \subseteq X\}$ ist endlich

T1300 $\mathcal{A}(R)$ ist endlich $\wedge$ R ist einfach $\Rightarrow$ R ist endlich

A1301 $\mathcal{A}(R)$ ist endlich

A1302 R ist einfach

G1303 R ist endlich

T1304 $R \subseteq \mathbb{A}^*$ 1292

T1305 $\forall\, w \in R \bullet w$ ist einfach 1279, 1302

T1306 $\forall\, w \in R \bullet \mathcal{A}(w) \subseteq \mathcal{A}(R)$ 1245

T1307 $R \subseteq \{w \in \mathbb{A}^* \bullet w$ ist einfach $\wedge\, \mathcal{A}(w) \subseteq \mathcal{A}(R)\}$ 1304, 1305, 1306

T1308 $\{w \in \mathbb{A}^* \bullet w$ ist einfach $\wedge\, \mathcal{A}(w) \subseteq \mathcal{A}(R)\}$ ist endlich 1299, 1301

G1309 $\mathbb{T}$ 1307, 1308

4.2 Abgeschlossenheit

Nun kommen wir zu einigen für unsere Zwecke zentralen Abgeschlossenheitseigenschaften von Relationen. Wir formulieren die Abgeschlossenheit zuerst allgemein bezüglich einer gegebenen binären Relation über Wörtern. Diese binäre Relation ist sinnvollerweise eine Quasiordnung, kann also auch eine Ordnung oder Äquivalenzrelation sein. Interessieren werden uns jedoch vor allem die Abgeschlossenheit bzgl. der konkreten Quasiordnungen $(\sqsupseteq)$, $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$, $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})$ und $(\overset{\mathrm{rev}}{\equiv})$.

S1310

VA1311$*$ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$

D1312 R ist E -abgeschlossen $:\Leftrightarrow \forall\, u,v \bullet u \in R \wedge (u,v) \in E \Rightarrow v \in R$

Eine andere Schreibweise verwendet das relationale Bild.

T1313 R ist E -abgeschlossen $\Leftrightarrow \forall\, u \in R \bullet E[\{u\}] \subseteq R$ 1312

T1314 R ist E -abgeschlossen $\Leftrightarrow E[R] \subseteq R$ 1313

Die Teilwortabgeschlossenheit oder Abgeschlossenheit bzgl. $(\sqsupseteq)$ bedeutet, daß mit jedem Wort ist auch jedes seiner Teilwörter in der Relation enthalten ist.

T1315 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\Leftrightarrow \forall\, u,v \bullet u \in R \wedge v \sqsubseteq u \Rightarrow v \in R$ 1312

T1316 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\Rightarrow ([] \in R \Leftrightarrow R \neq \emptyset)$

A1317 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen

G1318 $R \neq \emptyset \Rightarrow [] \in R$

A1319 $R \neq \emptyset$

G1320 $[] \in R$

VT1321 $w \in R$ 1319

T1322$*$ $w \in \mathbb{A}^*$ 1321

T1323 $[] \sqsubseteq w$ 0548

G1324 $\mathbb{T}$ 1315, 1317, 1321, 1323

In diesem Fall ist das Alphabet gerade durch die einstelligen Wörter bestimmt.

T1325 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\Rightarrow$ ($x \in \mathcal{A}(R) \Leftrightarrow [x] \in R$)

A1326 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen

T1327 $x \in \mathcal{A}(R) \Rightarrow [x] \in R$

  A1328 $x \in \mathcal{A}(R)$

  G1329 $[x] \in R$

  VT1330 $w \in R \bullet x \in \mathcal{A}(w)$ . . . 1243, 1328

  T1331∗ $w \in \mathbb{A}^*$ . . . 1330

  VT1332 $i \in \mathcal{I}(w) \bullet w_i = x$ . . . 0356, 1330

  T1333 $[w_i] \sqsubseteq w$ . . . 0583, 1332

  T1334 $[w_i] \in R$ . . . 1315, 1326, 1330, 1333

  G1335 $\mathbb{T}$ . . . 1334, 1332

T1336 $[x] \in R \Rightarrow x \in \mathcal{A}(R)$

  A1337 $[x] \in R$

  G1338 $x \in \mathcal{A}(R)$

  T1339 $\mathcal{A}([x]) \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 1245, 1337

  G1340 $\mathbb{T}$ . . . 0327, 1339

G1341 $\mathbb{T}$ . . . 1327, 1336

Die Spiegelungsabgeschlossenheit oder Abgeschlossenheit bzgl. $(\overset{\text{rev}}{\equiv})$ gilt gdw. mit jedem Wort auch jedes gespiegelte Wort in der Relation steht.

T1342 R ist $(\overset{\text{rev}}{\equiv})$ -abgeschlossen $:\Leftrightarrow \forall\, u,v \bullet u \in R \wedge u \overset{\text{rev}}{\equiv} v \Rightarrow v \in R$ . . . 1312

Die Rotationsabgeschlossenheit oder Abgeschlossenheit bzgl. $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ fordert, daß mit jedem Wort auch jedes daraus durch Rotation generierbare in der Relation enthalten ist.

T1343 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\Leftrightarrow \forall\, u,v \bullet u \in R \wedge u \overset{\text{rot}}{\equiv} v \Rightarrow v \in R$ . . . 1312

T1344 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\Rightarrow ([x,y] \in R \Leftrightarrow [y,x] \in R)$

A1345 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen

G1346 $[x,y] \in R \Leftrightarrow [y,x] \in R$

T1347 $[x,y] \in R \Rightarrow [y,x] \in R$

  A1348 $[x,y] \in R$

  G1349 $[y,x] \in R$

  T1350∗ $x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A}$ . . . 1348

  T1351 $[x,y] \overset{\text{rot}}{\equiv} [y,x]$ . . . 0499

  G1352 $\mathbb{T}$ . . . 1343, 1345, 1348, 1351

G1353 $\mathbb{T}$ . . . 1347

Als Kombination von Teilwort- und Rotationsabgeschlossenheit interessieren wir uns schließlich noch die Abgeschlossenheit bzgl. rotierter Teilwörter oder Abgeschlossenheit bzgl. $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$.

B1354

{[0,1,2], [0,1], [0,2], [0,2], [0], [1], [2], []} ist teilwortabgeschlossen. {[0,1,2,3], [3,2,1,0]} ist spiegelungsabgeschlossen. {[0,1,2,3], [1,2,3,0], [2,3,0,1], [3,0,1,2]} ist rotationsabgeschlossen. {[0,1], [1,0], [0], [1], []} ist $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$ -abgeschlossen.

Zur Bezeichnung des Abschlusses einer beliebigen Relation R unter einer binären Relation E verwenden wir das relationale Bild E[R].

S1355

VA1356∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*),\ E' \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$

T1357∗ $(\overset{\text{rot}}{\equiv})[R] \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T1358∗ $(\sqsupseteq)[R] \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T1359∗ $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[R] \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T1360 $(\overset{\text{rot}}{\equiv})[R] \subseteq (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[R]$ . . . 0059, 0695

T1361 $(\sqsupseteq)[R] \subseteq (\overset{rot}{\sqsupseteq})[R]$ 0059, 0693

Der $(\overset{rot}{\sqsupseteq})$ -Abschluß ergibt sich als Kombination von $(\sqsupseteq)$ -Abschluß und $(\overset{rot}{\equiv})$ -Abschluß in beliebiger Reihenfolge.

T1362 $(\overset{rot}{\sqsupseteq})[R] = (\sqsupseteq)[(\overset{rot}{\equiv})[R]]$

- **T1363** $\forall\, u \bullet u \in (\overset{rot}{\sqsupseteq})[R] \Rightarrow u \in (\sqsupseteq)[(\overset{rot}{\equiv})[R]]$
  - **VA1364** $u \in (\overset{rot}{\sqsupseteq})[R]$
  - **G1365** $u \in (\sqsupseteq)[(\overset{rot}{\equiv})[R]]$
  - **VT1366** $v \in R \bullet u \overset{rot}{\sqsubseteq} v$ 1364
  - **T1367∗** $u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$ 1366
  - **VT1368** $w \in \mathbb{A}^* \bullet u \sqsubseteq w \wedge w \overset{rot}{\equiv} v$ 0696, 1366
  - **T1369** $v \overset{rot}{\equiv} w$ 0513, 1368
  - **T1370** $w \in (\overset{rot}{\equiv})[R]$ 1366, 1369
  - **G1371** $\mathbb{T}$ 1370, 1368
- **T1372** $\forall\, u \bullet u \in (\sqsupseteq)[(\overset{rot}{\equiv})[R]] \Rightarrow u \in (\overset{rot}{\sqsupseteq})[R]$
  - **VA1373** $u \in (\sqsupseteq)[(\overset{rot}{\equiv})[R]]$
  - **G1374** $u \in (\overset{rot}{\sqsupseteq})[R]$
  - **VT1375** $w \in (\overset{rot}{\equiv})[R] \bullet u \sqsubseteq w$ 1373
  - **VT1376** $v \in R \bullet v \overset{rot}{\equiv} w$ 1375
  - **T1377∗** $u \in \mathbb{A}^* \wedge v \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge w \in \mathbb{A}^*$ 1373, 1376
  - **T1378** $w \overset{rot}{\equiv} v$ 0513, 1376
  - **T1379** $u \overset{rot}{\sqsubseteq} v$ 0696, 1375, 1378
  - **G1380** $\mathbb{T}$ 1376, 1379
- **G1381** $\mathbb{T}$ 1363, 1372

T1382 $(\overset{rot}{\sqsupseteq})[R] = (\overset{rot}{\equiv})[(\sqsupseteq)[R]]$

- **T1383** $\forall\, u \bullet u \in (\overset{rot}{\sqsupseteq})[R] \Rightarrow u \in (\overset{rot}{\equiv})[(\sqsupseteq)[R]]$
  - **VA1384** $u \in (\overset{rot}{\sqsupseteq})[R]$
  - **G1385** $u \in (\overset{rot}{\equiv})[(\sqsupseteq)[R]]$
  - **VT1386** $v \in R \bullet u \overset{rot}{\sqsubseteq} v$ 1384
  - **T1387∗** $u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$ 1386
  - **VT1388** $w \in \mathbb{A}^* \bullet u \overset{rot}{\equiv} w \wedge w \sqsubseteq v$ 0697, 1386
  - **T1389** $w \overset{rot}{\equiv} u$ 0513, 1388
  - **T1390** $w \in (\sqsupseteq)[R]$ 1386, 1389
  - **G1391** $\mathbb{T}$ 1390, 1388
- **T1392** $\forall\, u \bullet u \in (\overset{rot}{\equiv})[(\sqsupseteq)[R]] \Rightarrow u \in (\overset{rot}{\sqsupseteq})[R]$
  - **VA1393** $u \in (\overset{rot}{\equiv})[(\sqsupseteq)[R]]$
  - **G1394** $u \in (\overset{rot}{\sqsupseteq})[R]$
  - **VT1395** $w \in (\sqsupseteq)[R] \bullet w \overset{rot}{\equiv} u$ 1393
  - **VT1396** $v \in R \bullet w \sqsubseteq v$ 1395
  - **T1397∗** $u \in \mathbb{A}^* \wedge v \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge w \in \mathbb{A}^*$ 1393, 1396
  - **T1398** $u \overset{rot}{\equiv} w$ 0513, 1395
  - **T1399** $u \overset{rot}{\sqsubseteq} v$ 0697, 1398, 1396
  - **G1400** $\mathbb{T}$ 1396, 1399
- **G1401** $\mathbb{T}$ 1383, 1392

T1402 $(\sqsupseteq)[(\overset{rot}{\equiv})[R]] = (\overset{rot}{\equiv})[(\sqsupseteq)[R]]$ 1362, 1382

Die Abschlußoperatoren sind monoton.

T1403 $R \subseteq R' \Rightarrow E[R] \subseteq E[R']$ 0059

Enthält die binäre Relation E die Identität, so sind die Abschlüsse Erweiterungen von R.

T1404 $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*) \subseteq \mathrm{E} \Rightarrow \mathrm{R} \subseteq \mathrm{E}[\mathrm{R}]$

- **A1405** $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*) \subseteq \mathrm{E}$
- **G1406** $\forall$ w $\in$ R $\bullet$ w $\in$ E[R]
- **VA1407** w $\in$ R
- **G1408** w $\in$ E[R]
- **T1409**$*$ w $\in \mathbb{A}^*$ ... 1407
- **T1410** (w,w) $\in$ E ... 1405
- **G1411** $\mathbb{T}$ ... 1407, 1410

T1412 R $\subseteq (\overset{\text{rot}}{\equiv})$[R] ... 1404, 0510
T1413 R $\subseteq (\sqsupseteq)$[R] ... 1404, 0562
T1414 R $\subseteq (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[R] ... 1404, 0701

Ist eine Menge R schon bzgl. einer solchen binären Relation, abgeschlossen, so wird durch den Abschluß nichts verändert.

T1415 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\Rightarrow (\overset{\text{rot}}{\equiv})$[R] = R ... 1314, 1412
T1416 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\Rightarrow (\sqsupseteq)$[R] = R ... 1314, 1413
T1417 R ist $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$ -abgeschlossen $\Rightarrow (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[R] = R ... 1314, 1414

Aufgrund der Transitivität handelt es sich bei $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$[R], $(\sqsupseteq)$[R] und $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[R] tatsächlich um Abschlußoperationen.

T1418 E ist transitiv $\Rightarrow$ E[E[R]] $\subseteq$ E[R]

- **A1419** E ist transitiv
- **G1420** $\forall$ w $\in$ E[E[R]] $\bullet$ w $\in$ E[R]
- **VA1421** w $\in$ E[E[R]]
- **G1422** w $\in$ E[R]
- **VT1423** v $\in$ E[R] $\bullet$ (v,w) $\in$ E ... 1421
- **VT1424** u $\in$ R $\bullet$ (u,v) $\in$ E ... 1423
- **T1425**$*$ u $\in \mathbb{A}^* \wedge$ v $\in \mathbb{A}^* \wedge$ w $\in \mathbb{A}^*$ ... 1423, 1424
- **T1426** (u,w) $\in$ E ... 0084, 1424, 1423
- **G1427** $\mathbb{T}$ ... 1424, 1426

T1428 $(\overset{\text{rot}}{\equiv})[(\overset{\text{rot}}{\equiv})$[R]] = $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$[R] ... 1418, 0516
T1429 $(\sqsupseteq)[(\sqsupseteq)$[R]] = $(\sqsupseteq)$[R] ... 1418, 0565
T1430 $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[R]] = $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[R] ... 1418, 0704

Der Abschluß einer Menge R ist unter einer binären Relation E bzgl. einer Teilrelation E' abgeschlossen, sofern E transitiv ist und die Identität enthält.

T1431 E ist transitiv $\wedge$ E' $\subseteq$ E $\Rightarrow$ E[R] ist E' -abgeschlossen

- **A1432** E ist transitiv
- **A1433** E' $\subseteq$ E
- **G1434** E[R] ist E' -abgeschlossen
- **G1435** $\forall$ u,v $\bullet$ u $\in$ E[R] $\wedge$ (u,v) $\in$ E' $\Rightarrow$ v $\in$ E[R] ... 1312
- **VA1436** u,v $\bullet$ u $\in$ E[R]
- **A1437** (u,v) $\in$ E'
- **G1438** v $\in$ E[R]
- **T1439** (u,v) $\in$ E ... 1433, 1437
- **T1440** v $\in$ E[E[R]] ... 1436, 1439
- **G1441** $\mathbb{T}$ ... 1418, 1432, 1440

T1442 E ist transitiv $\Rightarrow$ E[R] ist E -abgeschlossen ... 1431

T1443 $(\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]$ ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen . . . 1442, 0516
T1444 $(\sqsupseteq)[\mathrm{R}]$ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen . . . 1442, 0565
T1445 $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}]$ ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen . . . 1431, 0516, 0695, 0078, 0514
T1446 $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}]$ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen . . . 1431, 0565, 0693
T1447 $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}]$ ist $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$ -abgeschlossen . . . 1442, 0704
T1448 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\Leftrightarrow \mathrm{R} = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]$ . . . 1415, 1443
T1449 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\Leftrightarrow \mathrm{R} = (\sqsupseteq)[\mathrm{R}]$ . . . 1416, 1444
T1450 R ist $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$ -abgeschlossen $\Leftrightarrow \mathrm{R} = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}]$ . . . 1417, 1447

Aufgrund der Beziehung $(\overset{\text{rot}}{\equiv})[(\sqsupseteq)[\mathrm{R}]] = (\sqsupseteq)[(\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]]$ aus Theorem 1402 sind die Eigenschaften der Teilwort- und Rotationsabgeschlossenheit voneinander unabhängig. Die eine Eigenschaft wird durch den Abschluß bzgl. der anderen Relation nicht zerstört.

T1451 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\Rightarrow (\sqsupseteq)[\mathrm{R}]$ ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen

G1452 $\mathrm{R} = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}] \Rightarrow (\sqsupseteq)[\mathrm{R}] = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[(\sqsupseteq)[\mathrm{R}]]$ . . . 1448
A1453 $\mathrm{R} = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]$
G1454 $(\sqsupseteq)[\mathrm{R}] = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[(\sqsupseteq)[\mathrm{R}]]$
G1455 $(\sqsupseteq)[(\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]] = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[(\sqsupseteq)[\mathrm{R}]]$ . . . 1453
G1456 $\mathbb{T}$ . . . 1402

T1457 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\Rightarrow (\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]$ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen

G1458 $\mathrm{R} = (\sqsupseteq)[\mathrm{R}] \Rightarrow (\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}] = (\sqsupseteq)[(\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]]$ . . . 1449
A1459 $\mathrm{R} = (\sqsupseteq)[\mathrm{R}]$
G1460 $(\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}] = (\sqsupseteq)[(\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]]$
G1461 $(\overset{\text{rot}}{\equiv})[(\sqsupseteq)[\mathrm{R}]] = (\sqsupseteq)[(\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]]$ . . . 1459
G1462 $\mathbb{T}$ . . . 1402

Abgeschlossenheit bzgl. rotierter Teilwörter umfaßt natürlich beide Abgeschlossenheitseigenschaften.

T1463 R ist $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$ -abgeschlossen $\Leftrightarrow$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen

A1464 R ist $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$ -abgeschlossen
  T1465 $\mathrm{R} = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}]$ . . . 1450, 1464
  T1466 $\mathrm{R} = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[(\sqsupseteq)[\mathrm{R}]]$ . . . 1382, 1465
  T1467 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen . . . 1443, 1466
  T1468 $\mathrm{R} = (\sqsupseteq)[(\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]]$ . . . 1362, 1465
  T1469 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen . . . 1444, 1468
A1470 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen
  T1471 $\mathrm{R} = (\sqsupseteq)[\mathrm{R}] \wedge \mathrm{R} = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]$ . . . 1449, 1448
  T1472 $\mathrm{R} = (\sqsupseteq)[(\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]]$ . . . 1471
  T1473 $\mathrm{R} = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}]$ . . . 1362, 1472
  T1474 R ist $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$ -abgeschlossen . . . 1447, 1473
G1475 $\mathbb{T}$ . . . 1467, 1469, 1474

Ferner werden durch Abschlußbildung bzgl. $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ und $(\sqsupseteq)$ das Alphabet und die Eigenschaften der Einfachheit, Endlichkeit und Totalität nicht verändert.

S1476
VA1477∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T1478	$\mathcal{A}((\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}]) = \mathcal{A}(\mathrm{R})$	
T1479	$\mathcal{A}(\mathrm{R}) \subseteq \mathcal{A}((\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}])$	1246, 1414
T1480	$\mathcal{A}((\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}]) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	
G1481	$\forall\, \mathrm{x} \in \mathcal{A}((\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}]) \bullet \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$	
VA1482	$\mathrm{x} \in \mathcal{A}((\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}])$	
G1483	$\mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$	
VT1484	$\mathrm{u} \in (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}] \bullet \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{u})$	1243, 1482
VT1485	$\mathrm{v} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{u} \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} \mathrm{v}$	1484
T1486$*$	$\mathrm{u} \in \mathbb{A}^* \wedge \mathrm{v} \in \mathbb{A}^*$	1485
T1487	$\mathcal{A}(\mathrm{u}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{v})$	0708, 1485
T1488	$\mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{v})$	1487, 1484
G1489	$\mathbb{T}$	1243, 1488, 1485
G1490	$\mathbb{T}$	1479, 1480
T1491	$\mathcal{A}((\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]) = \mathcal{A}(\mathrm{R})$	
T1492	$\mathcal{A}(\mathrm{R}) \subseteq \mathcal{A}((\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}])$	1246, 1412
T1493	$\mathcal{A}((\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]) \subseteq \mathcal{A}((\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}])$	1246, 1360
T1494	$\mathcal{A}((\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	1493, 1478
G1495	$\mathbb{T}$	1492, 1494
T1496	$\mathcal{A}((\sqsupseteq)[\mathrm{R}]) = \mathcal{A}(\mathrm{R})$	
T1497	$\mathcal{A}(\mathrm{R}) \subseteq \mathcal{A}((\sqsupseteq)[\mathrm{R}])$	1246, 1413
T1498	$\mathcal{A}((\sqsupseteq)[\mathrm{R}]) \subseteq \mathcal{A}((\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}])$	1246, 1361
T1499	$\mathcal{A}((\sqsupseteq)[\mathrm{R}]) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	1498, 1478
G1500	$\mathbb{T}$	1497, 1499
T1501	R ist endlich $\Rightarrow (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}]$ ist endlich	
A1502	R ist endlich	
G1503	$(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}]$ ist endlich	
T1504$*$	$\downarrow(\mathcal{L}(\mathrm{R}))$	1260, 1502
T1505	$\mathcal{A}(\mathrm{R})$ ist endlich	1293, 1502
T1506	$(\mathcal{A}(\mathrm{R})^* \vert \mathcal{L}(\mathrm{R}))$ ist endlich	1272, 1505
T1507	$(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}] \subseteq (\mathcal{A}(\mathrm{R})^* \vert \mathcal{L}(\mathrm{R}))$	
G1508	$\forall\, \mathrm{u} \in (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}] \bullet \mathrm{u} \in (\mathcal{A}(\mathrm{R})^* \vert \mathcal{L}(\mathrm{R}))$	
VA1509	$\mathrm{u} \in (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}]$	
G1510	$\mathrm{u} \in \mathcal{A}(\mathrm{R})^* \wedge \mathcal{L}(\mathrm{u}) \leq \mathcal{L}(\mathrm{R})$	1265
T1511$*$	$\mathrm{u} \in \mathbb{A}^*$	1509
T1512	$\mathcal{A}(\mathrm{u}) \subseteq \mathcal{A}((\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}])$	1245, 1509
T1513	$\mathcal{A}(\mathrm{u}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	1478, 1512
T1514	$\mathrm{u} \in \mathcal{A}(\mathrm{R})^*$	0320, 1513
G1515	$\mathcal{L}(\mathrm{u}) \leq \mathcal{L}(\mathrm{R})$	1514
VT1516	$\mathrm{v} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{u} \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} \mathrm{v}$	1509
T1517$*$	$\mathrm{v} \in \mathbb{A}^*$	1516
T1518	$\mathcal{L}(\mathrm{u}) \leq \mathcal{L}(\mathrm{v})$	0709, 1516
T1519	$\mathcal{L}(\mathrm{v}) \leq \mathcal{L}(\mathrm{R})$	1261, 1516
G1520	$\mathbb{T}$	1518, 1519
G1521	$\mathbb{T}$	1506, 1507
T1522	R ist endlich $\Rightarrow (\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]$ ist endlich	1501, 1360
T1523	R ist endlich $\Rightarrow (\sqsupseteq)[\mathrm{R}]$ ist endlich	1501, 1361
T1524	R ist einfach $\Rightarrow (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}]$ ist einfach	
A1525	R ist einfach	
G1526	$(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}]$ ist einfach	

G1527 $\forall$ v $\in (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[R] $\bullet$ v ist einfach 1279
VA1528 v $\in (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[R]
G1529 v ist einfach
VT1530 u $\in$ R $\bullet$ v $\overset{\text{rot}}{\sqsubseteq}$ u 1528
T1531$*$ u $\in \mathbb{A}^* \wedge$ v $\in \mathbb{A}^*$ 1530
T1532 u ist einfach 1279, 1525, 1530
G1533 $\mathbb{T}$ 0710, 1532, 1530

T1534 R ist einfach $\Rightarrow (\sqsupseteq)$[R] ist einfach 1280, 1524, 1361
T1535 R ist einfach $\Rightarrow (\overset{\text{rot}}{\equiv})$[R] ist einfach 1280, 1524, 1360
T1536 R ist total $\Rightarrow (\overset{\text{rot}}{\equiv})$[R] ist total 1284, 1491, 1412
T1537 R ist total $\Rightarrow (\sqsupseteq)$[R] ist total 1284, 1496, 1413
T1538 R ist total $\Rightarrow (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[R] ist total 1284, 1478, 1414

Die Menge mit dem leeren Wort, bleibt unter Teilwort- und Rotationsabschluß unverändert.

S1539

T1540 $(\sqsupseteq)[\{[]\}] = \{[]\}$
T1541 $(\overset{\text{rot}}{\equiv})[\{[]\}] = \{[]\}$

4.3 Konsistenz

Hier übertagen wir den Begriff der Konsistenz auf naheliegende Weise von Wörtern auf die Ebene der Relationen: Eine Relation ist konsistent gdw. alle Wörter paarweise miteinander konsistent sind. Konsistenz modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ bezeichnen wir auch als Konsistenz modulo Rotation. Gelegentlich benötigen wir nicht nur die (innere) Konsistenz einer Relation, sondern auch die Konsistenz zweier Relationen miteinander. Sie gilt gdw. alle Wörter der einen Relation mit allen Wörtern der anderen Relation paarweise konsistent sind.

S1542

VA1543$*$ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, R$' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, E $\in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$
D1544 R ist konsistent $:\Leftrightarrow \forall$ u $\in$ R, v $\in$ R $\bullet$ u $\sim$ v
D1545 R ist konsistent modulo E $:\Leftrightarrow \forall$ u $\in$ R, v $\in$ R $\bullet$ u $\overset{\text{E}}{\sim}$ v
T1546 R ist konsistent $\Leftrightarrow$ R ist konsistent modulo $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*)$ 1544, 1545
T1547 R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv}) \Leftrightarrow \forall$ u $\in$ R, v $\in$ R $\bullet$ u $\overset{\text{rot}}{\sim}$ v 1545
D1548 R und R$'$ sind miteinander konsistent modulo E $:\Leftrightarrow \forall$ u $\in$ R, v $\in$ R$'$ $\bullet$ u $\overset{\text{E}}{\sim}$ v
T1549 R und R$'$ sind miteinander konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv}) \Leftrightarrow \forall$ u $\in$ R, v $\in$ R$'$ $\bullet$ u $\overset{\text{rot}}{\sim}$ v 1548

B1550

{[0,1], [1,0]} ist nicht konsistent aber konsistent modulo Rotation, da [0,1] und [1,0] verschieden, aber rotationsäquivalent sind. {[0,1,2,3], [1,2,3,4]} ist konsistent und konsistent modulo Rotation, da [0,1,2,3] $\sim$ [1,2,3,4] gilt. {[0,1,2,3,4], [3,2,0], [0,1]} ist weder konsistent noch konsistent modulo Rotation, da [0,1,2,3,4] nicht mit [3,2,0] konsistent ist.

S1551

VA1552$*$ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, R$' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, E $\in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$, E' $\in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$

Konsistenz ist wie die Einfachheit eine Eigenschaft, die sich auf alle Teilrelationen überträgt.

T1553 R ist konsistent modulo E $\Rightarrow$
$\forall$ R$' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet$ R$' \subseteq$ R $\Rightarrow$ R$'$ ist konsistent modulo E 1545

Monotonie bzgl. E überträgt sich von der Konsistenz zwischen Wörtern auf die Konsistenz einer Relation.

T1554 E $\subseteq$ E' $\wedge$ R ist konsistent modulo E $\Rightarrow$ R ist konsistent modulo E' . . . 1545, 0727

Insbesondere impliziert die Konsistenz (modulo Identität) die Konsistenz modulo Rotation.

T1555 R ist konsistent $\Rightarrow$ R ist konsistent modulo ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) 1546, 1554, 0510

Die Konsistenz einer Vereinigung setzt sich aus der (inneren) Konsistenz der Relationen sowie ihrer Konsistenz miteinander zusammen.

T1556 (R $\cup$ R$'$) ist konsistent modulo E $\Leftrightarrow$
R ist konsistent Modulo E $\wedge$ R$'$ ist konsistent modulo E $\wedge$
R und R$'$ sind miteinander konsistent modulo E 1545, 1548

Eine modulo E konsistente Relation ist mit allen ihren Teilrelationen konsistent modulo E.

T1557 R$'$ ist konsistent modulo E $\wedge$ R $\subseteq$ R$'$ $\Rightarrow$
R und R$'$ sind miteinander konsistent modulo E 1545, 1548

Da Konsistenz nur durch durch Paare von Wörtern mit einem Schnittalphabet von mindestens zwei (Konsistenz modulo Identität) bzw. drei (Konsistenz modulo Rotation) Elementen verletzt werden kann (Theoreme 0939 und 1160), erhalten wir die folgenden Aussagen.

T1558 $\mathcal{L}$(R) $<$ 2 $\Rightarrow$ R ist konsistent

A1559	$\mathcal{L}$(R) $<$ 2	
G1560	R ist konsistent	
G1561	$\forall$ u $\in$ R, v $\in$ R $\bullet$ u $\sim$ v	1544
VA1562	u $\in$ R, v $\in$ R	
G1563	u $\sim$ v	
T1564$*$	u $\in \mathbb{A}^*$ $\wedge$ v $\in \mathbb{A}^*$	1562
T1565	$\mathcal{L}$(u) $<$ 2 $\wedge$ $\mathcal{L}$(v) $<$ 2	1262, 1559, 1562
T1566	u ist einfach $\wedge$ v ist einfach	0374, 1565
T1567	$\lvert\mathcal{A}$(u)$\rvert$ $<$ 2	0259, 1565
T1568	$\lvert\mathcal{A}$(u) $\cap$ $\mathcal{A}$(v)$\rvert$ $<$ 2	1567
G1569	$\mathbb{T}$	0939, 1566, 1568

T1570 R ist einfach $\wedge$ $\mathcal{L}$(R) $<$ 3 $\Rightarrow$ R ist konsistent modulo ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$)

A1571	R ist einfach	
A1572	$\mathcal{L}$(R) $<$ 3	
G1573	R ist konsistent modulo ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$)	
G1574	$\forall$ u $\in$ R, v $\in$ R $\bullet$ u $\overset{\text{rot}}{\sim}$ v	1547
VA1575	u $\in$ R, v $\in$ R	
G1576	u $\overset{\text{rot}}{\sim}$ v	
T1577$*$	u $\in \mathbb{A}^*$ $\wedge$ v $\in \mathbb{A}^*$	1575
T1578	$\mathcal{L}$(u) $<$ 3 $\wedge$ $\mathcal{L}$(v) $<$ 3	1262, 1572, 1575
T1579	u ist einfach $\wedge$ v ist einfach	1279, 1571, 1575
T1580	$\lvert\mathcal{A}$(u)$\rvert$ $<$ 3	0259, 1578
T1581	$\lvert\mathcal{A}$(u) $\cap$ $\mathcal{A}$(v)$\rvert$ $<$ 3	1580
G1582	$\mathbb{T}$	1160, 1579, 1581

T1583 R ist einfach $\wedge$ R$'$ ist einfach $\wedge$ $\lvert\mathcal{A}$(R) $\cap$ $\mathcal{A}$(R$'$)$\rvert$ $\leq$ 2 $\Rightarrow$
R und R$'$ sind miteinander konsistent modulo ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$)

A1584	R ist einfach $\wedge$ R$'$ ist einfach
A1585	$\lvert\mathcal{A}$(R) $\cap$ $\mathcal{A}$(R$'$)$\rvert$ $\leq$ 2
G1586	R und R$'$ sind miteinander konsistent modulo ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$)

G1587 $\forall\, u \in R, v \in R' \bullet u \overset{rot}{\sim} v$ . . . 1549
VA1588 $u \in R, v \in R'$
G1589 $u \overset{rot}{\sim} v$
T1590 u ist einfach $\wedge$ v ist einfach . . . 1279, 1584, 1588
T1591 $\mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(R) \wedge \mathcal{A}(v) \subseteq \mathcal{A}(R')$ . . . 1245, 1588
T1592 $\mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v) \subseteq \mathcal{A}(R) \cap \mathcal{A}(R')$ . . . 1591
T1593 $|\mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)| \leq 2$ . . . 1585, 1592
G1594 $\mathbb{T}$ . . . 1160, 1590, 1593

Unter Teilwortabgeschlossenheit impliziert die Konsistenz modulo einer konservativen Relation, also z.B. die Konsistenz modulo Rotation, die Einfachheit.

S1595

VA1596∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}), E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$
T1597 E ist konservativ $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist konsistent modulo E $\Rightarrow$ R ist einfach

A1598 E ist konservativ
A1599 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen
A1600 R ist konsistent modulo E
G1601 R ist einfach
G1602 $\forall\, w \in R \bullet$ w ist einfach . . . 1279
VA1603 $w \in R$
G1604 w ist einfach
A1605 $\neg$ w ist einfach
T1606∗ $w \in \mathbb{A}^*$ . . . 1603
VT1607 $i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i < j \wedge w_i = w_j$
  VT1608 $i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \neq j \wedge w_i = w_j$ . . . 0372, 1605
  T1609 $i < j \vee j < i$ . . . 1608
  G1610 $\mathbb{T}$ . . . 1608, 1609
T1611∗ $i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w)$ . . . 1607
T1612 $[w_i] \in R$
  T1613 $[w_i] \sqsubseteq w$ . . . 0583, 1607
  G1614 $\mathbb{T}$ . . . 1315, 1599, 1603, 1613
T1615 $[w_i,w_j] \in R$
  T1616 $[w_i,w_j] \sqsubseteq w$ . . . 0584, 1607
  G1617 $\mathbb{T}$ . . . 1315, 1599, 1603, 1616
T1618 $[w_i] \overset{E}{\sim} [w_i,w_j]$ . . . 1545, 1600, 1612, 1615
T1619 $\mathcal{A}([w_i]) = \mathcal{A}([w_i,w_j])$
  G1620 $\{w_i\} = \{w_i,w_j\}$ . . . 0327, 0328
  G1621 $\mathbb{T}$ . . . 1607
T1622 $([w_i],[w_i,w_j]) \in E$ . . . 0767, 1619, 1618
T1623 $\mathbb{F}$ . . . 0396, 1598, 1622, 1607

T1624 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist konsistent modulo $(\overset{rot}{\equiv}) \Rightarrow$ R ist einfach 1597, 0518

Zusätzlich zu den in schon 1476 genannten Eigenschaften bleibt auch die Konsistenz modulo Rotation unter den genannten Abschlußoperationen erhalten, jedoch nur wenn wir die Einfachheit der Relation voraussetzen.

S1625

VA1626∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
T1627 R ist einfach $\wedge$ R ist konsistent modulo $(\overset{rot}{\equiv}) \Rightarrow (\overset{rot}{\sqsupseteq})[R]$ ist konsistent modulo $(\overset{rot}{\equiv})$

A1628 R ist einfach
A1629 R ist konsistent modulo $(\overset{rot}{\equiv})$
G1630 $\forall\, u' \in (\overset{rot}{\sqsupseteq})[R], v' \in (\overset{rot}{\sqsupseteq})[R] \bullet u' \overset{rot}{\sim} v'$ . . . 1547

VA1631	$u' \in (\overset{rot}{\sqsupseteq})[R]$	
VA1632	$v' \in (\overset{rot}{\sqsupseteq})[R]$	
G1633	$u' \overset{rot}{\sim} v'$	
T1634∗	$u' \in \mathbb{A}^* \wedge v' \in \mathbb{A}^*$	1631, 1632
VT1635	$u \in R \bullet u' \overset{rot}{\sqsubseteq} u$	1631
VT1636	$v \in R \bullet v' \overset{rot}{\sqsubseteq} v$	1632
T1637∗	$u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$	1635, 1636
T1638	u ist einfach	1279, 1628, 1635
T1639	v ist einfach	1279, 1628, 1636
T1640	$u \overset{rot}{\sim} v$	1547, 1629, 1635, 1636
T1641	$u \overset{rot}{\sim} v'$	1016, 1639, 1640, 1636
T1642	$v' \overset{rot}{\sim} u$	0076, 0989, 1641
T1643	$v' \overset{rot}{\sim} u'$	1016, 1638, 1642, 1635
G1644	$\mathbb{T}$	0076, 0989, 1643

Entsprechendes gilt auch für die Konsistenz modulo Identität, allerdings nicht unter $(\overset{rot}{\sqsupseteq})$ -Abschluß, sondern nur unter $(\sqsupseteq)$ -Abschluß.

T1645 R ist einfach $\wedge$ R ist konsistent $\Rightarrow (\sqsupseteq)[R]$ ist konsistent

A1646	R ist einfach	
A1647	R ist konsistent	
G1648	$(\sqsupseteq)[R]$ ist konsistent	
G1649	$\forall\, u' \in (\sqsupseteq)[R],\ v' \in (\sqsupseteq)[R] \bullet u' \sim v'$	1544
VA1650	$u' \in (\sqsupseteq)[R]$	
VA1651	$v' \in (\sqsupseteq)[R]$	
G1652	$u' \sim v'$	
T1653∗	$u' \in \mathbb{A}^* \wedge v' \in \mathbb{A}^*$	1650, 1651
VT1654	$u \in R \bullet u' \sqsubseteq u$	1650
VT1655	$v \in R \bullet v' \sqsubseteq v$	1651
T1656∗	$u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$	1654, 1655
T1657	u ist einfach	1279, 1646, 1654
T1658	v ist einfach	1279, 1646, 1655
T1659	$u \sim v$	1544, 1647, 1654, 1655
G1660	$\mathbb{T}$	0893, 1657, 1658, 1654, 1655, 1659

Aufgrund von Theorem 1039, das die Konsistenz modulo Rotation von Wörtern auf die Rotationsäquivalenz ihrer dreielementigen Projektionen zurückführt, können wir für eine einfache und teilwortabgeschlossene Relation die Konsistenz modulo Rotation allein aus der Betrachtung aller dreistelligen Wörter ableiten. Die Bedingung ist, daß je zwei dreistellige Wörter mit gleichem Alphabet rotationsäquivalent sind.

S1661

VA1662∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T1663 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$
$(\ \forall\, u \in R,\ v \in R \bullet \mathcal{L}(u) = 3 \wedge \mathcal{L}(v) = 3 \wedge \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v) \Rightarrow u \overset{rot}{\equiv} v\ ) \Rightarrow$
R ist konsistent modulo $(\overset{rot}{\equiv})$

A1664	R ist einfach	
A1665	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
A1666	$\forall\, u \in R,\ v \in R \bullet \mathcal{L}(u) = 3 \wedge \mathcal{L}(v) = 3 \wedge \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v) \Rightarrow u \overset{rot}{\equiv} v$	
G1667	R ist konsistent modulo $(\overset{rot}{\equiv})$	
G1668	$\forall\, u \in R,\ v \in R \bullet u \overset{rot}{\sim} v$	1547
VA1669	$u \in R,\ v \in R$	
G1670	$u \overset{rot}{\sim} v$	

A1671 $\neg\, u \stackrel{\mathrm{rot}}{\approx} v$
T1672∗ $u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$ . . . 1669
T1673 u ist einfach $\wedge$ v ist einfach . . . 1279, 1664, 1669
D1674 $D := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)$
T1675∗ $D \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ . . . 1674
VT1676 $C \bullet C \subseteq D \wedge |C| = 3 \wedge \neg\, (u \triangleright C) \stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv} (v \triangleright C)$ . . . 1039, 1673, 1674, 1671
T1677∗ $C \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ . . . 1676
T1678 $D \subseteq \mathcal{A}(u) \wedge D \subseteq \mathcal{A}(v)$ . . . 1674
T1679 $C \subseteq \mathcal{A}(u) \wedge C \subseteq \mathcal{A}(v)$ . . . 1676, 1678
T1680 $\mathcal{A}(u \triangleright C) = C \wedge \mathcal{A}(v \triangleright C) = C$ . . . 0660, 1679
T1681 $(u \triangleright C) \sqsubseteq u \wedge (v \triangleright C) \sqsubseteq v$ . . . 0655
T1682 $(u \triangleright C) \in R \wedge (v \triangleright C) \in R$ . . . 1315, 1665, 1669, 1681
T1683 $(u \triangleright C)$ ist einfach $\wedge$ $(v \triangleright C)$ ist einfach . . . 0576, 1673, 1681
T1684 $|\mathcal{A}(u \triangleright C)| = 3 \wedge |\mathcal{A}(v \triangleright C)| = 3$ . . . 1680, 1676
T1685 $\mathcal{L}(u \triangleright C) = 3 \wedge \mathcal{L}(v \triangleright C) = 3$ . . . 0373, 1683, 1684
T1686 $\mathcal{A}(u \triangleright C) = \mathcal{A}(v \triangleright C)$ . . . 1680
T1687 $(u \triangleright C) \stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv} (v \triangleright C)$ . . . 1666, 1682, 1685, 1686
T1688 $\mathbb{F}$ . . . 1687, 1676

Konsistenz modulo Rotation bleibt im Unterschied zur Konsistenz (modulo Identität) unter Rotationsabschluß erhalten. Konsistenz (modulo Identität) wird also durch Rotationsabschluß zur Konsistenz modulo Rotation abgeschwächt.

S1689

VA1690∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
T1691 R ist konsistent modulo $(\stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv}) \Rightarrow (\stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv})[R]$ ist konsistent modulo $(\stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv})$

A1692 R ist konsistent modulo $(\stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv})$
G1693 $(\stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv})[R]$ ist konsistent modulo $(\stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv})$
G1694 $\forall\, u \in (\stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv})[R],\ v \in (\stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv})[R] \bullet u \stackrel{\mathrm{rot}}{\approx} v$ . . . 1545
VA1695 $u \in (\stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv})[R],\ v \in (\stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv})[R]$
G1696 $u \stackrel{\mathrm{rot}}{\approx} v$
VT1697 $u' \in R,\ v' \in R \bullet u' \stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv} u \wedge v' \stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv} v$ . . . 1695
T1698 $u' \stackrel{\mathrm{rot}}{\approx} v'$ . . . 1545, 1692, 1697
G1699 $\mathbb{T}$ . . . 1000, 1698, 1697

T1700 R ist konsistent $\Rightarrow (\stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv})[R]$ ist konsistent modulo $(\stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv})$ . . . 1555, 1691

4.4 Projektion

Auch die Operation der Projektion auf eine Menge benötigen wir für Relationen: Die Projektion wird dabei auf alle Wörter in der Relation angewandt.

S1701

VA1702 $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$
D1703 $R \triangleright X := \{w \triangleright X \bullet w \in R\}$
T1704∗ $(R \triangleright X) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

B1705

Mit $R = \{[1,3,1,2,5], [9], [5,3,1,4]\ \}$ gilt $(R \triangleright \{1,2,3,4\}) = \{[1,3,1,2], [], [3,1,4]\}$ und $(R \triangleright [1,9]) = \{[1,1], [9], [1]\}$.

Das Alphabet einer Relation verhält sich unter Projektion wie die Alphabete der Wörter. Mehrfache Projektion, läßt sich wieder als einfache Projektion auf die Schnittmenge schreiben. Ferner ist Projektion monoton in der Relation. Das letzte Theorem zeichnet die Eigenschaft $\mathcal{L}(R) \leq n$ als Invariante aus.

S1706

VA1707 $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}), R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}), X \in \mathcal{P}(\mathbb{A}), Y \in \mathcal{P}(\mathbb{A}), w \in \mathbb{A}^*$
T1708 $\mathcal{A}(R \rhd X) \subseteq \mathcal{A}(R)$
T1709 $\mathcal{A}(R \rhd X) \subseteq X$
T1710 $\mathcal{A}(R \rhd X) = \mathcal{A}(R) \cap X$
T1711 $((R \rhd X) \rhd Y) = (R \rhd (X \cap Y))$
T1712 $w \in R \wedge \mathcal{A}(w) \subseteq X \Rightarrow w \in (R \rhd X)$
T1713 $R \subseteq R' \Rightarrow (R \rhd X) \subseteq (R' \rhd X)$
T1714 $\forall\, n \in \mathbb{N} \bullet \mathcal{L}(R) \leq n \Rightarrow \mathcal{L}(R \rhd X) \leq n$

4.5 Abhängigkeit

Binäre Relationen sind wohlbekannt und einfach zu handhaben. Es ist deshalb wünschenswert, sich den allgemeinen Relationen mit Hilfe von binären Relationen zu nähern. Es sind viele Möglichkeiten denkbar, aus einer Relation eine binäre Relation auf dem Alphabet zu gewinnen. Es stellt sich jedoch die Frage, inwieweit aus der binären Relation auf Eigenschaften der ursprünglichen Relation geschlossen werden kann. Eine binäre Relation, die für unsere Zwecke recht aussagefähig ist, wird in diesem Abschnitt eingeführt. Es handelt sich dabei um die Relation der Abhängigkeit (li R), die im folgenden zusammen mit ihrem reflexiven Abschluß ($\underline{\text{li}}$ R) definiert und genauer studiert wird. Aufbauend auf dieser binären Relation wird in einem der folgenden Abschnitte der für die Axiomatisierung von zyklischen Ordnungen wesentliche Vollständigkeitsbegriff eingeführt.

S1715

VA1716∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Gegeben sei eine beliebige Relation R. Zwei Elemente des Alphabets stehen in der binären Relation (li R) gdw. sie in mindestens einem Wort der Relation R an verschiedenen Stellen auftauchen. Man kann dies so deuten, daß die beiden Elemente durch dieses Wort geordnet werden. Deshalb bezeichnen wir (li R) auch als (ungerichtete) Abhängigkeitsrelation. Zwei Elemente x und y mit $(x,y) \in (\text{li } R)$ sind voneinander abhängig.

D1717 $\text{li } R := \{(x,y) \in \mathcal{A}(R) \times \mathcal{A}(R) \bullet [x,y] \in (\sqsupseteq)[R] \vee [y,x] \in (\sqsupseteq)[R]\}$
T1718∗ $(\text{li } R) \in \mathcal{BR}(\mathcal{A}(R))$ 1717
T1719 $(x,y) \in (\text{li } R) \Leftrightarrow [x,y] \in (\sqsupseteq)[R] \vee [y,x] \in (\sqsupseteq)[R]$

G1720 $[x,y] \in (\sqsupseteq)[R] \vee [y,x] \in (\sqsupseteq)[R] \Rightarrow (x,y) \in (\text{li } R)$ 1717
A1721 $[x,y] \in (\sqsupseteq)[R] \vee [y,x] \in (\sqsupseteq)[R]$
G1722 $(x,y) \in (\text{li } R)$
T1723 $\mathcal{A}([x,y]) \subseteq \mathcal{A}((\sqsupseteq)[R]) \vee \mathcal{A}([y,x]) \subseteq \mathcal{A}((\sqsupseteq)[R])$ 1245, 1721
T1724 $\mathcal{A}([x,y]) \subseteq \mathcal{A}(R) \vee \mathcal{A}([y,x]) \subseteq \mathcal{A}(R)$ 1496, 1723
T1725 $\{x,y\} \subseteq \mathcal{A}(R)$ 0328, 1724
G1726 T 1717, 1725, 1721

B1727

Für $R = \{[0,1,2], [2,1], [0,0,3], [4]\}$ ergibt sich $\mathcal{A}(R) = \{0,1,2,3,4\}$ und $(\text{li } R) = \{(0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (0,2), (2,0), (0,0), (0,3), (3,0)\}$. R ist nicht einfach. (li R) ist symmetrisch, aber weder reflexiv noch irreflexiv. Es sei $R' = \{[1,2,3], [3,4], [1,3,4]\}$. Es gilt $\mathcal{A}(R') = \{1,2,3,4\}$ und $(\text{li } R') = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (1,3), (3,1), (3,4), (4,3), (1,4), (4,1)\}$. R' ist einfach. $(\text{li } R')$ ist symmetrisch und irreflexiv.

S1728

VA1729∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Von der Reihenfolge der beiden in (li R) stehenden Elemente in einem Wort der unterliegenden Relation wurde bei obiger Definition abstrahiert, so daß sich (li R) als symmetrische Relation ergibt.

T1730 (li R) ist symmetrisch

G1731	$\forall x,y \bullet (x,y) \in (\text{li } R) \Rightarrow (y,x) \in (\text{li } R)$	0076
G1732	$\mathbb{T}$	1719

Es folgt eine leichte Umformulierung der Definition 1717.

T1733 $(x,y) \in (\text{li } R) \Leftrightarrow \exists\, w \in R, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \neq j \wedge w_i = x \wedge w_j = y$

A1734	$(x,y) \in (\text{li } R)$	
T1735∗	$x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A}$	1734
T1736	$[x,y] \in (\sqsupseteq)[R] \vee [y,x] \in (\sqsupseteq)[R]$	1719, 1734
T1737	$\forall x,y \bullet [x,y] \in (\sqsupseteq)[R] \Rightarrow \exists\, w \in R, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \neq j \wedge w_i = x \wedge w_j = y$	
VA1738	$x,y \bullet [x,y] \in (\sqsupseteq)[R]$	
G1739	$\exists\, w \in R, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \neq j \wedge w_i = x \wedge w_j = y$	
VT1740	$w \in R \bullet [x,y] \sqsubseteq w$	1738
T1741∗	$w \in \mathbb{A}^* \wedge x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A}$	1740
T1742	$\mathcal{L}([x,y]) = 2$	0308
VT1743	$i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i < j \wedge [x,y] = [w_i, w_j]$	0588, 1742, 1740
T1744	$w_i = x \wedge w_j = y$	0287, 1743
G1745	$\mathbb{T}$	1740, 1743, 1744
T1746	$\exists\, w \in R, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \neq j \wedge w_i = x \wedge w_j = y$	1736, 1737
A1747	$\exists\, w \in R, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \neq j \wedge w_i = x \wedge w_j = y$	
VT1748	$w \in R, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \neq j \wedge w_i = x \wedge w_j = y$	1747
T1749∗	$w \in \mathbb{A}^* \wedge i \in \mathcal{I}(w) \wedge j \in \mathcal{I}(w) \wedge x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A}$	1748
T1750	$i < j \vee j < i$	1748
A1751	$i < j$	
T1752	$[w_i, w_j] \sqsubseteq w$	0584, 1751
T1753	$[x,y] \sqsubseteq w$	1752, 1748
T1754	$[x,y] \in (\sqsupseteq)[R]$	1753, 1748
A1755	$j < i$	
T1756	$[w_j, w_i] \sqsubseteq w$	0584, 1755
T1757	$[y,x] \sqsubseteq w$	1756, 1748
T1758	$[y,x] \in (\sqsupseteq)[R]$	1757, 1748
T1759	$(x,y) \in (\text{li } R)$	1750, 1719, 1754, 1758
G1760	$\mathbb{T}$	1746, 1759

Der zweistellige Anteil der Relation ist auf jeden Fall in (li R) enthalten.

T1761 $[x,y] \in R \Rightarrow (x,y) \in (\text{li } R)$

A1762	$[x,y] \in R$	
G1763	$(x,y) \in (\text{li } R)$	
T1764	$[x,y] \in (\sqsupseteq)[R]$	1413, 1762
G1765	$\mathbb{T}$	1719, 1764

Bei teilwortabgeschlossenen Relationen vereinfacht sich Definition 1717 zu folgender Äquivalenz.

T1766 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\Rightarrow$ ($(x,y) \in (\text{li } R) \Leftrightarrow [x,y] \in R \vee [y,x] \in R$) . . 1449, 1719

Ist die Relation zusätzlich noch rotationsabgeschlossen, dann ist die Abhängigkeitsrelation genau der zweistellige Anteil der Relation.

T1767 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\Rightarrow$
($(x,y) \in (\text{li } R) \Leftrightarrow [x,y] \in R$) 1766, 1344

Insgesamt ergibt sich mit Hilfe von Theorem 1316, 1325 und 1767, daß Alphabet und Abhängigkeitsrelation die Wörter bis zur Länge zwei (R|2) eindeutig bestimmen, sofern die Relation R nichtleer, teilwort- und rotationsabgeschlossen ist.

T1768 $R \neq \emptyset \wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\Rightarrow$
$(R|2) = \{[]\} \cup \{[x] \in \mathbb{A}^* \bullet x \in \mathcal{A}(R)\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{A}^* \bullet (x,y) \in (\text{li } R)\}$

A1769 $R \neq \emptyset$

A1770 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen

A1771 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen

T1772 $\forall w \in \{[]\} \cup \{[x] \in \mathbb{A}^* \bullet x \in \mathcal{A}(R)\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{A}^* \bullet (x,y) \in (\text{li } R)\} \bullet w \in (R|2)$

T1773 $[] \in R$ 1316, 1770, 1769

T1774 $[] \in (R|2)$ 1273, 1773

T1775 $\forall x \in \mathcal{A}(R) \bullet [x] \in R$ 1325, 1770

T1776 $\forall x \in \mathcal{A}(R) \bullet [x] \in (R|2)$ 1274, 1775

T1777 $\forall x,y \bullet (x,y) \in (\text{li } R) \Rightarrow [x,y] \in R$ 1767, 1770, 1771

T1778 $\forall x,y \bullet (x,y) \in (\text{li } R) \Rightarrow [x,y] \in (R|2)$ 1275, 1777

G1779 $\mathbb{T}$ 1774, 1776, 1778

T1780 $\forall w \in (R|2) \bullet w \in \{[]\} \cup \{[x] \in \mathbb{A}^* \bullet x \in \mathcal{A}(R)\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{A}^* \bullet (x,y) \in (\text{li } R)\}$

VA1781 $w \in (R|2)$

G1782 $w \in \{[]\} \cup \{[x] \in \mathbb{A}^* \bullet x \in \mathcal{A}(R)\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{A}^* \bullet (x,y) \in (\text{li } R)\}$

T1783$*$ $w \in \mathbb{A}^*$ 1781

T1784 $(R|2) \subseteq R$ 1267

T1785 $\mathcal{L}(w) \leq 2$ 1265, 1781

A1786 $\mathcal{L}(w) = 0$

T1787 $w = []$ 0362, 1786

G1788 $\mathbb{T}$ 1787

A1789 $\mathcal{L}(w) = 1$

VT1790 $x \in \mathbb{A} \bullet w = [x]$ 0366, 1789

T1791$*$ $x \in \mathbb{A}$ 1790

T1792 $[x] \in R$ 1790, 1781, 1784

T1793 $\mathcal{A}([x]) \subseteq \mathcal{A}(R)$ 1245, 1792

T1794 $x \in \mathcal{A}(R)$ 0327, 1793

G1795 $\mathbb{T}$ 1790, 1794

A1796 $\mathcal{L}(w) = 2$

VT1797 $x \in \mathbb{A}, y \in \mathbb{A} \bullet w = [x,y]$ 0367, 1796

T1798$*$ $x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A}$ 1797

T1799 $[x,y] \in R$ 1797, 1781, 1784

T1800 $(x,y) \in (\text{li } R)$ 1761, 1799

G1801 $\mathbb{T}$ 1797, 1800

G1802 $\mathbb{T}$ 1772, 1780

Stehen zwei Elemente in (li R), so gibt es natürlich ein Wort, in dem beide vorkommen. Die Umkehrung gilt natürlich nicht.

T1803 $(x,y) \in (\text{li } R) \Rightarrow \exists w \in R \bullet x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$

A1804 $(x,y) \in (\text{li } R)$

G1805 $\exists w \in R \bullet x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$

VT1806	$w \in R, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \neq j \wedge w_i = x \wedge w_j = y$	1733, 1804
T1807∗	$w \in \mathbb{A}^*$	1806
T1808	$x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$	0350, 1806
G1809	$\mathbb{T}$	1806, 1808

Die Gewinnung der (li R)-Relation aus R ist eine monotone Operation bzgl. Inklusion.

T1810 $R \subseteq R' \Rightarrow (\text{li } R) \subseteq (\text{li } R')$

A1811	$R \subseteq R'$	
G1812	$(\text{li } R) \subseteq (\text{li } R')$	
G1813	$\forall x,y \bullet (x,y) \in (\text{li } R) \Rightarrow (x,y) \in (\text{li } R')$	
VA1814	$x,y \bullet (x,y) \in (\text{li } R)$	
G1815	$(x,y) \in (\text{li } R')$	
T1816	$\exists w \in R, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \neq j \wedge w_i = x \wedge w_j = y$	1733, 1814
G1817	$\exists w \in R', i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \neq j \wedge w_i = x \wedge w_j = y$	1733
G1818	$\mathbb{T}$	1816, 1811

(li R) muß nicht reflexiv sein. Deshalb definieren wir zusätzlich zu (li R) den reflexiven Abschluß ($\underline{\text{li}}$ R). ($\underline{\text{li}}$ R) bezeichnen wir als reflexive Abhängigkeitsrelation.

D1819	$\underline{\text{li}}\ R := (\text{li } R) \cup \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))$	
T1820∗	$(\underline{\text{li}}\ R) \in \mathcal{BR}(\mathcal{A}(R))$	1819, 1718
T1821	$(\text{li } R) \subseteq (\underline{\text{li}}\ R)$	1819
T1822	$\mathcal{ID}(\mathcal{A}(R)) \subseteq (\underline{\text{li}}\ R)$	1819

Es handelt sich bei ($\underline{\text{li}}$ R) um eine Ähnlichkeitsrelation, die genau das Alphabet $\mathcal{A}(R)$ abdeckt.

T1823	$\mathcal{F}(\underline{\text{li}}\ R) = \mathcal{A}(R)$	1820, 1822
T1824	($\underline{\text{li}}$ R) ist reflexiv	0071, 1822, 1823
T1825	($\underline{\text{li}}$ R) ist symmetrisch	1819, 0081, 1730, 0080
T1826	($\underline{\text{li}}$ R) ist eine Ähnlichkeitsrelation	0088, 1824, 1825

Die Umkehrung des folgenden Theorem gilt im allgemeinen nicht.

T1827 $x \neq y \wedge (x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R) \Rightarrow (x,y) \in (\text{li } R)$

A1828	$x \neq y$	
A1829	$(x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R)$	
G1830	$(x,y) \in (\text{li } R)$	
T1831	$(x,y) \in (\text{li } R) \vee (x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))$	1819, 1829
G1832	$(x,y) \notin \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))$	1831
G1833	$\mathbb{T}$	1828

Im Gegensatz zu Theorem 1803 haben wir für ($\underline{\text{li}}$ R) die Äquivalenz:

T1834 $(x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R) \Leftrightarrow \exists w \in R \bullet x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$

T1835	$(x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R) \Rightarrow \exists w \in R \bullet x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$	
A1836	$(x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R)$	
G1837	$\exists w \in R \bullet x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$	
T1838	$(x,y) \in (\text{li } R) \vee (x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))$	1819, 1836
A1839	$(x,y) \in (\text{li } R)$	
G1840	$\mathbb{T}$	1803, 1839
A1841	$(x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))$	
T1842	$x \in \mathcal{A}(R)$	1841
VT1843	$w \in R \bullet x \in \mathcal{A}(w)$	1243, 1842
T1844	$x = y$	1841

T1845 $y \in \mathcal{A}(w)$ . . . 1844, 1843
G1846 $\mathbb{T}$ . . . 1843, 1845
T1847 $(\exists\, w \in R \bullet x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)) \Rightarrow (x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R)$
VT1848 $w \in R \bullet x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$
T1849∗ $w \in \mathbb{A}^*$ . . . 1848
G1850 $(x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R)$
G1851 $(x,y) \in (\text{li}\ R) \vee (x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))$ . . . 1819
T1852 $x \in \mathcal{A}(R)$ . . . 1243, 1848
T1853 $y \in \mathcal{A}(R)$ . . . 1243, 1848
VT1854 $i \in \mathcal{I}(w) \bullet x = w_i$ . . . 0356, 1848
VT1855 $j \in \mathcal{I}(w) \bullet y = w_j$ . . . 0356, 1848
A1856 $i = j$
G1857 $(x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))$
T1858 $x = y$ . . . 1856, 1854, 1855
G1859 $\mathbb{T}$ . . . 1858, 1852
A1860 $i \neq j$
G1861 $(x,y) \in (\text{li}\ R)$
G1862 $\exists\, w \in R,\ i \in \mathcal{I}(w),\ j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \neq j \wedge w_i = x \wedge w_j = y$ . . . 1733
G1863 $\mathbb{T}$ . . . 1852, 1853, 1860, 1854, 1855
G1864 $\mathbb{T}$ . . . 1835, 1847

Aus dem vorigen Theorem ergibt sich eine kompakte Charakterisierung der reflexiven Abhängigkeit. Der Beitrag eines Wortes $w \in R$ ist gerade $\mathcal{A}(w)^2$.

T1865 $(\underline{\text{li}}\ R) = \bigcup \{\mathcal{A}(w)^2 \bullet w \in R\}$ . . . 1834

Die Gewinnung der reflexiven Abhängigkeitsrelation ist monoton.

T1866 $R \subseteq R' \Rightarrow (\underline{\text{li}}\ R) \subseteq (\underline{\text{li}}\ R')$

A1867 $R \subseteq R'$
G1868 $(\underline{\text{li}}\ R) \subseteq (\underline{\text{li}}\ R')$
G1869 $(\text{li}\ R) \subseteq (\text{li}\ R')$ . . . 1819
G1870 $\mathbb{T}$ . . . 1810, 1867

In Ergänzung zu 1476 haben wir die Erhaltung von (li R) und ($\underline{\text{li}}$ R) unter den behandelten Abschluß-operationen.

S1871
VA1872∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
T1873 $(\text{li}\ (\sqsupseteq)[R]) = (\text{li}\ R)$ . . . 1717, 1496, 1429
T1874 $\forall\, x \in \mathbb{A},\ y \in \mathbb{A} \bullet [x,y] \in (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R] \Rightarrow [x,y] \in R \vee [y,x] \in R$

VA1875∗ $x \in \mathbb{A},\ y \in \mathbb{A}$
A1876 $[x,y] \in (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R]$
G1877 $[x,y] \in R \vee [y,x] \in R$
VT1878 $w \in R \bullet w \overset{\text{rot}}{\equiv} [x,y]$ . . . 1876
T1879∗ $w \in \mathbb{A}^*$ . . . 1878
T1880 $w = [x,y] \vee w = [y,x]$ . . . 0537, 1878
G1881 $\mathbb{T}$ . . . 1880, 1878

T1882 $(\text{li}\ (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R]) = (\text{li}\ R)$

T1883 $(\text{li}\ R) \subseteq (\text{li}\ (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R])$ . . . 1810, 1412
G1884 $(\text{li}\ (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R]) \subseteq (\text{li}\ R)$ . . . 1883
G1885 $\forall\, x,y \bullet (x,y) \in (\text{li}\ (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R]) \Rightarrow (x,y) \in (\text{li}\ R)$
VA1886 $x,y \bullet (x,y) \in (\text{li}\ (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R])$
G1887 $(x,y) \in (\text{li}\ R)$

T1888∗ $x \in \mathbb{A} \land y \in \mathbb{A}$ 1886
T1889 $[x,y] \in (\sqsupset)[(\overset{\text{rot}}{\equiv})[R]] \lor [y,x] \in (\sqsupset)[(\overset{\text{rot}}{\equiv})[R]]$ 1719, 1886
G1890 $[x,y] \in (\sqsupset)[R] \lor [y,x] \in (\sqsupset)[R]$ 1719
T1891 $[x,y] \in (\overset{\text{rot}}{\equiv})[(\sqsupset)[R]] \lor [y,x] \in (\overset{\text{rot}}{\equiv})[(\sqsupset)[R]]$ 1402, 1889
G1892 $\mathbb{T}$ 1874, 1891

T1893 $(\text{li } (\overset{\text{rot}}{\sqsupset})[R] = (\text{li } R)$ 1382, 1873, 1882
T1894 $(\underline{\text{li}}\ (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R]) = (\underline{\text{li}}\ R)$ 1819, 1882, 1491
T1895 $(\underline{\text{li}}\ (\sqsupset)[R]) = (\underline{\text{li}}\ R)$ 1819, 1873, 1496
T1896 $(\underline{\text{li}}\ (\overset{\text{rot}}{\sqsupset})[R] = (\underline{\text{li}}\ R)$ 1382, 1895, 1894

Für konkrete Wörter in einer Relation ergeben sich sofort Paare der (li R)− und ($\underline{\text{li}}$ R)-Relationen.

S1897

VA1898 $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $a \in \mathbb{A}$, $b \in \mathbb{A}$, $c \in \mathbb{A}$
T1899 $[a,b] \in R \Rightarrow \{(a,b), (b,a)\} \subseteq (\text{li } R)$
T1900 $[a,b,c] \in R \Rightarrow \{(a,b), (a,c), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b)\} \subseteq (\text{li } R)$
T1901 $[a,b,c,d] \in R \Rightarrow$
$\{(a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,c), (b,d), (c,a), (c,b), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c)\} \subseteq (\text{li } R)$
T1902 $[a,b] \in R \Rightarrow \{(a,a), (a,b), (b,b), (b,a)\} \subseteq (\underline{\text{li}}\ R)$
T1903 $[a,b,c] \in R \Rightarrow \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\} \subseteq (\underline{\text{li}}\ R)$

Bisher haben wir keine zusätzlichen Anforderungen an die unterliegende Relation gestellt. Später werden wir es nur noch mit einfachen Relationen, also Relationen aus einfachen Wörtern, zu tun haben. Einfachheit von Relationen ist eine Verallgemeinerung der Irreflexivität von binären Relationen.

S1904

VA1905∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Die Einfachheit der unterliegenden Relation wird als Irreflexivität auf (li R) vererbt.

T1906 R ist einfach $\Rightarrow$ (li R) ist irreflexiv

A1907 R ist einfach
G1908 $\forall x \bullet (x,x) \notin (\text{li } R)$ 0073
A1909 $\neg\forall x \bullet (x,x) \notin (\text{li } R)$
VT1910 $x \bullet (x,x) \in (\text{li } R)$ 1909
T1911∗ $x \in \mathbb{A}$ 1910
T1912 $[x,x] \in (\sqsupset)[R]$ 1719, 1910
T1913 $(\sqsupset)[R]$ ist einfach 1534, 1907
T1914 $[x,x]$ ist einfach 1279, 1913, 1912
T1915 $\mathbb{F}$ 0378, 1914

Damit können wir für einfache Relationen die Implikation 1827 zu einer Äquivalenz ergänzen.

T1916 R ist einfach $\Rightarrow$ ($(x,y) \in (\text{li } R) \Leftrightarrow x \neq y \land (x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R)$)

A1917 R ist einfach
G1918 $(x,y) \in (\text{li } R) \Rightarrow x \neq y \land (x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ 1827
A1919 $(x,y) \in (\text{li } R)$
G1920 $x \neq y \land (x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R)$
G1921 $x \neq y$ 1821, 1919
G1922 $\mathbb{T}$ 0073, 1906, 1917

4.6 Unabhängigkeit

Ergänzend zur binären Relation der Ordnung (li R) läßt sich die binäre Relation (co R) der Unabhängigkeit und ihr reflexiver Abschluß ($\underline{\text{co}}$ R) einführen.

S1923

VA1924∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Wiederum starten wir mit einer beliebigen Relation R. Zwischen zwei Elementen des Alphabets besteht die Beziehung (co R) gdw. es sie in keinem Wort der Relation gemeinsam vorkommen (und dadurch geordnet würden).

D1925	$\text{co R} := \{(x,y) \in \mathcal{A}(R) \times \mathcal{A}(R) \bullet \forall\, w \in R \bullet \neg\,(x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w))\}$	
T1926∗	$(\text{co R}) \in \mathcal{BR}(\mathcal{A}(R))$	1925

Bei (co R) handelt es sich um eine symmetrische, irreflexive Relation über dem Alphabet.

T1927 (co R) ist symmetrisch

G1928	$\forall\, x,y \bullet (x,y) \in (\text{co R}) \Rightarrow (y,x) \in (\text{co R})$	0076
G1929	$\mathbb{T}$	1925

T1930 (co R) ist irreflexiv

G1931	$\forall\, x \bullet (x,x) \notin (\text{co R})$	0073
VA1932	x	
G1933	$(x,x) \notin (\text{co R})$	
G1934	$\neg\,(x \in \mathcal{A}(R) \wedge \forall\, w \in R \bullet x \notin \mathcal{A}(w))$	1925
G1935	$x \in \mathcal{A}(R) \Rightarrow \exists\, w \in R \bullet x \in \mathcal{A}(w)$	
A1936	$x \in \mathcal{A}(R)$	
G1937	$\exists\, w \in R \bullet x \in \mathcal{A}(w)$	
G1938	$\mathbb{T}$	1243, 1936

B1939

Wie in Beispiel 1727 wählen wir $R = \{[0,1,2], [2,1], [0,0,3], [4]\}$. Es folgt $\mathcal{A}(R) = \{0,1,2,3,4\}$ und $(\text{co R}) = \{(1,3), (3,1), (2,3), (3,2)\}$.

S1940

VA1941∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Wir bilden den reflexiven Abschluß ($\underline{\text{co}}$ R).

D1942	$\underline{\text{co}}\ R := (\text{co R}) \cup \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))$	
T1943∗	$(\underline{\text{co}}\ R) \in \mathcal{BR}(\mathcal{A}(R))$	1942, 1926
T1944	$(\text{co R}) \subseteq (\underline{\text{co}}\ R)$	1943
T1945	$\mathcal{ID}(\mathcal{A}(R)) \subseteq (\underline{\text{co}}\ R)$	1943

($\underline{\text{co}}$ R) ist wie ($\underline{\text{li}}$ R) eine Ähnlichkeitsrelation, die das Alphabet $\mathcal{A}(R)$ vollständig abdeckt.

T1946	$\mathcal{F}(\underline{\text{co}}\ R) = \mathcal{A}(R)$	1943, 1945
T1947	($\underline{\text{co}}$ R) ist reflexiv	0071, 1945, 1946
T1948	($\underline{\text{co}}$ R) ist symmetrisch	1942, 0081, 1927, 0080
T1949	($\underline{\text{co}}$ R) ist eine Ähnlichkeitsrelation	0088, 1947, 1948

Ebenso wie für die Abhängigkeitsrelation gilt (hier auch für nichteinfache Relationen):

T1950 $(x,y) \in (\underline{co}\ R) \wedge x \neq y \Leftrightarrow (x,y) \in (co\ R)$

- **A1951** $(x,y) \in (\underline{co}\ R) \wedge x \neq y$
  - **T1952** $(x,y) \notin \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))$ … 1951
  - **T1953** $(x,y) \in (co\ R)$ … 1951, 1952, 1942
- **A1954** $(x,y) \in (co\ R)$
  - **T1955** $(x,y) \in (\underline{co}\ R)$ … 1944, 1954
  - **T1956** $x \neq y$ … 0073, 1930, 1954
- **G1957** $\mathbb{T}$ … 1953, 1955, 1956

4.7 Beziehungen zwischen Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Wie schon zu erwarten ergänzen sich Abhängigkeit (li R) und Unabhängigkeit (co R) zusammen mit der Identität zur vollständigen Relation $\mathcal{A}(R)^2$.

S1958

VA1959∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T1960 $(\underline{co}\ R) \cup (li\ R) = \mathcal{A}(R)^2$

- **T1961** $(\underline{co}\ R) \cup (li\ R) \subseteq \mathcal{A}(R)^2$ … 1943, 1718
- **G1962** $\mathcal{A}(R)^2 \subseteq (\underline{co}\ R) \cup (li\ R)$ … 1961
- **G1963** $\forall\, x \in \mathcal{A}(R), y \in \mathcal{A}(R) \bullet (x,y) \notin (\underline{co}\ R) \Rightarrow (x,y) \in (li\ R)$
- **VA1964** $x \in \mathcal{A}(R), y \in \mathcal{A}(R)$
- **A1965** $(x,y) \notin (\underline{co}\ R)$
- **G1966** $(x,y) \in (li\ R)$
- **T1967** $(x,y) \notin \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))$ … 1945, 1965
- **T1968** $x \neq y$ … 1964, 1967
- **T1969** $(x,y) \notin (co\ R)$ … 1944, 1965
- **G1970** $\exists\, w \in R, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \neq j \wedge w_i = x \wedge w_j = y$ … 1733
- **T1971** $\neg\, \forall\, w \in R \bullet \neg\, (x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w))$ … 1925, 1969, 1964
- **VT1972** $w \in R \bullet x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$ … 1971
- **T1973**∗ $w \in \mathbb{A}^*$ … 1972
- **VT1974** $i \in \mathcal{I}(w) \bullet w_i = x$ … 0356, 1972
- **VT1975** $j \in \mathcal{I}(w) \bullet w_j = y$ … 0356, 1972
- **T1976** $i \neq j$
  - **A1977** $i = j$
  - **T1978** $x = y$ … 1977, 1974, 1975
  - **T1979** $\mathbb{F}$ … 1978, 1968
- **G1980** $\mathbb{T}$ … 1972, 1974, 1975, 1976

T1981 $(co\ R) \cup (li\ R) \cup \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R)) = \mathcal{A}(R)^2$ … 1942, 1960

T1982 $(\underline{li}\ R) \cup (co\ R) = \mathcal{A}(R)^2$ … 1981, 1819

Abhängigkeit (li R) und Unabhängigkeit (co R) sind immer disjunkt. Dies gilt auch für ($\underline{li}$ R) und (co R). Entsprechendes gilt für (li R) und ($\underline{co}$ R), allerdings nur unter Annahme der Einfachheit von R.

S1983

VA1984∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T1985 $(li\ R) \cap (co\ R) = \emptyset$ … 1985

- **A1986** $(x,y) \in (li\ R)$
- **A1987** $(x,y) \in (co\ R)$
- **T1988** $\exists\, w \in R \bullet x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$ … 1803, 1986
- **T1989** $\forall\, w \in R \bullet \neg\, (x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w))$ … 1925, 1987
- **T1990** $\mathbb{F}$ … 1988, 1989

T1991 $(co\ R) \cap \mathcal{ID}(\mathbb{A}) = \emptyset$ … 0075, 1930

T1992	$(\underline{\text{li}}\ \text{R}) \cap (\text{co R}) = \emptyset$	1819, 1985, 1991
T1993	R ist einfach $\Rightarrow (\text{li R}) \cap \mathcal{ID}(\mathbb{A}) = \emptyset$	0075, 1906
T1994	R ist einfach $\Rightarrow (\underline{\text{co}}\ \text{R}) \cap (\text{li R}) = \emptyset$	1942, 1985, 1993

Insgesamt sind ($\underline{\text{li}}$ R) und (co R) sowie (co R) und ($\underline{\text{li}}$ R) also komplementär in $\mathcal{A}(\text{R})^2$. Für einfache R sind auch ($\underline{\text{co}}$ R) und (li R) sowie (li R) und ($\underline{\text{co}}$ R) komplementär.

S1995

VA1996$*$	$\text{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	
T1997	$\forall\ \text{x} \in \mathcal{A}(\text{R}),\ \text{y} \in \mathcal{A}(\text{R}) \bullet (\text{x,y}) \in (\underline{\text{li}}\ \text{R}) \Leftrightarrow (\text{x,y}) \notin (\text{co R})$	1992, 1982
T1998	$(\underline{\text{li}}\ \text{R}) = \mathcal{A}(\text{R})^2 - (\text{co R})$	1820, 1997
T1999	$(\text{co R}) = \mathcal{A}(\text{R})^2 - (\underline{\text{li}}\ \text{R})$	1926, 1997
T2000	R ist einfach $\Rightarrow \forall\ \text{x} \in \mathcal{A}(\text{R}),\ \text{y} \in \mathcal{A}(\text{R}) \bullet (\text{x,y}) \in (\underline{\text{co}}\ \text{R}) \Leftrightarrow (\text{x,y}) \notin (\text{li R})$	1994, 1960
T2001	R ist einfach $\Rightarrow (\underline{\text{co}}\ \text{R}) = \mathcal{A}(\text{R})^2 - (\text{li R})$	1943, 2000
T2002	R ist einfach $\Rightarrow (\text{li R}) = \mathcal{A}(\text{R})^2 - (\underline{\text{co}}\ \text{R})$	1718, 2000

4.8 Abhängigkeitskliquen

Ein Zweck der Einführung binärer Relationen in den vorigen Abschnitten ist es, die bekannten Begriffe von Kliquen und Kens (also maximalen Kliquen) auf (verallgemeinerte) Relationen R anzuwenden. Formal sind Ähnlichkeitsrelationen eine Verallgemeinerung von Äquivalenzrelationen. Entsprechend sind Kens (von Ähnlichkeitsrelationen) eine Verallgemeinerung von Äquivalenzklassen (von Äquivalenzrelationen). Da sich oben ($\underline{\text{li}}$ R) und ($\underline{\text{co}}$ R) als Ähnlichkeitsrelationen ergaben, ist eine Betrachtung der Kliquen und Kens von ($\underline{\text{li}}$ R) und ($\underline{\text{co}}$ R) sinnvoll. Im folgenden konzentrieren wir uns auf ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen und ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens, die wir als Abhängigkeitskliquen bzw. Abhängigkeitskens oder einfach als Kliquen und Kens der Relation R bezeichnen.

B2003

R = {[0,1,2], [2,1], [0,0,3], [4]} ist wieder die Relation aus Beispiel 1727. Wir haben $\mathcal{A}(\text{R})$ = {0,1,2,3,4} und ($\underline{\text{li}}$ R) = {(0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (0,2), (2,0), (0,0), (0,3), (3,0), (0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)}. Die Abhängigkeitskliquen sind ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen = {{0,1,2}, {0,1}, {1,2}, {0,2}, {0,3}, {0}, {3}, {4} }. Drei davon sind maximal. Wir haben also die Kens ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens = {{0,1,2}, {0,3}, {4}}.

S2004

VA2005$*$ $\text{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ \text{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Das Alphabet eines Wortes der Relation ist eine Klique, da seine Elemente paarweise in $\underline{\text{li}}$ stehen.

T2006 $\forall\ \text{w} \in \text{R} \bullet \mathcal{A}(\text{w}) \in (\underline{\text{li}}\ \text{R})$ -Kliquen

VA2007	$\text{w} \in \text{R}$	
T2008$*$	$\text{w} \in \mathbb{A}^*$	2007
G2009	$\mathcal{A}(\text{w}) \in (\underline{\text{li}}\ \text{R})$ -Kliquen	
G2010	$\forall\ \text{x} \in \mathcal{A}(\text{w}),\ \text{y} \in \mathcal{A}(\text{w}) \bullet (\text{x,y}) \in (\underline{\text{li}}\ \text{R})$	0106
VA2011	$\text{x} \in \mathcal{A}(\text{w}),\ \text{y} \in \mathcal{A}(\text{w})$	
G2012	$(\text{x,y}) \in (\underline{\text{li}}\ \text{R})$	
G2013	$\mathbb{T}$	1834, 2007, 2011

Jede Klique enthält nur Elemente der Alphabets $\mathcal{A}(\text{R})$.

T2014 $\forall\ C \in (\underline{\text{li}}\ R)\text{ -Kliquen} \bullet C \subseteq \mathcal{A}(R)$

- **T2015** $(\underline{\text{li}}\ R) \in \mathcal{BR}(\mathcal{A}(R))$ . . . 1820
- **G2016** $\mathbb{T}$ . . . 0105, 2015

Ist die Relation total, so ist das Alphabet selbst eine Klique und umgekehrt.

T2017 $R \text{ ist total} \Leftrightarrow \mathcal{A}(R) \in (\underline{\text{li}}\ R)\text{ -Kliquen}$

- **G2018** $(\ \forall\ x \in \mathcal{A}(R), y \in \mathcal{A}(R) \bullet \exists\ w \in R \bullet x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)\ ) \Leftrightarrow$
  $(\ \forall\ x \in \mathcal{A}(R), y \in \mathcal{A}(R) \bullet (x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R)\ )$ . . . 1283, 0106
- **G2019** $\mathbb{T}$ . . . 1834

T2020 $R \text{ ist total} \Leftrightarrow (\underline{\text{li}}\ R) = \mathcal{A}(R)^2$

- **G2021** $\mathcal{A}(R)^2 = (\underline{\text{li}}\ R) \Leftrightarrow \mathcal{A}(R) \in (\underline{\text{li}}\ R)\text{ -Kliquen}$ . . . 2017
- **G2022** $\mathcal{A}(R)^2 \subseteq (\underline{\text{li}}\ R) \Leftrightarrow \mathcal{A}(R) \in (\underline{\text{li}}\ R)\text{ -Kliquen}$ . . . 1820
- **G2023** $\mathbb{T}$ . . . 0107

Dies können wir noch verschärfen: In totalen Relationen gibt es genau einen Ken, nämlich das Alphabet selbst.

T2024 $R \text{ ist total} \Rightarrow (\underline{\text{li}}\ R)\text{ -Kens} = \{\mathcal{A}(R)\}$

- **A2025** R ist total
- **G2026** $(\underline{\text{li}}\ R)\text{ -Kens} = \{\mathcal{A}(R)\}$
- **T2027** $\mathcal{A}(R) \in (\underline{\text{li}}\ R)\text{ -Kliquen}$ . . . 2017, 2025
- **T2028** $\mathcal{A}(R) \in (\underline{\text{li}}\ R)\text{ -Kens}$
  - **G2029** $\neg\exists\ C' \in (\underline{\text{li}}\ R)\text{ -Kliquen} \bullet \mathcal{A}(R) \subset C'$ . . . 0126, 2027
  - **G2030** $\forall\ C' \in (\underline{\text{li}}\ R)\text{ -Kliquen} \bullet \neg\ \mathcal{A}(R) \subset C'$
  - **VA2031** $C' \in (\underline{\text{li}}\ R)\text{ -Kliquen}$
  - **G2032** $\neg\ \mathcal{A}(R) \subset C'$
  - **G2033** $C' \subseteq \mathcal{A}(R)$
  - **G2034** $\mathbb{T}$ . . . 0105, 1820, 2031
- **T2035** $|(\underline{\text{li}}\ R)\text{ -Kens}| = 1$
  - **A2036** $|(\underline{\text{li}}\ R)\text{ -Kens}| \neq 1$
  - **VT2037** $K \in (\underline{\text{li}}\ R)\text{ -Kens} \bullet \mathcal{A}(R) \neq K$ . . . 2028, 2036
  - **T2038** $K \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 0124, 1820, 2037
  - **T2039** $K \subset \mathcal{A}(R)$ . . . 2037, 2038
  - **T2040** $\mathbb{F}$ . . . 0126, 2037, 2027, 2039
- **G2041** $\mathbb{T}$ . . . 2028, 2035

Eine Relation ist genau dann total, wenn keine voneinander unabhängigen Elemente existieren.

T2042 $R \text{ ist total} \Leftrightarrow (\text{co } R) = \emptyset$

- **G2043** $(\underline{\text{li}}\ R) = \mathcal{A}(R)^2 \Leftrightarrow (\text{co } R) = \emptyset$ . . . 2020
- **G2044** $\mathcal{A}(R)^2 - (\text{co } R) = \mathcal{A}(R)^2 \Leftrightarrow (\text{co } R) = \emptyset$ . . . 1998
- **T2045** $(\text{co } R) \subseteq \mathcal{A}(R)^2$ . . . 1926
- **G2046** $\mathbb{T}$ . . . 2045

Die Monotonie der $(\underline{\text{li}}\ R)$ -Gewinnung überträgt sich auch auf die Gewinnung der Kliquen.

T2047 $R \subseteq R' \Rightarrow (\underline{\text{li}}\ R)\text{ -Kliquen} \subseteq (\underline{\text{li}}\ R')\text{ -Kliquen}$

- **A2048** $R \subseteq R'$
- **G2049** $(\underline{\text{li}}\ R)\text{ -Kliquen} \subseteq (\underline{\text{li}}\ R')\text{ -Kliquen}$
- **T2050** $(\underline{\text{li}}\ R) \subseteq (\underline{\text{li}}\ R')$ . . . 1866

G2051 $\mathbb{T}$ 0116, 2050

Eine wichtige Endlichkeitseigenschaft von Relationen ist die Ken-Endlichkeit, d.h. die Endlichkeit aller Kens. Sie wird von der Endlichkeit der Relation impliziert.

S2052

VA2053∗

$R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

D2054 R ist Ken-endlich :⇔ $\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ L ist endlich

T2055 R ist endlich ⇒ R ist Ken-endlich

A2056 R ist endlich

G2057 $\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ L ist endlich 2054

VA2058 L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens

G2059 L ist endlich

T2060 $\mathcal{A}$(R) ist endlich 1293, 2056

T2061 $L \subseteq \mathcal{A}(R)$ 0124, 1820, 2058

G2062 $\mathbb{T}$ 2060, 2061

Die Umkehrung gilt natürlich nicht, da es unendlich viele Kens geben kann.

Den Abschluß dieses Abschnittes bildet noch eine einfache Anwendung des Kenbegriffs zur Zerlegung und Komposition von Relationen. Wir können jede teilwortabgeschlossene Relation in ihre Projektionen auf Kens zerlegen. Es handelt sich im allgemeinen jedoch nicht um eine disjunkte Zerlegung. Die Komposition, d.h. die Vereinigung, dieser Projektionen führt wieder zur ursprünglichen Relation.

S2063

VA2064∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

A2065 R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen

T2066 $R = \bigcup \{R' \bullet L \in (\underline{\text{li}}\ R)\text{ -Kens} \bullet R' = (R \triangleright L)\}$

T2067 $\forall$ w $\in$ R $\bullet$ $\exists$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ w $\in$ (R $\triangleright$ L)

VA2068 w $\in$ R

G2069 $\exists$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ w $\in$ (R $\triangleright$ L)

T2070∗ $w \in \mathbb{A}^*$ 2068

T2071 $\mathcal{A}$(w) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen 2006, 2068

VT2072 L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ $\mathcal{A}(w) \subseteq L$ 0134, 2071

T2073∗ $L \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ 0124, 2072

T2074 $w = (w \triangleright L)$ 0647, 2072

T2075 $w \in (R \triangleright L)$ 2074, 1703, 2068

G2076 $\mathbb{T}$ 2072, 2075

T2077 $\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens, w $\in$ (R $\triangleright$ L) $\bullet$ w $\in$ R

VA2078 L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens

VA2079 $w \in (R \triangleright L)$

T2080∗ $L \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \wedge w \in \mathbb{A}^*$ 0124, 2078, 2079

G2081 w $\in$ R

VT2082 $u \in R \bullet w = (u \triangleright L)$ 1703, 2079

T2083∗ $u \in \mathbb{A}^*$ 2082

T2084 $w \sqsubseteq u$ 0655, 2082

G2085 $\mathbb{T}$ 1315, 2065, 2082, 2084

G2086 $\mathbb{T}$ 2067, 2077

Die Bedingung der Teilwortabgeschlossenheit ist im allgemeinen notwendig, da sonst durch Projektion neue Teilwörter entstehen könnten, die nicht in R enthalten sind.

4.9 Abhängigkeit unter Projektion

Nach der Einführung der Projektionsoperation wurde schon die Veränderung bzw. Erhaltung bestimmter Eigenschaften unter Projektion erwähnt. In diesem Abschnitt werden wir speziell untersuchen wie sich (li R) unter Projektionen der unterliegenden Relation R verhält.

B2087

In Beispiel 1727 hatten wir R = {[0,1,2], [2,1], [0,0,3], [4]} und (li R) = {(0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (0,2), (2,0), (0,0), (0,3), (3,0)}. Wir betrachten die Projektion auf die Menge {0,1,3,4}, also (R $\triangleright$ {0,1,3,4}) = {[0,1], [1], [0,0,3], [4]}. Als Abhängigkeitsrelation der Projektion erhalten wir (li (R $\triangleright$ {0,1,3,4})) = {(0,1), (1,0), (0,0), (0,3), (3,0)}.

S2088

VA2089∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}), X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$

Klar ist, daß durch Projektion auf eine Menge das Alphabet eingeschränkt wird, so daß (li R) nur noch eine binäre Relation auf dieser Menge sein kann.

T2090 $(\mathrm{li}\ (R \triangleright X)) \subseteq X^2$

T2091	$\mathcal{A}(R \triangleright X) \subseteq X$	1709
T2092	$\mathcal{A}(R \triangleright X)^2 \subseteq X^2$	2091
T2093	$(\mathrm{li}\ (R \triangleright X)) \subseteq \mathcal{A}(R \triangleright X)^2$	1718
G2094	$\mathbb{T}$	2093, 2092

Elemente, die nach der Projektion durch ein Wort geordnet und damit abhängig sind, waren schon vor der Projektion durch das gleiche Wort geordnet, d.h. (li R) wird durch Projektion höchstens verkleinert.

T2095 $(\mathrm{li}\ (R \triangleright X)) \subseteq (\mathrm{li}\ R)$

G2096	$\forall x,y \bullet (x,y) \in (\mathrm{li}\ (R \triangleright X)) \Rightarrow (x,y) \in (\mathrm{li}\ R)$	2090
VA2097	$x,y \bullet (x,y) \in (\mathrm{li}\ (R \triangleright X))$	
G2098	$(x,y) \in (\mathrm{li}\ R)$	
VT2099	$w \in (R \triangleright X), i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \neq j \wedge w_i = x \wedge w_j = y$	1733, 2097
T2100∗	$w \in \mathbb{A}^*$	2099
VT2101	$w' \in R \bullet w = (w' \triangleright X)$	1703, 2099
T2102∗	$w' \in \mathbb{A}^*$	2101
T2103	$w \sqsubseteq w'$	2101, 0655
VT2104	$f \in (\mathcal{I}(w) \rightarrow \mathcal{I}(w')) \bullet$ $(\forall i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \neq j \Rightarrow f\,i \neq f\,j) \wedge (\forall i \in \mathcal{I}(w) \bullet w_i = w'_{(f\,i)})$	0596, 2103
T2105	$f\,i \in \mathcal{I}(w')$	2099, 2104
T2106	$f\,j \in \mathcal{I}(w')$	2099, 2104
T2107	$f\,i \neq f\,j$	2099, 2104
T2108	$w_i = w'_{(f\,i)}$	2099, 2104
T2109	$w_j = w'_{(f\,j)}$	2099, 2104
T2110	$w'_{(f\,i)} = x$	2099, 2108
T2111	$w'_{(f\,j)} = y$	2099, 2109
G2112	$\exists w' \in R, i \in \mathcal{I}(w'), j \in \mathcal{I}(w') \bullet i \neq j \wedge w'_i = x \wedge w'_j = y$	1733
G2113	$\mathbb{T}$	2101, 2105, 2106, 2107, 2110, 2111

Gleiches gilt für ($\underline{\mathrm{li}}$ R):

T2114 $(\underline{\mathrm{li}}\ (R \triangleright X)) \subseteq (\underline{\mathrm{li}}\ R)$

G2115	$(\mathrm{li}\ (R \triangleright X)) \cup \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R \triangleright X)) \subseteq (\mathrm{li}\ R) \cup \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))$	1819

G2116	$\mathbb{T}$	2095, 1708

Somit kann auch die Menge der Kliquen höchstens verkleinert werden.

T2117	$(\underline{\text{li}}\ (R \triangleright X))$ -Kliquen $\subseteq$ $(\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen	0116, 2114

Eine Projektion der unterliegenden Relation R auf eine Menge führt zur Einschränkung von (li R) auf genau diese Menge.

T2118	$(\text{li}\ (R \triangleright X)) = ((\text{li}\ R)\vert X)$	
G2119	$(\text{li}\ (R \triangleright X)) = (\text{li}\ R) \cap X^2$	0060
T2120	$(\text{li}\ (R \triangleright X)) \subseteq (\text{li}\ R) \cap X^2$	2090, 2095
G2121	$(\text{li}\ R) \cap X^2 \subseteq (\text{li}\ (R \triangleright X))$	2120
G2122	$\forall\ x,y \bullet (x,y) \in (\text{li}\ R) \wedge (x,y) \in X^2 \Rightarrow (x,y) \in (\text{li}\ (R \triangleright X))$	
VA2123	$x,y \bullet (x,y) \in (\text{li}\ R)$	
A2124	$(x,y) \in X^2$	
G2125	$(x,y) \in (\text{li}\ (R \triangleright X))$	
T2126	$x \in X \wedge y \in X$	2124
VT2127	$w \in R,\ i \in \mathcal{I}(w),\ j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \neq j \wedge w_i = x \wedge w_j = y$	1733, 2123
T2128$*$	$w \in \mathbb{A}^*$	2127
G2129	$\exists\ w \in (R \triangleright X),\ i \in \mathcal{I}(w),\ j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \neq j \wedge w_i = x \wedge w_j = y$	1733
D2130	$w' := (w \triangleright X)$	
T2131$*$	$w' \in \mathbb{A}^*$	2130
T2132	$w' \in (R \triangleright X)$	2130, 1703, 2127
VT2133	$f \in (\mathcal{I}(w') \rightarrow \mathcal{I}(w)) \bullet$ $(\forall\ i \in \mathcal{I}(w'),\ j \in \mathcal{I}(w') \bullet i \neq j \Rightarrow f\ i \neq f\ j) \wedge (\forall\ i \in \mathcal{I}(w') \bullet w'_i = w_{(f\ i)}) \wedge$ $\mathcal{R}(f) = \{k \in \mathcal{I}(w) \bullet w_k \in X\}$	0669, 2130
T2134$*$	$f \in (\mathcal{I}(w') \rightarrow \mathcal{I}(w))$	2133
T2135	$\forall\ i \in \mathcal{I}(w'),\ j \in \mathcal{I}(w') \bullet i \neq j \Rightarrow f\ i \neq f\ j$	2133
T2136	$\forall\ i \in \mathcal{I}(w') \bullet w'_i = w_{(f\ i)}$	2133
T2137	$\mathcal{R}(f) = \{k \in \mathcal{I}(w) \bullet w_k \in X\}$	2133
T2138	$\mathcal{D}(f) = \mathcal{I}(w')$	2134
T2139	f ist injektiv	0153, 2138, 2135
T2140	$f^{-1}\ i \in \mathcal{D}(f)$	
T2141	$i \in \mathcal{R}(f)$	2137, 2127, 2126
G2142	$\mathbb{T}$	0154, 2139, 2141
T2143	$f^{-1}\ i \in \mathcal{I}(w')$	2138, 2140
T2144	$f^{-1}\ j \in \mathcal{D}(f)$	
T2145	$j \in \mathcal{R}(f)$	2137, 2127, 2126
G2146	$\mathbb{T}$	0154, 2139, 2145
T2147	$f^{-1}\ j \in \mathcal{I}(w')$	2138, 2144
T2148	$f\ (f^{-1}\ i) = i$	0147, 2140
T2149	$f\ (f^{-1}\ j) = j$	0147, 2144
T2150	$f^{-1}\ i \neq f^{-1}\ j$	
A2151	$f^{-1}\ i = f^{-1}\ j$	
T2152	$f\ (f^{-1}\ i) \cong f\ (f^{-1}\ j)$	2151
T2153	$i = j$	2148, 2149
T2154	$\mathbb{F}$	2127, 2153
T2155	$w'_{(f^{-1}\ i)} = x$	
T2156	$w'_{(f^{-1}\ i)} = w_{(f\ (f^{-1}\ i))}$	2136, 2143
T2157	$w'_{(f^{-1}\ i)} = w_i$	2156, 2148
G2158	$\mathbb{T}$	2157, 2127
T2159	$w'_{(f^{-1}\ j)} = y$	
T2160	$w'_{(f^{-1}\ j)} = w_{(f\ (f^{-1}\ j))}$	2136, 2147
T2161	$w'_{(f^{-1}\ j)} = w_j$	2160, 2149

G2162	$\mathbb{T}$	2161, 2127
G2163	$\mathbb{T}$	2132, 2143, 2147, 2150, 2155, 2159

Entsprechendes gilt für ($\underline{\text{li}}$ R):

T2164 $(\underline{\text{li}}\ (R \triangleright X)) = ((\underline{\text{li}}\ R)|X)$

G2165	$(\underline{\text{li}}\ (R \triangleright X)) = (\underline{\text{li}}\ R) \cap X^2$	0060
G2166	$(\text{li}\ (R \triangleright X)) \cup \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R \triangleright X)) = ((\text{li}\ R) \cup \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))) \cap X^2$	1819
G2167	$\forall\ x,y \bullet ((x,y) \in (\text{li}\ (R \triangleright X)) \vee (x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R \triangleright X))) \Leftrightarrow$ $(((x,y) \in (\text{li}\ R) \vee (x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))) \wedge (x,y) \in X^2)$	
VA2168	x,y	
A2169	$(x,y) \in (\text{li}\ (R \triangleright X))$	
T2170	$(x,y) \in (\text{li}\ R)$	2095, 2169
T2171	$(x,y) \in X^2$	2090, 2169
A2172	$(x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R \triangleright X))$	
T2173	$x \in \mathcal{A}(R \triangleright X) \wedge y \in \mathcal{A}(R \triangleright X)$	2172
T2174	$x \in X \wedge y \in X$	1709, 2173
T2175	$(x,y) \in X^2$	2174
T2176	$x \in \mathcal{A}(R) \wedge y \in \mathcal{A}(R)$	1708, 2173
T2177	$x = y$	2172
T2178	$(x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))$	2177, 2176
A2179	$(x,y) \in X^2$	
A2180	$(x,y) \in (\text{li}\ R)$	
T2181	$(x,y) \in (\text{li}\ R) \cap X^2$	2180, 2179
T2182	$(x,y) \in ((\text{li}\ R)|X)$	0060, 2181
T2183	$(x,y) \in (\text{li}\ (R \triangleright X))$	2118, 2182
A2184	$(x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))$	
T2185	$x \in \mathcal{A}(R) \wedge y \in \mathcal{A}(R)$	2184
T2186	$x \in X \wedge y \in X$	2179
T2187	$x \in \mathcal{A}(R) \cap X \wedge y \in \mathcal{A}(R) \cap X$	2185, 2186
T2188	$x = y$	2184
T2189	$(x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R) \cap X)$	2187, 2188
T2190	$(x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R \triangleright X))$	2189, 1710
G2191	$\mathbb{T}$	2170, 2171, 2175, 2178, 2183, 2190

Die Kliquen der Projektion auf eine Menge erhält man durch Schnitt der ursprünglichen Kliquen mit der Menge.

T2192 $\forall\ C \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet\ (C \cap X) \in (\underline{\text{li}}\ (R \triangleright X))$ -Kliquen

G2193	$\forall\ C \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet\ (C \cap X) \in ((\underline{\text{li}}\ R)|X)$ -Kliquen	2164
G2194	$\mathbb{T}$	0118

Die Projektion auf eine Klique liefert immer eine totale Relation.

T2195 $\forall\ C \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet\ (R \triangleright C)$ ist total

VA2196	$C \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen	
T2197∗	$C \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	0105, 2196
G2198	$(R \triangleright C)$ ist total	
G2199	$\forall\ x \in \mathcal{A}(R \triangleright C),\ y \in \mathcal{A}(R \triangleright C) \bullet \exists\ w \in (R \triangleright C) \bullet x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$	1283
VA2200	$x \in \mathcal{A}(R \triangleright C),\ y \in \mathcal{A}(R \triangleright C)$	
G2201	$\exists\ w \in (R \triangleright C) \bullet x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$	
T2202	$x \in C \wedge y \in C$	1709, 2200
T2203	$(x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R)$	0106, 2196, 2202
T2204	$(x,y) \in ((\underline{\text{li}}\ R)|C)$	0060, 2203, 2202
T2205	$(x,y) \in (\underline{\text{li}}\ (R \triangleright C))$	2164, 2204

G2206 $\mathbb{T}$ 1834, 2205

4.10 Vollständigkeit

Nachdem nun Kliquen einer Relation eingeführt wurden, verwenden wir diese zur Definition eines Vollständigkeitsbegriffs. Im Gegensatz zum Konsistenzbegriff, der sicherstellt, daß eine Relation nicht zu viele Wörter enthält und dadurch widersprüchlich wird, erzwingt die Vollständigkeit gerade eine gewisse Reichhaltigkeit der Relation. Fordern wir also später Konsistenz und Vollständigkeit gleichzeitig, so hoffen wir dadurch in gewissem Sinne ausgeglichene und damit interessante Relationen zu erhalten.

S2207

VA2208∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$

Wir bezeichnen eine Relation als vollständig gdw. jede endliche Klique als Alphabet eines Wortes in der Relation vorkommt. Wir sagen in diesem Fall auch: Jede endliche Klique wird durch ein Wort der Relation abgedeckt oder repräsentiert.

D2209 R ist vollständig :⇔
$\forall\, \mathrm{C} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})\text{ -Kliquen} \bullet \mathrm{C} \text{ ist endlich} \Rightarrow \exists\, \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathcal{A}(\mathrm{w}) = \mathrm{C}$

Eine schwächere Form der Vollständigkeit fordert die genannte Bedingung nur für Kliquen bis zu einer bestimmten Größe.

D2210 R ist n -vollständig :⇔
$\forall\, \mathrm{C} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})\text{ -Kliquen} \bullet |\mathrm{C}| \leq \mathrm{n} \Rightarrow \exists\, \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathcal{A}(\mathrm{w}) = \mathrm{C}$

Die letzte Form der Vollständigkeit wird nützlich sein, wenn wir Relationen axiomatisieren, deren Wörter in der Länge beschränkt sind, deren Kliquen jedoch größer sein können als diese Schranke angibt.

B2211

Sei $\mathrm{R} = \{[0{,}1{,}2], [0{,}3{,}1], [2{,}3{,}1], [3{,}2{,}0], [2{,}3], [0{,}1], [2{,}1], [1], [2], [3{,}3], [3{,}4], [4], []\}$. Das Alphabet ist $\mathcal{A}(\mathrm{R}) = \{0{,}1{,}2{,}3{,}4\}$ und als Abhängigkeitsrelation berechnen wir $(\mathrm{li}\ \mathrm{R}) = \updownarrow\{(0{,}1), (1{,}2), (0{,}2), (0{,}3), (3{,}1), (2{,}3), (3{,}3), (3{,}4)\ \}$. Damit ergeben sich die Abhängigkeitskliquen $(\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen $= \mathcal{P}(\{0{,}1{,}2{,}3\}) \cup \mathcal{P}(\{3{,}4\})$. Die 3 -Vollständigkeit ist erfüllt: Die dreielementige Klique $\{1{,}2{,}3\}$ wird durch $[2{,}3{,}1]$ repräsentiert, die zweielementige Klique $\{0{,}1\}$ durch das Wort $[0{,}1]$, die einelementige Klique $\{3\}$ durch $[3{,}3]$ usw. Die Relation ist jedoch nicht 4 -vollständig, da die vierelementige Abhängigkeitsklique $\{0{,}1{,}2{,}3\}$ nicht als Alphabet eines Wortes von R vorkommt. Damit ist die Relation auch nicht vollständig. Durch Hinzunahme eines Wortes, z.B. $[3{,}2{,}1{,}0]$ erhalten wir eine Relation $\mathrm{R}' = \mathrm{R} \cup \{[3{,}2{,}1{,}0]\}$ die auch vollständig ist.

Offenbar kann jede Relation zu einer (schwach) vollständigen Relation erweitert werden, indem Wörter mit geeignetem Alphabet hinzugefügt werden. Später werden wir sehen, daß dies jedoch oft nicht möglich ist, ohne andere für uns wichtige Eigenschaften zu zerstören. Eine dieser Eigenschaften ist die Konsistenz. Umgekehrt läßt sich die Konsistenz immer durch Verkleinern der Relation erreichen. Dies kann aber wiederum andere Eigenschaften, wie die Vollständigkeit zerstören.

Es folgen nun einige direkte Konsequenzen aus der Definition.

S2212

VA2213∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$

Vollständigkeit ist ein Begriff, der sich bei unveränderter Abhängigkeitsrelation auf alle Obermengen einer Relation überträgt. Entsprechendes gilt natürlich auch für die schwache Vollständigkeit. Die Vollständigkeit verhält sich also gerade anders als die Konsistenz (siehe Theorem 1553), wie die Bezeichnungen schon andeuten.

T2214 R ist vollständig $\Rightarrow$
$\forall\, R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet (\underline{\text{li}}\ R') = (\underline{\text{li}}\ R) \wedge R \subseteq R' \Rightarrow R'$ ist vollständig 2209

Vollständigkeit und ihre schwache Variante sind in dem folgenden Sinne gleichmächtig:

T2215 R ist vollständig $\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N} \bullet$ R ist n -vollständig 2209, 2210
T2216 R ist n -vollständig $\wedge\ m \leq n \Rightarrow$ R ist m -vollständig 2210

Beide Formen von Vollständigkeit fordern die Repräsentation der leeren Klique durch das leere Wort.

S2217
VA2218∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $n \in \mathbb{N}$
T2219 R ist n -vollständig $\Rightarrow [] \in R$

A2220 R ist n -vollständig
G2221 $[] \in R$
T2222 $\emptyset \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen 0110
T2223 $|\emptyset| \leq n$
VT2224 $w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = \emptyset$ 2210, 2220, 2222, 2223
T2225∗ $w \in \mathbb{A}^*$ 2224
T2226 $w = []$ 0257, 2224
G2227 $\mathbb{T}$ 2224, 2226

T2228 R ist vollständig $\Rightarrow [] \in R$ 2215, 2219
T2229 R ist n -vollständig $\wedge\ \mathcal{A}(R) = \emptyset \Rightarrow R = \{[]\}$

A2230 R ist n -vollständig
A2231 $\mathcal{A}(R) = \emptyset$
G2232 $R = \{[]\}$
T2233 $\{[]\} \subseteq R$ 2219, 2230
G2234 $R \subseteq \{[]\}$ 2233
G2235 $\forall\, w \in R \bullet w = []$
VA2236 $w \in R$
G2237 $w = []$
T2238∗ $w \in \mathbb{A}^*$ 2236
T2239 $\mathcal{A}(w) \subseteq \emptyset$ 1245, 2236, 2231
T2240 $\mathcal{A}(w) = \emptyset$ 2239
G2241 $\mathbb{T}$ 0257, 2240

Eine vollständige Relation mit leerem Alphabet ist damit eindeutig bestimmt.

T2242 R ist vollständig $\wedge\ \mathcal{A}(R) = \emptyset \Rightarrow R = \{[]\}$ 2215, 2229

Für totale Relationen ergibt sich eine geringfügig vereinfachte Formulierung der Vollständigkeit.

S2243
VA2244∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $n \in \mathbb{N}$

In totalen Relationen ist jede Teilmenge des Alphabets eine Klique. In totalen, n -vollständigen Relationen ist also jede Teilmenge bis zur Kardinalität n repräsentiert.

T2245 R ist total $\wedge$ R ist n -vollständig $\Rightarrow$
$\forall$ C $\bullet$ C $\subseteq \mathcal{A}$(R) $\wedge$ |C| $\leq$ n $\Rightarrow \exists$ w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C

A2246	R ist total	
A2247	R ist n -vollständig	
G2248	$\forall$ C $\bullet$ C $\subseteq \mathcal{A}$(R) $\wedge$ |C| $\leq$ n $\Rightarrow \exists$ w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C	
VA2249	C $\bullet$ C $\subseteq \mathcal{A}$(R)	
A2250	|C| $\leq$ n	
G2251	$\exists$ w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C	
T2252	$\mathcal{A}$(R) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	2017, 2246
T2253	C $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	0117, 2252, 2249
G2254	$\mathbb{T}$	2210, 2247, 2253, 2250

Umgekehrt können wir die Totalität ableiten, wenn mindestens alle zweielementigen Teilmengen repräsentiert sind.

T2255 ($\forall$ C $\bullet$ C $\subseteq \mathcal{A}$(R) $\wedge$ |C| = 2 $\Rightarrow \exists$ w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C) $\Rightarrow$ R ist total

A2256	$\forall$ C $\bullet$ C $\subseteq \mathcal{A}$(R) $\wedge$ |C| = 2 $\Rightarrow \exists$ w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C	
G2257	R ist total	
G2258	$\forall$ x $\in \mathcal{A}$(R), y $\in \mathcal{A}$(R) $\bullet$ $\exists$ w $\in$ R $\bullet$ x $\in \mathcal{A}$(w) $\wedge$ y $\in \mathcal{A}$(w)	1283
VA2259	x $\in \mathcal{A}$(R), y $\in \mathcal{A}$(R)	
G2260	$\exists$ w $\in$ R $\bullet$ x $\in \mathcal{A}$(w) $\wedge$ y $\in \mathcal{A}$(w)	
T2261	{x,y} $\subseteq \mathcal{A}$(R)	2259
T2262	|{x,y}| = 1 $\vee$ |{x,y}| = 2	
A2263	|{x,y}| = 1	
T2264	x = y	2263
T2265	w $\in$ R $\bullet$ x $\in \mathcal{A}$(w)	1243, 2259
T2266	y $\in \mathcal{A}$(w)	2264, 2265
G2267	$\mathbb{T}$	2265, 2266
A2268	|{x,y}| = 2	
VT2269	w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = {x,y}	2256, 2261, 2268
T2270	x $\in \mathcal{A}$(w) $\wedge$ y $\in \mathcal{A}$(w)	2269
G2271	$\mathbb{T}$	2269, 2270

Sind nicht nur die Kliquen, sondern alle Teilmengen bis zur Kardinalität n repräsentiert, so ist die Relation natürlich auch n -vollständig.

T2272 ($\forall$ C $\bullet$ C $\subseteq \mathcal{A}$(R) $\wedge$ |C| $\leq$ n $\Rightarrow \exists$ w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C) $\Rightarrow$ R ist n -vollständig

A2273	$\forall$ C $\bullet$ C $\subseteq \mathcal{A}$(R) $\wedge$ |C| $\leq$ n $\Rightarrow \exists$ w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C	
G2274	R ist n -vollständig	
G2275	$\forall$ C $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen $\bullet$ |C| $\leq$ n $\Rightarrow \exists$ w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C	2210
VA2276	C $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	
A2277	|C| $\leq$ n	
G2278	$\exists$ w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C	
T2279	C $\subseteq \mathcal{A}$(R)	2014, 2276
G2280	$\mathbb{T}$	2273, 2279, 2277

Kombinieren wir diese Resultate mit Theorem 2215, so erhalten wir die gewünschte Charakterisierung von totalen, vollständigen Relationen.

T2281 R ist total $\wedge$ R ist vollständig $\Rightarrow$
$\forall$ C $\bullet$ C $\subseteq \mathcal{A}$(R) $\wedge$ C ist endlich $\Rightarrow \exists$ w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C

A2282	R ist total
A2283	R ist vollständig
VA2284	C $\bullet$ C $\subseteq \mathcal{A}$(R) $\wedge$ C ist endlich

G2285	$\exists\, w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$	
VT2286	$n \in \mathbb{N} \bullet \lvert C \rvert = n$	2284
T2287∗	$n \in \mathbb{N}$	2286
T2288	R ist n -vollständig	2215, 2283
G2289	$\mathbb{T}$	2245, 2282, 2288, 2284, 2286

T2290 $(\forall\, C \bullet C \subseteq \mathcal{A}(R) \wedge C$ ist endlich $\wedge\, \exists\, w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C) \Rightarrow$
R ist total $\wedge$ R ist vollständig

A2291	$\forall\, C \bullet C \subseteq \mathcal{A}(R) \wedge C$ ist endlich $\Rightarrow \exists\, w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$	
G2292	R ist total $\wedge$ R ist vollständig	
G2293	R ist vollständig	2255, 2291
G2294	$\forall\, n \in \mathbb{N} \bullet$ R ist n -vollständig	2215
VA2295∗	$n \in \mathbb{N}$	
G2296	R ist n -vollständig	
G2297	$\mathbb{T}$	2272, 2291

Bei teilwortabgeschlossenen Relationen brauchen wir nicht alle Kliquen zu berücksichtigen, um die Vollständigkeit festzustellen, wie die folgenden Theoreme zeigen.

S2298

VA2299∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Wenn alle Kens mindestens n Elemente besitzen, so vereinfacht sich Definition 2210 der n - Vollständigkeit wesentlich: Wir brauchen die Eigenschaft aus der Definition nur für Kliquen der Kardinalität n zu prüfen.

T2300 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge\, (\forall\, L \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $\bullet\, n \,|\!\leq\!|\, L) \Rightarrow$
(R ist n -vollständig $\Leftrightarrow \forall\, C \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet \lvert C \rvert = n \Rightarrow \exists\, w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$)

A2301	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
A2302	$\forall\, L \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $\bullet\, n \,|\!\leq\!|\, L$	
G2303	($\forall\, C \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet \lvert C \rvert = n \Rightarrow \exists\, w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$) $\Rightarrow$ R ist n -vollständig	2210
VA2304	$\forall\, C \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet \lvert C \rvert = n \Rightarrow \exists\, w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$	
G2305	R ist n -vollständig	
G2306	$\forall\, C \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet \lvert C \rvert \leq n \Rightarrow \exists\, w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$	2210
VA2307	$C \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen	
A2308	$\lvert C \rvert \leq n$	
G2309	$\exists\, w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$	
T2310∗	$C \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	0105, 2307
VT2311	$L \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $\bullet\, C \subseteq L$	0134, 2307
T2312∗	$L \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	0124, 2311
T2313	$n \,|\!\leq\!|\, L$	2302, 2311
VT2314	$C' \bullet C \subseteq C' \wedge C' \subseteq L \wedge \lvert C' \rvert = n$	2311, 2308, 2313
T2315	$L \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen	0125, 2311
T2316	$C' \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen	0117, 2315, 2314
T2317∗	$C' \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	2314
VT2318	$w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C'$	2304, 2316, 2314
T2319∗	$w \in \mathbb{A}^*$	2318
T2320	$(w \triangleright C) \sqsubseteq w$	0655
T2321	$(w \triangleright C) \in R$	1315, 2301, 2318, 2320
T2322	$C \subseteq \mathcal{A}(w)$	2314, 2318
T2323	$\mathcal{A}(w \triangleright C) = C$	0660, 2322
G2324	$\mathbb{T}$	2321, 2323

Nützlich für Relationen mit endlichen Kens ist das folgende Theorem: Wird jeder Ken durch ein Wort der Relation abgedeckt, so ist die Relation vollständig.

T2325 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ ($\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ $\exists$ w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = L) $\Rightarrow$
R ist vollständig

A2326	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
A2327	$\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ $\exists$ w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = L	
G2328	R ist vollständig	
G2329	$\forall$ C $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen $\bullet$ C ist endlich $\Rightarrow$ $\exists$ w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C	2209
VA2330	C $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	
A2331	C ist endlich	
G2332	$\exists$ w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C	
VT2333	L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ C $\subseteq$ L	0134, 2330
T2334$*$	L $\in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ $\wedge$ C $\in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	0124, 2333
T2335	L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	0125, 2333
VT2336	w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = L	2327, 2333
T2337$*$	w $\in \mathbb{A}^*$	2336
T2338	(w $\triangleright$ C) $\sqsubseteq$ w	0655
T2339	(w $\triangleright$ C) $\in$ R	1315, 2326, 2336, 2338
T2340	C $\subseteq \mathcal{A}$(w)	2333, 2336
T2341	$\mathcal{A}$(w $\triangleright$ C) = C	0660, 2340
G2342	$\mathbb{T}$	2339, 2341

Die Umkehrung des letzten Theorems gilt natürlich nicht, da nicht alle Kens endlich sein müssen, das Alphabet eines Wortes jedoch immer endlich ist.

B2343

Die Relation R = $(\sqsupseteq)$[{[1,2,3], [3,4]}] ist teilwortabgeschlossen. Wir haben die Abhängigkeitskliquen ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen = $\mathcal{P}$(1,2,3) $\cup$ $\mathcal{P}$(3,4) und die Kens ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens = {{1,2,3}, {3,4}}. Die Relation ist 2 -vollständig. Dies können wir sofort mit Theorem 2325 verifizieren, da alle Kens mindestens zwei Elemente enthalten und jede zweielementige Klique durch ein Wort der Relation abgedeckt wird. Die Relation ist sogar vollständig. Dies folgt aus Theorem 2325, da jeder Ken durch ein Wort in der Relation repräsentiert wird.

Nachdem nun die Vollständigkeit eingeführt wurde, leiten wir noch einige spezielle Theoreme ab, die mit Hilfe der 3 -Vollständigkeit, einen Zusammenhang zwischen dreielementigen Kliquen und dreistelligen Wörtern herstellen. Die 3 -Vollständigkeit wird bei zyklischen Ordnungen eine wichtige Rolle spielen.

S2344

VA2345$*$ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Bei Annahme von Einfachheit, Rotationsabgeschlossenheit und 3 -Vollständigkeit gilt: Jede dreielementige Klique wird durch ein dreistelliges Wort oder durch seine gespiegelte Version repräsentiert.

T2346 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist 3 -vollständig $\Rightarrow$
$\forall$ x,y,z $\bullet$ {x,y,z} $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen $\wedge$ |{x,y,z}| = 3 $\Rightarrow$ [x,y,z] $\in$ R $\vee$ [z,y,x] $\in$ R

A2347	R ist einfach	
A2348	R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	
A2349	R ist 3 -vollständig	
VA2350	x,y,z $\bullet$ {x,y,z} $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	
A2351	|{x,y,z}| = 3	
G2352	[x,y,z] $\in$ R $\vee$ [z,y,x] $\in$ R	
T2353$*$	{x,y,z} $\subseteq \mathbb{A}$	0105, 2350
VT2354	w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = {x,y,z}	2210, 2349, 2350, 2351
T2355$*$	w $\in \mathbb{A}^*$	2354

T2356	w ist einfach	1279, 2347, 2354
T2357	$\lvert\mathcal{A}(\mathrm{w})\rvert = 3$	2354, 2351
T2358	$\mathcal{L}(\mathrm{w}) = 3$	0373, 2356, 2357
T2359	$\mathrm{w} \overset{\text{rot}}{\equiv} [\mathrm{x,y,z}] \vee \mathrm{w} \overset{\text{rot}}{\equiv} [\mathrm{z,y,x}]$	0539, 2356, 2358, 2354
G2360	$\mathbb{T}$	1343, 2348, 2354, 2359

Bei Hinzunahme der Totalität gilt dies natürlich für jede beliebige dreielementige Teilmenge des Alphabets.

T2361 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist 3 -vollständig $\wedge$ R ist total $\Rightarrow$
$\forall\, \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}),\ \mathrm{y} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}),\ \mathrm{z} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}) \bullet \lvert\{\mathrm{x,y,z}\}\rvert = 3 \Rightarrow [\mathrm{x,y,z}] \in \mathrm{R} \vee [\mathrm{z,y,x}] \in \mathrm{R}$

A2362	R ist einfach $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist 3 -vollständig	
A2363	R ist total	
VA2364	$\mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}),\ \mathrm{y} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}),\ \mathrm{z} \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$	
G2365	$\lvert\{\mathrm{x,y,z}\}\rvert = 3 \Rightarrow [\mathrm{x,y,z}] \in \mathrm{R} \vee [\mathrm{z,y,x}] \in \mathrm{R}$	
T2366	$\mathcal{A}(\mathrm{R}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen	2017, 2363
T2367	$\{\mathrm{x,y,z}\} \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	2364
T2368	$\{\mathrm{x,y,z}\} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen	0117, 2366, 2367
G2369	$\mathbb{T}$	2346, 2362, 2368

Diese Theoreme zeigen schon einige der interessanten Wechselwirkungen, die sich aus dem Zusammenspiel der bisher eingeführten Eigenschaften ergeben. Im folgenden werden weitere Zusammenhänge aufgezeigt. Die eingeführten Konzepte sind zwar orthogonal kombinierbar, aber keineswegs unabhängig voneinander sind. Eines der Hauptziele dieser Arbeit ist, ihre Wechselwirkungen zu analysieren.

Im folgenden werden wir untersuchen, unter welchen Bedingungen sich Zusammenhänge zwischen Teilwortabgeschlossenheit und Vollständigkeit ergeben.

S2370

VA2371$*$ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ \mathrm{n} \in \mathbb{N}$

Nichtleere, teilwortabgeschlossene Relationen sind 2 -vollständig. Dies folgt im wesentlichen aus der Definition von (li R). Die erste Bedingung ist offenbar notwendig, da eine leere Relation nach Theorem 2219 niemals n -vollständig ist.

T2372 $\mathrm{R} \neq \emptyset \wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge\ \mathrm{n} < 3 \Rightarrow$ R ist n -vollständig

A2373	$\mathrm{R} \neq \emptyset$	
A2374	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
A2375	$\mathrm{n} < 3$	
G2376	R ist n -vollständig	
G2377	$\forall\, \mathrm{C} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen $\bullet \lvert\mathrm{C}\rvert \leq \mathrm{n} \Rightarrow \exists\, \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathcal{A}(\mathrm{w}) = \mathrm{C}$	2210
VA2378	$\mathrm{C} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen	
A2379	$\lvert\mathrm{C}\rvert \leq \mathrm{n}$	
G2380	$\exists\, \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathcal{A}(\mathrm{w}) = \mathrm{C}$	
T2381	$\lvert\mathrm{C}\rvert < 3$	2379, 2375
A2382	$\lvert\mathrm{C}\rvert = 0$	
T2383	$\mathrm{C} = \emptyset$	2382
T2384	$[] \in \mathrm{R}$	1316, 2374, 2373
T2385	$\mathcal{A}([]) = \mathrm{C}$	0323
G2386	$\mathbb{T}$	2384, 2385
A2387	$\lvert\mathrm{C}\rvert = 1$	
VT2388	$\mathrm{x} \bullet \mathrm{C} = \{\mathrm{x}\}$	2387
T2389	$\mathrm{C} \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	2014, 2378
T2390	$\mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$	2388, 2389
T2391	$[\mathrm{x}] \in \mathrm{R}$	1325, 2374, 2390

T2392 $\mathcal{A}([x]) = C$ ... 0327, 2388

G2393 $\mathbb{T}$ ... 2391, 2392

A2394 $|C| = 2$

VT2395 $x,y \bullet C = \{x,y\} \wedge x \neq y$ ... 2394

T2396 $(x,y) \in (\underline{li}\ R)$ ... 0106, 2378, 2395

T2397 $(x,y) \in (li\ R)$ ... 1827, 2395, 2396

T2398 $[x,y] \in R \vee [y,x] \in R$ ... 1766, 2374, 2397

T2399 $\mathcal{A}([x,y]) = C \wedge \mathcal{A}([y,x]) = C$ ... 0328, 2395

G2400 $\mathbb{T}$ ... 2398, 2399

Für $n \leq 1$ gilt: n -Vollständigkeit impliziert $(n+1)$ -Vollständigkeit, sofern die Länge der Relation $(n+1)$ nicht übersteigt. Entsprechendes gilt für $2 \leq n$ nicht.

T2401 R ist 0 -vollständig $\wedge\ \mathcal{L}(R) \leq 1 \Rightarrow$ R ist 1 -vollständig

A2402 R ist 0 -vollständig

A2403 $\mathcal{L}(R) \leq 1$

G2404 R ist 1 -vollständig

G2405 $\forall\ C \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen $\bullet\ |C| \leq 1 \Rightarrow \exists\ w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$ ... 2210

VA2406 $C \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen

A2407 $|C| \leq 1$

G2408 $\exists\ w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$

A2409 $|C| = 0$

G2410 $\mathbb{T}$ ... 2210, 2402, 2406, 2409

A2411 $|C| = 1$

VT2412 $x \bullet C = \{x\}$ ... 2411

T2413 $C \subseteq \mathcal{A}(R)$ ... 2014, 2406

T2414 $x \in \mathcal{A}(R)$ ... 2412, 2413

T2415 $w \in R \bullet x \in \mathcal{A}(w)$ ... 1243, 2414

T2416 $\mathcal{L}(w) \leq \mathcal{L}(R)$ ... 1261, 2403, 2415

T2417 $|\mathcal{A}(w)| \leq \mathcal{L}(w)$ ... 0259

T2418 $|\mathcal{A}(w)| \leq 1$ ... 2417, 2416, 2403

T2419 $\mathcal{A}(w) = \{x\}$ ... 2418, 2415

T2420 $\mathcal{A}(w) = C$ ... 2412, 2419

G2421 $\mathbb{T}$ ... 2415, 2420

T2422 R ist 1 -vollständig $\wedge\ \mathcal{L}(R) \leq 2 \Rightarrow$ R ist 2 -vollständig

A2423 R ist 1 -vollständig

A2424 $\mathcal{L}(R) \leq 2$

G2425 R ist 2 -vollständig

G2426 $\forall\ C \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen $\bullet\ |C| \leq 2 \Rightarrow \exists\ w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$ ... 2210

VA2427 $C \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen

A2428 $|C| \leq 2$

G2429 $\exists\ w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$

A2430 $|C| \leq 1$

G2431 $\mathbb{T}$ ... 2210, 2423, 2427, 2430

A2432 $|C| = 2$

VT2433 $x,y \bullet C = \{x,y\} \wedge x \neq y$ ... 2432

T2434 $(x,y) \in (\underline{li}\ R)$ ... 0106, 2427, 2433

T2435 $(x,y) \in (li\ R)$ ... 1827, 2433, 2434

T2436 $[x,y] \in (\sqsupseteq)[R] \vee [y,x] \in (\sqsupseteq)[R]$ ... 1719, 2435

T2437 $\forall\ x,y \bullet [x,y] \in (\sqsupseteq)[R] \Rightarrow [x,y] \in R$

VA2438 $x,y \bullet [x,y] \in (\sqsupseteq)[R]$

G2439 $[x,y] \in R$

T2440* $x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A}$ ... 2438

VT2441 $w \in R \bullet [x,y] \sqsubseteq w$ ... 2438

T2442 $\mathcal{L}([x,y]) = 2$ ... 0308

T2443	$\mathcal{L}(w) \leq \mathcal{L}(R)$	1261, 2424, 2441
T2444	$\neg\ \mathcal{L}([x,y]) < \mathcal{L}(w)$	2443, 2424, 2442
T2445	$[x,y] = w$	0571, 2441, 2444
G2446	$\mathbb{T}$	2445, 2441
T2447	$[x,y] \in R \vee [y,x] \in R$	2437, 2436
T2448	$\mathcal{A}([x,y]) = C \wedge \mathcal{A}([y,x]) = C$	2433, 0328
G2449	$\mathbb{T}$	2447, 2448

Eine schöne Demonstration für die Wechselwirkungen zwischen den bisher kennengelernten Eigenschaften ist die folgende Tatsache: Die Teilwortabgeschlossenheit folgt aus der Vollständigkeit unter den Nebenbedingungen Einfachheit, Rotationsabgeschlossenheit und Konsistenz modulo Rotation.

T2450 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ $\wedge$ R ist vollständig $\Rightarrow$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen

A2451	R ist einfach	
A2452	R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	
A2453	R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$	
A2454	R ist vollständig	
G2455	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
G2456	$\forall\ u,v \bullet v \in R \wedge u \sqsubseteq v \Rightarrow u \in R$	1315
VA2457	$u,v \bullet v \in R$	
A2458	$u \sqsubseteq v$	
G2459	$u \in R$	
T2460∗	$u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$	2458
T2461	$\mathcal{A}(v) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen	2006, 2457
T2462	$\mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(v)$	0569, 2458
T2463	$\mathcal{A}(u) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen	0117, 2461, 2462
T2464	$\mathcal{A}(u)$ ist endlich	0240
VT2465	$w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = \mathcal{A}(u)$	2209, 2454, 2463, 2464
T2466∗	$w \in \mathbb{A}^*$	2465
T2467	$w \overset{\text{rot}}{\precsim} v$	1547, 2453, 2465, 2457
T2468	v ist einfach	1279, 2451, 2457
T2469	$w \overset{\text{rot}}{\precsim} u$	1015, 2468, 2467, 2458
T2470	$w \overset{\text{rot}}{\equiv} u$	0996, 2465, 2469
G2471	$\mathbb{T}$	1343, 2452, 2465, 2470

Für einfache Relationen mit maximal zweistelligen Wörtern genügt schon die 1 -Vollständigkeit, um Teilwortabgeschlossenheit sicherzustellen.

T2472 $\mathcal{L}(R) \leq 2$ $\wedge$ R ist einfach $\wedge$ R ist 1 -vollständig $\Rightarrow$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen

A2473	$\mathcal{L}(R) \leq 2$	
A2474	R ist einfach	
A2475	R ist 1 -vollständig	
G2476	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
G2477	$\forall\ u,v \bullet v \in R \wedge u \sqsubseteq v \Rightarrow u \in R$	1315
VA2478	$u,v \bullet v \in R$	
A2479	$u \sqsubseteq v$	
G2480	$u \in R$	
T2481∗	$u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$	2479
T2482	$\mathcal{L}(v) \leq 2$	1262, 2473, 2478
T2483	$\mathcal{L}(u) \leq \mathcal{L}(v)$	0570, 2479
T2484	$\mathcal{L}(u) \leq 2$	2483, 2482
A2485	$\mathcal{L}(u) = 2$	
T2486	$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(v)$	2485, 2482, 2483
T2487	$u = v$	0571, 2479, 2486

G2488	$\mathbb{T}$	2487, 2478
A2489	$\mathcal{L}(\mathrm{u}) \leq 1$	
T2490	$\mathcal{A}(\mathrm{v}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen	2006, 2478
T2491	$\mathcal{A}(\mathrm{u}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{v})$	0569, 2479
T2492	$\mathcal{A}(\mathrm{u}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen	0117, 2490, 2491
T2493	$\lvert\mathcal{A}(\mathrm{u})\rvert \leq 1$	0259, 2489
VT2494	$\mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathcal{A}(\mathrm{w}) = \mathcal{A}(\mathrm{u})$	2210, 2475, 2492, 2493
T2495	$\lvert\mathcal{A}(\mathrm{w})\rvert \leq 1$	2494, 2493
T2496	w ist einfach	1279, 2474, 2494
T2497	$\mathcal{L}(\mathrm{w}) \leq 1$	0373, 2496, 2495
T2498	$\mathrm{u} = \mathrm{w}$	0369, 2489, 2497, 2494
G2499	$\mathbb{T}$	2494, 2498

Für einfache, rotationsabgeschlossene Relationen mit maximal dreistelligen Wörtern genügt die 2 -Vollständigkeit, um die Teilwortabgeschlossenheit abzuleiten. Man beachte die formale Ähnlichkeit zum vorigen Theorem.

T2500 $\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq 3 \wedge$ R ist einfach $\wedge$ R ist $(\stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist 2 -vollständig $\Rightarrow$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen

A2501	$\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq 3$	
A2502	R ist einfach	
A2503	R ist $(\stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	
A2504	R ist 2 -vollständig	
G2505	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
G2506	$\forall\ \mathrm{u,v} \bullet \mathrm{v} \in \mathrm{R} \wedge \mathrm{u} \sqsubseteq \mathrm{v} \Rightarrow \mathrm{u} \in \mathrm{R}$	1315
VA2507	$\mathrm{u,v} \bullet \mathrm{v} \in \mathrm{R}$	
A2508	$\mathrm{u} \sqsubseteq \mathrm{v}$	
G2509	$\mathrm{u} \in \mathrm{R}$	
T2510$*$	$\mathrm{u} \in \mathbb{A}^* \wedge \mathrm{v} \in \mathbb{A}^*$	2508
A2511	$\mathrm{u} = \mathrm{v}$	
G2512	$\mathbb{T}$	2507, 2511
A2513	$\mathrm{u} \neq \mathrm{v}$	
T2514	$\mathcal{L}(\mathrm{v}) \leq 3$	1262, 2501, 2507
T2515	$\mathcal{L}(\mathrm{u}) < \mathcal{L}(\mathrm{v})$	0571, 2508, 2513
T2516	$\mathcal{L}(\mathrm{u}) \leq 2$	2515, 2514
T2517	$\mathcal{A}(\mathrm{v}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen	2006, 2507
T2518	$\mathcal{A}(\mathrm{u}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{v})$	0569, 2508
T2519	$\mathcal{A}(\mathrm{u}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen	0117, 2517, 2518
T2520	v ist einfach	1279, 2502, 2507
T2521	u ist einfach	0576, 2520, 2508
T2522	$\lvert\mathcal{A}(\mathrm{u})\rvert \leq 2$	0373, 2521, 2516
VT2523	$\mathrm{u}' \in \mathrm{R} \bullet \mathcal{A}(\mathrm{u}') = \mathcal{A}(\mathrm{u})$	2210, 2504, 2519, 2522
T2524$*$	$\mathrm{u}' \in \mathbb{A}^*$	2523
T2525	u′ ist einfach	1279, 2502, 2523
T2526	$\lvert\mathcal{A}(\mathrm{u}')\rvert = \lvert\mathcal{A}(\mathrm{u})\rvert$	2523
T2527	$\mathcal{L}(\mathrm{u}') = \mathcal{L}(\mathrm{u})$	2526, 0373, 2525, 0373, 2521
T2528	$\mathcal{L}(\mathrm{u}') \leq 2$	2516, 2527
A2529	$\mathcal{L}(\mathrm{u}') \leq 1$	
T2530	$\mathcal{L}(\mathrm{u}) \leq 1$	2527, 2529
T2531	$\mathrm{u} = \mathrm{u}'$	0369, 2530, 2529, 2523
G2532	$\mathbb{T}$	2523, 2531
A2533	$\mathcal{L}(\mathrm{u}') = 2$	
T2534	$\mathcal{L}(\mathrm{u}) = 2$	2527, 2533
T2535	$\mathrm{u}' \stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv} \mathrm{u}$	0527, 2533, 2534, 2523

G2536 $\mathbb{T}$ . . . 1343, 2503, 2523, 2535

Schließlich stellen wir noch fest, daß vollständige Relationen unter Teilwort- und Rotationsabschluß wieder vollständige Relationen ergeben. Zum Beweis verwenden wir Theorem 2214.

S2537

VA2538 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ \mathrm{E} \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$

T2539 $(\underline{\mathrm{li}}\ (\mathrm{E}[\mathrm{R}])) = (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R}) \wedge \mathrm{R} \subseteq \mathrm{E}[\mathrm{R}] \wedge \mathrm{R}$ ist vollständig $\Rightarrow \mathrm{E}[\mathrm{R}]$ ist vollständig . . . 2214

T2540 R ist vollständig $\Rightarrow (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]$ ist vollständig . . . 2539, 1894, 1412

T2541 R ist vollständig $\Rightarrow (\sqsupseteq)[\mathrm{R}]$ ist vollständig . . . 2539, 1895, 1413

T2542 R ist vollständig $\Rightarrow (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}]$ ist vollständig . . . 2539, 1896, 1414

4.11 Spiegelung

Spiegelung von Relationen bedeutet Spiegelung der enthaltenden Wörter. Diese Operation ist oft nützlich, um aus einem nichtsymmetrischen Theorem die gespiegelte Variante abzuleiten.

S2543

VA2544 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ \mathrm{w} \in \mathbb{A}^*,\ \mathrm{x} \in \mathbb{A},\ \mathrm{y} \in \mathbb{A},\ \mathrm{z} \in \mathbb{A}$

D2545 $\mathrm{REV\ R} := \{(\mathrm{REV\ w}) \bullet \mathrm{w} \in \mathrm{R}\}$

T2546∗ $(\mathrm{REV\ R}) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T2547 $(\mathrm{REV}\ (\mathrm{REV\ R})) = \mathrm{R}$

T2548 $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}' \Rightarrow (\mathrm{REV\ R}) \subseteq (\mathrm{REV\ R}')$

T2549 $\mathrm{R} \subseteq (\mathrm{REV\ R}) \Rightarrow \mathrm{R} = (\mathrm{REV\ R})$

T2550 $\mathrm{w} \in \mathrm{R} \Leftrightarrow (\mathrm{REV\ w}) \in (\mathrm{REV\ R})$

T2551 $\mathrm{w} \in (\mathrm{REV\ R}) \Leftrightarrow (\mathrm{REV\ w}) \in \mathrm{R}$

T2552 $[\mathrm{x,y}] \in (\mathrm{REV\ R}) \Leftrightarrow [\mathrm{y,x}] \in \mathrm{R}$

T2553 $[\mathrm{x,y,z}] \in (\mathrm{REV\ R}) \Leftrightarrow [\mathrm{z,y,x}] \in \mathrm{R}$

Da leere und einstellige Wörter sich unter Spiegelung nicht verändern, gilt dies auch für Relationen bis zur Länge eins.

S2554

VA2555∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T2556 $\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq 1 \Rightarrow \mathrm{R} = (\mathrm{REV\ R})$

- **A2557** $\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq 1$
- **G2558** $\mathrm{R} = (\mathrm{REV\ R})$
- **G2559** $\mathrm{R} \subseteq (\mathrm{REV\ R})$ . . . 2549
- **G2560** $\forall\ \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{w} \in (\mathrm{REV\ R})$
- **VA2561** $\mathrm{w} \in \mathrm{R}$
- **G2562** $\mathrm{w} \in (\mathrm{REV\ R})$
- **T2563∗** $\mathrm{w} \in \mathbb{A}^*$ . . . 2561
- **G2564** $(\mathrm{REV\ w}) \in \mathrm{R}$ . . . 2551
- **T2565** $\mathcal{L}(\mathrm{w}) \leq 1$ . . . 1262, 2557, 2561
- **A2566** $\mathcal{L}(\mathrm{w}) = 0$
  - **T2567** $\mathrm{w} = []$ . . . 0258, 2566
  - **T2568** $(\mathrm{REV\ w}) = \mathrm{w}$ . . . 2567, 0426
  - **G2569** $\mathbb{T}$ . . . 2568, 2561
- **A2570** $\mathcal{L}(\mathrm{w}) = 1$
  - **VT2571** $\mathrm{x} \in \mathbb{A} \bullet \mathrm{w} = [\mathrm{x}]$ . . . 0366
  - **T2572** $(\mathrm{REV\ w}) = \mathrm{w}$ . . . 2571, 0437

G2573	$\mathbb{T}$	2572, 2561

Nach der Definition folgt nun eine Reihe von Invarianztheoremen. Es zeigt sich, daß alle für uns interessanten Eigenschaften bei Spiegelung erhalten bleiben. Insbesondere gilt dies auch für die Relationen der Abhängigkeit und Unabhängigkeit, die gerade so definiert waren, daß sie von einer möglichen Orientierung abstrahierten.

S2574

VA2575∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $n \in \mathbb{N}$

Einfachheit und Alphabet bleiben unter Spiegelung unverändert.

T2576 R ist einfach $\Rightarrow$ (REV R) ist einfach

A2577	R ist einfach	
G2578	(REV R) ist einfach	
G2579	$\forall$ w $\in$ (REV R) $\bullet$ w ist einfach	1279
VA2580	w $\in$ (REV R)	
G2581	w ist einfach	
T2582∗	w $\in \mathbb{A}^*$	2580
T2583	u $\in$ R $\bullet$ w = (REV u)	2545, 2580
T2584∗	u $\in \mathbb{A}^*$	2583
T2585	u ist einfach	1279, 2577, 2583
T2586	(REV u) ist einfach	0433, 2585
G2587	$\mathbb{T}$	2583, 2586

T2588 $\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(\text{REV } R)$

G2589	$\bigcup \{\mathcal{A}(w) \bullet w \in R\} = \bigcup \{\mathcal{A}(w) \bullet w \in (\text{REV } R)\}$	1243
G2590	$\{\mathcal{A}(w) \bullet w \in R\} = \{\mathcal{A}(w) \bullet w \in (\text{REV } R)\}$	
T2591	$\forall A \in \{\mathcal{A}(w) \bullet w \in R\} \bullet A \in \{\mathcal{A}(w) \bullet w \in (\text{REV } R)\}$	
VA2592	$A \in \{\mathcal{A}(w) \bullet w \in R\}$	
G2593	$A \in \{\mathcal{A}(w) \bullet w \in (\text{REV } R)\}$	
G2594	$\exists w \in (\text{REV } R) \bullet A = \mathcal{A}(w)$	
VT2595	$w \in R \bullet A = \mathcal{A}(w)$	2592
T2596∗	$w \in \mathbb{A}^*$	2595
T2597	$(\text{REV } w) \in (\text{REV } R)$	2550, 2595
T2598	$\mathcal{A}(\text{REV } w) = \mathcal{A}(w)$	0431
T2599	$A = \mathcal{A}(\text{REV } w)$	2595, 2598
G2600	$\mathbb{T}$	2597, 2599
T2601	$\forall A \in \{\mathcal{A}(w) \bullet w \in (\text{REV } R)\} \bullet A \in \{\mathcal{A}(w) \bullet w \in R\}$	
VA2602	$A \in \{\mathcal{A}(w) \bullet w \in (\text{REV } R)\}$	
G2603	$A \in \{\mathcal{A}(w) \bullet w \in R\}$	
VT2604	$w \in (\text{REV } R) \bullet A = \mathcal{A}(w)$	2602
T2605∗	$w \in \mathbb{A}^*$	2604
G2606	$\exists w \in R \bullet A = \mathcal{A}(w)$	
T2607	$(\text{REV } w) \in R$	2551, 2604
T2608	$\mathcal{A}(\text{REV } w) = \mathcal{A}(w)$	0431
T2609	$A = \mathcal{A}(\text{REV } w)$	2604, 2608
G2610	$\mathbb{T}$	2607, 2609
G2611	$\mathbb{T}$	2591, 2601

Der Abschluß unter einer spiegelinvarianten, binären Relation ist mit der Spiegelung vertauschbar.

T2612 $\forall E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*) \bullet$ E ist spiegelinvariant $\Rightarrow E[\text{REV } R] = (\text{REV } E[R])$

VA2613∗	$E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$
A2614	E ist spiegelinvariant
T2615	$\forall w \in E[\text{REV } R] \bullet w \in (\text{REV } E[R])$

VA2616	$w \in E[\mathrm{REV}\ R]$	
G2617	$w \in (\mathrm{REV}\ E[R])$	
T2618∗	$w \in \mathbb{A}^*$	2616
VT2619	$u \in (\mathrm{REV}\ R) \bullet (u,w) \in E$	2616
VT2620	$v \in R \bullet u = (\mathrm{REV}\ v)$	2619, 2545
T2621∗	$u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$	2619, 2620
T2622	$((\mathrm{REV}\ v), w) \in E$	2619, 2620
T2623	$(\mathrm{REV}\ (\mathrm{REV}\ v), (\mathrm{REV}\ w)) \in E$	0443, 2614, 2622
T2624	$(v, (\mathrm{REV}\ w)) \in E$	0434, 2623
T2625	$(\mathrm{REV}\ w) \in E[R]$	2624, 2620
G2626	$\mathbb{T}$	2551, 2625
T2627	$\forall\, w \in (\mathrm{REV}\ E[R]) \bullet w \in E[\mathrm{REV}\ R]$	
VA2628	$w \in (\mathrm{REV}\ E[R])$	
G2629	$w \in E[\mathrm{REV}\ R]$	
T2630∗	$w \in \mathbb{A}^*$	2628
VT2631	$u \in E[R] \bullet w = (\mathrm{REV}\ u)$	2628, 2545
VT2632	$v \in R \bullet (v,u) \in E$	2631
T2633∗	$u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$	2632
T2634	$(\mathrm{REV}\ v) \in (\mathrm{REV}\ R)$	2550, 2632
T2635	$((\mathrm{REV}\ v), (\mathrm{REV}\ u)) \in E$	0443, 2614, 2632
T2636	$((\mathrm{REV}\ v), w) \in E$	2631, 2635
G2637	$\mathbb{T}$	2636, 2634
G2638	$\mathbb{T}$	2615, 2627

Dies gilt speziell für die spiegelinvarianten Relationen $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ und $(\sqsupseteq)$.

T2639	$(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{REV}\ R] = (\mathrm{REV}\ (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[R])$	2612, 0525
T2640	$(\sqsupseteq)[\mathrm{REV}\ R] = (\mathrm{REV}\ (\sqsupseteq)[R])$	2612, 0573

Mit diesen Resultaten folgt sofort die Invarianz der Teilwort- und Rotationsabgeschlossenheit unter Spiegelung.

T2641	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\Rightarrow$ $(\mathrm{REV}\ R)$ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
A2642	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
G2643	$(\mathrm{REV}\ R)$ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
T2644	$R = (\sqsupseteq)[R]$	1449, 2642
T2645	$(\mathrm{REV}\ R) = (\mathrm{REV}\ (\sqsupseteq)[R])$	2644
T2646	$(\mathrm{REV}\ R) = (\sqsupseteq)[\mathrm{REV}\ R]$	2640, 2645
G2647	$\mathbb{T}$	1449, 2646
T2648	R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\Rightarrow$ $(\mathrm{REV}\ R)$ ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	
A2649	R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	
G2650	$(\mathrm{REV}\ R)$ ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	
T2651	$R = (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[R]$	1448, 2649
T2652	$(\mathrm{REV}\ R) = (\mathrm{REV}\ (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[R])$	2651
T2653	$(\mathrm{REV}\ R) = (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{REV}\ R]$	2639, 2652
G2654	$\mathbb{T}$	1448, 2653

Die Konsistenz modulo einer spiegelinvarianten Relation wird ebenfalls durch die Spiegelung nicht zerstört.

T2655	$\forall\, E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*) \bullet E$ ist spiegelinvariant $\wedge$ R ist konsistent modulo $E \Rightarrow$ $(\mathrm{REV}\ R)$ ist konsistent modulo E	
VA2656∗	$E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$	
A2657	E ist spiegelinvariant	

A2658	R ist konsistent modulo E	
G2659	(REV R) ist konsistent modulo E	
G2660	$\forall$ u $\in$ (REV R), v $\in$ (REV R) $\bullet$ u $\overset{E}{\sim}$ v	1545
VA2661	u $\in$ (REV R), v $\in$ (REV R)	
G2662	u $\overset{E}{\sim}$ v	
T2663∗	u $\in \mathbb{A}^* \wedge$ v $\in \mathbb{A}^*$	2661
D2664	D := $\mathcal{A}$(u) $\cap$ $\mathcal{A}$(v)	
T2665∗	D $\in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	2664
G2666	((u $\rhd$ D), (v $\rhd$ D)) $\in$ E	0760, 2664
T2667	(REV u) $\in$ R $\wedge$ (REV v) $\in$ R	2551, 2661
T2668	(REV u) $\overset{E}{\sim}$ (REV v)	1545, 2658, 2667
T2669	D = $\mathcal{A}$(REV u) $\cap$ $\mathcal{A}$(REV v)	0431, 2664
T2670	(((REV u) $\rhd$ D), ((REV v) $\rhd$ D)) $\in$ E	0760, 2669, 2668
T2671	((REV (u $\rhd$ D)), (REV (v $\rhd$ D))) $\in$ E	0662, 2670
T2672	((REV (REV (u $\rhd$ D))), (REV (REV (v $\rhd$ D)))) $\in$ E	0443, 2657, 2671
G2673	$\mathbb{T}$	0434, 2672

Insbesondere gilt dies für die Konsistenz modulo Identität und Rotation.

T2674	R ist konsistent $\Rightarrow$ (REV R) ist konsistent	1546, 2655, 0444
T2675	R ist konsistent modulo ($\overset{rot}{\equiv}$) $\Rightarrow$ (REV R) ist konsistent modulo ($\overset{rot}{\equiv}$)	2655, 0525

Mit Hilfe der folgenden Beobachtung folgt auch die Invarianz der (reflexiven) Abhängigkeitsrelation sowie der Kliquen.

T2676	[x,y] $\in$ ($\sqsupseteq$)[REV R] $\Leftrightarrow$ [y,x] $\in$ ($\sqsupseteq$)[R]	
G2677	[x,y] $\in$ (REV ($\sqsupseteq$)[R]) $\Leftrightarrow$ [y,x] $\in$ ($\sqsupseteq$)[R]	2640
G2678	$\mathbb{T}$	2552
T2679	(li R) = (li (REV R))	1719, 2676
T2680	($\underline{\text{li}}$ R) = ($\underline{\text{li}}$ (REV R))	1819, 2679, 2588
T2681	($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen = ($\underline{\text{li}}$ (REV R)) -Kliquen	2680

Dieses Resultat verwenden wir wiederum, um die Invarianz der Vollständigkeit zu zeigen.

T2682	$\forall$ n $\in \mathbb{N} \bullet$ R ist n -vollständig $\Rightarrow$ (REV R) ist n -vollständig	
VA2683∗	n $\in \mathbb{N}$	
A2684	R ist n -vollständig	
G2685	(REV R) ist n -vollständig	
G2686	$\forall$ C $\in$ ($\underline{\text{li}}$ (REV R)) -Kliquen $\bullet$ $\lvert$C$\rvert \leq$ n $\Rightarrow \exists$ w $\in$ (REV R) $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C	2210
VA2687	C $\in$ ($\underline{\text{li}}$ (REV R)) -Kliquen	
A2688	$\lvert$C$\rvert \leq$ n	
G2689	$\exists$ w $\in$ (REV R) $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C	
T2690	C $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	2681, 2687
VT2691	w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C	2210, 2684, 2690, 2688
T2692∗	w $\in \mathbb{A}^*$	2691
T2693	(REV w) $\in$ (REV R)	2550, 2691
T2694	$\mathcal{A}$(REV w) = C	0431, 2691
G2695	$\mathbb{T}$	2693, 2694
T2696	R ist vollständig $\Rightarrow$ (REV R) ist vollständig	2215, 2682

Die Invarianz der reflexiven Abhängigkeit führt unmittelbar zur Invarianz der (reflexiven) Unabhängigkeit.

T2697	(co R) = (co (REV R))	
T2698	(co R) $\subseteq$ (co (REV R))	

G2699	$\forall$ x,y $\bullet$ (x,y) $\in$ (co R) $\Rightarrow$ (x,y) $\in$ (co (REV R))	
VA2700	x,y $\bullet$ (x,y) $\in$ (co R)	
G2701	(x,y) $\in$ (co (REV R))	
T2702	(x,y) $\notin$ (li R)	1985, 2700
T2703	(x,y) $\notin$ (li (REV R))	2679, 2702
T2704	x $\in \mathcal{A}$(R) $\wedge$ y $\in \mathcal{A}$(R)	1943, 2700
T2705	x $\in \mathcal{A}$(REV R) $\wedge$ y $\in \mathcal{A}$(REV R)	2588, 2704
T2706	(x,y) $\in$ ($\underline{\text{co}}$ (REV R))	1960, 2705, 2703
T2707	x $\neq$ y	1950, 2700
G2708	$\mathbb{T}$	1950, 2706, 2707
T2709	(co (REV R)) $\subseteq$ (co (REV (REV R)))	2698
T2710	(co (REV R)) $\subseteq$ (co R)	2547, 2709
G2711	$\mathbb{T}$	2698, 2710

T2712 ($\underline{\text{co}}$ R) = ($\underline{\text{co}}$ (REV R)) 1942, 2697, 2588

Damit ist auch die Totalität eine unter Spiegelung invariante Eigenschaft.

T2713 R ist total $\Leftrightarrow$ (REV R) ist total 2042, 2697

Kapitel 5

Azyklische Ordnungen

Nachdem wir uns einen Grundwortschatz von Begriffen zurechtgelegt haben, wollen wir in diesem Kapitel eine Axiomatisierung der wohlbekannten Ordnungen als (verallgemeinerte) Relationen finden. Wir beginnen also zunächst mit den konventionellen Ordnungen, um in späteren Kapiteln durch geeignete Modifikationen der Axiome zuerst zu totalen, zyklischen Ordnungen und später dann zu (allgemeinen) zyklischen Ordnungen zu gelangen.

Wie schon angesprochen handelt es sich bei unseren Relationen um eine Verallgemeinerung von binären Relationen, so daß wir die Axiome von Ordnungen (z.B. 0091, 0092 oder 0093) direkt verwenden könnten, um Ordnungen als spezielle zweistellige Relationen zu beschreiben. Unser eigentliches Ziel sind jedoch die zyklischen Ordnungen. Deshalb beschreiten wir einen anderen Weg, der uns später ohne große Umwege dorthin führen wird.

Um die Axiome für azyklische Ordnungen zu motivieren, gehen wir von einer konkreten Interpretation aus. Wünschenswert ist, das die Interpretation einfach und anschaulich ist, um die Gültigkeit einzelner Axiome möglichst direkt überprüfen zu können. Wir verwenden hier dynamische Systeme in denen gewisse Ereignisse mehr oder weniger geordnet stattfinden können. Wir wollen versuchen bestimmte Invarianten des Systemverhaltens als Menge von Ereignissen aufzufassen, die einer gewissen Ordnung unterliegt. Aus den allgemeinen, vom konkreten System unabhängigen Eigenschaften dieser geordneten Ereignismenge leiten wir die für Ordnungen relevanten Eigenschaften ab. Dann abstrahieren wir von dieser Interpretation der dynamischen Systeme, um zu einem Axiomsystem allgemeiner azyklischer Ordnungen zu gelangen.

Eine weitere Begründung der Axiome für azyklische Ordnungen folgt später aus dem formalen Zusammenhang zu den üblichen Ordnungen als binäre Relationen. Dieser direkte Zusammenhang zu bekannten, mathematischen Strukturen existiert für die zyklischen Ordnungen der nächsten Kapitel nicht mehr, so daß wir spätestens dort auf eine Interpretation als Ausgangspunkt angewiesen sind. Den im folgenden Abschnitt eingeführten Systembegriff werden wir dort wieder aufgreifen.

5.1 Azyklische Systeme

Wir beginnen mit einem informalen und sehr allgemeinen Systembegriff: Ein System ist für uns eine Menge von Ereignissen zusammen mit Ablaufregeln, die Anforderungen an die Abfolge, d.h. die relative zeitliche Lage, der Vorkommen von Ereignissen stellen. Ein zeitlicher Ablauf eines Systems ist eine mit den Ablaufregeln verträgliche Beschreibung der Vorkommen von Ereignissen, die eine Möglichkeit angibt, wie sich das System zeitlich entwickeln kann. Ein Ablauf ist immer maximal, d.h. er reicht in Vergangenheit und Zukunft soweit, wie es das System erlaubt. In einem Ablauf kann es für einige Vorkommen der Ereignisse möglich sein, festzustellen, ob und in welcher zeitlichen Reihenfolge sie stattfinden. Dies muß jedoch nicht für alle Vorkommen gelten.

Aus den physikalischen Eigenschaften der Zeit folgt die Irreflexivität und die Transitivität dieser Relation auf Vorkommen von Ereignissen: Findet ein Vorkommen X vor einem Vorkommen Y statt, so sind X und Y verschieden. Sind X,Y,Z Vorkommen und findet X vor Y und Y vor Z statt, so findet auch X vor Z statt. Abläufe sind also strenge Ordnungen, die nicht notwendigerweise total sein müssen.

Durch die Definitionen von System und Ablauf ist weder ausgeschlossen, daß Ereignisse wiederholt stattfinden können, noch wird gefordert, daß die Ablaufregeln die relative, zeitliche Lage der Ereignisse zueinander in irgendeiner Weise eindeutig bestimmen. Die Abfolge der Ereignisse kann also von Ablauf zu Ablauf variieren. Ferner wird nicht festgelegt, ob die Ablaufregeln eine Zeitrichtung auszeichnen. Es wird außerdem nicht definiert, wie die Regeln spezifiziert werden. Im allgemeinen kann ein System aufgrund von Nebenläufigkeit oder Nichtdeterminismus mehrere mögliche Abläufe aufweisen.

Ausgehend von einem beliebigen System, verlangen wir, das ein System existiert, in dem die Abfolge der Vorkommen von Ereignissen umgekehrt ist. Diese einer Zeitumkehr entsprechende Operation auf Systemen nennen wir Spiegelung. Mit Hilfe dieser Operation ist es nun möglich eine besondere Klasse von Systemen zu definieren: Gerichtete Systeme sind Systeme, die sich von ihrer Spiegelung unterscheiden. Diese Systeme zeichnen offenbar eine Zeitrichtung als Ablaufrichtung aus.

Azyklische Systeme sind Systeme, bei denen die Ablaufregeln ausschließen, daß Ereignisse wiederholt stattfinden können. Da dies durch geeignete Benennung der Ereignisse immer erreicht werden kann, ist diese Klasse von Systemen trotz dieser Einschränkung recht allgemein. Man beachte, das azyklische Systeme nicht gerichtet sein müssen. Gerichtetheit und Azyklizität sind voneinander unabhängige Begriffe.

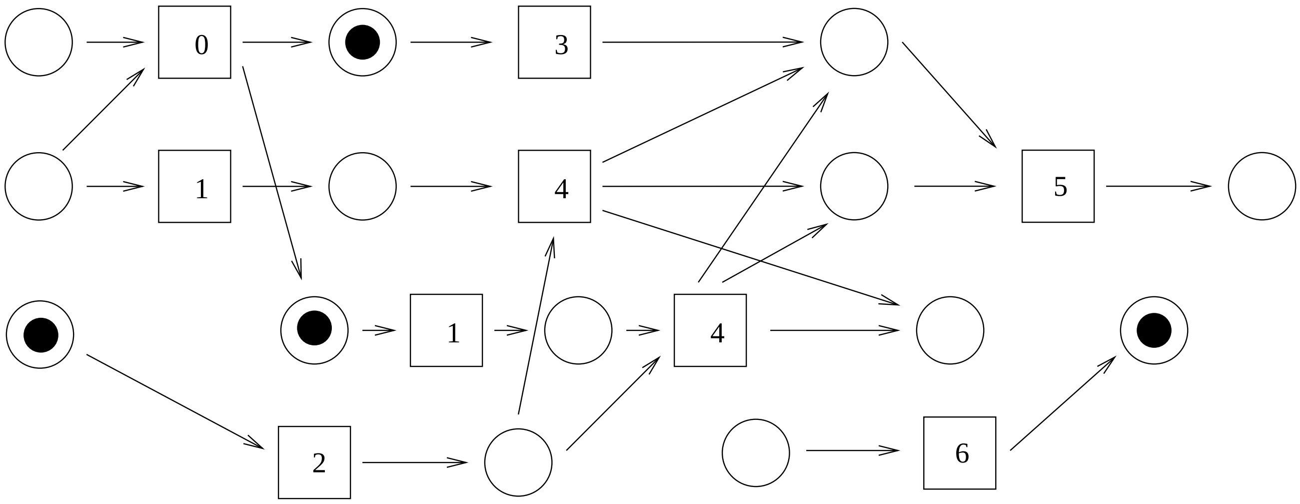


Abbildung 5.1: Ein azyklisches System

Systeme können beispielsweise durch Netzsysteme gegeben sein, in denen Transitionen mit Ereignissen beschriftet sind, die stattfinden, wenn die entsprechende Transition schaltet. Die Abläufe entsprechen dann gerade den beidseitig maximalen Abläufen im Netzsystem. Es gibt jedoch auch viele andere

Formalismen zu Beschreibung von Systemen wie z.B. Automaten, Transitionssysteme, Prozeßalgebren, die wir mit unserer völlig allgemeinen Definition des Systemsbegriffs auch verwenden könnten.

B2714

In Abb. 5.1 ist ein Netzsystem dargestellt. Die Markierung ist nur ein Repräsentant für die Fallklasse. Die möglichen Abläufe des Systems sind die maximalen Abläufe des Netzsystems, die innerhalb dieser Fallklasse liegen. Zunächst stellen wir fest, daß sich in einem Ablauf keine Ereignisse wiederholen können. Es handelt sich demnach um ein azyklisches System. Ferner finden die Ereignisse {1,2,4,5,6} in jedem Ablauf statt. Die Ereignisse {0,3} finden nicht in jedem Ablauf statt, da sie nach Ereignis 1 nicht mehr vorkommen können. Das Ereignis 6 findet im jedem Ablauf genau einmal statt und zwar unabhängig von allen anderen Ereignissen. Auch die Ereignisse 1 und 2 können unabhängig voneinander in beliebiger Reihenfolge auftreten. Schließlich bemerken wir, daß die Ereignisse {1,4,5} immer in der Reihenfolge [1,4,5] stattfinden. Auch die Ereignisse {2,4,5} finden immer (d.h. in jedem Ablauf) in einer eindeutigen Reihenfolge [2,4,5] statt. Dies letzten beiden Tatsachen lassen trotz der etwas unübersichtlichen Netzstruktur eine gewisse Ordnung auf Ereignissen erkennen.

Unser Ziel ist es gewisse Aspekte des Systemverhaltens durch einen Ordnungsbegriff zu erfassen. Diese Ordnung soll den invarianten also verläßlichen Teil des Systemverhaltens verkörpern. Dies ist der Teil des Systemverhaltens, den alle Abläufe gemeinsam aufweisen. Wir vermuten, daß bestimmte Systeme durch ihre Regeln, eine gewisse Ordnung (im intuitiven Sinne) zwischen (einigen) Ereignissen induzieren. Wir erwarten jedoch nicht, daß allein durch Angabe dieser Ordnung das System vollständig bestimmt ist. Systeme, in denen die Ereignisse zufällig und völlig unkorreliert stattfinden können oder nur in einigen aber nicht in allen Abläufen auftreten, werden beispielsweise keine verläßlichen (nichttrivialen) Ordnungen liefern.

In diesem Kapitel werden wir unter einem System immer ein azyklisches System verstehen. Es kann sich dabei sowohl um gerichtete als auch nichtgerichtete Systeme handeln. Nichtazyklische Systeme werden wir im nächsten Kapitel behandeln.

Eine bekannte Invariante ist die binäre, gerichtete Kausalrelation auf der Menge aller Ereignisse. Wir definieren sie folgendermaßen: Ein Ereignis x liegt kausal vor einem Ereignis y, gdw. x und y verschieden sind, in jedem Ablauf x und y genau in der Reihenfolge (x,y) vorkommen.

B2715

Wir betrachten wieder das Netzsystem in Abb. 5.1. Für alle zweielementigen Ereignismengen versuchen wir zu überprüfen, ob die eben definierte gerichtete Kausalrelation vorliegt. Für die Ereignisse 1 und 4 ist dies beispielsweise der Fall, da 1 und 4 in jedem Ablauf auftreten und immer 1 vor 4 stattfindet. 1 liegt also kausal vor 4. Entsprechendes gilt für die Paare (2,4), (4,5), (1,5), (2,5). Für die Menge {1,2} können wir keine Kausalbeziehung feststellen, da 1 und 2 in unterschiedlicher Reihenfolge auftreten können. Auch für 0 und 3 gilt keine Kausalbeziehung, da diese Ereignisse, obwohl immer in der gleichen Reihenfolge, nicht jedoch in jedem Ablauf vorkommen. Insgesamt haben wir also die gerichtete Kausalrelation {(1,4), (2,4), (4,5), (1,5), (2,5)}.

Bei der gerichteten Kausalrelation handelt es sich um eine strenge Ordnung, d.h. sie ist irreflexiv und transitiv.

- Die Irreflexivität ergibt sich sofort aus der Definition.
- Die Transitivität folgt aus der zeitlichen Transitivität in folgender Weise: Liegt x kausal vor y und y kausal vor z, so sind x,y und y,z verschieden und die Ereignisse {x,y,z} kommen in jedem Ablauf vor, wobei sie immer in der Reihenfolge (x,y) und (y,z) stattfinden. Somit finden aufgrund

der zeitlichen Transitivität die Ereignisse x und z in der Reihenfolge (x,z) statt. Wären x und z identisch, so würde sich x wiederholen (genauer: es gäbe zwei Vorkommen des Ereignis x), was im Widerspruch zu Reihenfolge (x,y) steht, die impliziert, daß x nur einmal vorkommt. Also sind x und z verschieden, und damit liegt x kausal vor z.

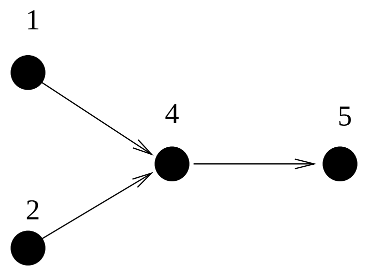


Abbildung 5.2: Die Kausalordnung des Systems aus Abb. 5.1

B2716

Da es sich um eine endliche, strenge Ordnung handelt, können wir die gerichtete Kausalrelation aus dem vorigen Beispiel als Hassediagram, d.h. als Graph der unmittelbaren Nachfolgerrelation, in Abb. 5.2 darstellen.

Gerade haben wir eine Beziehung zwischen zwei Ereignissen definiert. Wir betrachten jetzt eine entsprechende Invariante für eine beliebige, endliche Ereignismenge. Zu deren Beschreibung definieren wir statt einer binären Relation eine (verallgemeinerte) Relation R auf Ereignissen: Ein einfaches Wort w bezeichnen wir als Kausalkette gdw. in jedem Ablauf alle Ereignisse aus $\mathcal{A}$(w) vorkommen und zusätzlich in der durch w angegebenen Reihenfolge stattfinden. Dabei ist (wie oben) nicht ausgeschlossen, daß noch andere nicht aus $\mathcal{A}$(w) stammende Ereignisse (zwischendurch) stattfinden können. Die Menge aller Kausalketten fassen wir zu einer (verallgemeinerten) Relation R zusammen. Wir können R als verallgemeinerte, gerichtete Kausalrelation auffassen, da sie offensichtlich die Paare der Kausalrelation als zweistellige Wörter enthält. Deshalb bezeichnen wir die Relation R als die azyklische Ordnung der Ereignisse.

Wir können ein Wort w interpretieren als die Beobachtung der Ereignisse $\mathcal{A}$(w) in der Reihenfolge w während jedes Ablaufs. Eine Beobachtung w, in der sich keine Ereignisse wiederholen, nennen wir (für das System) charakteristisch, wenn keine abweichende Reihenfolge der Ereignisse $\mathcal{A}$(w) beobachten läßt. Die Bezeichnung als charakteristische Beobachtung ist gerechtfertigt, da die Ereignisse immer in einer eindeutigen, nur durch die Struktur des Systems bestimmten Reihenfolge, unabhängig von der konkreten Beobachtung stattfinden. Kausalketten sind somit gerade die charakteristischen Beobachtungen. Um die Kausalketten zu bestimmen, beobachten wir also nacheinander jede endliche Ereignismenge und überprüfen, ob diese Ereignisse in einer für alle Abläufe eindeutigen Reihenfolge ohne Wiederholungen stattfinden.

B2717

Wir betrachten nun alle möglichen Abläufe des in Abb. 5.1 dargestellten Systems und überprüfen für jede Ereignismenge die Kausalketten, die genau diese Ereignisse enthalten. Für die Menge {1,4,6} finden die Ereignisse bei jedem Ablauf in der Reihenfolge [1,4,6] statt, d.h. [1,4,6] ist eine Kausalkette. Entsprechendes gilt für [2,4,6]. Aber auch [1,4] ist eine Kausalkette, da 1 und 4 in jedem Ablauf in dieser Reihenfolge stattfinden. Entsprechendes gilt für [2,4], [4,6]. Auch die einstelligen Wörter [1], [2], [4], [6] sind Kausalketten, da das entsprechende Ereignis in jedem Ablauf genau einmal vorkommt. Trivialerweise ist auch [] eine Kausalkette. Damit haben wir alle Kausalketten zusammen. [0] und [3] sind beispielsweise keine Kausalketten, da die Ereignisse nicht in jedem Ablauf vorkommen. [0,3] ist aus dem gleichen Grund keine Kausalkette. [1,2] ist keine Kausalkette, da die beiden Ereignisse je nach Ablauf in unterschiedlicher Reihenfolge stattfinden können. Die azyklische Ordnung der Ereignisse lautet also R = {[1,4,6], [2,4,6], [1,4], [2,4], [4,6], [1], [2], [4], [6], []}

Wir wir gesehen haben, hat die binäre Kausalrelation die Eigenschaften einer strengen Ordnung. Dies sind die abstrakten Eigenschaften der Kausalrelation unabhängig von einem konkreten System. Wir interessieren uns nun für die entsprechenden abstrakten Eigenschaften der azyklischen Ordnung R.

- Die Relation R ist einfach, d.h. alle Wörter sind einfach, da nach Definition jede Kausalkette einfach ist.
- Die Relation R ist teilwortabgeschlossen, d.h. ist ein Wort in der Relation, so gilt dies auch für jedes Teilwort: Haben wir eine Kausalkette w $\in$ R, so finden in jedem Ablauf die Ereignisse $\mathcal{A}$(w) in der Reihenfolge w statt. Sei u ein Teilwort von w. Beobachten wir die Teilmenge $\mathcal{A}$(u) von $\mathcal{A}$(w), so finden die Ereignisse aus $\mathcal{A}$(u) natürlich auch in der durch w gegebenen Reihenfolge statt. Da w einfach ist, erhalten wir u aus w gerade indem wir die nicht in $\mathcal{A}$(u) enthaltenen Ereignisse ignorieren. Somit ist u die Reihenfolge in der die Ereignisse aus $\mathcal{A}$(u) stattfinden. u ist einfach, da w einfach ist. Also ist u eine Kausalkette.
- Das Alphabet $\mathcal{A}$(R) der Relation R, das wir auch als verläßliche Ereignismenge bezeichnen wollen, umfaßt gerade die Ereignisse, die in jedem Ablauf genau einmal stattfinden: Kommt ein Ereignis x in jedem Ablauf genau einmal vor, so gibt es die einstellige Kausalkette [x] $\in$ R. Es folgt also x $\in$ $\mathcal{A}$(R). Ist andererseits x $\in$ $\mathcal{A}$(R) so gibt es eine Kausalkette w $\in$ R mit x $\in$ $\mathcal{A}$(w). x ist also eines der Ereignisse $\mathcal{A}$(w), die in jedem Ablauf genau einmal vorkommen.
- Wir gewinnen nun eine binäre, ungerichtete Kausalrelation (li R) aus der Relation R. Zwei Ereignisse (x,y) $\in$ R bezeichnen wir als kausal abhängig. x und y sind also genau dann kausal abhängig wenn sie in einer Kausalkette in beliebiger Reihenfolge nacheinander vorkommen. Es handelt sich also bei (li R) um eine symmetrische, binäre Relation auf Ereignissen. Die Bezeichnung als Kausalrelation ist gerechtfertigt, da mit dieser Definition zwei Elemente genau dann kausal abhängig sind, wenn sie in jedem Durchlauf in der gleichen Reihenfolge nacheinander stattfinden, was bedeutet, daß das Stattfinden des einen Ereignisses die Voraussetzung für das andere Ereignis ist.
- Aus der symmetrischen Kausalrelation (li R) können wir auch den reflexiven Abschluß ($\underline{\text{li}}$ R) bzgl. aller verläßlichen Ereignisse $\mathcal{A}$(R) gewinnen. Die Kliquen dieser binären Relation, also die ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen, bezeichnen wir als Kausalkliquen. Die Kausalkliquen sind also gerade die Mengen von verläßlichen Ereignissen, in denen alle verschiedenen Ereignisse paarweise voneinander kausal abhängig.
- Mit Hilfe der Kausalrelation können wir nun die Vollständigkeit der Relation R formulieren: Jede endliche Kausalklique soll durch eine Kausalkette repräsentiert werden, die alle Ereignisse der Kausalklique enthält. Wir bemerken zunächst, daß die leere Kausalklique $\emptyset$ durch die leere Kausalkette [] abgedeckt wird. Wir beobachten nun also eine nichtleere endliche Kausalklique. Da eine Kausalklique aus verläßlichen Ereignissen besteht, finden alle Ereignisse der Kausalklique in jedem Ablauf genau einmal statt. Wir wählen ein Ereignis x aus der Klique und beginnen mit der Kausalkette [x]. Haben wir eine Kausalkette w mit Ereignissen der Klique, so wählen wir ein neues Ereignis x aus der Klique, daß nicht in $\mathcal{A}$(w) vorkommt. Da x von allen Ereignissen in $\mathcal{A}$(w) kausal abhängig ist und damit für jedes Ereignis aus w festgelegt ist, ob x vorher oder nachher stattfindet, erhalten wir durch Einfügen von x an einer eindeutigen Stelle in w ein neues Wort, das wieder eine Kausalkette ist. Wiederholen wir diesen Schritt bis alle Elemente der Kausalklique in dem konstruierten Wort vorkommen, dann haben wir die gesuchte Kausalkette gefunden.
- Die Relation R ist transitiv, d.h. sind [x,y] und [y,z] Kausalketten, so soll auch [x,z] eine Kausalkette sein. Dies folgt sofort aus der schon überprüften Transitivität der binären, gerichteten

Kausalrelation, die genau alle zweistelligen Wörter von R als Paare enthält.

B2718

Alle diese Eigenschaften sind in unserem kleinen Beispiel 2717 erfüllt. R ist klarerweise einfach und teilwortabgeschlossen, da R = $(\sqsupseteq)[\{[1,4,6], [2,4,6]\}]$ gilt. Wir haben die verläßliche Ereignismenge $\mathcal{A}(R) = \{1,2,4,6\}$. Die Ereignisse 0 und 3 sind nicht verläßlich. Für die ungerichtete Kausalrelation ergibt sich (li R) = $\updownarrow\{(1,4), (4,6), (1,6), (2,4), (4,6), (2,6)\}$. Wir haben die Kausalkliquen ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen = $\mathcal{P}(\{1,4,6\}) \cup \mathcal{P}(\{2,4,6\})$. Jede dieser Kliquen wird durch ein Wort abgedeckt: $\{1,4,6\}$ durch [1,4,6], $\{2,6\}$ durch [2,6], $\{1\}$ durch [1], $\emptyset$ durch [], usw. Damit ist die Relation vollständig. Die Transitivität ist ebenfalls leicht zu überprüfen: Es gilt beispielsweise $[1,4] \in$ R und $[4,6] \in$ R und damit $[1,6] \in$ R, usw.

Damit haben wir aus unser Interpretation die folgenden Eigenschaften einer azyklischen Ordnung (intuitiv und informal) abgeleitet: Einfachheit, Teilwortabgeschlossenheit, Vollständigkeit und Transitivität. Genau diese Eigenschaften wählen wir als Grundlage für die Axiomatisierung von azyklischen Ordnungen. Von anderen Eigenschaften, die möglicherweise aus der Notwendigkeit einer physikalischen Realisierung des Systems ableitbar sind, werden wir abstrahieren. Hierzu zählt insbesondere die Endlichkeit der Menge aller Ereignisse.

5.2 Darstellung

Azyklische Ordnungen sind also durch eine (verallgemeinerte) Relation gegeben. Abzählbar viele azyklische Ordnungen sind in der Sprache der Mengenlehre endlich beschreibbar. Endliche, azyklische Ordnungen können prinzipiell durch direkte Aufzählung der Wörter angegeben werden. Meist ist dies jedoch nicht besonders anschaulich oder aufgrund der Größe der Menge nicht praktikabel. Deshalb wird nun eine informale, graphische Darstellung für azyklische Ordnungen vorgeschlagen, aus der die Relation direkt ablesbar ist.

Die Darstellung besteht einfach aus einer Menge von Elementen, die auf einer Menge von unterscheidbaren, orientierten Kanten liegen. Jede Kante verbindet eine endliche Zahl von Elementen miteinander in der durch ihre Orientierung gegebenen eindeutigen Reihenfolge. Eine Kante stellt somit gerade ein Wort der Relation dar. Auf diese Weise läßt sich jede (endliche) Relation darstellen. Ferner läßt sich jede solche Darstellung als Relation interpretieren. Diese Darstellung ist zwar recht allgemein, für große Relationen jedoch sehr unübersichtlich.

B2719

In Abb. 5.3 sind vier Kanten dargestellt, die sich teilweise überkreuzen. Wir lesen die Relation R = {[0,2,5], [8,7,6], [2,3,7], [1,3,4,7,6,5,3]} ab. Die grafische Unterscheidung verschiedener Kanten kann die Übersichtlichkeit verbessern, ist jedoch nicht unbedingt nötig wie das Beispiel zeigt, wenn die Kanten bei Überkreuzungen eindeutig zu trennen sind.

Für einfache Relationen enthält die Darstellung keine zyklischen Kanten mehr, d.h. Kanten die mehrmals durch das gleiche Element laufen. Von nun an wird es sich bei allen Darstellungen um einfache Relationen handeln.

Für einfache und teilwortabgeschlossene Relationen können wir durch eine Kante die Wörter repräsentieren, die man erhält, wenn man die Kante der Orientierung entsprechend durchläuft und aus jeder Teilmenge ihrer Elemente in der durchlaufenen Reihenfolge ein Wort bildet. Eine weitere Verringerung der Darstellungskomplexität erreichen wir in vielen Fällen, indem wir rückwärts und vorwärts verzweigende Kanten zulassen. Eine verzweigte Kante steht dabei als Abkürzung für die Menge aller Kanten, die sich ergeben, wenn wir beim Durchlaufen alle Verzweigungsmöglichkeiten berücksichtigen.

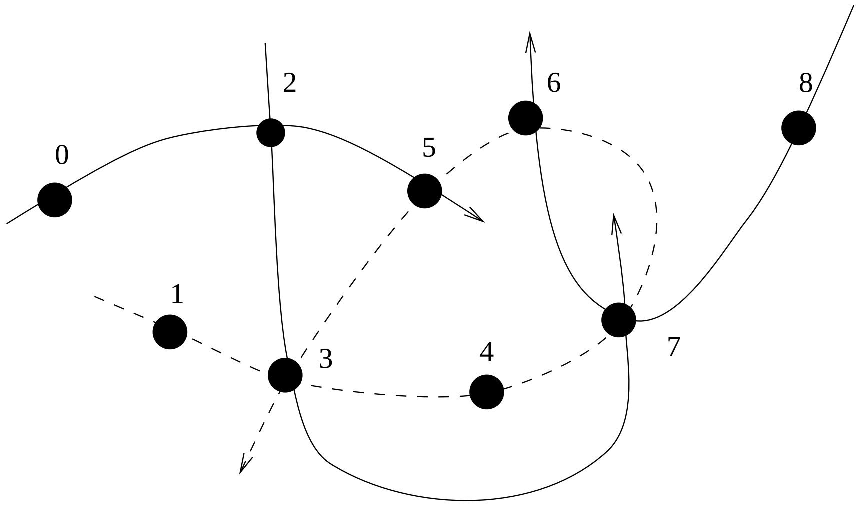


Abbildung 5.3: Eine Darstellung mit vier Kanten

Um Verzweigungen eindeutig von Überkreuzungen unterscheiden zu können, werden wir sie immer so darstellen, daß mehrere Linien zu einer einzelnen Linie zusammenlaufen, bzw. sich eine einzelne Linie in mehrere Linien aufspaltet. Mit dieser Konvention ergeben sich beispielsweise die in Abb. 5.4 dargestellten Situationen. Liegt keine Verzweigung vor, so bedeutet dies nur, daß mehrere Kantenabschnitte ein Element gemeinsam haben. Bei Verzweigungen dagegen haben wir verschiedene Möglichkeiten die Kante zu durchlaufen.

Die durch Darstellungen dieser Art gegebenen Relationen sind klarerweise einfach und teilwortabgeschlossen. Sie sind aber nicht immer transitiv oder vollständig, wie die folgenden Beispiele zeigen.

B2720

Abb. 5.5 stellt zwei Kanten dar. Eine Kante ist mehrfach verzweigt, die andere Kante enthält nur das Element 5. Beide Kanten sind von links nach rechts orientiert. Wir lesen aus dieser Darstellung die Relation R = $(\sqsupseteq)$[{[5], [1,4,6,7], [0,4,3,8], [0,4,3,7], [2,3,8], [2,3,7]}] ab. Man beachte dabei, daß es sich im Element 4 um eine Überkreuzung von Kantenabschnitten handelt, während direkt vor und nach Element 3 eine Verzweigung stattfindet.

Die Relation ist zwar einfach und teilwortabgeschlossen, aber nicht transitiv, da [1,4] $\in$ R und [4,3] $\in$ R, nicht jedoch [1,3] $\in$ R gilt.

B2721

In Abb. 5.6 sind drei sich überkreuzende Kanten zu sehen. Wir lesen die Relation R = $(\sqsupseteq)$[{[0,1], [1,2], [2,0]}] ab. Damit haben wir $\mathcal{A}$(R) = {0,1,2} und (li R) = $\updownarrow${(0,1), (1,2), (2,0)}. Die Klique {0,1,2} $\in$ R wird offenbar nicht durch ein Wort w $\in$ R mit $\mathcal{A}$(w) = {0,1,2} abgedeckt. R ist also nicht vollständig. R ist auch nicht transitiv, da [0,1] $\in$ R und [1,2] $\in$ R aber nicht [0,2] $\in$ R gilt.

B2722

Die azyklische Ordnung des Netzsystems aus Beispiel 2717 ist in Abb. 5.7 dargestellt. Wir benötigen nur eine verzweigte Kante. Man beachte die Ähnlichkeit zum Hassediagram in Abb. 5.2.

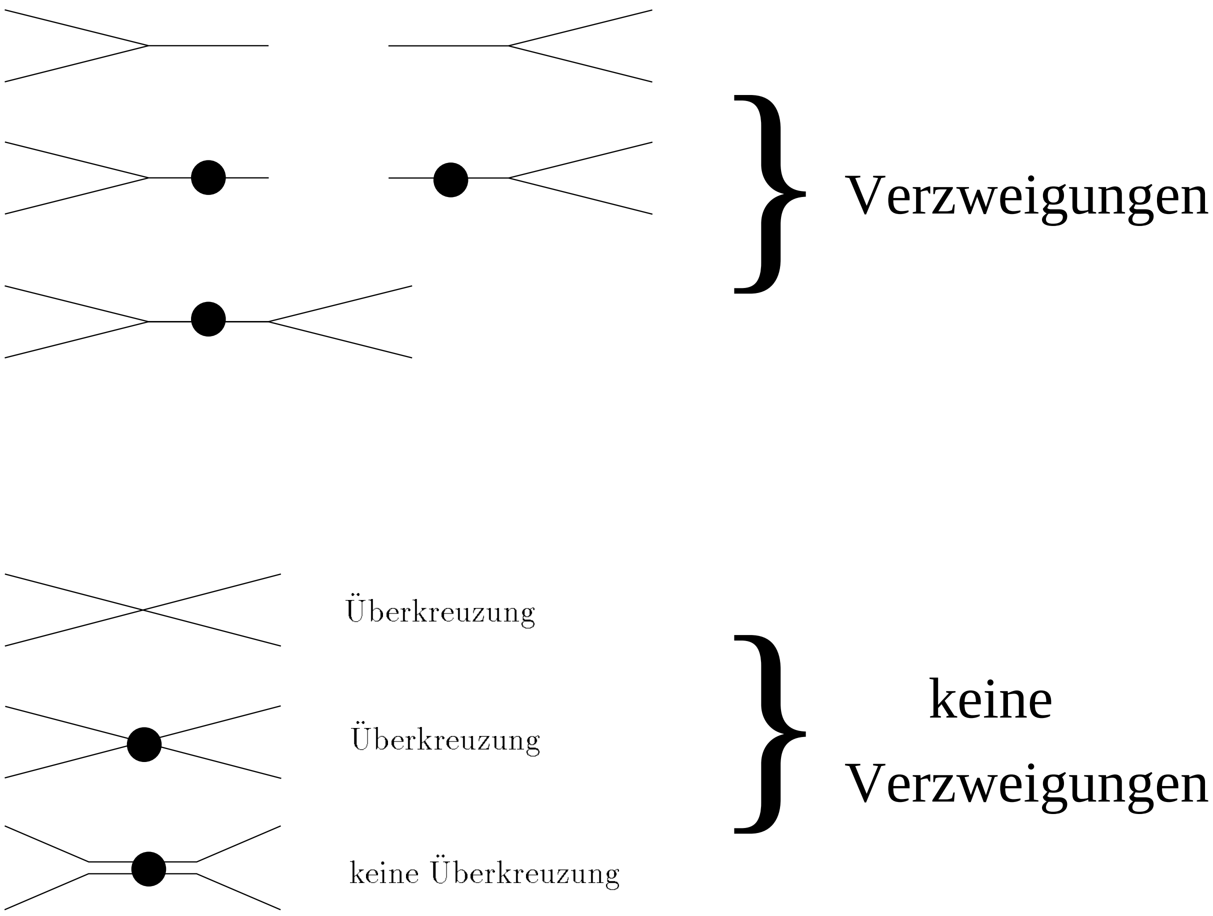


Abbildung 5.4: Verzweigungen und Überkreuzungen

5.3 Definition

Die in diesem Kapitel zu behandelnden Ordnungen und deren Basen entwickeln wir entlang einer Argumentationsstruktur, die sich für die totalen und allgemeinen, zyklischen Ordnungen, wiederholen wird. Da die zyklischen Ordnungen das Hauptthema dieser Arbeit bilden, verzichten wir in diesem Kapitel auf viele Beweise. Eine Reihe von Theoremen aus diesem Kapitel sind jedoch auch für zyklische

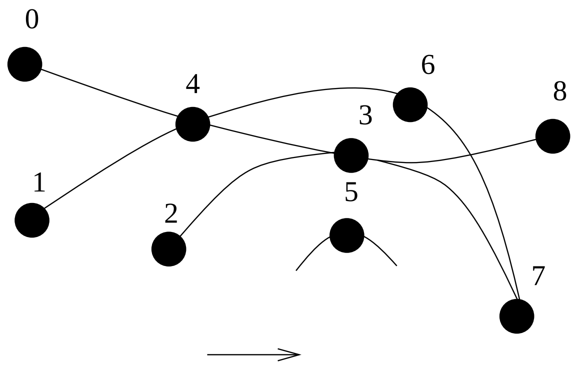


Abbildung 5.5: Eine Darstellung mit einer verzweigten und einer unverzweigten Kante

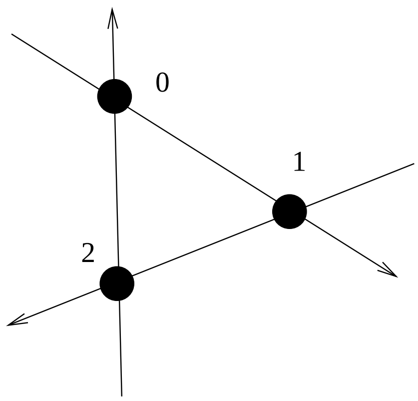


Abbildung 5.6: Eine Darstellung mit drei unverzweigten Kanten

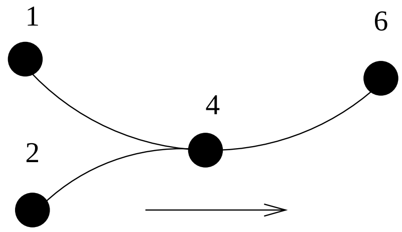


Abbildung 5.7: Die azyklische Ordnung des Netzsystems in Abb. 5.1

Ordnungen relevant. Diese werden wir schon hier beweisen und später wiederverwenden. Für zyklische Ordnungen dagegen werden wir alle Beweise im Detail ausführen.

S2723

VA2724$*$ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Für eine beliebige Relation definieren wir zunächst die übliche Transitivität.

D2725 R ist transitiv :$\Leftrightarrow$ $\forall$ a,b,c $\bullet$ [a,b] $\in$ R $\wedge$ [b,c] $\in$ R $\Rightarrow$ [a,c] $\in$ R

Die oben aus der Interpretation gewonnenen Eigenschaften fassen wir als Axiome der azyklischen Ordnungen auf: Dies sind die Einfachheit, die Teilwortabgeschlossenheit, die Vollständigkeit und die Transitivität. Wir bezeichnen die Relation als azyklische Ordnung, um sie von den (binären) Ordnungen klar zu unterscheiden.

D2726 R ist eine azyklische Ordnung :$\Leftrightarrow$
R ist einfach $\wedge$
R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen $\wedge$
R ist vollständig $\wedge$
R ist transitiv

Totalität bedeutet, daß je zwei Elemente des Alphabets $\mathcal{A}$(R) durch mindestens ein Wort geordnet werden. Diese Eigenschaft können wir mit den Axiomen kombinieren, um zu totalen, azyklischen Ordnungen zu gelangen.

D2727 R ist eine totale, azyklische Ordnung :$\Leftrightarrow$ R ist eine azyklische Ordnung $\wedge$ R ist total

B2728

In Abb. 5.7 ist eine von links nach rechts orientierte, verzweigte Kante dargestellt, aus der wir die Relation R = $(\sqsupseteq)$[{[1,4,6], [2,4,6]}] ablesen. Die Alphabet ist $\mathcal{A}$(R) = {1,2,4,6}. Die Abhängigkeitsrelation lautet (li R) = $\updownarrow${(1,4), (4,6), (1,6), (2,4), (2,6)}. Abhängigkeitskliquen sind ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen = $\mathcal{P}$({1,4,6}) ∪ $\mathcal{P}$({2,4,6}). Zwei Abhängigkeitskliquen sind maximal, also Kens: ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens = {{1,4,6}, {2,4,6}}. Jeder dieser Kens ist durch ein Wort in der Relation repräsentiert. Damit ist R nach Theorem 2325 vollständig. Ferner ist R transitiv: Mit [0,2] ∈ R und [2,3] ∈ R gilt auch [0,3] ∈ R, usw. Damit ist R eine azyklische Ordnung, die nicht total ist, da die Elemente 0 und 1 nicht gemeinsam in einem Wort auftreten.

B2729

Die Relation R = {[0,1,2], [0,1], [1,2], [0,2], [0], [1], [2], []} hat das Alphabet $\mathcal{A}$(R) = {0,1,2}. Die Relation ist einfach, teilwortabgeschlossen und total. Wir haben (li R) = {(0,1), (1,2), (0,2), (1,0), (2,1), (2,0)}, ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen = $\mathcal{P}$({0,1,2}) und ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens = {{0,1,2}}. R ist vollständig nach Theorem 2325: Der Ken {0,1,2} wird durch das Wort [0,1,2] ∈ R repräsentiert. R ist transitiv: Aus [0,1] ∈ R und [1,2] ∈ R folgt [0,2] ∈ R. Es handelt sich bei R also um eine totale, azyklische Ordnung.

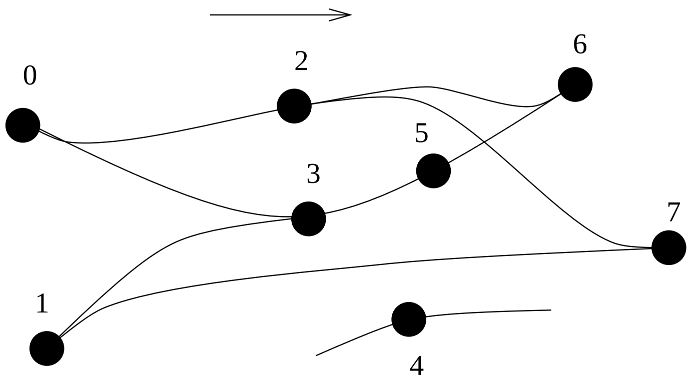


Abbildung 5.8: Ein azyklische Ordnung mit sechs Kens

B2730

In Abb. 5.8 ist eine Relation mit einer mehrfach verzweigten und einer unverzweigten Kante dargestellt. Beide Kannten sind von links nach rechts orientiert. Wir lesen die Relation R = $(\sqsupseteq)$[{[0,2,6], [0,2,7], [0,3,5,6], [1,3,5,6], [1,7], [4]}] ab. Die Alphabet ist $\mathcal{A}$(R) = {0,1,2,3,4,5,6,7}. Abhängigkeitskliquen sind ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen = $\mathcal{P}$({0,2,6}) ∪ $\mathcal{P}$({0,2,7}) ∪ $\mathcal{P}$({0,3,5,6}) ∪ $\mathcal{P}$({1,3,5,6}) ∪ $\mathcal{P}$({1,7}) ∪ $\mathcal{P}$({4}). Hieraus erhalten wir die Kens ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens = {{0,2,6}, {0,2,7}, {0,3,5,6}, {1,3,5,6}, {1,7}, {4}}. Jeder dieser Kens ist durch ein Wort in der Relation repräsentiert. Damit ist R nach Theorem 2325 vollständig. Die Transitivität ist direkt in der Darstellung überprüfbar. R ist also eine azyklische Ordnung. R ist nicht total, da beispielsweise die Elemente 0 und 4 in keinem Wort gemeinsam vorkommen.

Ein weiteres Beispiel für eine totale, azyklische Ordnung ist die Menge mit dem leeren Wort {[]}. Sie besitzt keine Elemente, denn $\mathcal{A}$({[]}) = ∅ .

S2731

T2732 {[]} ist eine totale, azyklische Ordnung

Ein Begriff den wir schon eingeführt, jedoch noch nicht verwendet haben, ist die Konsistenz von Relationen. Alle azyklische Ordnungen besitzen diese Eigenschaft.

S2733

VA2734∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Die Einfachheit haben wir als Verallgemeinerung der Irreflexivität eingeführt. Entsprechend läßt sich die Konsistenz als Verallgemeinerung der Asymmetrie auffassen. Wie schon erwähnt, läßt sich bei strengen Ordnungen die Asymmetrie aus der Irreflexivität und der Transitivität ableiten. Die entsprechende Aussage für Relationen lautet (die Teilwortabgeschlossenheit wird noch zusätzlich benötigt):

T2735 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist transitiv $\Rightarrow$ R ist konsistent

A2736	R ist einfach	
A2737	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
A2738	R ist transitiv	
A2739	$\neg$ R ist konsistent	
VT2740	$u \in R, v \in R \bullet \neg\, u \sim v$	1544, 2739
T2741∗	$u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$	2740
D2742	$D := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)$	
T2743∗	$D \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	2742
T2744	u ist einfach $\wedge$ v ist einfach	1279, 2736, 2740
VT2745	$C \bullet C \subseteq D \wedge \lvert C\rvert = 2 \wedge (u \triangleright C) \neq (v \triangleright C)$	0908, 2744, 2742, 2740
T2746∗	$C \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	2745
T2747	$D \subseteq \mathcal{A}(u) \wedge D \subseteq \mathcal{A}(v)$	2742
T2748	$C \subseteq \mathcal{A}(u) \wedge C \subseteq \mathcal{A}(v)$	2745, 2747
T2749	$\mathcal{A}(u \triangleright C) = C \wedge \mathcal{A}(v \triangleright C) = C$	0660, 2748
T2750	$\mathcal{A}(u \triangleright C) = \mathcal{A}(v \triangleright C)$	2749
T2751	$(u \triangleright C) \sqsubseteq u \wedge (v \triangleright C) \sqsubseteq v$	0655
T2752	$(u \triangleright C)$ ist einfach $\wedge$ $(v \triangleright C)$ ist einfach	0656, 2744
VT2753	$x,y \bullet [x,y] \sqsubseteq (u \triangleright C) \wedge [y,x] \sqsubseteq (v \triangleright C)$	0580, 2744, 2750, 2745
T2754∗	$x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A}$	2753
T2755	$[x,y] \sqsubseteq u \wedge [y,x] \sqsubseteq v$	0564, 2753, 2751
T2756	$[x,y] \in R \wedge [y,x] \in R$	1315, 2737, 2740, 2755
T2757	$[x,x] \in R$	2725, 2738, 2756
T2758	$[x,x]$ ist einfach	1279, 2736, 2757
T2759	$\mathbb{F}$	0378, 2758

Damit wissen wir, daß die azyklischen Ordnungen konsistent sind, d.h. alle Wörter der Relation sind paarweise miteinander konsistent.

T2760 R ist eine azyklische Ordnung $\Rightarrow$ R ist konsistent . . . 2726, 2735

Nach Definition 0718 wird zur Bestimmung der Konsistenz zweier charakteristischer Beobachtungen, die Projektion einer Beobachtung auf das Alphabet der anderen gebildet. Diese Projektion stellt gerade den Anteil einer Beobachtung dar, der auch bei der anderen Beobachtung registriert wurde. Konsistenz ist gerade dann erfüllt, wenn diese Anteile für beide Beobachtungen übereinstimmen, sie sich also in der Reihenfolge der Ereignisse nicht widersprechen. Einleuchtender ist vielleicht die Charakterisierung 0878, wonach zwei Beobachtungen miteinander konsistent sind, wenn sie im Schnittalphabet, d.h. auf den gemeinsam beobachteten Ereignissen übereinstimmen.

5.4 Spiegelung

Im folgenden stellen wir fest, daß die Axiome keine Orientierung besonders auszeichnen und sowohl gerichtete, wie auch nichtgerichtete, azyklische Ordnungen existieren.

S2761

VA2762$*$ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Die Spiegelung einer azyklischen Ordnung ist wieder eine azyklische Ordnung, da die einzelnen Axiome unter Spiegelung erhalten bleiben. In Ergänzung zu 2574 verifizieren wir dies noch für die Transitivität.

T2763 R ist transitiv $\Rightarrow$ (REV R) ist transitiv

A2764 R ist transitiv
G2765 $\forall$ a,b,c $\bullet$ [a,b] $\in$ (REV R) $\wedge$ [b,c] $\in$ (REV R) $\Rightarrow$ [a,c] $\in$ (REV R) 2725
VA2766 a,b,c $\bullet$ [a,b] $\in$ (REV R) $\wedge$ [b,c] $\in$ (REV R)
G2767 [a,c] $\in$ (REV R)
T2768$*$ $\mathrm{a} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{b} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{c} \in \mathbb{A}$ 2766
T2769 [c,b] $\in$ R $\wedge$ [b,a] $\in$ R 2552, 2766
T2770 [c,a] $\in$ R 2725, 2764, 2769
G2771 $\mathbb{T}$ 2552, 2770

T2772 R ist eine azyklische Ordnung $\Rightarrow$
(REV R) ist eine azyklische Ordnung 2726, 2576, 2641, 2696, 2763

Da nach Theorem 2713 auch die Totalität unter Spiegelung unverändert bleibt, ist auch die Spiegelung einer totalen, azyklischen Ordnung wieder eine solche.

T2773 R ist eine totale, azyklische Ordnung $\Rightarrow$
(REV R) ist eine totale, azyklische Ordnung 2727, 2772, 2713

Die Zahl zwei hat bei azyklischen Ordnungen eine besondere Bedeutung: Ist die Länge einer Relation (d.h. die Länge des maximalen enthaltenen Wortes) kleiner als zwei, so ist die Relation von ihrer Spiegelung nicht mehr zu unterscheiden. Für eine einfache und konsistente Relationen gilt sogar die Umkehrung.

T2774 R ist einfach $\wedge$ R ist konsistent $\Rightarrow$ ($\mathcal{L}$(R) $<$ 2 $\Leftrightarrow$ R = (REV R))

A2775 R ist einfach
A2776 R ist konsistent
G2777 $\mathcal{L}$(R) $<$ 2 $\Leftrightarrow$ R = (REV R)
G2778 R = (REV R) $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$(R) $<$ 2 2556
A2779 R = (REV R)
G2780 $\mathcal{L}$(R) $<$ 2
A2781 $\neg$ $\mathcal{L}$(R) $<$ 2
T2782 $\neg$ $\forall$ w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{L}$(w) $<$ 2 . . . . 1262, 2781
VT2783 w $\in$ R $\bullet$ 2 $\leq$ $\mathcal{L}$(w) 2782
T2784$*$ $\mathrm{w} \in \mathbb{A}^*$ 2783
T2785 w ist einfach 1279, 2775, 2783
T2786 (REV w) $\neq$ w 0440, 2785, 2783
T2787 (REV w) $\in$ (REV R) 2550, 2783
T2788 (REV w) $\in$ R 2787, 2779
T2789 (REV w) $\sim$ w 1544, 2776, 2788, 2783
T2790 $\mathcal{A}$(REV w) = $\mathcal{A}$(w) 0431
T2791 (REV w) = w 0881, 2790, 2789

T2792 $\mathbb{F}$ 2786, 2791

Aus der Systeminterpretation erhalten wir eine azyklische Ordnung mit R = (REV R), wenn wir von einem nichtgerichteten System ausgehen. Wir bezeichnen die Relationen mit R $\neq$ (REV R) deshalb auch als gerichtete Relationen. Relationen mit R = (REV R) sind nicht von ihrer Spiegelung zu unterscheiden, also nicht gerichtet.

B2793

Die azyklische Ordnung R = ($\sqsupseteq$)[{[0,1], [2]}] ist gerichtet, da [0,1] $\in$ R aber [0,1] $\notin$ (REV R) und damit R $\neq$ (REV R) gilt.

Die azyklische Ordnung R = ($\sqsupseteq$)[{[0], [1]}] ist nicht gerichtet, da R = (REV R) gilt.

5.5 Totale, azyklische Ordnungen

Nach Theorem 2735 können wir die Konsistenz aus Transitivität unter den Nebenbedingungen Einfachheit und Teilwortabgeschlossenheit ableiten. Wir fragen uns nun, ob wir umgekehrt die Transitivität aus der Konsistenz und den übrigen Axiomen ableiten können und damit die Transitivität in Definition 2726 durch die Konsistenz ersetzen könnten. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht möglich, wie die folgenden Beispiele zeigen.

B2794

Wir setzen R = ($\sqsupseteq$)[{[0,1,2], [2,3,0]}]. R ist einfach, und teilwortabgeschlossen. Die Kens sind ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens = {{0,1,2}, [0,2,3]}. R ist also nach Theorem 2325 auch vollständig, da jeder Ken einem Wort der Relation entspricht. R ist jedoch nicht konsistent und damit nach Theorem 2735 nicht transitiv ([0,2] $\in$ R und [2,0] $\in$ R aber [0,0] $\notin$ R).

B2795

Wir wählen R = ($\sqsupseteq$)[{[0,1,2], [3,1,4]}]. R ist einfach und teilwortabgeschlossen und konsistent. Die Kens sind ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens = {{0,1,2}, {3,1,4}}. R ist vollständig nach Theorem 2325. R ist jedoch nicht transitiv, da [0,1] $\in$ R und [1,4] $\in$ R aber [0,4] $\notin$ R. R läßt sich allerdings zu einer azyklischen Ordnung R$'$ = ($\sqsupseteq$)[{[0,1,2], [3,1,4], [0,1,4], [3,1,2]}] erweitern.

B2796

Es sei R = ($\sqsupseteq$)[{[0,1,2], [2,3,4], [4,5,0]}]. R ist einfach, teilwortabgeschlossen und konsistent. Wir haben ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens = {{0,1,2}, {2,3,4}, {0,4,5}}. R ist nach Theorem 2325 auch vollständig. R ist jedoch nicht transitiv, da [0,2] $\in$ R und [2,4] $\in$ R aber [0,4] $\notin$ R gilt. R läßt sich auch nicht zu einer azyklischen Ordnung R$'$ mit R $\subseteq$ R$'$ erweitern: Aufgrund der Transitivität hätten wir [0,4] $\in$ R$'$. Aus [0,4] $\in$ R$'$ und [4,0] $\in$ R$'$ folgt [0,0] $\in$ R$'$ im Widerspruch zur Einfachheit.

Damit erweist sich die Konsistenz als nur ein Aspekt der Transitivität. Zusammen mit den anderen Axiomen ist die Transitivität (im allgemeinen) eine echt stärkere Forderung. Grundsätzlich kann bei Verletzung der Transitivität zwischen zwei Fällen unterschieden werden: Entweder die Transitivität kann durch Erweiterung zu einer azyklischen Ordnung erreicht werden, oder keine Erweiterung erfüllt die Axiome der azyklischen Ordnungen. Liegt eine Verletzung der Konsistenz vor, so haben wir es aufgrund von Theorem 1553 mit den zweiten Fall zu tun. Liegt keine Verletzung der Konsistenz vor, so sind entsprechend den letzten beiden Beispiele beide Fälle möglich.

Beschränken wir uns auf totale, azyklische Ordnungen so deckt die Konsistenz alle Aspekte der Transitivität ab, wie die nachfolgende Charakterisierung zeigt. Die volle Wirkung der Transitivität entfaltet sich also erst bei nichttotalen, azyklischen Ordnungen.

S2797

VA2798∗	R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	
T2799	R ist einfach $\wedge$ R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen $\wedge$ R ist total $\wedge$ R ist 3 -vollständig $\wedge$ R ist konsistent $\Rightarrow$ R ist transitiv	
A2800	R ist einfach	
A2801	R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen	
A2802	R ist total	
A2803	R ist 3 -vollständig	
A2804	R ist konsistent	
G2805	R ist transitiv	
G2806	$\forall$ a,b,c $\bullet$ [a,b] $\in$ R $\wedge$ [b,c] $\in$ R $\Rightarrow$ [a,c] $\in$ R	2725
VA2807	a,b,c $\bullet$ [a,b] $\in$ R $\wedge$ [b,c] $\in$ R	
G2808	[a,c] $\in$ R	
T2809∗	a $\in \mathbb{A} \wedge$ b $\in \mathbb{A} \wedge$ c $\in \mathbb{A}$	2807
T2810	{a,b,c} $\subseteq \mathcal{A}$(R)	
T2811	$\mathcal{A}$([a,b]) $\subseteq \mathcal{A}$(R) $\wedge$ $\mathcal{A}$([b,c]) $\subseteq$ R	1245, 2807
G2812	$\mathbb{T}$	0328, 2811
T2813	$\mathcal{A}$(R) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	2017, 2802
T2814	{a,b,c} $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	0117, 2813, 2810
T2815	$\vert${a,b,c}$\vert \leq 3$	
VT2816	w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = {a,b,c}	2210, 2803, 2814, 2815
T2817	w ist einfach	1279, 2800, 2816
T2818	$\mathcal{L}$(w) = 3	
G2819	$\vert\mathcal{A}$(w)$\vert$ = 3	0373, 2817
G2820	$\vert${a,b,c}$\vert$ = 3	2816
T2821	[a,b] ist einfach $\wedge$ [b,c] ist einfach	1279, 2800, 2807
T2822	a $\neq$ b $\wedge$ b $\neq$ c	0378, 2821
T2823	a $\neq$ c	
A2824	a = c	
T2825	[b,a] $\in$ R	2807, 2824
T2826	[a,b] $\sim$ [b,a]	1544, 2804, 2807, 2825
T2827	$\mathbb{F}$	0978, 2822, 2826
G2828	$\mathbb{T}$	2822, 2823
T2829	$\mathcal{A}$([a,b]) $\subseteq \mathcal{A}$(w) $\wedge$ $\mathcal{A}$([b,c]) $\subseteq \mathcal{A}$(w)	2816, 0328
T2830	[a,b] $\sim$ w $\wedge$ [b,c] $\sim$ w	1544, 2804, 2807, 2816
T2831	[a,b] $\sqsubseteq$ w $\wedge$ [b,c] $\sqsubseteq$ w	0963, 2829, 2830
T2832	w = [a,b,c]	0599, 2817, 2818, 2816, 2831
T2833	[a,b,c] $\in$ R	2832, 2816
T2834	[a,c] $\sqsubseteq$ [a,b,c]	0557
G2835	$\mathbb{T}$	1315, 2801, 2833, 2834

Da Vollständigkeit die 3 -Vollständigkeit impliziert, sind unter den Axiomen Einfachheit, Teilwortabgeschlossenheit, Totalität und Vollständigkeit die Eigenschaften der Konsistenz und der Transitivität äquivalent, und wir erhalten die folgende Charakterisierung.

T2836 R ist eine totale, azyklische Ordnung $\Leftrightarrow$
R ist einfach $\wedge$
R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen $\wedge$
R ist total $\wedge$
R ist vollständig $\wedge$
R ist konsistent . . . 2727, 2726, 2760, 2799, 2215

Genau diese Charakterisierung wird später unser Ausgangspunkt für die Axiomatisierung von totalen, zyklischen Ordnungen sein.

5.6 Projektion

Jede möglicherweise weniger detaillierte Sicht auf eine azyklische Ordnung ist wieder eine azyklische Ordnung. Formal ist die Klasse der azyklischen Ordnungen unter Projektionen auf beliebige Mengen abgeschlossen. Diese gilt sogar für jedes Axiom separat. Insbesondere bilden auch die totalen, azyklischen Ordnungen eine unter Projektion abgeschossene Teilklasse.

S2837

VA2838∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$

Zunächst stellen wir fest, daß für teilwortabgeschlossene Relationen durch Projektion höchstens Wörter entfernt werden können, jedoch keine neuen dazukommen.

T2839 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\Rightarrow (R \triangleright X) \subseteq R$

A2840	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
G2841	$(R \triangleright X) \subseteq R$	
G2842	$\forall\, w \in (R \triangleright X) \bullet w \in R$	
VA2843	$w \in (R \triangleright X)$	
G2844	$w \in R$	
VT2845	$u \in R \bullet w = (u \triangleright X)$	1703, 2843
T2846∗	$u \in \mathbb{A}^*$	
T2847	$(u \triangleright X) \sqsubseteq u$	0655
T2848	$w \sqsubseteq u$	2847, 2845
G2849	$\mathbb{T}$	1315, 2840, 2845, 2848

Nun behandeln wir nacheinander die interessierenden Eigenschaften. Einfachheit bleibt unter Projektion erhalten.

T2850 R ist einfach $\Rightarrow (R \triangleright X)$ ist einfach

A2851	R ist einfach	
G2852	$(R \triangleright X)$ ist einfach	
G2853	$\forall\, w \in (R \triangleright X) \bullet w$ ist einfach	1279
VA2854	$w \in (R \triangleright X)$	
G2855	w ist einfach	
VT2856	$u \in R \bullet w = (u \triangleright X)$	1703, 2854
T2857∗	$u \in \mathbb{A}^*$	2856
T2858	u ist einfach	1279, 2851, 2856
G2859	$\mathbb{T}$	0656, 2858, 2856

Teilwortabgeschlossenheit ist ebenfalls eine Invariante unter Projektion.

T2860 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\Rightarrow (R \triangleright X)$ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen

A2861	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
G2862	$(R \triangleright X)$ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
T2863	$(R \triangleright X) \subseteq R$	2839, 2861
G2864	$\forall\, u,v \bullet v \in (R \triangleright X) \wedge u \sqsubseteq v \Rightarrow u \in (R \triangleright X)$	1315
VA2865	$u,v \bullet v \in (R \triangleright X)$	
A2866	$u \sqsubseteq v$	
G2867	$u \in (R \triangleright X)$	
T2868∗	$u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$	2866

G2869	$\exists\ u' \in R \bullet u = (u' \triangleright X)$	1703
T2870	$v \in R$	2863, 2865
T2871	$u \in R$	1315, 2861, 2870, 2866
VT2872	$v' \in R \bullet v = (v' \triangleright X)$	1703, 2865
T2873∗	$v' \in \mathbb{A}^*$	2872
T2874	$\mathcal{A}(v) \subseteq X$	2872, 0659
T2875	$\mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(v)$	0569, 2866
T2876	$\mathcal{A}(u) \subseteq X$	2875, 2874
T2877	$u = (u \triangleright X)$	0647, 2876
G2878	$\mathbb{T}$	2877, 2871

Die schwache und damit auch die starke Form der Vollständigkeit bleiben unter Projektion erhalten.

T2879 $\forall\ n \in \mathbb{N} \bullet R$ ist n -vollständig $\Rightarrow (R \triangleright X)$ ist n -vollständig

VA2880∗	$n \in \mathbb{N}$	
A2881	R ist n -vollständig	
G2882	$(R \triangleright X)$ ist n -vollständig	
G2883	$\forall\ C \in (\underline{li}\ (R \triangleright X))$ -Kliquen $\bullet\ \lvert C\rvert \leq n \Rightarrow \exists\ w \in (R \triangleright X) \bullet \mathcal{A}(w) = C$	2210
VA2884	$C \in (\underline{li}\ (R \triangleright X))$ -Kliquen	
A2885	$\lvert C\rvert \leq n$	
G2886	$\exists\ w \in (R \triangleright X) \bullet \mathcal{A}(w) = C$	
T2887	$C \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen	2117, 2884
VT2888	$w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$	2210, 2881, 2887, 2885
T2889∗	$w \in \mathbb{A}^*$	2888
T2890	$C \subseteq \mathcal{A}(R \triangleright X)$	2014, 2884
T2891	$C \subseteq X$	2890, 1709
T2892	$\mathcal{A}(w) \subseteq X$	2888, 2891
T2893	$w = (w \triangleright X)$	0647, 2892
T2894	$w \in (R \triangleright X)$	2893, 1703, 2888
G2895	$\mathbb{T}$	2894, 2888

T2896 R ist vollständig $\Rightarrow (R \triangleright X)$ ist vollständig

A2897	R ist vollständig	
G2898	$(R \triangleright X)$ ist vollständig	
T2899	$\forall\ n \in \mathbb{N} \bullet R$ ist n -vollständig	2215, 2897
T2900	$\forall\ n \in \mathbb{N} \bullet (R \triangleright X)$ ist n -vollständig	2879, 2899
G2901	$\mathbb{T}$	2215, 2900

Für teilwortabgeschlossene Relationen ist die Transitivität ebenfalls invariant.

T2902 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist transitiv $\Rightarrow (R \triangleright X)$ ist transitiv

A2903	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
A2904	R ist transitiv	
G2905	$(R \triangleright X)$ ist transitiv	
G2906	$\forall\ a,b,c \bullet [a,b] \in (R \triangleright X) \wedge [b,c] \in (R \triangleright X) \Rightarrow [a,c] \in (R \triangleright X)$	2725
VA2907	$a,b,c \bullet [a,b] \in (R \triangleright X) \wedge [b,c] \in (R \triangleright X)$	
G2908	$[a,c] \in (R \triangleright X)$	
T2909∗	$a \in \mathbb{A} \wedge b \in \mathbb{A} \wedge c \in \mathbb{A}$	2907
VT2910	$[a,b] \in R \wedge [b,c] \in R$	2839, 2903, 2907
T2911	$[a,c] \in R$	2725, 2904, 2910
T2912	$\mathcal{A}([a,b]) \subseteq \mathcal{A}(R \triangleright X) \wedge \mathcal{A}([b,c]) \subseteq \mathcal{A}(R \triangleright X)$	1245, 2907
T2913	$\{a,b,c\} \subseteq \mathcal{A}(R \triangleright X)$	0328, 2912
T2914	$\{a,b,c\} \subseteq X$	1709, 2913
T2915	$\mathcal{A}([a,c]) \subseteq X$	0328, 2914
T2916	$([a,c] \triangleright X) = [a,c]$	0647, 2915
T2917	$([a,c] \triangleright X) \in (R \triangleright X)$	1703, 2911

G2918 $\mathbb{T}$ 2917, 2916

Insgesamt bleiben alle Axiome der azyklischen Ordnungen erhalten. Die Projektion einer azyklischen Ordnung liefert also wieder eine azyklische Ordnung.

T2919 R ist eine azyklische Ordnung $\Rightarrow$
$(R \triangleright X)$ ist eine azyklische Ordnung 2726, 2850, 2860, 2896, 2902

Außerdem bleibt die Totalität unter Projektion erhalten. Somit ist die Projektion einer totalen, azyklischen Ordnung wieder eine solche.

T2920 R ist total $\Rightarrow$ $(R \triangleright X)$ ist total

A2921 R ist total
G2922 $(R \triangleright X)$ ist total
G2923 $\forall\, x \in \mathcal{A}(R \triangleright X),\, y \in \mathcal{A}(R \triangleright X) \bullet \exists\, w \in (R \triangleright X) \bullet x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$ 1283
VA2924 $x \in \mathcal{A}(R \triangleright X)$
VA2925 $y \in \mathcal{A}(R \triangleright X)$
G2926 $\exists\, w \in (R \triangleright X) \bullet x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$
T2927$*$ $x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A}$ 2924, 2925
T2928 $x \in X$ 2924, 1709
T2929 $y \in X$ 2925, 1709
T2930 $x \in \mathcal{A}(R)$ 2924, 1708
T2931 $y \in \mathcal{A}(R)$ 2925, 1708
VT2932 $w' \in R \bullet x \in \mathcal{A}(w') \wedge y \in \mathcal{A}(w')$ 1283, 2921, 2930, 2931
T2933$*$ $w' \in \mathbb{A}^*$ 2932
D2934 $w := (w' \triangleright X)$
T2935$*$ $w \in \mathbb{A}^*$ 2934
T2936 $\mathcal{A}(w) = \mathcal{A}(w') \cap X$ 2934, 0657
T2937 $x \in \mathcal{A}(w)$ 2936, 2932, 2928
T2938 $y \in \mathcal{A}(w)$ 2936, 2932, 2929
T2939 $w \in (R \triangleright X)$ 2934, 1703, 2932
G2940 $\mathbb{T}$ 2939, 2937, 2938

Projizieren wir eine azyklische Ordnung auf eine Klique, so erhalten wir nach Theorem 2195 eine totale Relation, also eine totale, azyklische Ordnung.

T2941 R ist eine azyklische Ordnung $\Rightarrow$
$\forall\, C \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet$ $(R \triangleright C)$ ist eine totale, azyklische Ordnung

A2942 R ist eine azyklische Ordnung
VA2943 $C \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen
G2944 $(R \triangleright C)$ ist eine totale, azyklische Ordnung
T2945$*$ $C \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ 0105, 2943
T2946 $(R \triangleright C)$ ist total 2195, 2943
T2947 $(R \triangleright C)$ ist eine azyklische Ordnung 2919, 2942
G2948 $\mathbb{T}$ 2727, 2946, 2947

Auch sie Konsistenz bleibt erhalten, wenn sie bzgl. einer projektiven Relation betrachtet wird.

T2949 $\forall\, E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*) \bullet$ E ist projektiv $\wedge$
R ist konsistent modulo E $\Rightarrow$ $(R \triangleright X)$ ist konsistent modulo E

VA2950$*$ $E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$
A2951 E ist projektiv
A2952 R ist konsistent modulo E
G2953 $(R \triangleright X)$ ist konsistent modulo E
G2954 $\forall\, u \in (R \triangleright X),\, v \in (R \triangleright X) \bullet u \overset{E}{\sim} v$ 1545

VA2955	$u \in (R \triangleright X)$	
VA2956	$v \in (R \triangleright X)$	
G2957	$u \overset{E}{\sim} v$	
T2958∗	$u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$	2955, 2956
VT2959	$u' \in R \bullet u = (u' \triangleright X)$	1703, 2955
VT2960	$v' \in R \bullet v = (v' \triangleright X)$	1703, 2956
T2961∗	$u' \in \mathbb{A}^* \wedge v' \in \mathbb{A}^*$	2959, 2960
T2962	$u' \overset{E}{\sim} v'$	1545, 2952, 2959, 2960
T2963	$(u' \triangleright X) \overset{E}{\sim} (v' \triangleright X)$	0811, 2951, 2962
G2964	$\mathbb{T}$	2963, 2959, 2960

Dies trifft zu für die projektive Äquivalenzrelation $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*)$. Die Konsistenz ist zwar keines der Axiome für azyklische Ordnungen. Sie ist nach Theorem 2760 ableitbar. Es ist jedoch interessant zu bemerken, daß sie auch unabhängig von den anderen Eigenschaften erhalten bleibt.

T2965 R ist konsistent $\Rightarrow$ $(R \triangleright X)$ ist konsistent 2949, 0679

Als nächstes interessieren wir uns für eine (schwache) Form der Umkehrung der vorigen Lemmata, nämlich für die Eigenschaften die, wenn sie für alle Projektionen auf Kens gelten, auf die Relation übertragen werden. Damit erhalten wir dann eine Charakterisierung einer azyklischen Ordnung mit Hilfe von Projektionen auf Kens, von denen wir nach Theorem 2919 und 2920 wissen, daß es sich um totale, azyklische Ordnungen handelt.

S2966

VA2967∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Ein erstes Beispiel für eine solche Eigenschaft, die sich von allen Kens auf die Relation vererbt, ist die Einfachheit.

T2968 ($\forall L \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $\bullet$ $(R \triangleright L)$ ist einfach) $\Rightarrow$ R ist einfach

A2969	$\forall L \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $\bullet$ $(R \triangleright L)$ ist einfach	
G2970	R ist einfach	
G2971	$\forall w \in R \bullet$ w ist einfach	1279
VA2972	$w \in R$	
G2973	w ist einfach	
T2974∗	$w \in \mathbb{A}^*$	2972
T2975	$\mathcal{A}(w) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen	2006, 2972
VT2976	$L \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $\bullet$ $\mathcal{A}(w) \subseteq L$	0134, 2975
T2977∗	$L \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	0124, 2976
T2978	$(R \triangleright L)$ ist einfach	2969, 2976
T2979	$w = (w \triangleright L)$	0647, 2976
T2980	$w \in (R \triangleright L)$	2979, 1703, 2972
G2981	$\mathbb{T}$	1279, 2978, 2980

Auch die Vollständigkeit überträgt sich von den Kens auf die gesamte Relation.

T2982 ($\forall L \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $\bullet$ $(R \triangleright L)$ ist vollständig) $\Rightarrow$ R ist vollständig

A2983	$\forall L \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $\bullet$ $(R \triangleright L)$ ist vollständig	
G2984	R ist vollständig	
G2985	$\forall C \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet$ C ist endlich $\Rightarrow \exists w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$	2209
VA2986	$C \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen	
A2987	C ist endlich	
G2988	$\exists w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$	
VT2989	$L \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $\bullet$ $C \subseteq L$	0134, 2986
T2990∗	$L \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	0124, 2989

T2991	$(R \triangleright L)$ ist vollständig	2983, 2989
T2992	$C \in (\underline{\text{li}}\ (R \triangleright L))$ -Kliquen	2192, 2986, 2989
T2993	$C \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen	2117, 2992
G2994	$\mathbb{T}$	2209, 2991, 2993, 2987

Eine weitere Eigenschaft, die sich von allen Kens auf die Relation vererbt, ist die Konsistenz. Da wir die Konsistenz nicht als Axiom für azyklische Ordnungen gefordert haben, werden wir die folgenden Theoreme für die nachfolgende Charakterisierung nicht benötigen. Da die Konsistenz unter den Nebenbedingungen der Einfachheit und Teilwortabgeschlossenheit eine Abschwächung der Transitivität darstellt (Theorem 2735), und da wir ein entsprechendes Resultat für die Transitivität selbst nicht ableiten können, werden wir die Konsistenz trotzdem behandeln.

S2995

VA2996$*$ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Für die allgemeine Konsistenz modulo E zeigen wir zuerst eine schwächere Aussage, nämlich daß sie sich von allen Kliquen auf die Relation überträgt.

T2997 $\forall\ E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*) \bullet (\ \forall\ C \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet\ (R \triangleright C)$ ist konsistent modulo E) $\Rightarrow$ R ist konsistent modulo E

VA2998$*$	$E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$	
A2999	$\forall\ C \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet\ (R \triangleright C)$ ist konsistent modulo E	
G3000	R ist konsistent modulo E	
G3001	$\forall\ u \in R,\ v \in R \bullet u \overset{E}{\sim} v$	1545
VA3002	$u \in R$	
VA3003	$v \in R$	
G3004	$u \overset{E}{\sim} v$	
T3005$*$	$u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$	3002, 3003
D3006	$D := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)$	
T3007$*$	$D \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	3006
G3008	$((u \triangleright D), (v \triangleright D)) \in E$	0760, 3006
T3009	$D \subseteq \mathcal{A}(u)$	3006
T3010	$D \subseteq \mathcal{A}(v)$	3006
T3011	$\mathcal{A}(u) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen	2006, 3002
T3012	$D \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen	0117, 3011, 3009
T3013	$(R \triangleright D)$ ist konsistent modulo E	2999, 3012
T3014	$(u \triangleright D) \in (R \triangleright D)$	1703, 3002
T3015	$(v \triangleright D) \in (R \triangleright D)$	1703, 3003
T3016	$(u \triangleright D) \overset{E}{\sim} (v \triangleright D)$	1545, 3013, 3014, 3015
T3017	$\mathcal{A}(u \triangleright D) = D$	0660, 3009
T3018	$\mathcal{A}(v \triangleright D) = D$	0660, 3010
T3019	$\mathcal{A}(u \triangleright D) = \mathcal{A}(v \triangleright D)$	3017, 3018
G3020	$\mathbb{T}$	0767, 3019, 3016

Diese Aussage läßt sich durch Verstärkung in die gewünschte Form bringen: Konsistenz modulo E vererbt sich somit von allen Kens auf die gesamte Relation, sofern wir für E eine projektive Relation wählen.

T3021 $\forall\ E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*) \bullet$ E ist projektiv $\wedge$ ($\forall\ L \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kens $\bullet\ (R \triangleright L)$ ist konsistent modulo E) $\Rightarrow$ R ist konsistent modulo E

VA3022$*$	$E \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$
A3023	E ist projektiv
A3024	$\forall\ L \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kens $\bullet\ (R \triangleright L)$ ist konsistent modulo E
G3025	R ist konsistent modulo E
T3026	$\forall\ C \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet\ (R \triangleright C)$ ist konsistent modulo E

VA3027 $C \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen
G3028 $(R \triangleright C)$ ist konsistent modulo E
VT3029 $L \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $\bullet$ $C \subseteq L$ . . . 0134, 3027
T3030∗ $L \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$, $C \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ . . . 0124, 3029
T3031 $(R \triangleright L)$ ist konsistent modulo E . . . 3024, 3029
T3032 $((R \triangleright L) \triangleright C)$ ist konsistent modulo E . . . 2949, 3023, 3031
T3033 $(R \triangleright (L \cap C))$ ist konsistent modulo E . . . 1711, 3032
G3034 $\mathbb{T}$ . . . 3033, 3029
G3035 $\mathbb{T}$ . . . 2997, 3026

Wählen wir als projektive Äquivalenzrelation $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*)$, so erhalten wir das entsprechende Resultat für die konkrete Konsistenz.

T3036 ($\forall L \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $\bullet$ $(R \triangleright L)$ ist konsistent) $\Rightarrow$ R ist konsistent . 1546, 3021, 0679

Für die Teilwortabgeschlossenheit und die Transitivität können wir keine Theoreme dieser Art erwarten. Selbst wenn alle Projektionen auf Kens teilwortabgeschlossen oder transitiv sind, muß die Relation nicht notwendigerweise teilwortabgeschlossen bzw. transitiv sein, wie die folgenden Beispiele demonstrieren. Auch dann, wenn die Relation die übrigen Axiome erfüllt und sogar alle Projektionen totale, azyklische Ordnungen sind, ändert sich an dieser Situation nichts.

B3037

Als Relation wählen wir R = {[0,1], [0,2], [1], [2]}. Die Relation R ist einfach und transitiv. Offensichtlich ist R nicht teilwortabgeschlossen. Dennoch sind alle Projektionen von R auf Kens teilwortabgeschlossen: Die Kens von R sind $(\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens = {{0,1}, {0,2}}. Die jeweiligen Projektionen ergeben sich daraus als $(R \triangleright \{0,1\})$ = {[0,1], [0], [1], []} und $(R \triangleright \{0,2\})$ = {[0], [0,2], [], [2]}. Die Projektionen sind sogar einfach, vollständig, transitiv und total. Es sind also totale, azyklische Ordnungen.

B3038

Es sei R = {[0,1], [1,2], [0], [1], [2], []}. Wir haben $(\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens = {{0,1}, {1,2} }. R ist einfach, teilwortabgeschlossen und vollständig, jedoch nicht transitiv. Die Projektionen auf die Kens sind $(R \triangleright \{0,1\})$ = {[0,1], [1], [0], []} und $(R \triangleright \{1,2\})$ = {[1], [1,2], [], [2]}. Die Projektionen sind einfach, teilwortabgeschlossen, vollständig, total, also totale, azyklische Ordnungen.

Auch die Totalität ist natürlich keine Eigenschaft, die sich von Kenprojektionen auf die Relation vererbt, da Kenprojektionen nach Theorem 2195 immer total sind.

Mit Hilfe der vorigen Lemmata ist es nun möglich, eine Charakterisierung von azyklischen Ordnungen durch totale, azyklische Ordnungen anzugeben. Die beiden nicht vererbten Eigenschaften werden dabei explizit gefordert. Ansonsten muß die Projektion auf jeden Ken eine azyklische Ordnung und damit auch eine totale, azyklische Ordnung sein.

S3039
VA3040∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
T3041 R ist eine azyklische Ordnung $\Leftrightarrow$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist transitiv $\wedge$
$\forall L \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $\bullet$ $(R \triangleright L)$ ist eine totale, azyklische Ordnung

A3042 R ist eine azyklische Ordnung
T3043 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen . . . 2726, 3042
T3044 R ist transitiv . . . 2726, 3042
T3045 $(\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $\subseteq$ $(\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen . . . 0125
T3046 $\forall L \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $\bullet$ $(R \triangleright L)$ ist eine totale, azyklische Ordnung . 2941, 3042, 3045
A3047 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen

A3048	R ist transitiv	
A3049	$\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ (R $\triangleright$ L) ist eine totale, azyklische Ordnung	
T3050	$\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ (R $\triangleright$ L) ist einfach	2726, 2727, 3049
T3051	R ist einfach	2968, 3050
T3052	$\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ (R $\triangleright$ L) ist vollständig	2726, 2727, 3049
T3053	R ist vollständig	2982, 3052
T3054	R ist eine azyklische Ordnung	2726, 3051, 3047, 3053, 3048
G3055	$\mathbb{T}$	3043, 3044, 3046, 3054

Aufgrund der Teilwortabgeschlossenheit ist der allgemeine Zerlegungssatz 2066 anwendbar: Jede azyklische Ordnung läßt sich in totale, azyklische Ordnungen (den Projektionen auf Kens) zerlegen. Die Komposition dieser Relationen, d.h. deren Vereinigung, liefert wieder genau die ursprüngliche azyklische Ordnung.

S3056

VA3057$*$	R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	
A3058	R ist eine azyklische Ordnung	
T3059	R $= \bigcup \{$R$' \bullet$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ R$' =$ (R $\triangleright$ L)$\}$	2726, 3058, 2066

B3060

Wir wählen die azyklische Ordnung R = ($\sqsupseteq$)[{[0,1,2,3], [4,5,1,6], [4,5,1,2,3], [0,1,6], [7]}] mit ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens = {{0,1,2,3}, {1,4,5,6}, {1,2,3,4,5}, {0,1,6}, {7}}. Die Kenprojektionen sind (R $\triangleright$ {0,1,2,3}) = ($\sqsupseteq$)[{[0,1,2,3]}], (R $\triangleright$ {1,4,5,6}) = ($\sqsupseteq$)[{[4,5,1,6]}], (R $\triangleright$ {1,2,3,4,5}) = ($\sqsupseteq$)[{[4,5,1,2,3]}], (R $\triangleright$ {0,1,6}) = ($\sqsupseteq$)[{[0,1,6]}] und (R $\triangleright$ {7}) = {[7], []}. Die Vereinigung dieser totalen, azyklischen Ordnungen ergibt offenbar wieder die ursprüngliche Relation R.

Wir hatten schon zwei Klassen von Relationen unterschieden: R ist gerichtet gdw. R $\neq$ (REV R) gilt. Ansonsten ist R nicht gerichtet. Diese Klassifizierung können wir für azyklische Ordnungen nun verfeinern: Eine azyklische Ordnung R ist die Vereinigung einer Menge von totalen, azyklischen Ordnungen nach Theorem 3059. Jede dieser totalen, azyklischen Ordnungen kann entweder gerichtet oder nichtgerichtet sein. In einer gerichteten, azyklischen Ordnung gibt es offenbar einen Ken, der als totale, azyklische Ordnung gerichtet ist. Wir bezeichnen eine azyklische Ordnung als vollständig gerichtet, gdw. alle ihre Kens als totale, azyklische Ordnungen gerichtet sind. Eine gerichtete, azyklische Ordnung, die nicht vollständig gerichtet ist, bezeichnen wir als unvollständig gerichtet. Besitzen alle Kens einer nichtleeren, zyklischen Ordnung mindestens zwei Elemente, so handelt es sich offenbar um eine vollständig gerichtete, azyklische Ordnung.

5.7 Vereinigung

Nach Theorem 3059 können wir jede azyklische Ordnung als Vereinigung von totalen, azyklischen Ordnungen schreiben. Anläßlich dieser Tatsache wollen wir nun die Vereinigung von azyklischen Ordnungen im allgemeinen untersuchen.

S3061

VA3062$*$	S $\in \mathcal{P}(\mathcal{R}^*(\mathbb{A}))$	
T3063$*$	($\bigcup$ S) $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	
T3064	$\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R $\subseteq$ ($\bigcup$ S)	

Aufgrund der Monotonie der Operationen $\mathcal{A}$(R), (li R) und ($\underline{\text{li}}$ R) sowie der Kliquenbildung ergeben sich die folgenden Inklusionen.

T3065	$\forall$ R $\in$ S $\bullet$ $\mathcal{A}$(R) $\subseteq \mathcal{A}(\bigcup$ S)	1246, 3064

T3066 $\forall\, R \in S \bullet (\mathrm{li}\ R) \subseteq (\mathrm{li}\ (\bigcup S))$ . . . 1810, 3064
T3067 $\forall\, R \in S \bullet (\underline{\mathrm{li}}\ R) \subseteq (\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcup S))$ . . . 1866, 3064
T3068 $\forall\, R \in S \bullet (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen $\subseteq (\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcup S))$ -Kliquen . . . 0116, 3067

Diese Inklusionen lassen sich zu Identitäten verschärfen, die die Vertauschbarkeit der Vereinigung mit den genannten Operationen garantieren.

T3069 $\mathcal{A}(\bigcup S) = \bigcup \{\mathcal{A}(R) \bullet R \in S\}$

T3070 $\bigcup \{\mathcal{A}(R) \bullet R \in S\} \subseteq \mathcal{A}(\bigcup S)$ . . . 3065
G3071 $\mathcal{A}(\bigcup S) \subseteq \bigcup \{\mathcal{A}(R) \bullet R \in S\}$ . . . 3070
G3072 $\forall\, x \in \mathcal{A}(\bigcup S) \bullet x \in \bigcup \{\mathcal{A}(R) \bullet R \in S\}$
VA3073 $x \in \mathcal{A}(\bigcup S)$
G3074 $x \in \bigcup \{\mathcal{A}(R) \bullet R \in S\}$
T3075∗ $x \in \mathbb{A}$ . . . 3073
G3076 $\exists\, R \in S \bullet x \in \mathcal{A}(R)$
VT3077 $w \in (\bigcup S) \bullet x \in \mathcal{A}(w)$ . . . 1243, 3073
T3078∗ $w \in \mathbb{A}^*$ . . . 3077
VT3079 $R \in S \bullet w \in R$ . . . 3077
T3080∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ . . . 3079
T3081 $x \in \mathcal{A}(R)$ . . . 1243, 3077, 3079
G3082 $\mathbb{T}$ . . . 3079, 3081

T3083 $(\mathrm{li}\ (\bigcup S)) = \bigcup \{(\mathrm{li}\ R) \bullet R \in S\}$

T3084 $\bigcup \{(\mathrm{li}\ R) \bullet R \in S\} \subseteq (\mathrm{li}\ (\bigcup S))$ . . . 3066
G3085 $(\mathrm{li}\ (\bigcup S)) \subseteq \bigcup \{(\mathrm{li}\ R) \bullet R \in S\}$ . . . 3084
G3086 $\forall\, x,y \bullet (x,y) \in (\mathrm{li}\ (\bigcup S)) \bullet (x,y) \in \bigcup \{(\mathrm{li}\ R) \bullet R \in S\}$
T3087 $\forall\, x,y \bullet [x,y] \in (\sqsupseteq)[\bigcup S] \Rightarrow \exists\, R \in S \bullet (x,y) \in (\mathrm{li}\ R) \wedge (y,x) \in (\mathrm{li}\ R)$
  VA3088 $x,y \bullet [x,y] \in (\sqsupseteq)[\bigcup S]$
  G3089 $\exists\, R \in S \bullet (x,y) \in (\mathrm{li}\ R) \wedge (y,x) \in (\mathrm{li}\ R)$
  T3090∗ $x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A}$ . . . 3088
  VT3091 $w \in (\bigcup S) \bullet [x,y] \sqsubseteq w$ . . . 3088
  VT3092 $R \in S \bullet w \in R$ . . . 3091
  T3093∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \wedge w \in \mathbb{A}^*$ . . . 3092
  T3094 $[x,y] \in (\sqsupseteq)[R]$ . . . 3091, 3092
  T3095 $(x,y) \in (\mathrm{li}\ R) \wedge (y,x) \in (\mathrm{li}\ R)$ . . . 1719, 3094
  G3096 $\mathbb{T}$ . . . 3092, 3095
VA3097 $x,y \bullet (x,y) \in (\mathrm{li}\ (\bigcup S))$
G3098 $(x,y) \in \bigcup \{(\mathrm{li}\ R) \bullet R \in S\}$
T3099∗ $x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A}$ . . . 3097
G3100 $\exists\, R \in S \bullet (x,y) \in (\mathrm{li}\ R)$
T3101 $[x,y] \in (\sqsupseteq)[\bigcup S] \vee [y,x] \in (\sqsupseteq)[\bigcup S]$ . . . 1719, 3097
T3102 $\exists\, R \in S \bullet (x,y) \in (\mathrm{li}\ R) \wedge (y,x) \in (\mathrm{li}\ R)$ . . . 3087, 3101
G3103 $\mathbb{T}$ . . . 3102

T3104 $(\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcup S)) = \bigcup \{(\underline{\mathrm{li}}\ R) \bullet R \in S\}$

T3105 $\bigcup \{(\underline{\mathrm{li}}\ R) \bullet R \in S\} \subseteq (\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcup S))$ . . . 3067
G3106 $(\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcup S)) \subseteq \bigcup \{(\underline{\mathrm{li}}\ R) \bullet R \in S\}$ . . . 3105
G3107 $\forall\, x,y \bullet (x,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcup S)) \bullet (x,y) \in \bigcup \{(\underline{\mathrm{li}}\ R) \bullet R \in S\}$
VA3108 $x,y \bullet (x,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcup S))$
G3109 $(x,y) \in \bigcup \{(\underline{\mathrm{li}}\ R) \bullet R \in S\}$
T3110∗ $x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A}$ . . . 3108
T3111 $(x,y) \in (\mathrm{li}\ (\bigcup S)) \vee (x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(\bigcup S))$ . . . 1819, 3108
G3112 $\exists\, R \in S \bullet (x,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$
A3113 $x = y$
  T3114 $x \in \mathcal{A}(\bigcup S)$ . . . 1820, 3108
  T3115 $x \in \bigcup \{\mathcal{A}(R) \bullet R \in S\}$ . . . 3114, 3069

VT3116	$R \in S \bullet x \in \mathcal{A}(R)$	3115
T3117$*$	$R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	3116
T3118	$(x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))$	3113, 3116
T3119	$(x,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$	1822, 3118
G3120	$\mathbb{T}$	3116, 3119
A3121	$x \neq y$	
T3122	$(x,y) \notin \mathcal{ID}(\mathcal{A}(\bigcup S))$	3121
T3123	$(x,y) \in (\mathrm{li}\ (\bigcup S))$	3111, 3122
T3124	$(x,y) \in \bigcup \{(\mathrm{li}\ R) \bullet R \in S\}$	3083, 3123
VT3125	$R \in S \bullet (x,y) \in (\mathrm{li}\ R)$	3124
T3126	$(x,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$	1821, 3125
G3127	$\mathbb{T}$	3125, 3126

Einfachheit aller Relationen überträgt sich auf die Vereinigung. Die Umkehrung gilt ebenfalls.

T3128 $(\forall\ R \in S \bullet R$ ist einfach$) \Leftrightarrow (\bigcup S)$ ist einfach

A3129	$\forall\ R \in S \bullet R$ ist einfach	
T3130	$\forall\ w \in (\bigcup S) \bullet w$ ist einfach	
VA3131	$w \in (\bigcup S)$	
G3132	w ist einfach	
VT3133	$R \in S \bullet w \in R$	3131
T3134$*$	$R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \wedge w \in \mathbb{A}^*$	3133
T3135	R ist einfach	3129, 3133
G3136	$\mathbb{T}$	1279, 3135, 3133
T3137	$(\bigcup S)$ ist einfach	1279, 3130
A3138	$(\bigcup S)$ ist einfach	
T3139	$\forall\ R \in S \bullet R$ ist einfach	1280, 3138, 3064
G3140	$\mathbb{T}$	3137, 3139

Sind alle Relationen abgeschlossen bzgl. einer binären Relation, so überträgt sich diese Eigenschaft auf deren Vereinigung.

T3141 $\forall\ Q \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*) \bullet (\forall\ R \in S \bullet R$ ist Q -abgeschlossen$) \Rightarrow (\bigcup S)$ ist Q -abgeschlossen

VA3142$*$	$Q \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$	
A3143	$\forall\ R \in S \bullet R$ ist Q -abgeschlossen	
G3144	$(\bigcup S)$ ist Q -abgeschlossen	
G3145	$\forall\ u,v \bullet u \in (\bigcup S) \wedge (u,v) \in Q \Rightarrow v \in (\bigcup S)$	1312
VA3146	$u,v \bullet u \in (\bigcup S)$	
A3147	$(u,v) \in Q$	
G3148	$v \in (\bigcup S)$	
VT3149	$R \in S \bullet u \in R$	3146
T3150$*$	$R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	3149
T3151	R ist Q -abgeschlossen	3143, 3149
T3152	$v \in R$	1312, 3151, 3149, 3147
G3153	$\mathbb{T}$	3149, 3152

Insbesondere vererbt sich Teilwortabgeschlossenheit von allen Komponenten auf die Vereinigung.

T3154 $(\forall\ R \in S \bullet R$ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen$) \Rightarrow (\bigcup S)$ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen 3141

Zusammenfassend erhalten wir das folgende Resultat:

T3155 $(\forall\ R \in S \bullet R$ ist eine azyklische Ordnung$) \wedge (\bigcup S)$ ist transitiv $\wedge$
$(\bigcup S)$ ist vollständig $\Rightarrow (\bigcup S)$ ist eine azyklische Ordnung 2726, 3128, 3154

Vollständigkeit, Konsistenz und Transitivität bleiben nicht unter Vereinigung erhalten, selbst wenn wir von azyklischen Ordnungen ausgehen, wie die folgenden Bespiele demonstrieren. Da wir jede azyklische Ordnung auch als Vereinigung von totalen, azyklischen Ordnungen auffassen können, werden die genannten Eigenschaften auch dann nicht im allgemeinen erhalten, wenn wir uns auf die Vereinigung von totalen, azyklischen Ordnungen beschränken.

B3156

Es sei $R_1 = (\sqsupseteq)[\{[0,1], [0,2]\}]$ und $R_2 = (\sqsupseteq)[\{[0,2], [1,2]\}]$. Beide Relationen sind azyklische Ordnungen und insbesondere vollständig. Die Vereinigung $R = R_1 \cup R_2 = (\sqsupseteq)[\{[0,1], [0,2], [1,2]\}]$ mit ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $= \{\{0,1,2\}\}$ ist einfach, teilwortabgeschlossen und transitiv aber nicht vollständig.

B3157

Wir wählen die totalen, azyklischen Ordnungen $R_1 = (\sqsupseteq)[\{[0,1]\}]$ und $R_2 =$ (REV R_1) $= (\sqsupseteq)[\{[1,0]\}]$. Beide Relationen sind konsistent, jedoch nicht miteinander konsistent. Die Vereinigung $R = R_1 \cup R_2$ ist einfach, teilwortabgeschlossen und vollständig, jedoch nicht konsistent, und damit auch nicht transitiv.

B3158

Wir wählen die totalen, azyklischen Ordnungen $R_1 = (\sqsupseteq)[\{[0,1]\}]$, $R_2 = (\sqsupseteq)[\{[1,2]\}]$, $R_3 = (\sqsupseteq)[\{[2,3]\}]$ und $R_4 = (\sqsupseteq)[\{[3,0]\}]$, die insbesondere transitiv und miteinander konsistent sind. Die Vereinigung $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 = (\sqsupseteq)[\{[0,1], [1,2], [2,3], [3,0]\}]$ mit ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $= \{\{0,1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,0\}\}$ ist einfach, teilwortabgeschlossen, konsistent und vollständig, jedoch nicht transitiv, da $[0,1] \in R$ und $[1,2] \in R$ aber $[0,2] \notin R$ gilt.

Da wir jede nichttotale, azyklische Ordnung als Vereinigung von totalen, azyklischen Ordnungen schreiben können, bleibt natürlich auch die Totalität nicht unter Vereinigung erhalten.

5.8 Durchschnitt

In diesem Abschnitt zeigen wir: Der Durchschnitt einer Menge azyklischer Ordnungen liefert wieder eine azyklische Ordnung. Damit ist der Schnittoperator (im Gegensatz zum Vereinigungsoperator) hervorragend zur Erzeugung von azyklischen Ordnungen aus bereits konstruierten, azyklischen Ordnungen geeignet.

B3159

Wir wählen die azyklischen Ordnungen $R_1 = (\sqsupseteq)[\{[0,1,2], [0,1,3,4,5,6]\}]$ und $R_2 = (\sqsupseteq)[\{[1,7,0,2], [1,4,3,5]\}]$. Als Schnitt erhalten wir die azyklische Ordnung $R = (\sqsupseteq)[\{[0,2], [1,2], [1,3,5], [1,4,5]\}]$. Es gilt $\mathcal{A}(R_1) = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{A}(R_2) = \{0,1,2,3,4,5,7\}$ und $\mathcal{A}(R) = \{0,1,2,3,4,5\} = \mathcal{A}(R_1) \cap \mathcal{A}(R_2)$. Außerdem gilt $(3,4) \in$ (li R_1) und $(3,4) \in$ (li R_2), aber $(3,4) \notin$ (li R). Die Abhängigkeitsrelation ist also hier nicht mit dem Schnitt verträglich, d.h. (li R) $\neq$ (li R_1) $\cap$ (li R_2).

Die Schnittoperation erzeugt aus einer Menge sich möglicherweise widersprechender, azyklischer Ordnungen eine größte azyklische Ordnung, die in jeder der geschnittenen Relationen enthalten ist.

S3160

VA3161∗ $S \in \mathcal{P}(\mathcal{R}^*(\mathbb{A}))$

Wir beginnen mit einer nichtleeren Menge von Relationen, so daß ($\bigcap$ R) immer definiert ist.

A3162 $S \neq \emptyset$

T3163∗ $(\bigcap \mathrm{S}) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ . . . 3162
T3164 $\forall \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet (\bigcap \mathrm{S}) \subseteq \mathrm{R}$

Aus der Monotonie der Operationen $\mathcal{A}(\mathrm{R})$, (li R) und ($\underline{\mathrm{li}}$ R), sowie der Kliquenbildung erhalten wir sofort die einfachen Beziehungen:

T3165 $\forall \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathcal{A}(\bigcap \mathrm{S}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$ . . . 1246, 3164
T3166 $\forall \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet (\mathrm{li}\ (\bigcap \mathrm{S})) \subseteq (\mathrm{li}\ \mathrm{R})$ . . . 1810, 3164
T3167 $\forall \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet (\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcap \mathrm{S})) \subseteq (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ . . . 1866, 3164
T3168 $\forall \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet (\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcap \mathrm{S}))$ -Kliquen $\subseteq (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen . . . 0116, 3167

Die Bildung des Alphabets ist mit der Schnittoperation vertauschbar, wenn wir eine teilwortabgeschlossene Relation voraussetzen.

T3169 $(\forall \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathrm{R}$ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen$) \Rightarrow \mathcal{A}(\bigcap \mathrm{S}) = \bigcap \{\mathcal{A}(\mathrm{R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\}$

- **A3170** $\forall \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathrm{R}$ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen
- **T3171∗** $\downarrow(\bigcap \{\mathcal{A}(\mathrm{R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\})$ . . . 3162
- **T3172** $\mathcal{A}(\bigcap \mathrm{S}) \subseteq \bigcap \{\mathcal{A}(\mathrm{R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\}$ . . . 3165
- **T3173** $\bigcap \{\mathcal{A}(\mathrm{R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\} \subseteq \mathcal{A}(\bigcap \mathrm{S})$
  - **G3174** $\forall \mathrm{x} \in \bigcap \{\mathcal{A}(\mathrm{R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\} \bullet \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\bigcap \mathrm{S})$
  - **VA3175** $\mathrm{x} \in \bigcap \{\mathcal{A}(\mathrm{R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\}$
  - **G3176** $\mathrm{x} \in \mathcal{A}(\bigcap \mathrm{S})$
  - **T3177** $\forall \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$ . . . 3175
  - **T3178** $\forall \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet [\mathrm{x}] \in \mathrm{R}$ . . . 1325, 3170, 3177
  - **T3179** $[\mathrm{x}] \in (\bigcap \mathrm{S})$ . . . 3178
  - **T3180** $\mathcal{A}([\mathrm{x}]) \subseteq \mathcal{A}(\bigcap \mathrm{S})$ . . . 1245, 3179
  - **G3181** $\mathbb{T}$ . . . 0327, 3180
- **G3182** $\mathbb{T}$ . . . 3172, 3173

Einfachheit und Konsistenz sind Eigenschaften, die sich von einer Relation auf alle ihre Teilmengen übertragen. $(\bigcap \mathrm{S})$ ist eine Teilmenge eines Elements $\mathrm{R}' \in \mathrm{S}$.

T3183 $(\forall \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathrm{R}$ ist einfach$) \Rightarrow (\bigcap \mathrm{S})$ ist einfach

- **A3184** $\forall \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathrm{R}$ ist einfach
- **G3185** $(\bigcap \mathrm{S})$ ist einfach
- **VT3186** $\mathrm{R}' \in \mathrm{S}$ . . . 3162
- **T3187∗** $\mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ . . . 3186
- **T3188** R' ist einfach . . . 3184, 3186
- **T3189** $(\bigcap \mathrm{S}) \subseteq \mathrm{R}'$ . . . 3164, 3186
- **G3190** $\mathbb{T}$ . . . 1280, 3188, 3189

T3191 $(\forall \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathrm{R}$ ist konsistent modulo E$) \Rightarrow (\bigcap \mathrm{S})$ ist konsistent modulo E

- **A3192** $\forall \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathrm{R}$ ist konsistent modulo E
- **G3193** $(\bigcap \mathrm{S})$ ist konsistent modulo E
- **VT3194** $\mathrm{R}' \in \mathrm{S}$ . . . 3162
- **T3195∗** $\mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ . . . 3194
- **T3196** R' ist konsistent modulo E . . . 3192, 3194
- **T3197** $(\bigcap \mathrm{S}) \subseteq \mathrm{R}'$ . . . 3164, 3194
- **G3198** $\mathbb{T}$ . . . 1553, 3196, 3197

T3199 $(\forall \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathrm{R}$ ist konsistent$) \Rightarrow (\bigcap \mathrm{S})$ ist konsistent . . . 1546, 3191

Abgeschlossenheit sowie Transitivität fordern abhängig von Wörtern in der Relation die Existenz weiterer Wörter. Bei Eigenschaften dieser Form ist die Invarianz unter Schnittbildung offensichtlich.

T3200 $\forall\ Q \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*) \bullet (\forall\ R \in S \bullet R \text{ ist } Q\text{ -abgeschlossen}) \Rightarrow (\bigcap S) \text{ ist } Q\text{ -abgeschlossen}$

VA3201$*$	$Q \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$	
A3202	$\forall\ R \in S \bullet R \text{ ist } Q\text{ -abgeschlossen}$	
G3203	$(\bigcap S) \text{ ist } Q\text{ -abgeschlossen}$	
G3204	$\forall\ u,v \bullet u \in (\bigcap S) \wedge (u,v) \in Q \Rightarrow v \in (\bigcap S)$	1312
VA3205	$u,v \bullet u \in (\bigcap S)$	
A3206	$(u,v) \in Q$	
G3207	$v \in (\bigcap S)$	
G3208	$\forall\ R' \in S \bullet v \in R'$	
VA3209	$R' \in S$	
G3210	$v \in R'$	
T3211$*$	$R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	3209
T3212	$u \in R'$	3205, 3209
T3213	$R' \text{ ist } Q\text{ -abgeschlossen}$	3202, 3209
G3214	$\mathbb{T}$	1312, 3213, 3212, 3206

T3215 $(\forall\ R \in S \bullet R \text{ ist } (\sqsupseteq)\text{ -abgeschlossen}) \Rightarrow (\bigcap S) \text{ ist } (\sqsupseteq)\text{ -abgeschlossen}$ 3200

T3216 $(\forall\ R \in S \bullet R \text{ ist transitiv}) \Rightarrow (\bigcap S) \text{ ist transitiv}$

A3217	$\forall\ R \in S \bullet R \text{ ist transitiv}$	
G3218	$(\bigcap S) \text{ ist transitiv}$	
G3219	$\forall\ a,b,c \bullet [a,b] \in (\bigcap S) \wedge [b,c] \in (\bigcap S) \Rightarrow [a,c] \in (\bigcap S)$	2725
VA3220	$a,b,c \bullet [a,b] \in (\bigcap S) \wedge [b,c] \in (\bigcap S)$	
G3221	$[a,c] \in (\bigcap S)$	
T3222$*$	$a \in \mathbb{A} \wedge b \in \mathbb{A} \wedge c \in \mathbb{A}$	3220
G3223	$\forall\ R \in S \bullet [a,c] \in R$	
VA3224	$R \in S$	
G3225	$[a,c] \in R$	
T3226$*$	$R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	3224
T3227	$[a,b] \in R \wedge [b,c] \in R$	3224, 3220
T3228	$R \text{ ist transitiv}$	3217, 3224
G3229	$\mathbb{T}$	2725, 3228, 3227

Für das nachfolgende Theorem, benötigen wir ein Lemma, das im wesentlichen eine Spezialisierung des Auswahlaxioms darstellt.

T3230 $\forall\ C \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \bullet (\forall\ R \in S \bullet \exists\ w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C) \Rightarrow$
$\exists\ f \in (S \to \mathbb{A}^*) \bullet \forall\ R \in S \bullet (f\ R) \in R \wedge \mathcal{A}(f\ R) = C$

VA3231$*$	$C \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	
A3232	$\forall\ R \in S \bullet \exists\ w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$	
G3233	$\exists\ f \in (S \to \mathbb{A}^*) \bullet \forall\ R \in S \bullet (f\ R) \in R \wedge \mathcal{A}(f\ R) = C$	
D3234	$r := \{(R,w) \in S \times \mathbb{A}^* \bullet w \in R \wedge \mathcal{A}(w) = C\}$	
T3235$*$	$r \in \mathcal{P}(S \times \mathbb{A}^*)$	3234
T3236	$\mathcal{D}(r) = S$	
G3237	$S \subseteq \mathcal{D}(r)$	3235
G3238	$\forall\ R \in S \bullet R \in \mathcal{D}(r)$	
VA3239	$R \in S$	
G3240	$R \in \mathcal{D}(r)$	
T3241$*$	$R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	3239
VT3242	$w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$	3232, 3239
T3243	$(R,w) \in r$	3234, 3239, 3242
G3244	$\mathbb{T}$	3243
VT3245	$f \bullet f \text{ ist eine Funktion} \wedge f \subseteq r \wedge \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(r)$	0161
T3246	$\mathcal{D}(f) = S$	3245, 3236
T3247$*$	$f \in (S \to \mathbb{A}^*)$	
T3248	$f \in \mathcal{P}(S \times \mathbb{A}^*)$	3245, 3235
T3249	$f \in (S \rightsquigarrow \mathbb{A}^*)$	3248, 3245

G3250	$\mathbb{T}$	3249, 3246
T3251	$\forall$ R $\in$ S $\bullet$ (f R) $\in$ R $\wedge$ $\mathcal{A}$(f R) = C	
VA3252	R $\in$ S	
G3253	(f R) $\in$ R $\wedge$ $\mathcal{A}$(f R) = C	
T3254	(R, f R) $\in$ f	3252, 3247
T3255	(R, f R) $\in$ r	3245, 3254
G3256	$\mathbb{T}$	3234, 3255
G3257	$\mathbb{T}$	3247, 3251

Die Vollständigkeit überträgt sich auf den Schnitt, wenn alle beteiligten Relationen einfach, konsistent sowie vollständig sind.

T3258 ($\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist einfach) $\wedge$ ($\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist konsistent) $\wedge$
($\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist vollständig) $\Rightarrow$ ($\bigcap$ S) ist vollständig

A3259	$\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist einfach	
A3260	$\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist konsistent	
A3261	$\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist vollständig	
G3262	($\bigcap$ S) ist vollständig	
G3263	$\forall$ C $\in$ ($\underline{\text{li}}$ ($\bigcap$ S)) -Kliquen $\bullet$ C ist endlich $\Rightarrow$ $\exists$ w $\in$ ($\bigcap$ S) $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C	2209
A3264	C $\in$ ($\underline{\text{li}}$ ($\bigcap$ S)) -Kliquen	
A3265	C ist endlich	
G3266	$\exists$ w $\in$ ($\bigcap$ S) $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C	
T3267$*$	C $\in$ $\mathcal{P}$($\mathbb{A}$)	0105, 3264
T3268	$\forall$ R $\in$ S $\bullet$ C $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	3168, 3264
T3269	$\forall$ R $\in$ S $\bullet$ $\exists$ w $\in$ R $\bullet$ $\mathcal{A}$(w) = C	3261, 2209, 3268, 3265
VT3270	f $\in$ (S $\to$ $\mathbb{A}^*$) $\bullet$ $\forall$ R $\in$ S $\bullet$ (f R) $\in$ R $\wedge$ $\mathcal{A}$(f R) = C	3230, 3269
T3271$*$	f $\in$ (S $\to$ $\mathbb{A}^*$)	3270
VT3272	R $\in$ S	3162
T3273$*$	R $\in$ $\mathcal{R}^*$($\mathbb{A}$)	3272
T3274	(f R) $\in$ R	3270, 3272
T3275	$\mathcal{A}$(f R) = C	3270, 3272
T3276	$\forall$ R$'$ $\in$ S $\bullet$ (f R$'$) = (f R)	
A3277	$\neg\forall$ R$'$ $\in$ S $\bullet$ (f R$'$) = (f R)	
VT3278	R$'$ $\in$ S $\bullet$ (f R$'$) $\neq$ (f R)	3277
T3279$*$	R$'$ $\in$ $\mathbb{A}^*$	3278
T3280	(f R$'$) $\in$ R$'$	3270, 3278
T3281	$\mathcal{A}$(f R$'$) = C	3270, 3278
T3282	$\mathcal{A}$(f R$'$) = $\mathcal{A}$(f R)	3275, 3281
T3283	$\neg$ (f R$'$) $\sim$ (f R)	0881, 3282, 3278
T3284	R ist einfach $\wedge$ R$'$ ist einfach	3259, 3272, 3278
T3285	(f R) ist einfach $\wedge$ (f R$'$) ist einfach	1279, 3284, 3274, 3280
VT3286	x,y $\bullet$ x $\neq$ y $\wedge$ [x,y] $\sqsubseteq$ (f R) $\wedge$ [y,x] $\sqsubseteq$ (f R$'$)	0580, 3285, 3282, 3278
T3287$*$	x $\in$ $\mathbb{A}$ $\wedge$ y $\in$ $\mathbb{A}$	3286
T3288	(x,y) $\notin$ (li ($\bigcap$ S))	
A3289	(x,y) $\in$ (li ($\bigcap$ S))	
T3290	[x,y] $\in$ ($\sqsupseteq$)[$\bigcap$ S] $\vee$ [y,x] $\in$ ($\sqsupseteq$)[$\bigcap$ S]	1719, 3289
A3291	[x,y] $\in$ ($\sqsupseteq$)[$\bigcap$ S]	
T3292	($\bigcap$ S) $\subseteq$ R$'$	3164, 3278
T3293	[x,y] $\in$ ($\sqsupseteq$)[R$'$]	1403, 3292, 3291
VT3294	w$'$ $\in$ R$'$ $\bullet$ [x,y] $\sqsubseteq$ w$'$	3293
T3295$*$	w$'$ $\in$ $\mathbb{A}^*$	3294
T3296	R$'$ ist konsistent	3260, 3278
T3297	(f R$'$) $\sim$ w$'$	1544, 3296, 3280, 3294
T3298	w$'$ ist einfach	1279, 3284, 3294
T3299	[y,x] $\sim$ [x,y]	0893, 3285, 3298, 3286, 3294, 3297
T3300	$\mathbb{F}$	0882, 3299, 3286

A3301 $[y,x] \in (\sqsupseteq)[\bigcap S]$

T3302 $(\bigcap S) \subseteq R$ . . . 3164, 3272

T3303 $[y,x] \in (\sqsupseteq)[R]$ . . . 1403, 3302, 3301

VT3304 $w \in R \bullet [y,x] \sqsubseteq w$ . . . 3303

T3305$*$ $w \in \mathbb{A}^*$ . . . 3304

T3306 R ist konsistent . . . 3260, 3272

T3307 $(f\ R) \sim w$ . . . 1544, 3306, 3274, 3304

T3308 w ist einfach . . . 1279, 3284, 3304

T3309 $[x,y] \sim [y,x]$ . . . 0893, 3285, 3308, 3286, 3304, 3307

T3310 $\mathbb{F}$ . . . 0882, 3309, 3286

T3311 $(x,y) \notin (\underline{li}\ (\bigcap S))$ . . . 1827, 3286, 3288

T3312 $\mathcal{A}([x,y]) \subseteq \mathcal{A}(f\ R)$ . . . 0569, 3286

T3313 $\{x,y\} \subseteq \mathcal{A}(f\ R)$ . . . 0328, 3312

T3314 $x \in C \wedge y \in C$ . . . 3313, 3275

T3315 $(x,y) \in (\underline{li}\ (\bigcap S))$ . . . 0106, 3264, 3314

T3316 $\mathbb{F}$ . . . 3311, 3315

T3317 $\forall R' \in S \bullet (f\ R') \in R'$ . . . 3270

T3318 $\forall R' \in S \bullet (f\ R) \in R'$ . . . 3276, 3317

T3319 $(f\ R) \in (\bigcap S)$ . . . 3162, 3318

G3320 $\mathbb{T}$ . . . 3319, 3275

Zusammenfassend ist jeder Schnitt (auch jeder unendliche) von azyklischen Ordnungen wieder eine azyklische Ordnung. Die Konsistenz, die wir zum Ableiten der Vollständigkeit benötigen, ist nach Theorem 2760 gegeben.

T3321 $(\forall R \in S \bullet$ R ist eine azyklische Ordnung$) \Rightarrow$
$(\bigcap S)$ ist eine azyklische Ordnung . . . 2726, 2760, 3183, 3215, 3258, 3216

5.9 Eine binäre Ordnungsrelation

Aus einer beliebigen, verallgemeinerten Relation R können wir eine binäre Relation $(<_R)$ ableiten, die uns gewisse Information über die Reihenfolge der Elemente in den Wörtern liefert. $x <_R y$ bedeutet x liegt vor y, d.h. es gibt ein Wort der Relation, in dem x und y vorkommen und x vor y liegt.

S3322

VA3323$*$ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

D3324 $(<_R) := \{(x,y) \in \mathcal{A}(R) \times \mathcal{A}(R) \bullet [x,y] \in (\sqsupseteq)[R]\}$

T3325$*$ $(<_R) \in \mathcal{BR}(\mathcal{A}(R))$ . . . 3324

M3326$*$ $x <_R y :\Leftrightarrow (x,y) \in (<_R)$

T3327 $x <_R y \Leftrightarrow [x,y] \in (\sqsupseteq)[R]$

G3328 $[x,y] \in (\sqsupseteq)[R] \Rightarrow x <_R y$ . . . 3324

A3329 $[x,y] \in (\sqsupseteq)[R]$

G3330 $x <_R y$

T3331 $\mathcal{A}([x,y]) \subseteq \mathcal{A}((\sqsupseteq)[R])$ . . . 1245, 3329

T3332 $\mathcal{A}([x,y]) \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 1496, 3331

T3333 $\{x,y\} \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 0328, 3332

G3334 $\mathbb{T}$ . . . 3324, 3333, 3329

B3335

Für die azyklische Ordnung $R = (\sqsupseteq)[\{[1,4,6], [2,4,6]\}]$ aus Beispiel 2728 gilt $<_R = \{(1,4), (4,6), (1,6), (2,4), (4,6), (2,6)\}$.

Wir bezeichnen $<_{\mathrm{R}}$ als gerichtete Abhängigkeitsrelation, da sich die (ungerichtete) Abhängigkeitsrelation als symmetrischer Abschluß ergibt.

S3336

VA3337$*$ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T3338 $(\mathrm{x,y}) \in (\mathrm{li\ R}) \Leftrightarrow \mathrm{x} <_{\mathrm{R}} \mathrm{y} \vee \mathrm{y} <_{\mathrm{R}} \mathrm{x}$ 1719, 3327

Wenn wir es mit teilwortabgeschlossenen Relationen R zu tun haben, wie es meist der Fall sein wird, entsprechen die Paare in $(<_{\mathrm{R}})$ gerade den zweistelligen Wörtern von R.

T3339 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\Rightarrow$ ($\mathrm{x} <_{\mathrm{R}} \mathrm{y} \Leftrightarrow [\mathrm{x,y}] \in \mathrm{R}$) 1449, 3327

Die gerichtete Abhängigkeit kehrt sich unter Spiegelung um.

T3340 $\mathrm{x} <_{(\mathrm{REV\ R})} \mathrm{y} \Leftrightarrow \mathrm{y} <_{\mathrm{R}} \mathrm{x}$ 3327, 2676

Für rotationsabgeschlossene Relationen, um die es in den nachfolgenden Kapitel gehen wird, sind die gerichtete und die ungerichtete Abhängigkeitsrelation identisch. Wir können dann anstelle von $(<_{\mathrm{R}})$ immer (li R) verwenden.

T3341 R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\Rightarrow (<_{\mathrm{R}}) = (\mathrm{li\ R})$

A3342 R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen
G3343 $\mathrm{x} <_{\mathrm{R}} \mathrm{y} \Leftrightarrow (\mathrm{x,y}) \in (\mathrm{li\ R})$
G3344 $[\mathrm{x,y}] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{R}] \Leftrightarrow [\mathrm{x,y}] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{R}] \vee [\mathrm{y,x}] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{R}]$ 3327, 1719
G3345 $[\mathrm{y,x}] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{R}] \Leftrightarrow [\mathrm{x,y}] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{R}]$
T3346 $(\sqsupseteq)[\mathrm{R}]$ ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen 1451, 3342
G3347 $\mathbb{T}$ 1344, 3346

Die Elemente jedes Wortes der Relation sind durch die binäre Relation $(<_{\mathrm{R}})$ geordnet. Liegt eine azyklische Ordnung vor, so bildet jede durch $(<_{\mathrm{R}})$ geordnete Menge ein Wort der Relation. Wir benötigen diese beiden Feststellungen insbesondere für dreistellige Wörter.

S3348

VA3349$*$ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T3350 $[\mathrm{x,y,z}] \in \mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{x} <_{\mathrm{R}} \mathrm{y} \wedge \mathrm{y} <_{\mathrm{R}} \mathrm{z} \wedge \mathrm{x} <_{\mathrm{R}} \mathrm{z}$

A3351 $[\mathrm{x,y,z}] \in \mathrm{R}$
G3352 $\mathrm{x} <_{\mathrm{R}} \mathrm{y} \wedge \mathrm{y} <_{\mathrm{R}} \mathrm{z} \wedge \mathrm{x} <_{\mathrm{R}} \mathrm{z}$
T3353$*$ $\mathrm{x} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{y} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{z} \in \mathbb{A}$ 3351
T3354 $[\mathrm{x,y}] \sqsubseteq [\mathrm{x,y,z}] \wedge [\mathrm{y,z}] \sqsubseteq [\mathrm{x,y,z}] \wedge [\mathrm{x,z}] \in [\mathrm{x,y,z}]$ 0555, 0556, 0557
T3355 $[\mathrm{x,y}] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{R}] \wedge [\mathrm{y,z}] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{R}] \wedge [\mathrm{x,z}] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{R}]$ 3351, 3354
G3356 $\mathbb{T}$ 3327, 3355

T3357 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsubseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist 3 -vollständig $\wedge$
R ist transitiv $\wedge\ \mathrm{x} <_{\mathrm{R}} \mathrm{y} \wedge \mathrm{y} <_{\mathrm{R}} \mathrm{z} \Rightarrow [\mathrm{x,y,z}] \in \mathrm{R}$

A3358 R ist einfach
A3359 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen
A3360 R ist 3 -vollständig
A3361 R ist transitiv
A3362 $\mathrm{x} <_{\mathrm{R}} \mathrm{y} \wedge \mathrm{y} <_{\mathrm{R}} \mathrm{z}$
G3363 $[\mathrm{x,y,z}] \in \mathrm{R}$
T3364$*$ $\mathrm{x} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{y} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{z} \in \mathbb{A}$ 3362
T3365 R ist konsistent 2735, 3358, 3359, 3361
T3366 $[\mathrm{x,y}] \in \mathrm{R} \wedge [\mathrm{y,z}] \in \mathrm{R}$ 3339, 3359, 3362
T3367 $[\mathrm{x,z}] \in \mathrm{R}$ 2725, 3361, 3366
T3368 $(\mathrm{x,y}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R}) \wedge (\mathrm{y,z}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R}) \wedge (\mathrm{x,z}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ 1902, 3366, 3367

T3369	$\{x,y,z\} \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen	0113, 1824, 1825, 3368
T3370	$\lvert\{x,y,z\}\rvert \leq 3$	
VT3371	$w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = \{x,y,z\}$	2210, 3360, 3369, 3370
T3372$*$	$w \in \mathbb{A}^*$	3371
T3373	w ist einfach	1279, 3358, 3371
T3374	$\mathcal{L}(w) = 3$	
G3375	$\lvert\mathcal{A}(w)\rvert = 3$	0373, 3373
G3376	$\lvert\{x,y,z\}\rvert = 3$	3371
T3377	$[x,y]$ ist einfach $\wedge$ $[y,z]$ ist einfach $\wedge$ $[x,z]$ ist einfach	1279, 3358, 3366, 3367
T3378	$x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z$	0378, 3377
G3379	$\mathbb{T}$	3378
T3380	$[x,y] \sqsubseteq w \wedge [y,z] \sqsubseteq w$	
T3381	$[x,y] \sim w \wedge [y,z] \sim w$	1544, 3365, 3366, 3371
T3382	$\mathcal{A}([x,y]) \subseteq \mathcal{A}(w) \wedge \mathcal{A}([y,z]) \subseteq \mathcal{A}(w)$	0328, 3371
G3383	$\mathbb{T}$	0963, 3382, 3381
T3384	$w = [x,y,z]$	0599, 3373, 3374, 3371, 3380
G3385	$\mathbb{T}$	3384, 3371
T3386	R ist eine azyklische Ordnung $\wedge$ $x <_R y \wedge y <_R z \Rightarrow [x,y,z] \in R$	3357, 2726, 2215

Im allgemeinen muß $(<_R)$ weder irreflexiv noch asymmetrisch oder transitiv sein. Ist R eine azyklische Ordnung so ist $<_R$ jedoch eine strenge Ordnung auf dem Alphabet $\mathcal{A}(R)$.

S3387

VA3388$*$	$R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	
T3389	$(<_R) \leq (\mathrm{li}\ R)$	3338
T3390	R ist einfach $\Rightarrow$ $(<_R)$ ist irreflexiv	0074, 1906, 3389
T3391	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist transitiv $\Rightarrow$ $(<_R)$ ist transitiv	
A3392	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
A3393	R ist transitiv	
G3394	$(<_R)$ ist transitiv	
G3395	$\forall\, a,b,c \bullet a <_R b \wedge b <_R c \Rightarrow a <_R c$	0084
T3396	$\forall\, a,b,c \bullet [a,b] \in R \wedge [b,c] \in R \Rightarrow [a,c] \in R$	2725, 3393
G3397	$\mathbb{T}$	3339, 3392, 3396
T3398	R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist transitiv $\Rightarrow$ $(<_R)$ ist eine strenge Ordnung	0092, 3390, 3391
T3399	R ist eine azyklische Ordnung $\Rightarrow$ $(<_R)$ ist eine strenge Ordnung	2726, 3398

5.10 Intervalle

In diesem Abschnitt definieren wir offene Intervalle $(x \cdots y)_R$ einer Relation R. x und y sind dabei die das Intervall begrenzenden Randelemente. $(x \cdots y)_R$ ist die Menge der Elemente die ein einem Wort der Relation nach x und vor y vorkommen. Wir erhalten also gerade die Elemente, die intuitiv zwischen x und y liegen. Es ist hierbei allerdings die Reihenfolge der Randelemente x und y zu beachten.

S3400

VA3401$*$	$R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ x \in \mathbb{A},\ y \in \mathbb{A}$	
D3402	$(x \cdots y)_R := \{z \in \mathcal{A}(R) \bullet [x,z,y] \in (\sqsupseteq)[R]\}$	
T3403$*$	$\forall\, R,x,y \bullet \downarrow((x \cdots y)_R) \Leftrightarrow R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \wedge x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A}$	3402
T3404$*$	$(x \cdots y)_R \subseteq \mathcal{A}(R)$	3402

Diese Definition mag zunächst etwas ungewöhnlich erscheinen, da man Intervalle auch über die binäre Relation $(<_{\mathrm{R}})$ definieren könnte. Da diese übliche Intervalldefinition jedoch für zyklische Ordnungen unbrauchbar ist, verwenden wir die angegebene Definition, die sich ohne Modifikation auch auf zyklische Ordnungen anwenden lassen wird.

Es folgen zunächst einige allgemeine Betrachtungen, die nicht voraussetzen, daß eine azyklische Ordnung vorliegt, sondern nur die Eigenschaften der Einfachheit und Teilwortabgeschlossenheit ausnutzen.

S3405

VA3406* $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Ist die betrachtete Relation teilwortabgeschlossen, so können wir die Definition vereinfachen.

T3407 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\Rightarrow$ ($\mathrm{z} \in (x \cdots y)_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow [\mathrm{x,z,y}] \in \mathrm{R}$)

A3408	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
G3409	$\mathrm{z} \in (x \cdots y)_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow [\mathrm{x,z,y}] \in \mathrm{R}$	
G3410	$\mathrm{z} \in (x \cdots y)_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow [\mathrm{x,z,y}] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{R}]$	1416, 3408
T3411	$\mathrm{z} \in (x \cdots y)_{\mathrm{R}} \Rightarrow [\mathrm{x,z,y}] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{R}]$	3402
G3412	$[\mathrm{x,z,y}] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{R}] \Rightarrow \mathrm{z} \in (x \cdots y)_{\mathrm{R}}$	3411
A3413	$[\mathrm{x,z,y}] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{R}]$	
G3414	$\mathrm{z} \in (x \cdots y)_{\mathrm{R}}$	
T3415*	$\mathrm{x} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{y} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{z} \in \mathbb{A}$	3413
G3416	$\mathrm{z} \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$	3402, 3413
T3417	$\mathcal{A}([\mathrm{x,z,y}]) \subseteq \mathcal{A}((\sqsupseteq)[\mathrm{R}])$	1245, 3413
T3418	$\mathcal{A}([\mathrm{x,z,y}]) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	1416, 3408, 3417
G3419	$\mathbb{T}$	0329, 3418

Unter Voraussetzung der Einfachheit der zugrundeliegenden Relation sind die Randelemente x und y des Intervalls $(x \cdots y)_{\mathrm{R}}$ nicht im Intervall enthalten. Damit ist die Bezeichnung als offenes Intervall in diesem Fall gerechtfertigt.

T3420 R ist einfach $\Rightarrow \mathrm{x} \notin (x \cdots y)_{\mathrm{R}} \wedge \mathrm{y} \notin (x \cdots y)_{\mathrm{R}}$

A3421	R ist einfach	
A3422	$\mathrm{x} \in (x \cdots y)_{\mathrm{R}} \vee \mathrm{y} \in (x \cdots y)_{\mathrm{R}}$	
T3423*	$\mathrm{x} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{y} \in \mathbb{A}$	3422
T3424	$[\mathrm{x,x,y}] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{R}] \vee [\mathrm{x,y,y}] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{R}]$	3402, 3422
T3425	$(\sqsupseteq)[\mathrm{R}]$ ist einfach	1534, 3421
T3426	$[\mathrm{x,x,y}]$ ist einfach $\vee$ $[\mathrm{x,y,y}]$ ist einfach	1279, 3425, 3424
T3427	$\mathbb{F}$	0379, 3426

Liegt zwischen zwei Elementen x und y ein weiteres Element, so sind x und y voneinander abhängig.

T3428 $\forall\, \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}),\, \mathrm{y} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}) \bullet (x \cdots y)_{\mathrm{R}} \neq \emptyset \Rightarrow (\mathrm{x,y}) \in (\mathrm{li\ R})$

VA3429	$\mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}),\, \mathrm{y} \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$	
A3430	$(x \cdots y)_{\mathrm{R}} \neq \emptyset$	
G3431	$(\mathrm{x,y}) \in (\mathrm{li\ R})$	
T3432*	$\mathrm{x} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{y} \in \mathbb{A}$	3429
VT3433	$\mathrm{z} \bullet \mathrm{z} \in (x \cdots y)_{\mathrm{R}}$	3430
T3434*	$\mathrm{z} \in \mathbb{A}$	3433
T3435	$[\mathrm{x,z,y}] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{R}]$	3402, 3433
VT3436	$\mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet [\mathrm{x,z,y}] \sqsubseteq \mathrm{w}$	3435
T3437	$[\mathrm{x,y}] \sqsubseteq [\mathrm{x,z,y}]$	0557
T3438	$[\mathrm{x,y}] \sqsubseteq \mathrm{w}$	0564, 3437, 3436
T3439	$[\mathrm{x,y}] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{R}]$	3438, 3436

G3440	$\mathbb{T}$	1719, 3439

Zwischen zwei gleichen oder unabhängigen Elementen liegen keine Elemente, wenn die Relation einfach ist.

T3441 R ist einfach $\wedge$ (x,y) $\in$ ($\underline{\text{co}}$ R) $\Rightarrow (x \cdots y)_{\mathrm{R}} = \emptyset$

A3442	R ist einfach	
A3443	(x,y) $\in$ ($\underline{\text{co}}$ R)	
G3444	$(x \cdots y)_{\mathrm{R}} = \emptyset$	
T3445	x $\in \mathcal{A}$(R) $\wedge$ y $\in \mathcal{A}$(R)	1943, 3443
T3446	(x,y) $\notin$ (li R)	1994, 3442, 3443
G3447	$\mathbb{T}$	3428, 3445, 3446

Für azyklische Ordnungen erhalten wir einige spezielle Eigenschaften, für deren Beweise insbesondere die Konsistenz und die Transitivität benötigt werden.

S3448

VA3449$*$ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

A3450 R ist eine azyklische Ordnung

Liegt z im Intervall $(x \cdots y)_{\mathrm{R}}$, so liegt x vor z und z vor y und natürlich auch x vor y.

T3451 z $\in (x \cdots y)_{\mathrm{R}} \Rightarrow$ x $<_{\mathrm{R}}$ z $\wedge$ z $<_{\mathrm{R}}$ y $\wedge$ x $<_{\mathrm{R}}$ y

A3452	z $\in (x \cdots y)_{\mathrm{R}}$	
G3453	x $<_{\mathrm{R}}$ z $\wedge$ z $<_{\mathrm{R}}$ y $\wedge$ x $<_{\mathrm{R}}$ y	
T3454$*$	x $\in \mathbb{A} \wedge$ y $\in \mathbb{A} \wedge$ z $\in \mathbb{A}$	3452
VT3455	[x,z,y] $\in$ ($\sqsupseteq$)[R]	3402, 3452
T3456	($\sqsupseteq$)[R] ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen	1444
T3457	[x,z] $\sqsubseteq$ [x,z,y] $\wedge$ [z,y] $\sqsubseteq$ [x,z,y] $\wedge$ [x,y] $\sqsubseteq$ [x,z,y]	0555, 0556, 0557
T3458	[x,z] $\in$ ($\sqsupseteq$)[R] $\wedge$ [z,y] $\in$ ($\sqsupseteq$)[R] $\wedge$ [x,y] $\in$ ($\sqsupseteq$)[R]	1315, 3456, 3455, 3457
G3459	$\mathbb{T}$	3327, 3458

T3460	z $\in (x \cdots y)_{\mathrm{R}} \Rightarrow$ (x,z) $\in$ (li R) $\wedge$ (z,y) $\in$ (li R) $\wedge$ (x,y) $\in$ (li R)	3451, 3389
T3461	$\forall$ x $\in \mathbb{A}$, y $\in \mathbb{A} \bullet$ ($\neg\exists$ z $\bullet$ x $<_{\mathrm{R}}$ z $\wedge$ z $<_{\mathrm{R}}$ y) $\Rightarrow (x \cdots y)_{\mathrm{R}} = \emptyset$	3451

Liegt umgekehrt x vor z und z vor y, so ist z im Intervall $(x \cdots y)_{\mathrm{e}}$nthalten. Zusammen mit 3451 haben wir gerade die bekannte Charakterisierung von Intervallen der binären Ordnung ($<_{\mathrm{R}}$).

T3462 x $<_{\mathrm{R}}$ z $\wedge$ z $<_{\mathrm{R}}$ y $\Rightarrow$ z $\in (x \cdots y)_{\mathrm{R}}$

A3463	x $<_{\mathrm{R}}$ z $\wedge$ z $<_{\mathrm{R}}$ y	
G3464	z $\in (x \cdots y)_{\mathrm{R}}$	
T3465$*$	x $\in \mathbb{A} \wedge$ y $\in \mathbb{A} \wedge$ z $\in \mathbb{A}$	3463
T3466	z $\in \mathcal{A}$(R)	3325, 3463
T3467	R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen	2726, 3450
G3468	[x,z,y] $\in$ R	3407, 3467
G3469	$\mathbb{T}$	3386, 3450, 3463

T3470	$(x \cdots y)_{\mathrm{R}} = \emptyset \Rightarrow \neg\exists$ z $\bullet$ x $<_{\mathrm{R}}$ z $\wedge$ z $<_{\mathrm{R}}$ y	3462

Liegt x vor y, so ist das Intervall $(y \cdots x)_{\mathrm{R}}$ leer. Sind x und y identisch oder unabhängig, so sind sogar beide Intervalle $(x \cdots y)_{\mathrm{R}}$ und $(y \cdots x)_{\mathrm{R}}$ leer.

T3471 x $<_{\mathrm{R}}$ y $\Rightarrow (y \cdots x)_{\mathrm{R}} = \emptyset$

A3472	x $<_{\mathrm{R}}$ y	
A3473	$(y \cdots x)_{\mathrm{R}} \neq \emptyset$	
T3474$*$	x $\in \mathbb{A} \wedge$ y $\in \mathbb{A}$	3472

T3475	$\mathrm{y} <_{\mathrm{R}} \mathrm{x}$	3451, 3473
T3476	$(<_{\mathrm{R}})$ ist eine strenge Ordnung	3399, 3450
T3477	$(<_{\mathrm{R}})$ ist asymmetrisch	0093, 3476
T3478	$\mathbb{F}$	0082, 3477, 3472, 3475

T3479 $(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in (\underline{\mathrm{co}}\ \mathrm{R}) \Rightarrow (x \cdots y)_{\mathrm{R}} = \emptyset \wedge (y \cdots x)_{\mathrm{R}} = \emptyset$

A3480	$(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in (\underline{\mathrm{co}}\ \mathrm{R})$	
A3481	$(x \cdots y)_{\mathrm{R}} \neq \emptyset \vee (y \cdots x)_{\mathrm{R}} \neq \emptyset$	
T3482$*$	$\mathrm{x} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{y} \in \mathbb{A}$	3480
T3483	$(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in (\mathrm{li}\ \mathrm{R}) \vee (\mathrm{y},\mathrm{x}) \in (\mathrm{li}\ \mathrm{R})$	3460, 3481
T3484	$(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in (\mathrm{li}\ \mathrm{R})$	0076, 1730, 3483
T3485	R ist einfach	2726, 3450
T3486	$\mathbb{F}$	1994, 3485, 3480, 3484

Betrachten wir die Intervalle $(x \cdots y)_{\mathrm{R}}$ und $(y \cdots x)_{\mathrm{R}}$, so ist mindestens eines von ihnen leer. Dieses Theorem drückt offenbar die Azyklizität mit Hilfe des Intervallbegriffs aus.

T3487 $\forall\ \mathrm{x} \in \mathbb{A},\ \mathrm{y} \in \mathbb{A} \bullet (x \cdots y)_{\mathrm{R}} = \emptyset \vee (y \cdots x)_{\mathrm{R}} = \emptyset$

VA3488$*$	$\mathrm{x} \in \mathbb{A},\ \mathrm{y} \in \mathbb{A}$	
A3489	$(x \cdots y)_{\mathrm{R}} \neq \emptyset \wedge (y \cdots x)_{\mathrm{R}} \neq \emptyset$	
T3490	$\mathrm{x} <_{\mathrm{R}} \mathrm{y}$	3451, 3489
T3491	$(y \cdots x)_{\mathrm{R}} = \emptyset$	3471, 3490
T3492	$\mathbb{F}$	3489, 3491

Haben wir ein Element a, das sowohl vom Anfang x als auch vom Ende y des Intervalls $(x \cdots y)_{\mathrm{R}}$ unabhängig ist, also $(\mathrm{a},\mathrm{x}) \in (\mathrm{co}\ \mathrm{R})$ und $(\mathrm{a},\mathrm{y}) \in (\mathrm{co}\ \mathrm{R})$, so ist das gesamte Intervall von a unabhängig.

T3493 $(\mathrm{a},\mathrm{x}) \in (\mathrm{co}\ \mathrm{R}) \wedge (\mathrm{a},\mathrm{y}) \in (\mathrm{co}\ \mathrm{R}) \Rightarrow \forall\ \mathrm{b} \in (x \cdots y)_{\mathrm{R}} \bullet (\mathrm{a},\mathrm{b}) \in (\mathrm{co}\ \mathrm{R})$

VA3494	$(\mathrm{a},\mathrm{x}) \in (\mathrm{co}\ \mathrm{R}) \wedge (\mathrm{a},\mathrm{y}) \in (\mathrm{co}\ \mathrm{R})$	
VA3495	$\mathrm{b} \in (x \cdots y)_{\mathrm{R}}$	
G3496	$(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in (\mathrm{co}\ \mathrm{R})$	
A3497	$(\mathrm{a},\mathrm{b}) \notin (\mathrm{co}\ \mathrm{R})$	
T3498$*$	$\mathrm{a} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{x} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{y} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{b} \in \mathbb{A}$	3494, 3495
T3499	$\mathrm{x} <_{\mathrm{R}} \mathrm{b} \wedge \mathrm{b} <_{\mathrm{R}} \mathrm{y}$	3451, 3495
T3500	$<_{\mathrm{R}}$ ist eine strenge Ordnung	3399, 3450
T3501	$<_{\mathrm{R}}$ ist transitiv	0092, 3500
T3502	$\mathrm{a} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}) \wedge \mathrm{b} \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$	1926, 3494, 3404, 3495
T3503	$(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$	1982, 3502, 3497
T3504	$\mathrm{a} = \mathrm{b} \vee (\mathrm{a},\mathrm{b}) \in (\mathrm{li}\ \mathrm{R})$	1827, 3503
T3505	$\mathrm{a} = \mathrm{b} \vee \mathrm{a} <_{\mathrm{R}} \mathrm{b} \vee \mathrm{b} <_{\mathrm{R}} \mathrm{a}$	3338, 3504
A3506	$\mathrm{a} = \mathrm{b}$	
T3507	R ist einfach	2726, 3450
T3508	$(\mathrm{b},\mathrm{x}) \in (\mathrm{li}\ \mathrm{R})$	3338, 3499
T3509	$(\mathrm{a},\mathrm{x}) \in (\mathrm{li}\ \mathrm{R})$	3506, 3508
T3510	$\mathbb{F}$	1985, 3509, 3494
A3511	$\mathrm{a} <_{\mathrm{R}} \mathrm{b}$	
T3512	$\mathrm{a} <_{\mathrm{R}} \mathrm{y}$	0084, 3501, 3511, 3499
T3513	$(\mathrm{a},\mathrm{y}) \in (\mathrm{li}\ \mathrm{R})$	3338, 3512
T3514	$\mathbb{F}$	1985, 3513, 3494
A3515	$\mathrm{b} <_{\mathrm{R}} \mathrm{a}$	
T3516	$\mathrm{x} <_{\mathrm{R}} \mathrm{a}$	0084, 3501, 3499, 3515
T3517	$(\mathrm{a},\mathrm{x}) \in (\mathrm{li}\ \mathrm{R})$	3338, 3516

T3518 $\mathbb{F}$ . . . 1985, 3517, 3494

Dieses Theorem, so einfach es erscheinen mag, stellt ein wesentliches Merkmal von azyklischen Ordnungen heraus: Unabhängigkeit zu den Randpunkten eines Intervalls überträgt sich auf das gesamte Intervall. Ein ähnliches Theorem ist mit dem hier eingeführten Intervallbegriff für (li R) nicht formulierbar. Azyklische Ordnungen brechen also (unter anderem) an dieser Stelle die Dualität zwischen (co R) und (li R).

5.11 Unmittelbare Nachfolger

Unsere Formalisierung der azyklischen Ordnungen als Mengen von Wörtern liefert uns auf natürliche Weise einen Begriff der unmittelbaren Nachfolger und damit auch einen Nachbarschaftsbegriff für die Elemente einer azyklischen Ordnung: Liegt ein Element x vor y, so liegt x unmittelbar vor y gdw. in keinem Wort ein zwischen ihnen liegendes Element auftaucht. Wir sagen auch: x und y folgen (in dieser Reihenfolge) unmittelbar aufeinander. x ist ein unmittelbarer Vorgänger von x. y ist ein unmittelbarer Nachfolger von x.

S3519

VA3520∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
D3521 $(\lessdot_R) := \{(x,y) \in (<_R) \bullet \neg\exists\, z \bullet [x,z,y] \in (\sqsupseteq)[R]\}$
T3522 $(\lessdot_R) \subseteq (<_R)$ . . . 3521
T3523∗ $(\lessdot_R) \in \mathcal{BR}(\mathcal{A}(R))$ . . . 3522, 3325
M3524∗ $x \lessdot_R y :\Leftrightarrow (x,y) \in (\lessdot_R)$

B3525

Die unmittelbare Nachfolgerrelation für die azyklische Ordnung $R = (\sqsupseteq)[\{[1,4,6], [2,4,6]\}]$ aus Beispiel 2728 ist $\lessdot_R = \{(1,4), (4,6), (2,4), (4,6)\}$.

Ist R einfach, so ist $<_R$ und damit auch $\lessdot_R$ irreflexiv. Ferner ist x unmittelbarer Vorgänger von y gdw. x vor y und im Intervall zwischen x und y kein weiteres Element liegt.

S3526

VA3527∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
T3528 R ist einfach $\Rightarrow$ $(\lessdot_R)$ ist irreflexiv . . . 0074, 3390, 3522
T3529 $x \lessdot_R y \Leftrightarrow x <_R y \wedge (x \cdots y)_R = \emptyset$

T3530 $x \lessdot_R y \Rightarrow x <_R y \wedge (x \cdots y)_R = \emptyset$
A3531 $x \lessdot_R y$
G3532 $x <_R y \wedge (x \cdots y)_R = \emptyset$
T3533∗ $x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A}$ . . . 3531
G3534 $(x \cdots y)_R = \emptyset$ . . . 3522, 3531
VT3535 $\neg\exists\, z \bullet [x,z,y] \in (\sqsupseteq)[R]$ . . . 3521, 3531
G3536 $\mathbb{T}$ . . . 3402, 3535
T3537 $x <_R y \wedge (x \cdots y)_R = \emptyset \Rightarrow x \lessdot_R y$
A3538 $x <_R y$
A3539 $(x \cdots y)_R = \emptyset$
G3540 $x \lessdot_R y$
A3541 $\neg\, x \lessdot_R y$
T3542∗ $x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A}$ . . . 3538
T3543 $z \bullet [x,z,y] \in (\sqsupseteq)[R]$ . . . 3521, 3538
T3544∗ $z \in \mathbb{A}$ . . . 3543
T3545 $\mathcal{A}([x,z,y]) \subseteq \mathcal{A}((\sqsupseteq)[R])$ . . . 1245, 3543
T3546 $\mathcal{A}([x,z,y]) \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 1496, 3545

T3547 $z \in \mathcal{A}(R)$ . . . 0329, 3546
T3548 $z \in (x \cdots y)_R$ . . . 3402, 3547, 3543
T3549 $\mathbb{F}$ . . . 3548, 3539

In einer azyklischen Ordnung läßt sich ($\lessdot_R$) auf die von strengen Ordnungen bekannte Weise durch ($<_R$) ausdrücken.

S3550
VA3551$*$ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A3552 R ist eine azyklische Ordnung
T3553 $x \lessdot_R y \Leftrightarrow x <_R y \land \neg\exists\, z \bullet x <_R z \land z <_R y$
T3554 $x \lessdot_R y \Rightarrow x <_R y \land \neg\exists\, z \bullet x <_R z \land z <_R y$
A3555 $x \lessdot_R y$
G3556 $x <_R y \land \neg\exists\, z \bullet x <_R z \land z <_R y$
T3557$*$ $x \in \mathbb{A} \land y \in \mathbb{A}$ . . . 3555
G3558 $x <_R y \land (x \cdots y)_R = \emptyset$ . . . 3470, 3552
G3559 $\mathbb{T}$ . . . 3529
T3560 $x <_R y \land (\neg\exists\, z \bullet x <_R z \land z <_R y) \Rightarrow x \lessdot_R y$
A3561 $x <_R y \land \neg\exists\, z \bullet x <_R z \land z <_R y$
G3562 $x \lessdot_R y$
T3563$*$ $x \in \mathbb{A} \land y \in \mathbb{A}$ . . . 3561
T3564 $x <_R y \land (x \cdots y)_R = \emptyset$ . . . 3461, 3552, 3561
G3565 $\mathbb{T}$ . . . 3529, 3564

5.12 Einschränkung der Wortlänge

Wie man schon vermuten könnte (aufgrund der Axiomatisierung der üblichen Ordnungen als binäre Relationen), ist eine azyklische Ordnung schon durch ihre Wörter bis zur Länge zwei eindeutig bestimmt. Man beachte, daß wir diese Aussage ableiten können, nicht jedoch wie bei den (üblichen) Ordnungen zur Definition verwendet haben.

S3566
VA3567$*$ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
T3568 R ist eine azyklische Ordnung $\land$ R$'$ ist eine azyklische Ordnung $\land$
$(R|2) = (R'|2) \Rightarrow R = R'$

Diese Beobachtung ist die Motivation für die Definition von azyklischen Ordnungsbasen im nächsten Abschnitt.

5.13 Azyklische Ordnungsbasen

Die oben angegebene Axiomatisierung der azyklischen Ordnungen ist zwar sehr intuitiv, andererseits jedoch nicht besonders ökonomisch, da durch die Forderung nach Vollständigkeit, jede Abhängigkeitsklique, sei sie auch noch so groß, durch ein Wort der Relation repräsentiert werden muß. Um dies zu vermeiden bietet sich die Verwendung des schwächeren Vollständigkeitsbegriffs an.

Nach Theorem 3568 sind schon Wörter der Länge zwei ausreichend, um azyklische Ordnungen eindeutig zu bestimmen. Für jede azyklische Ordnung können wir also eine Basis von maximal zweistelligen Wörtern finden, die die ursprüngliche Ordnung generiert.

S3569

VA3570$*$ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Zum einen fordern wir für die azyklische Ordnungsbasis, das sie nur Wörter bis zur Länge zwei enthalten darf. Zum anderen fordern wir statt der Vollständigkeit nur die schwächere 2-Vollständigkeit.

D3571 R ist eine azyklische Ordnungsbasis :$\Leftrightarrow$
$\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq 2 \wedge$
R ist einfach $\wedge$
R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist 2 -vollständig $\wedge$
R ist transitiv

Tatsächlich benötigen wir in Definition 3571 nicht einmal die 2 -Vollständigkeit, da sie nach 2372 für jede nichtleere teilwortabgeschlossene Relation gilt. Wir haben die 2 -Vollständigkeit jedoch trotzdem formal als Axiom erwähnt, um die spätere Analogie zu den zyklischen Ordnungen herauszustellen.

T3572 R ist eine azyklische Ordnungsbasis $\Leftrightarrow$
$\mathrm{R} \neq \emptyset \wedge$
$\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq 2 \wedge$
R ist einfach $\wedge$
R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist transitiv 3571, 2219, 2372

Umgekehrt ist die Teilwortabgeschlossenheit und 2 -Vollständigkeit mit Hilfe der 1 -Vollständigkeit ableitbar.

T3573 R ist eine azyklische Ordnungsbasis :$\Leftrightarrow$
$\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq 2 \wedge$
R ist einfach $\wedge$
R ist 1 -vollständig $\wedge$
R ist transitiv 3571, 2216, 2422, 2472

Vergleichen wir dies mit der Axiomatisierung von strengen Ordnungen (Einfachheit entspricht Irreflexivität), so haben wir zusätzlich die 1 -Vollständigkeit, die erzwingt, daß die einstelligen Wörter gerade die Grundmenge beschreiben, die bei strengen Ordnungen im allgemeinen nicht durch die binäre Relation repräsentiert wird. Bei (nichtstrengen) Ordnungen wird die Grundmenge gerade durch den reflexiven Anteil der binären Relation repräsentiert.

Ebenso wie eine azyklische Ordnung ist auch eine Basis konsistent.

T3574 R ist eine azyklische Ordnungsbasis $\Rightarrow$ R ist konsistent 3571, 2735

Wie man schon beim Vergleich der Definitionen für azyklische Ordnungen (2726) und für deren Basen (3571) vermuten kann, läßt sich aus einer azyklischen Ordnung R eine azyklische Ordnungsbasis R' durch Einschränkung der Wortlänge $\mathrm{R}' = (\mathrm{R}|2)$ gewinnen. Dies wird im folgenden ausführlich gezeigt, da wir die Zwischenresultate auch in späteren Kapiteln benötigen werden.

S3575

VA3576$*$ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ \mathrm{n} \in \mathbb{N}$

Die Einschränkung einer Relation liefert immer eine Teilrelation. Also bleibt die Einfachheit erhalten.

T3577 R ist einfach $\Rightarrow$ (R|n) ist einfach . . . 1280, 1267

Teilwortabgeschlossenheit wird durch die Einschränkung aufgrund von Theorem 0570 nicht zerstört.

T3578 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\Rightarrow$ (R|n) ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen

A3579	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
G3580	(R|n) ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
G3581	$\forall$ u,v $\bullet$ v $\in$ (R|n) $\wedge$ u $\sqsubseteq$ v $\Rightarrow$ u $\in$ (R|n)	1315
VA3582	u,v $\bullet$ v $\in$ (R|n)	
A3583	u $\sqsubseteq$ v	
G3584	u $\in$ (R|n)	
T3585	$\mathcal{L}$(R|n) $\leq$ n	1268
T3586	$\mathcal{L}$(v) $\leq$ n	1262, 3585, 3582
T3587	$\mathcal{L}$(u) $\leq$ $\mathcal{L}$(v)	0570, 3583
T3588	$\mathcal{L}$(u) $\leq$ n	3587, 3586
T3589	v $\in$ R	1267, 3582
T3590	u $\in$ R	1315, 3579, 3589, 3583
G3591	T	1265, 3590, 3588

Bei teilwortabgeschlossenen Relationen R bleibt das Alphabet bei Einschränkung (R|n) erhalten, sofern wir den Fall n = 0 ausschließen, in dem sich immer das leere Alphabet ergibt.

T3592 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ $1 \leq$ n $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$(R|n) = $\mathcal{A}$(R)

T3593	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
A3594	1 $\leq$ n	
G3595	$\mathcal{A}$(R) $\subseteq$ $\mathcal{A}$(R|n)	1254
G3596	$\forall$ x $\in$ $\mathcal{A}$(R) $\bullet$ x $\in$ $\mathcal{A}$(R|n)	
VA3597	x $\in$ $\mathcal{A}$(R)	
G3598	x $\in$ $\mathcal{A}$(R|n)	
T3599$*$	x $\in$ $\mathbb{A}$	3597
T3600	[x] $\in$ R	1325, 3593, 3597
T3601	$\mathcal{L}$([x]) $\leq$ n	0307, 3594
T3602	[x] $\in$ (R|n)	1265, 3600, 3601
T3603	x $\in$ $\mathcal{A}$([x])	0327
G3604	T	1243, 3603, 3602

Die binäre Abhängigkeitsrelation bleibt bei Einschränkung (R|n) von teilwortabgeschlossenen Relationen R erhalten, wenn die zweistelligen Wörter erhalten bleiben, also insbesondere dann, wenn $2 \leq$ n gilt.

T3605 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ $2 \leq$ n $\Rightarrow$ (li (R|n)) = (li R)

T3606	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
A3607	2 $\leq$ n	
G3608	(li (R|n)) = (li R)	
T3609	(R|n) $\subseteq$ R	1267
T3610	(li (R|n)) $\subseteq$ (li R)	1810, 3609
G3611	(li R) $\subseteq$ (li (R|n))	3610
G3612	$\forall$ (x,y) $\in$ (li R) $\bullet$ (x,y) $\in$ (li (R|n))	
VA3613	x,y $\bullet$ (x,y) $\in$ (li R)	
G3614	(x,y) $\in$ (li (R|n))	
T3615$*$	x $\in$ $\mathbb{A}$ $\wedge$ y $\in$ $\mathbb{A}$	3613
T3616	[x,y] $\in$ R $\vee$ [y,x] $\in$ R	1766, 3606, 3613
T3617	$\mathcal{L}$([x,y]) $\leq$ n $\wedge$ $\mathcal{L}$([y,x]) $\leq$ n	0308, 3607
T3618	[x,y] $\in$ (R|n) $\vee$ [y,x] $\in$ (R|n)	1265, 3616, 3617
T3619	(R|n) ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	3578, 3606

G3620	$\mathbb{T}$	1766, 3619, 3618

Kombinieren wir die vorigen beiden Feststellungen, so erhalten wir die Invarianz der reflexiven Abhängigkeitsrelation unter den genannten Bedingungen.

T3621 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge\ 2 \leq \mathrm{n} \Rightarrow (\underline{\mathrm{li}}\ (\mathrm{R}|\mathrm{n})) = (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ 1819, 3592, 3605

Totalität von R läßt sich durch $(\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ ausdrücken. Sie bleibt also auch unter diesen Bedingungen erhalten.

T3622 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge\ 2 \leq \mathrm{n} \wedge$ R ist total $\Rightarrow (\mathrm{R}|\mathrm{n})$ ist total

A3623	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
A3624	$2 \leq \mathrm{n}$	
A3625	R ist total	
G3626	$(\mathrm{R}|\mathrm{n})$ ist total	
T3627	$\mathcal{A}(\mathrm{R}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen	2017, 3625
T3628	$\mathcal{A}(\mathrm{R}|\mathrm{n}) = \mathcal{A}(\mathrm{R})$	3592, 3623, 3624
T3629	$(\underline{\mathrm{li}}\ (\mathrm{R}|\mathrm{n})) = (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$	3621, 3623, 3624
T3630	$\mathcal{A}(\mathrm{R}|\mathrm{n}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ (\mathrm{R}|\mathrm{n}))$ -Kliquen	3627, 3628, 3629
G3631	$\mathbb{T}$	2017, 3630

Transitivität bleibt in jedem Fall erhalten, da bei Einschränkung alle zweistelligen Wörter entweder unverändert bleiben oder gelöscht werden.

T3632 R ist transitiv $\Rightarrow (\mathrm{R}|\mathrm{n})$ ist transitiv

A3633	R ist transitiv	
G3634	$(\mathrm{R}|\mathrm{n})$ ist transitiv	
G3635	$\forall\ \mathrm{a,b,c} \bullet [\mathrm{a,b}] \in (\mathrm{R}|\mathrm{n}) \wedge [\mathrm{b,c}] \in (\mathrm{R}|\mathrm{n}) \Rightarrow [\mathrm{a,c}] \in (\mathrm{R}|\mathrm{n})$	2725, 3633
VA3636	$\mathrm{a,b,c} \bullet [\mathrm{a,b}] \in (\mathrm{R}|\mathrm{n}) \wedge [\mathrm{b,c}] \in (\mathrm{R}|\mathrm{n})$	
G3637	$[\mathrm{a,c}] \in (\mathrm{R}|\mathrm{n})$	
T3638$*$	$\mathrm{a} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{b} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{c} \in \mathbb{A}$	3636
T3639	$\mathcal{L}(\mathrm{R}|\mathrm{n}) \leq \mathrm{n}$	1268
T3640$*$	$\downarrow(\mathcal{L}(\mathrm{R}|\mathrm{n}))$	3639
T3641	$\forall\ \mathrm{w} \in (\mathrm{R}|\mathrm{n}) \bullet \mathcal{L}(\mathrm{w}) \leq \mathcal{L}(\mathrm{R}|\mathrm{n})$	1261
T3642	$\mathcal{L}([\mathrm{a,b}]) \leq \mathcal{L}(\mathrm{R}|\mathrm{n})$	3641, 3636
T3643	$2 \leq \mathrm{n}$	0308, 3642, 3639
T3644	$[\mathrm{a,b}] \in \mathrm{R} \wedge [\mathrm{b,c}] \in \mathrm{R}$	1275, 3643, 3636
T3645	$[\mathrm{a,c}] \in \mathrm{R}$	2725, 3633, 3644
G3646	$\mathbb{T}$	1275, 3643, 3645

Für die konkrete Einschränkung $(\mathrm{R}|2)$ auf Wörter bis zur Länge zwei erhalten wir die schon angekündigten Spezialisierungen.

S3647

VA3648$*$ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

A3649 R ist eine azyklische Ordnung

Alphabet und Abhängigkeiten bleiben unverändert.

T3650	$\mathcal{A}(\mathrm{R}|2) = \mathcal{A}(\mathrm{R})$	2726, 3649, 3592
T3651	$(\mathrm{li}\ (\mathrm{R}|2)) = (\mathrm{li}\ \mathrm{R})$	2726, 3649, 3605
T3652	$(\underline{\mathrm{li}}\ (\mathrm{R}|2)) = (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$	2726, 3649, 3621

Die Einschränkung einer azyklischen Ordnung auf Wörter bis zur Länge zwei liefert immer eine azyklische Ordnungsbasis.

T3653 [] $\in$ (R|n) 2726, 3649, 2228, 1273
T3654 (R|2) ist eine azyklische Ordnungsbasis 3572, 2726, 3649, 3653, 1268, 3577, 3578, 3632
T3655 R ist total $\Rightarrow$ (R|2) ist total 2726, 3649, 3622

5.14 Eindeutigkeit

Wie man von einer azyklischen Ordnung zu einer Basis gelangt haben wir im vorigen Abschnitt geklärt. Das folgende Theorem garantiert nun für eine beliebige azyklische Ordnungsbasis die Existenz einer eindeutigen azyklischen Ordnung, die eine Erweiterung der Basis darstellt und gleichzeitig Alphabet und Abhängigkeiten erhält.

S3656

VA3657∗ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A3658 R ist eine azyklische Ordnungsbasis
T3659 $\exists!$ R$' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathcal{A}(\mathrm{R}) = \mathcal{A}(\mathrm{R}') \wedge$ (li R) = (li R$'$) $\wedge$
R $\subseteq$ R$' \wedge$ R$'$ ist eine azyklische Ordnung

B3660

Als Basis der azyklischen Ordnung R = ($\sqsupseteq$)[{[1,4,6], [2,4,6]}] aus Beispiel 2728 ergibt sich (R|2) = {[1,4], [4,6], [1,6], [1], [4], [6], [2,4], [2,6], [2], []}. Dies ist tatsächlich eine azyklische Ordnungsbasis nach 3571. Im Einklang mit 3650 und 3651 gilt $\mathcal{A}$(R|2) = {1,2,4,6} und (li (R|2)) = $\updownarrow${(1,4), (4,6), (1,6), (2,4), (2,6)}.

Um diese Basis nach 3659 wieder zu einer azyklischen Ordnung R$'$ mit (R|2) $\subseteq$ R$'$ und gleicher Abhängigkeitsrelation zu erweitern, argumentieren wir wie folgt: {1,4,6} und {2,4,6} sind Abhängigkeitskliquen von R und damit auch von R$'$. R$'$ ist nach Definition 2726 vollständig, also gibt es Wörter u $\in$ R$'$ und v $\in$ R$'$, die diese Kliquen repräsentieren, d.h. $\mathcal{A}$(u) = {1,4,6} und $\mathcal{A}$(v) = {2,4,6}. Nach Definition 2726 ist u einfach, d.h. es bleiben für u folgende Varianten: [1,4,6], [4,6,1], [6,1,4], [6,4,1], [1,6,4], [4,1,6]. Jetzt nutzen wie die Konsistenz von R$'$ nach Theorem 2760 aus: Von diesen Wörtern ist nur das erste [1,4,6] konsistent mit allen Wörtern aus (R|2). Wir nehmen also u = [1,4,6] zu R$'$ hinzu. Auf ähnliche Weise stellen wir v = [2,4,6] fest und fügen es ebenfalls zu R$'$ hinzu. Nun erhalten wir wieder R$'$ = R die azyklische Ordnung, von der wir die Basis gebildet haben. Theorem 3659 garantiert, daß eine solche Erweiterung immer möglich ist.

5.15 Bezug zu binären Ordnungen

Im folgenden wird noch kurz der offensichtliche Isomorphismus zwischen den Basen von azyklischen Ordnungen als verallgemeinerte Relationen und den (binären) Ordnungen beschrieben.

S3661

Zum einen haben wir die Menge der Ordnungen in Form von Paaren:

D3662 O := {P $\in \mathcal{BR}(\mathbb{A}) \bullet$ P ist eine Ordnung}

Zum anderen haben wir die Menge der Basen von azyklischen Ordnungen als (verallgemeinerte) Relationen:

D3663 B := {R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet$ R ist eine azyklische Ordnungsbasis}

Die folgende Funktionen dienen dem Wechsel zwischen diesen beiden Repräsentationen:

D3664 $F := \lambda\ P \in O \bullet \{[]\} \cup \{[x] \bullet x \in \mathcal{F}(P)\} \cup \{[x,y] \bullet (x,y) \in P \wedge x \neq y\}$
D3665 $G := \lambda\ R \in B \bullet \{(x,x) \bullet [x] \in R\} \cup \{(x,y) \bullet [x,y] \in R\}$
T3666 $G \circ F = \mathcal{ID}(O)$
T3667 $F \circ G = \mathcal{ID}(B)$
T3668 F ist eine bijektive Funktion von O auf B

Damit ist klar, daß es sich bei einer azyklischen Ordnung R nur um eine andere Repräsentation einer Ordnung P handelt. Umgekehrt bestimmt eine Ordnung P eine azyklische Ordnungsbasis, die sich eindeutig zu einer azyklischen Ordnung R erweitern läßt. Das Alphabet $\mathcal{A}(R)$ der Relation ist gerade die Grundmenge $\mathcal{F}(P)$ der Ordnung. Die strenge Ordnung $(<_R)$ ist natürlich der irreflexive Teil der Ordnungrelation P. $(\lessdot_R)$ ist die bekannte unmittelbare Nachfolgerrelation der Ordnung P. Auch (li R) $= <_R \cup {<_R}^{-1}$, $(\underline{\text{li}}\ R) = (\text{li}\ R) \cup \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))$, $(\text{co}\ R) = \mathcal{A}(R)^2 - (\underline{\text{li}}\ R)$ und $(\underline{\text{co}}\ R) = (\text{co}\ R) \cup \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))$ ergeben sich wie üblich aus der Ordnung P.

Dieser Wechsel der Repräsentation selbst ist mathematisch nicht besonders interessant, denn es gibt unendlich viele andere, unkonventionelle Repräsentationen für Ordnungen. In Zusammenhang mit der Axiomatisierung von zyklischen Ordnungen werden wir jedoch sehen, daß sich gerade die gewählte Repräsentation besonders für den Übergang zu zyklischen Ordnungen eignet.

5.16 Globale Orientiertheit

Eine azyklische Ordnung wollen wir als global orientiert bezeichnen gdw. sie zu einer totalen, azyklischen Ordnung erweiterbar ist. Von dieser Erweiterung können wir, sofern sie existiert, natürlich nicht erwarten, daß sie eindeutig ist.

S3669
VA3670∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
D3671 R ist global orientiert :⇔
$\exists\ R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet R \subseteq R' \wedge R'$ ist eine totale, azyklische Ordnung
T3672 R ist eine azyklische Ordnung ⇒ R ist global orientiert

Nach dem vorigen Theorem, das für Ordnungen (in Form von binären Relationen) als Szpilrajns Theorem bekannt ist (siehe *Szpilrajn 1990*), läßt sich jede azyklische Ordnung zu einer totalen, azyklischen Ordnung erweitern.

Kapitel 6

Totale, zyklische Ordnungen

Azyklische Ordnungen waren uns wohlbekannt. Wir haben sie nur etwas ungewöhnlich repräsentiert. Von zyklischen Ordnungen haben wir jedoch höchstens eine vage Vorstellung. Wie sollen wir sie also formalisieren ? Wir begnügen uns zunächst mit speziellen zyklischen Ordnungen, den totalen, von denen wir eine relativ klare Vorstellung besitzen: Die Elemente sollen alle auf einem orientierten Kreis angeordnet sein, wobei die relative Position der Elemente untereinander eindeutig festgelegt ist. Anschaulich sollte es sich um Strukturen handeln wie in Abb. 6.1, Abb. 6.2, Abb. 6.3 und Abb. 6.4 dargestellt. Man beachte, daß jeder Kreis eine Orientierung hat, die durch einen Pfeil angegeben ist.

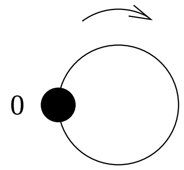


Abbildung 6.1: Eine einelementige, totale, zyklische Ordnung

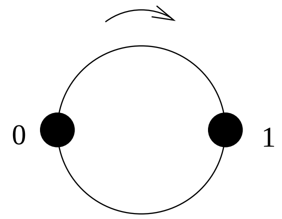


Abbildung 6.2: Eine zweielementige, totale, zyklische Ordnung

Um eine Axiomatisierung zu finden, beginnen wir wieder mit einer Interpretation.

6.1 Sequentielle Systeme

Wir verwenden den Systembegriff aus dem vorigen Kapitel. Da wir totale, zyklische Ordnungen formalisieren wollen, betrachten wir jedoch nicht die Klasse der azyklischen Systeme, sondern die im folgenden definierte Klasse der sequentiellen, zyklischen Systeme.

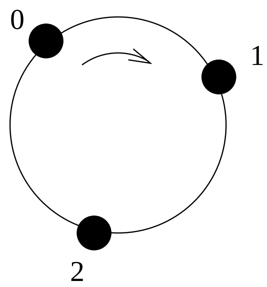


Abbildung 6.3: Eine dreielementige, totale, zyklische Ordnung

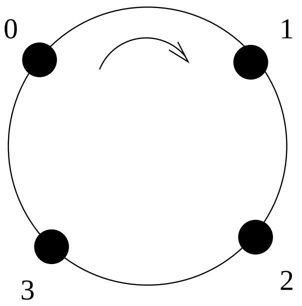


Abbildung 6.4: Eine vierelementige, totale, zyklische Ordnung

Ein zyklisches System ist ein System, in dem zu jedem Zeitpunkt jedes Ereignis schon in der Vergangenheit stattgefunden haben könnte und auch in der Zukunft wieder stattfinden kann. Eine direkte Konsequenz ist, daß Abläufe sowohl unendlich weit in die Vergangenheit wie auch unendlich weit die Zukunft reichen, da Abläufe nach Definition maximal sind.

Ein sequentielles, zyklisches System ist ein zyklisches System in dem je zwei verschiedene Ereignisse immer streng alternierend stattfinden. Durch diese Definition wird ausgeschlossen, daß zwei Ereignisse in einem Ablauf ungeordnet sind oder sich, nachdem die beiden Ereignisse nacheinander vorkamen, beim wiederholten Stattfinden die Reihenfolge verändert.

In diesem Kapitel verstehen wir unter einem System immer ein sequentielles, zyklisches System. Wieder kann es sich um gerichtete oder nichtgerichtete Systeme handeln. Die Forderung nach Sequentialität werden wir erst im nächsten Kapitel aufgeben.

B3673

In Abb. 6.5 ist ein System als Netzsystem dargestellt. Bis auf eine Ausnahme sind alle Transitionen mit Ereignissen beschriftet. Bei der Ausnahme handelt es sich um eine unsichtbare Transition. Das System ist zyklisch, da in jeder Markierung der Fallklasse jede Transition sowohl rückwärts als auch vorwärts wieder aktivierbar ist. Da Abläufe immer maximal sind, sind sie sowohl vorwärts als auch rückwärts unendlich. Das System ist sequentiell (bzgl. der Ereignisse), da zwei verschiedene Ereignisse immer streng alternierend stattfinden. Direkt nach dem Ereignis 0 kann nur das Ereignis 1 stattfinden. Nach 1 findet 2 statt, danach 3 und danach 4. Schließlich ist wieder 0 aktiviert und der Zyklus wiederholt sich. Man beachte, daß das System intern Nebenläufigkeit und Konflikt aufweist, diese jedoch nicht in Form von nebenläufigen Ereignissen nach außen sichtbar sind.

Unser Ziel ist es wieder, einen invarianten Teil des Systemverhaltens durch eine geordnete Menge von Ereignissen zu beschreiben. Bei azyklischen Systemen haben wir die folgende Invariante zur Gewin-

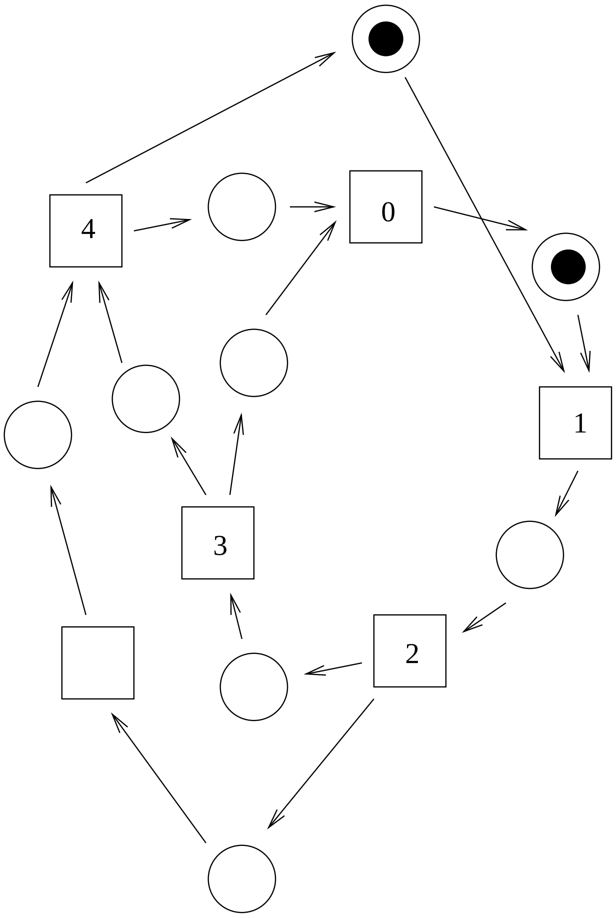


Abbildung 6.5: Ein sequentielles, zyklisches System

nung der zyklischen Ordnung herangezogen: Für eine endliche Ereignismenge finden alle Ereignisse genau einmal in einer eindeutig festgelegten Reihenfolge statt. Für zyklische Systeme, in denen sich alle Ereignisse wiederholen können, gilt diese Invariante nie und ist damit uninteressant. Deshalb betrachten wir nun eine leicht modifizierte Form dieser Invarianten: Für eine Ereignismenge wiederholen sich alle Ereignisse immer in einer eindeutig festgelegten Reihenfolge, nachdem jedes Ereignis genau einmal stattfand.

Wir definieren wieder eine (verallgemeinerte) Relation, die das invariante Verhalten der genannten Art repräsentiert: Ein einfaches Wort w bezeichnen wir als Kausalzyklus gdw. sich die Ereignisse $\mathcal{A}$(w) genau in der eindeutigen, durch w angegebenen (zyklischen) Reihenfolge (sowohl in der Vergangenheit als auch in der Zukunft) permanent wiederholen. Alle Kausalzyklen fassen wir zu einer (verallgemeinerten) Relation R zusammen, die wir die totale, zyklische Ordnung der Ereignisse nennen.

Wir können einen Kausalzyklus w auch als eine (für das System) charakteristische (zyklische) Beobachtung der Ereignismenge $\mathcal{A}$(w) aufassen. Die Bezeichnung ist gerechtfertigt, da keine von der eindeutigen Reihenfolge w abweichenden Beobachtung möglich sind, es sich also um eine Eigenschaft des Systems und nicht der Beobachtung handelt. Man erhält Kausalketten also indem man nacheinander jede Ereignismenge beobachtet und für jedes einfache Wort, das alle diese Ereignisse enthält, überprüft, ob die Ereignisse in jedem Ablauf in dieser zyklischen Reihenfolge beobachtet werden.

B3674

Das Netzsystem in Abb. 6.5 liefert die Kausalzyklen $R = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2,3,4]\}]$. Andere Kausalzyklen gibt es nicht.

Einige relevante von dem konkreten System unabhängige Eigenschaften der totalen, zyklischen Ordnung R werden wir uns nun überlegen.

- Die Relation R ist einfach, da jeder Kausalzyklus nach Definition einfach ist.
- Die Relation R ist teilwortabgeschlossen. Dies gilt ganz analog zur Teilwortabgeschlossenheit der azyklischen Ordnungen: Haben wir einen Kausalzyklus $w \in R$ so finden in jedem Ablauf die Ereignisse $\mathcal{A}(w)$ in der zyklischen Reihenfolge w statt. Beobachten wir für ein Teilwort u von w die Ereignisse $\mathcal{A}(u)$ so finden die Ereignisse aus $\mathcal{A}(u)$ natürlich auch in der durch w gegebenen zyklischen Reihenfolge statt. Da w einfach ist, erhalten wir u aus w gerade indem wir die nicht in $\mathcal{A}(u)$ enthaltenen Ereignisse ignorieren. Somit ist u gerade die zyklische Reihenfolge in der die Ereignisse aus $\mathcal{A}(u)$ stattfinden. u ist einfach, da w einfach ist. Also ist u ein Kausalzyklus.
- Die Relation R ist rotationsabgeschlossen, d.h. für jedes Wort der Relation ist auch jedes rotierte Wort in der Relation: Haben wir einen Kausalzyklus, so erhalten wir durch zyklische Vertauschung seiner Ereignisse wieder einen Kausalzyklus, da die permanente Wiederholung der Ereignisse den gleichen (beidseitig unendlichen) Ablauf ergibt.
- Das Alphabet $\mathcal{A}(R)$, das wir wieder als verläßliche Ereignismenge bezeichnen wollen, enthält genau die Ereignisse, die sich (sowohl in der Vergangenheit als auch in der Zukunft) permanent wiederholen: Wiederholt sich ein Ereignis x permanent, so haben wir den einstelligen Kausalzyklus $[x] \in R$ und somit $x \in \mathcal{A}(R)$. Für jedes $x \in \mathcal{A}(R)$ gilt andererseits, daß es in einem Kausalzyklus $w \in R$ enthalten ist und sich somit $x \in \mathcal{A}(w)$ wie alle anderen Ereignisse in $\mathcal{A}(w)$ permanent wiederholt.
- Aus der Relation R können wir eine (ungerichtete) Kausalrelation (li R) gewinnen. Zwei Ereignisse sind voneinander kausal abhängig gdw. sie in einem Kausalzyklus nacheinander vorkommen. Dies bedeutet aber gerade, daß die Ereignisse immer streng alternierend stattfinden und somit das Auslösen des einen Ereignis Voraussetzung für das andere Ereignis ist, was den Begriff der Kausalität rechtfertigt.
- Die Relation ist total, d.h. für zwei verläßliche Ereignisse gibt es immer einen Kausalzyklus, der sie enthält: Seien x und y Ereignisse aus $\mathcal{A}(R)$. Es gibt auf jeden Fall ein Wort $w \in R$ mit $x \in R$. Sind x und y identisch, so gilt auch $y \in w$ und w ist der gesuchte Kausalzyklus. Sind x und y verschieden, so finden sie, da es sich um ein zyklisch-sequentielles System handelt, immer streng alternierend statt. Das heißt, [x,y] ist ein Kausalzyklus, der x und y enthält. Die Tatsache, daß die Relation total ist, bedeutet natürlich, daß je zwei verläßliche Ereignisse aus $\mathcal{A}(R)$ kausal abhängig sind. Diese Eigenschaft werden wir jedoch absichtlich im folgenden nicht verwenden, um die Ergebnisse später auf nichtsequentielle, zyklische Systeme übertragen zu können.
- Natürlich können wir wie bei azyklischen Ordnungen den reflexiven Abschluß der Kausalrelation (li R) bzgl. der verläßlichen Ereignismenge $\mathcal{A}(R)$, also ($\underline{\text{li}}$ R) definieren. Damit können wir die Kausalkliquen ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen bilden, die Mengen von verläßlichen und vollständig voneinander abhängigen Ereignissen darstellen.
- Die Relation R ist vollständig, d.h. jede endliche Kausalklique wird durch einen Kausalzyklus repräsentiert, der alle Ereignisse der Klique enthält. Die leere Klique wird durch den Kausalzyklus [] repräsentiert. Ist die Kausalklique nichtleer, so wählen wir daraus ein Ereignis x. Da x ein verläßliches Ereignis, d.h. $x \in \mathcal{A}(R)$, ist, wiederholt sich x permanent. Zwischen zwei (aufeinanderfolgen) Vorkommen von x finden alle andere Ereignisse der Klique genau einmal statt. Gäbe es ein anderes Ereignis y der Klique, daß nicht oder mehrfach stattfindet, so ist dies ein Widerspruch zur Kausalität zwischen x und y, die strenges Alternieren dieser beiden Ereignisse fordert. Um einen Kausalzyklus der Form [x : w] bilden zu können, bleibt noch zu prüfen, ob die zyklische Reihenfolge der Ereignisse aus der Klique eindeutig ist. Hierzu reicht es aus zu

zeigen, daß zwischen zwei Vorkommen von x die anderen Ereignisse der Klique in einer eindeutigen Reihenfolge stattfinden. Gäbe es zwei verschiedene Ereignisse y und z die nicht in einer eindeutigen Reihenfolge stattfinden, so können sie, da sie aufgrund der Kausalität alternieren, in der Reihenfolge (y,z) oder (z,y) zwischen zwei Vorkommen von x stattfinden. Verändert sich jedoch die Reihenfolge nach irgendeinem Vorkommen von x von (y,z) auf (z,y) oder umgekehrt, so haben wir einen Widerspruch zum strengen Alternieren zwischen y und z. Insgesamt existiert also ein Kausalzyklus der Form [x : w], in dem nach x alle anderen Ereignisse der Klique in einer eindeutigen Reihenfolge stattfinden. Da sich x permanent wiederholt und dazwischen keine Ereignisse der Klique mehrfach stattfinden, wiederholen sich die Ereignisse der Klique in einer eindeutigen, zyklischen Reihenfolge, die als einfaches Wort darstellbar ist. Dieses Wort ist also der gesuchte Kausalzyklus, der die Kausalklique repräsentiert.

- Schließlich besitzt unsere Relation R noch die recht anschauliche Eigenschaft der Konsistenz modulo Rotation, d.h. je zwei Kausalzyklen, die evtl. verschiedene Ereignismengen abdecken, sollen miteinander konsistent modulo Rotation sein: Haben wir zwei Kausalzyklen u und v, so finden die Ereignisse aus $\mathcal{A}$(u) bzw. $\mathcal{A}$(v) immer in der durch u bzw. v festgelegten zyklischen Reihenfolge statt. Betrachten wir die Ereignisse von $\mathcal{A}$(v) in u und die Ereignisse von $\mathcal{A}$(u) in v, dann soll sich die Reihenfolge höchstens durch Rotation unterscheiden. Der Grund ist natürlich, daß verschiedene Kausalzyklen sich in der zyklischen Reihenfolge der Ereignisse nicht widersprechen können, da sie unabhängig von der aktuell betrachteten Ereignismenge für alle Abläufe die gleiche ist.

B3675

Die Relation R aus dem vorigen Beispiel 3674 ist eine totale, zyklische Ordnung. Einfachheit, Teilwort- und Rotationsabgeschlossenheit sind offensichtlich. Die verläßlichen Ereignisse sind $\mathcal{A}$(R) = {0,1,2,3,4}. Jedes Paar dieser Ereignisse ist in einem Wort gemeinsam enthalten. Damit ist R total. Als ungerichtete Kausalrelation ergibt sich (li R) = $\updownarrow${(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4) } und die Kausalkliquen sind ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen = $\mathcal{P}$({0,1,2,3,4}). Jede Kausalklique ist durch ein Wort repräsentiert: {0,1,2,3,4} durch [0,1,2,3,4], {1,2,4} durch [1,2,4], usw. Damit ist R vollständig. Da alle Wörter der Relation rotierte Teilwörter von [0,1,2,3,4] sind, ist die Relation nach Theorem 1627 auch konsistent modulo Rotation.

Damit haben wir eine Reihe von Eigenschaften der totalen, zyklischen Ordnung (wieder informal und intuitiv) abgeleitet: Einfachheit, Teilwortabgeschlossenheit, Rotationsabgeschlossenheit, Totalität, Vollständigkeit und Konsistenz modulo Rotation. Genau diese Eigenschaften werden die Basis für die Axiomatisierung bilden. Von anderen Eigenschaften, die ein physikalisch realisiertes System besitzt, werden wir wieder abstrahieren. Insbesondere fordern wir nicht die Endlichkeit der Menge der Ereignisse oder die Endlichkeit der Relation.

6.2 Darstellung

Da es sich bei totalen, zyklischen Ordnungen um einfache, teilwortabgeschlossene Relationen handelt, könnten wir die Darstellung aus dem vorigen Kapitel beibehalten.

B3676

Aus den drei Kanten in Abb. 6.6 lesen wir die Relation R = ($\sqsupseteq$)[{[0,1,2], [1,2,0], [2,0,1]}] ab. Die Relation ist natürlich einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen. Daß es sich hier tatsächlich um eine totale, zyklische Ordnung handelt, werden wir uns noch in einem der folgenden Beispiele überlegen.

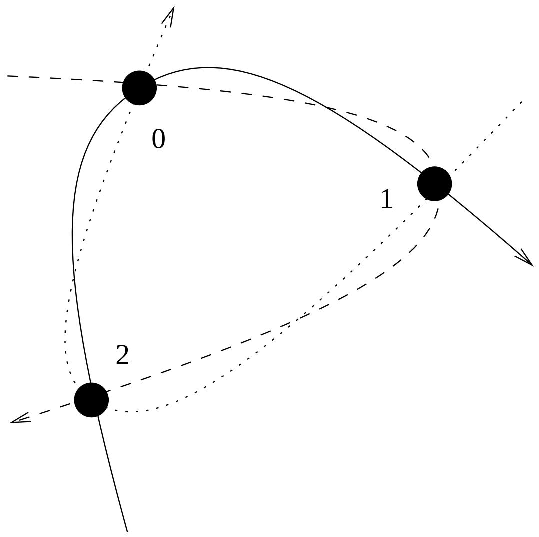


Abbildung 6.6: Eine Darstellung mit drei Kanten

Wir können die Darstellung unter Ausnutzung der Rotationsabgeschlossenheit noch kompakter gestalten. Kreise, d.h. geschlossene Kanten, kommen aufgrund der Einfachheit nicht vor. Deshalb können wir diese bei einfachen Relationen für andere Zwecke verwenden. Wir müssen nicht für zwei rotationsäquivalente Wörter zwei verschiedene Kanten einzeichnen, wie es im obigen Beispiel der Fall war, sondern verwenden die folgende Konvention: Wenn wir einen Kreis durchlaufen, notieren wir uns einige der durchlaufenen Elemente in der entsprechenden Reihenfolge als Wort, brechen aber sofort ab, wenn wir wieder auf das erste Element treffen, so daß wir insgesamt ein einfaches Wort erhalten. Da wir an jedem Element des Kreises beginnen können, erhalten wir auf diese Weise auch alle rotationsäquivalenten Wörter.

Jede Darstellung dieser Art, in der alle Kanten geschlossen sind, liefert klarerweise eine einfache, teilwortabgeschlossene und rotationsabgeschlossene Relation. Die Relation muß jedoch weder total, vollständig noch konsistent modulo Rotation sein. Besteht die Darstellung jedoch nur aus einem Kreis mit einer beliebigen Zahl von Elementen, so sind auch diese Eigenschaften erfüllt, und es handelt sich um eine totale, zyklische Ordnung. Wir werden auf diesen Sachverhalt bei endlichen, totalen, zyklischen Ordnungen noch ausführlich eingehen. Insbesondere werden wir sehen, daß jede endliche, totale, zyklische Ordnung auf diese Weise darstellbar ist.

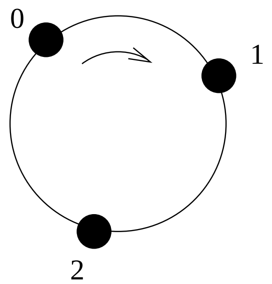


Abbildung 6.7: Eine Darstellung mit einem Kreis

In Abb. 6.7 ist ein im Uhrzeigersinn orientierter Kreis zu sehen. Wir lesen die Relation R $= (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2]\}]$ ab, also die gleiche Relation wie im vorigen Beispiel 3676.

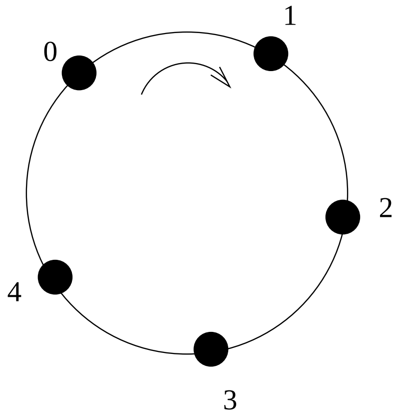


Abbildung 6.8: Die totale, zyklische Ordnung des Systems aus Abb. 6.5

B3678

Die totale, zyklische Ordnung des sequentiellen, zyklischen Systems aus Beispiel 3674 ist in Abb. 6.8 zu sehen.

6.3 Definition

Wir fassen nun die eingangs motivierten Axiome zu einer formalen Definition zusammen.

S3679

VA3680$*$ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Man vergleiche die folgende Definition mit der Charakterisierung 2836 von totalen, azyklischen Ordnungen. Wir fordern zusätzlich die Rotationsabgeschlossenheit. Um einen Widerspruch zu vermeiden, müssen wir zwangsläufig die Konsistenz zur Konsistenz modulo Rotation abschwächen. Ein Transitivitätsaxiom ist ebenso wie in Charakterisierung 2836 nicht erforderlich.

D3681 R ist eine totale, zyklische Ordnung $:\Leftrightarrow$
R ist einfach $\wedge$
R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist total $\wedge$
R ist vollständig $\wedge$
R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$

Um mit dieser Definition vertraut zu werden, überprüfen wir, ob es sich bei den Strukturen aus Abb. 6.1, Abb. 6.2 und Abb. 6.3 wirklich um totale, zyklische Ordnungen handelt.

B3682

Wir betrachten die dreielementige Struktur in Abb. 6.3. Wir lesen aus der Darstellung die Relation $\mathrm{R} = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2]\}]$ ab. Als Alphabet ergibt sich $\mathcal{A}(\mathrm{R}) = \{0,1,2\}$. Einfachheit, Teilwort- und

Rotationsabgeschlossenheit sind offensichtlich. Ferner ist die Relation total, da jedes Paar von verschiedenen Elementen in mindestens einem Wort gemeinsam vorkommt. Die Abhängigkeitsrelation ist gerade durch diese Paare von Elementen gegeben, also (li R) = {(0,1), (1,2), (0,2), (1,0), (2,1), (2,0)}. Hieraus berechnen wir die reflexive Abhängigkeitsrelation ($\underline{\mathrm{li}}$ R) = (li R) ∪ {(0,0), (1,1), (2,2)}. Die Abhängigkeitskliquen sind ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kliquen = {{0,1,2}, {0,1}, {1,2}, {0,2}, {0}, {1}, {2}, ∅}. Genau eine dieser Kliquen ist maximal, also ein Ken: ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kens = {{0,1,2}}. Betrachten wir die Kliquen, so stellen wir fest, daß jede Klique als Alphabet eines Wortes in der Relation repräsentiert wird. Damit ist auch das Axiom der Vollständigkeit erfüllt. Es bleibt nun noch die Konsistenz modulo Rotation zu überprüfen. Wir müssen die also die Konsistenz (modulo Rotation) aller Paare von Wörtern aus R zeigen: [0,1,2] ist konsistent mit [1,2,0], da sie sogar rotationsäquivalent sind. [2,0,1] ist konsistent mit [1,0], da [1,0] ein rotiertes Teilwort von [2,0,1] ist. Entsprechendes gilt für die anderen Paare. Wir können auch Theorem 1627 zur Überprüfung der Konsistenz modulo Rotation heranziehen: {[0,1,2]} ist einfach und konsistent modulo Rotation. Damit gilt dies auch für R = ($\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq}$)[{[0,1,2]}]. R ist also eine totale, zyklische Ordnung. Kehren wir die Orientierung der Struktur um, so erhalten wir eine andere totale, zyklische Ordnung, nämlich gerade die Spiegelung R′ = (REV R) = ($\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq}$)[{[2,1,0]}].

B3683

Die zweielementige, zyklische Struktur in Abb. 6.2 wird durch die Relation R = {[0,1], [1,0], [1], [0], []} beschrieben. Wir haben also $\mathcal{A}$(R) = {0,1} und es ergibt sich die Abhängigkeitsrelation (li R) = {(0,1), (1,0) }. Die Abhängigkeitskliquen sind ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kliquen = {{0,1}, {0}, {1}, ∅} und die Kens ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kens = {{0,1,2} }. Wiederum läßt sich die Relation kurz schreiben als Abschluß R = ($\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq}$)[{[0,1]}]. Daß es sich um eine totale, zyklische Ordnung handelt ist leicht zu überprüfen. Im Gegensatz zum vorigen Beispiel 3682 führt die Umkehrung der Orientierung nicht zu einer anderen Relation, denn es gilt (REV R) = R.

B3684

Die einelementige Struktur in Abb. 6.1 R = {[0], []} ist eine totale, zyklische Ordnung mit $\mathcal{A}$(R) = {0}, (li R) = ∅, ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kliquen = {{0}, ∅} und ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kens = {{0}}.

Das zweielementige Beispiel 3683 zeigt außerdem: Auf die für azyklische Ordnungen formulierte Transitivität müssen wir in dieser Form bei zyklischen Ordnungen verzichten, da sie im Widerspruch zur Einfachheit steht. Mit Hilfe der Transitivität könnten wir aus [0,1] ∈ R und [1,0] ∈ R folgern, daß [0,0] ∈ R, das kein einfaches Wort ist. Glücklicherweise kommen wir bei den totalen, zyklischen Ordnungen ohne ein (zyklisches) Transitivitätsaxiom (dessen Form wir noch nicht kennen) aus. Ein solches wird wird für (allgemeine) zyklische Ordnungen jedoch später benötigt.

Eine weitere Eigenschaft, die wir bei azyklischen Ordnungen aus den Axiomen (Einfachheit, Transitivität und Teilwortabgeschlossenheit) ableiten konnten, war die Konsistenz. Dies ist jedoch ebenso wie die Transitivität keine brauchbare Eigenschaft für zyklische Ordnungen, da schon im zweielementigen Beispiel 3683 die Wörter [0,1] und [1,0] nicht miteinander konsistent sind. Aus diesem Grund haben wir zur Axiomatisierung die schwache Konsistenz modulo Rotation verwendet.

Daß auch für die leere Menge eine totale, zyklische Ordnung existiert zeigt folgendes Beispiel.

B3685

Wir suchen eine totale, zyklische Ordnung mit leerem Alphabet, also setzen wir R = {[]}. Es folgt $\mathcal{A}$(R) = ∅, (li R) = ∅, ($\underline{\mathrm{li}}$ R) = ∅, ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kliquen = {∅}, ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kens = {∅}. Es gibt also nur den leeren Ken.

S3686

T3687 $\{[]\}$ ist eine totale, zyklische Ordnung

Daß eine leere zyklische Ordnung immer durch $R = \{[]\}$ gegeben wird und damit eine eindeutige Darstellung hat, folgt aus Theorem 2242.

B3688

Man könnte sich vorstellen, die leere Ordnung durch die leere Relation $R = \emptyset$ zu repräsentieren. Nach unseren Axiomen handelt es sich bei $\emptyset$ jedoch nicht um eine totale, zyklische Ordnung, da die Vollständigkeit nicht gilt: Wir haben $(\underline{\text{li}}\ R)$ -Kens $= \{\emptyset\}$, aber $\emptyset$ ist nicht das Alphabet eines Wortes der Relation.

Die in 3681 geforderten Axiome sind nicht voneinander unabhängig: Die Einfachheit ist überflüssig, da sie nach 1624 aus Teilwortabgeschlossenheit und Konsistenz modulo Rotation ableitbar ist. Alternativ könnten wir auf die Teilwortabgeschlossenheit verzichten, da sie sich nach 2450 aus Einfachheit, Rotationsabgeschlossenheit, Vollständigkeit und Konsistenz modulo Rotation ergibt. Wir haben also die Äquivalenzen:

S3689

VA3690* $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T3691 R ist eine totale, zyklische Ordnung $\Leftrightarrow$
R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist total $\wedge$
R ist vollständig $\wedge$
R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ 3681, 1624

T3692 R ist eine totale, zyklische Ordnung $\Leftrightarrow$
R ist einfach $\wedge$
R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist total $\wedge$
R ist vollständig $\wedge$
R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ 3681, 2450

Die Unabhängigkeit der übrigen Axiome wird durch die folgenden Beispiele (für jedes Axiom eines) demonstriert.

B3693

Wir setzen $R = \{[0,1], [0], [1], []\}$. Es folgt $\mathcal{A}(R) = \{0,1\}$, $(\text{li } R) = \{(0,1)\}$ und $(\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen $= \{\{0,1\}, \{0\}, \{1\}, \emptyset\}$. R ist einfach und teilwortabgeschlossen, total, vollständig und konsistent modulo Rotation. R ist sogar konsistent und damit eine totale, azyklische Ordnung. R ist jedoch nicht rotationsabgeschlossen.

B3694

Wir wählen $R = \{[0], [1], []\}$. Damit haben wir $\mathcal{A}(R) = \{0,1\}$, $(\text{li } R) = \emptyset$, $(\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen $= \{\{0\}, \{1\}, \emptyset\}$. R ist einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen, vollständig und konsistent modulo Rotation. R ist sogar konsistent und damit eine azyklische Ordnung. R ist jedoch nicht total.

B3695

Es sei $R = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1], [1,2], [2,0]\}]$. Es gilt $\mathcal{A}(R) = \{0,1,2\}$, $(\text{li } R) = \{(0,1), (1,2), (2,0)\}$ und $(\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen $= \mathcal{P}(\{0,1,2\})$. Einfachheit, Teilwort- und Rotationsabgeschlossenheit sind offensichtlich.

Jedes Paar von Elementen kommt in einem Wort vor. Damit ist die Relation total. Konsistenz modulo Rotation kann durch zweistellige Wörter nicht verletzt werden (Theorem 1570). Nur die Vollständigkeit gilt nicht: Die Klique {0,1,2} ist nicht durch ein Wort der Relation abgedeckt.

B3696

Für die Relation R = $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2], [2,1,0]}] gilt $\mathcal{A}$(R) = {0,1,2}, (li R) = {(0,1), (0,2), (1,0), (1,2), (2,0), (2,1)} und ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen = $\mathcal{P}$({0,1,2}). R ist einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen, total und vollständig. Die Konsistenz modulo Rotation ist jedoch nicht erfüllt, da $\neg$ [0,1,2] $\overset{\text{rot}}{\approx}$ [2,1,0] gilt.

Wie bei azyklischen Ordnungen haben wir uns die totalen, zyklischen Ordnungen anhand von endlichen Beispielen veranschaulicht. Es ist jedoch zu beachten, daß unsere Definition keinerlei Endlichkeitsaxiome enthält. Es sind viele interessante Varianten von Unendlichkeit in totalen zyklischen Ordnungen denkbar: Eine totale zyklische Ordnung kann beispielsweise dicht oder auch nur an einigen Stellen dicht sein, d.h. zwischen zwei Elementen gibt es immer ein drittes. Eine Notation für die Menge zwischen zwei Elementen wird später noch für andere Zwecke eingeführt. Auch könnte man sich viele totale Ordnungen wie die natürlichen Ordnungen auf $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{R}$ zyklisch geschlossen vorstellen. Die Analyse verschiedener Endlichkeits- oder Diskretheitsanforderungen wird jedoch nicht Thema dieser Arbeit sein.

Die Rotationsabgeschlossenheit verkörpert die Rotationssymmetrie einer zyklischen Ordnung. Der Übergang von azyklischen zu zyklischen Strukturen ist also ein Abstraktionsprozeß: Ordnungen, die früher voneinander unterschieden werden konnten, werden jetzt identifiziert, indem man (hier rotationsäquivalente) Wörter identifiziert. Die Wörter [a,b] und [b,a], die im vorigen Kapitel unterscheidbar waren und zu verschiedenen Ordnungen führten, sind jetzt durch die Rotationsabgeschlossenheit so eng miteinander verknüpft, daß sie untrennbar und damit ununterscheidbar sind. Formal könnte man auch diesen Abstraktionsprozeß durch Äquivalenzklassenbildung explizieren und zyklische Ordnungen als Mengen über Rotationsäquivalenzklassen von Wörtern definieren. Es gibt viele Ansätze, die zum gleichen Ziel führen: Wir haben uns für einen entschieden, der mathematisch recht einfach und elegant zu formalisieren ist.

Die Vollständigkeit erzwingt, daß alle endlichen geordneten Teilmengen auch tatsächlich explizit in der Relation repräsentiert werden. Wäre dies nicht der Fall, so könnte man nicht die übliche extensionale Gleichheit der Mengenlehre verwenden, um zu festzustellen, ob zwei (totale) zyklische Ordnungen identisch sind. Der Preis für eine einfachere Axiomatisierung wäre dann eine kompliziertere Definition der Gleichheit.

Die Konsistenz modulo Rotation wirkt der Vollständigkeit in gewisser Weise entgegen, indem sie die innere Widerspruchsfreiheit als wesentliches Merkmal von Ordnungsstrukturen formalisiert. Die Konsistenz modulo Rotation ist die stärkste Konsistenz, die wir bei Gültigkeit der Rotationsabgeschlossenheit noch fordern können, ohne daß die Modelle der Axiome trivial und damit uninteressant werden.

6.4 Spiegelung

Um die Orientierung einer azyklischen Ordnung umzukehren, ist die Spiegelungsoperation geeignet, die jedes Wort der Relation durch seine gespiegelte Version ersetzt. Die Spiegelungsoperation läßt sich natürlich auch auf totale, zyklische Ordnungen anwenden.

S3697

VA3698$*$ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Jedes der Axiome in Definition 3681 ist invariant unter Spiegelung der Relation. Damit ist die Spiegelung einer totalen, zyklischen Ordnung wieder eine solche.

T3699 R ist eine totale, zyklische Ordnung $\Rightarrow$ (REV R) ist eine totale, zyklische Ordnung 3681, 2576, 2641, 2648, 2713, 2696, 2675

Natürlich bleiben auch Alphabet, Abhängigkeits- und Unabhängigkeitsrelation unter Spiegelung erhalten, wie schon die Theoreme 2588, 2679, 2697 zeigten.

Eine totale, zyklische Ordnung, deren maximale Wortlänge kleiner als drei ist, ist von ihrer gespiegelten Version nicht zu unterscheiden. Umgekehrt gilt aber auch: Sind eine totale, zyklische Ordnung und ihre Spiegelung identisch, so ist die Länge der Relationen kleiner als drei.

T3700 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ $\Rightarrow$ ($\mathcal{L}$(R) $<$ 3 $\Leftrightarrow$ R = (REV R))

A3701	R ist einfach	
A3702	R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	
A3703	R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$	
G3704	$\mathcal{L}(R) < 3 \Leftrightarrow R = (\text{REV } R)$	
G3705	$(\forall\, w \in R \bullet \mathcal{L}(w) < 3) \Leftrightarrow R = (\text{REV } R)$	1262
T3706	$(\forall\, w \in R \bullet \mathcal{L}(w) < 3) \Rightarrow R = (\text{REV } R)$	
A3707	$\forall\, w \in R \bullet \mathcal{L}(w) < 3$	
G3708	$R = (\text{REV } R)$	
G3709	$R \subseteq (\text{REV } R)$	2549
G3710	$\forall\, w \in R \bullet w \in (\text{REV } R)$	
VA3711	$w \in R$	
G3712	$w \in (\text{REV } R)$	
T3713*	$w \in \mathbb{A}^*$	3711
G3714	$(\text{REV } w) \in R$	2551
T3715	$\mathcal{L}(w) < 3$	3707, 3711
G3716	$(w \gg 1) \in R$	0488, 3715
T3717	$w \overset{\text{rot}}{\equiv} (w \gg 1)$	0512
G3718	$\mathbb{T}$	1343, 3702, 3711, 3717
T3719	$R = (\text{REV } R) \Rightarrow (\forall\, w \in R \bullet \mathcal{L}(w) < 3)$	
A3720	$R = (\text{REV } R)$	
G3721	$\forall\, w \in R \bullet \mathcal{L}(w) < 3$	
A3722	$\neg \forall\, w \in R \bullet \mathcal{L}(w) < 3$	
VT3723	$w \in R \bullet 3 \leq \mathcal{L}(w)$	3722
T3724*	$w \in \mathbb{A}^*$	3723
T3725	$w \in (\text{REV } R)$	3720, 3723
T3726	$(\text{REV } w) \in R$	2551, 3725
T3727	w ist einfach	1279, 3701, 3723
T3728	$\neg\, w \overset{\text{rot}}{\equiv} (\text{REV } w)$	0526, 3727, 3723
T3729	$w \overset{\text{rot}}{\approx} (\text{REV } w)$	1547, 3703, 3723, 3726
T3730	$\mathcal{A}(w) = \mathcal{A}(\text{REV } w)$	0431
T3731	$w \overset{\text{rot}}{\equiv} (\text{REV } w)$	0996, 3730, 3729
T3732	$\mathbb{F}$	3728, 3731
G3733	$\mathbb{T}$	3706, 3719

Man vergleiche das vorige Theorem mit 2774: Für azyklische Ordnungen ist zwei die charakteristische Zahl, für die zyklischen Ordnungen ist es die drei. Diese Zahl wird natürlich von der unterliegenden Äquivalenzrelation auf Wörtern ererbt: Für azyklische Ordnungen ist dies die Identität, für zyklische Ordnungen die Rotationsäquivalenz. Die charakteristische Zahl gibt die Länge der kleinsten unter Spiegelung gerade noch unterscheidbaren Wörter an. [0] und (REV [0]) sind sicherlich ununterscheidbar (bzgl. Identität). [0,1] und (REV [0,1]) = [1,0] sind dagegen unterscheidbar. [0,1] und (REV [0,1]) sind nicht unterscheidbar bzgl. Rotationsäquivalenz. [0,1,2] und (REV [0,1,2]) = [2,1,0] sind jedoch unterscheidbar. Wie eine Ordnungstheorie mit einer höheren charakteristischen Zahl als drei aussehen könnte, wird später noch angedeutet (siehe Trennungsrelationen).

Es gibt gerichtete (d.h. R $\neq$ (REV R)) und nichtgerichtete (d.h. R = (REV R)), totale, zyklische Ordnungen: Nichtgerichtete, totale, zyklische Ordnungen liegen in den Beispielen 3683 (zweielementig), 3684 (einelementig), 3685 (leer) vor. Die dreielementige, totale, zyklische Ordnung aus Beispiel 3682 ist dagegen gerichtet.

Im Axiomensystem der Tripelstrukturen können nur Modelle repräsentiert werden, die auf jedem Kreis mindestens drei Elemente besitzen und damit gerichtet sind. Entsprechend fordern Trennungsstrukturen mindestens vier Elemente auf einem Kreis. Dies ist der Preis für die mathematische Einfachheit der Axiomatisierung mit Tripeln bzw. Quadrupeln. Die hier vorgeschlagene Definition der totalen, zyklischen Ordnungen, läßt sowohl gerichtete als auch nichtgerichtete Relationen zu. Dies geschieht in vollständiger Analogie zu totalen, azyklischen Ordnungen, die ebenfalls nichtgerichtete Relationen (die leere und die einelementigen, totalen, azyklischen Ordnungen) sein können.

Ein weiterer Grund, warum man die Elementzahl nicht nach unten begrenzen sollte, ist der folgende: Schränken wir eine azyklische Ordnung auf eine beliebig kleine Menge ein, so erhalten wir wieder eine azyklische Ordnung. Entsprechendes wollen wir auch bei (totalen) zyklischen Ordnungen sicherstellen. Wir werden diese Eigenschaft als Abgeschlossenheit der totalen, zyklischen Ordnungen unter Projektion in einem der folgenden Abschnitte kennenlernen.

6.5 Vergleich

Die folgenden Aussagen werden in diesem Abschnitt bewiesen: Sind zwei totale, zyklische Ordnungen miteinander konsistent modulo Rotation und bzgl. der Alphabets vergleichbar, so überträgt sich die Vergleichbarkeit auf die Relation selbst. Zwei miteinander konsistente, totale, zyklische Ordnungen mit gleichem Alphabet sind identisch.

S3734

VA3735∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $\mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Tatsächlich können wir noch eine wesentlich allgemeinere Aussage ableiten: Haben wir eine beliebige Relation R und eine rotationsabgeschlossene, totale, vollständige Relation R′ mit erweitertem Alphabet, so ist R′ eine Erweiterung von R, wenn die beiden Relationen miteinander konsistent modulo Rotation sind.

T3736 $\mathcal{A}(\mathrm{R}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R}') \wedge$ R′ ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R′ ist total $\wedge$ R′ ist vollständig $\wedge$ R und R′ sind miteinander konsistent modulo $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv}) \Rightarrow \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}'$

A3737	$\mathcal{A}(\mathrm{R}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R}')$	
A3738	R′ ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	
A3739	R′ ist total	
A3740	R′ ist vollständig	
A3741	R und R′ sind miteinander konsistent modulo $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$	
G3742	$\mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}'$	
G3743	$\forall\, \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{w} \in \mathrm{R}'$	
VA3744	$\mathrm{w} \in \mathrm{R}$	
G3745	$\mathrm{w} \in \mathrm{R}'$	
T3746∗	$\mathrm{w} \in \mathbb{A}^*$	3744
T3747	$\mathcal{A}(\mathrm{w}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	1245, 3744

T3748 $\mathcal{A}(\mathrm{w}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R}')$ . . . 3747, 3737
T3749 $\mathcal{A}(\mathrm{w})$ ist einfach . . . 0240
VT3750 $\mathrm{w}' \in \mathrm{R}' \bullet \mathcal{A}(\mathrm{w}') = \mathcal{A}(\mathrm{w})$ . . . 2281, 3739, 3740, 3748, 3749
T3751∗ $\mathrm{w}' \in \mathbb{A}^*$ . . . 3750
T3752 $\mathrm{w} \overset{\mathrm{rot}}{\sim} \mathrm{w}'$ . . . 1548, 3741, 3744, 3750
T3753 $\mathrm{w} \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} \mathrm{w}'$ . . . 0996, 3750, 3752
T3754 $\mathrm{w}' \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} \mathrm{w}$ . . . 0513, 3753
G3755 $\mathbb{T}$ . . . 1343, 3738, 3750, 3754

Zweimalige Anwendung dieses Theorems, liefert unter den gleichen Voraussetzungen einen direkten Zusammenhang zwischen Gleichheit der Alphabete und der Gleichheit der Relationen.

T3756 $\mathcal{A}(\mathrm{R}) = \mathcal{A}(\mathrm{R}') \wedge$
R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist total $\wedge$ R ist vollständig $\wedge$
R' ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R' ist total $\wedge$ R' ist vollständig $\wedge$
R und R' sind miteinander konsistent modulo $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv}) \Rightarrow \mathrm{R} = \mathrm{R}'$ . . . 3736

Da eine konsistente Relation mit jeder ihrer Teilrelationen konsistent ist (Theorem 1557), folgt unmittelbar, daß vergleichbare totale, zyklische Ordnungen mit gleichem Alphabet identisch sind.

T3757 $\mathcal{A}(\mathrm{R}) = \mathcal{A}(\mathrm{R}') \wedge$
R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist total $\wedge$ R ist vollständig $\wedge$
R' ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R' ist total $\wedge$ R' ist vollständig $\wedge$
R' ist konsistent modulo $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv}) \wedge \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}' \Rightarrow \mathrm{R} = \mathrm{R}'$ . . . 3756, 1557

6.6 Endlichkeit

Wir fragen nun, ob wenigstens alle endlichen, totalen, zyklischen Ordnungen unserer Intuition entsprechen, d.h. die Form der bisher aus den Beispielen bekannten Relationen aufweisen. Dazu betrachten wir die Quasiordnung $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsubseteq})$, die angibt ob ein Wort ein rotiertes Teilwort eines anderen ist. Wir erinnern uns: In den Beispielen konnten wir die totale, zyklische Ordnung als $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})$ -Abschluß nur eines Wortes angeben.

S3758
VA3759∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Nach dem folgenden Theorem können wir für jedes Paar von Wörtern einer totalen, zyklischen Ordnung immer ein Wort finden, daß echt größer als diese oder zu beiden rotationsäquivalent ist.

T3760 R ist eine totale, zyklische Ordnung $\Rightarrow \forall\, \mathrm{u} \in \mathrm{R}, \mathrm{v} \in \mathrm{R} \bullet \exists\, \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{u} \overset{\mathrm{rot}}{\sqsubseteq} \mathrm{w} \wedge \mathrm{v} \overset{\mathrm{rot}}{\sqsubseteq} \mathrm{w}$

A3761 R ist eine totale, zyklische Ordnung
VA3762 $\mathrm{u} \in \mathrm{R}$
VA3763 $\mathrm{v} \in \mathrm{R}$
T3764∗ $\mathrm{u} \in \mathbb{A}^* \wedge \mathrm{v} \in \mathbb{A}^*$ . . . 3762, 3763
G3765 $\exists\, \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{u} \overset{\mathrm{rot}}{\sqsubseteq} \mathrm{w} \wedge \mathrm{v} \overset{\mathrm{rot}}{\sqsubseteq} \mathrm{w}$
T3766 R ist total $\wedge$ $\overline{\mathrm{R}}$ ist vollständig . . . 3681, 3761
T3767 $\mathcal{A}(\mathrm{u}) \cup \mathcal{A}(\mathrm{v}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$
  T3768 $\mathcal{A}(\mathrm{u}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$ . . . 1245, 3762
  T3769 $\mathcal{A}(\mathrm{v}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$ . . . 1245, 3763
  G3770 $\mathbb{T}$ . . . 3768, 3769
T3771 $\mathcal{A}(\mathrm{u}) \cup \mathcal{A}(\mathrm{v})$ ist endlich . . . 0240
VT3772 $\mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathcal{A}(\mathrm{w}) = \mathcal{A}(\mathrm{u}) \cup \mathcal{A}(\mathrm{v})$ . . . 2281, 3767, 3771
T3773∗ $\mathrm{w} \in \mathbb{A}^*$ . . . 3772

T3774 R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ . . . 3681, 3761
T3775 $u \overset{\text{rot}}{\eqsim} w$ . . . 1547, 3774, 3762, 3772
T3776 $v \overset{\text{rot}}{\eqsim} w$ . . . 1547, 3774, 3763, 3772
T3777 $\mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(w)$ . . . 3772
T3778 $u \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} w$ . . . 1189, 3777, 3775
T3779 $\mathcal{A}(\overline{v}) \subseteq \mathcal{A}(w)$ . . . 3772
T3780 $v \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} w$ . . . 1189, 3779, 3776
G3781 $\mathbb{T}$ . . . 3772, 3778, 3780

Mit Hilfe dieses Theorems erkennen wir, daß endliche, totale, zyklische Ordnungen (man erinnere sich, daß die Endlichkeit der Relation nach 1293 und 1300 äquivalent zur Endlichkeit des Alphabets ist) schon durch ein einziges Wort eindeutig angegeben werden können: Durch sukzessive Anwendung dieses Theorems finden wir ein größtes Wort bezüglich der Quasiordnung $(\overset{\text{rot}}{\sqsubseteq})$, das größer als oder rotationsäquivalent zu allen anderen Wörtern ist. Da eine totale, zyklische Ordnung $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$ -abgeschlossen ist, erhalten wir sie als $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$ -Abschluß dieses einen Wortes.

T3782 R ist eine totale, zyklische Ordnung $\wedge$ R ist endlich $\Rightarrow$
$\exists\, w \in R \bullet \forall\, u \in R,\ v \in R \bullet u \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} w \wedge v \overset{\text{rot}}{\sqsubseteq} w$

T3783 R ist eine totale, zyklische Ordnung $\wedge$ R ist endlich $\Rightarrow \exists\, w \in \mathbb{A}^* \bullet R = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{w\}]$

Auf den formalen Beweis wird hier verzichtet, da sich diese Theoreme (auf eine völlig andere Weise) als ein Nebenprodukt der Überlegungen in Abschnitt 6.12 ergeben werden.

Umgekehrt gilt, daß jedes einfache Wort durch $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$ -Abschluß eine endliche, totale, zyklische Ordnung generiert, deren Alphabet gerade das Alphabet des Wortes ist.

S3784

VA3785∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ w \in \mathbb{A}^*$
T3786 $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{w\}]$ ist endlich . . . 1501
T3787 $\mathcal{A}((\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{w\}]) = \mathcal{A}(w)$ . . . 1478, 1243
T3788 w ist einfach $\Rightarrow (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{w\}]$ ist einfach

A3789 w ist einfach
G3790 $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{w\}]$ ist einfach
T3791 $\{\overline{w}\}$ ist einfach . . . 1279, 3789
G3792 $\mathbb{T}$ . . . 1524, 3791

T3793 $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{w\}]$ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen . . . 1446
T3794 $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{w\}]$ ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen . . . 1445
T3795 $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{w\}]$ ist total . . . 1538, 1285
T3796 $(\underline{\mathrm{li}}\ (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{w\}]) = \mathcal{A}(w)^2$ . . . 2020, 3795, 3787
T3797 $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{w\}]$ ist vollständig

T3798 $(\underline{\mathrm{li}}\ (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{w\}]) = (\underline{\mathrm{li}}\ (\sqsupseteq)[\{w\}])$ . . . 1895, 1896
G3799 $(\sqsupseteq)[\{w\}]$ ist vollständig . . . 2214, 3798, 1361
G3800 $\forall\, C \bullet C \subseteq \mathcal{A}((\sqsupseteq)[\{w\}]) \wedge C$ ist endlich $\Rightarrow \exists\, w' \in (\sqsupseteq)[\{w\}] \bullet \mathcal{A}(w') = C$ . . . 2290
VA3801 $C \bullet C \subseteq \mathcal{A}((\sqsupseteq)[\{w\}])$
A3802 C ist endlich
G3803 $\exists\, w' \in (\sqsupseteq)[\{w\}] \bullet \mathcal{A}(w') = C$
T3804∗ $C \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ . . . 3801
T3805 $\mathcal{A}((\sqsupseteq)[\{w\}]) = \mathcal{A}(w)$ . . . 1496, 1248
T3806 $C \subseteq \mathcal{A}(w)$ . . . 3801, 3805
T3807 $w \in (\sqsupseteq)[\{w\}]$ . . . 1413

T3808 $(w \rhd C) \sqsubseteq w$ 0655
T3809 $(w \rhd C) \in (\sqsupseteq)[\{w\}]$ 3808
T3810 $\mathcal{A}(w \rhd C) = C$ 0660, 3806
G3811 $\mathbb{T}$ 3809, 3810

T3812 w ist einfach $\Rightarrow (\overset{rot}{\sqsupseteq})[\{w\}]$ ist konsistent modulo $(\overset{rot}{\equiv})$

A3813 w ist einfach
G3814 $(\overset{rot}{\sqsupseteq})[\{w\}]$ ist konsistent modulo $(\overset{rot}{\equiv})$
T3815 $w \overset{rot}{\sim} w$ 0987
T3816 $\{w\}$ ist konsistent modulo $(\overset{rot}{\equiv})$ 1547, 3815
T3817 $\{w\}$ ist einfach 1279, 3813
G3818 $\mathbb{T}$ 1627, 3817, 3816

T3819 w ist einfach $\Rightarrow (\overset{rot}{\sqsupseteq})[\{w\}]$ ist eine totale, zyklische Ordnung 3681, 3788, 3793, 3794, 3795, 3797, 3812

Aus einem (im allgemeinen nicht eindeutigen) größten Wort der totalen, zyklischen Ordnung bzgl. der Quasiordnung $(\overset{rot}{\sqsubseteq})$ ist also im endlichen Fall die gesamte Relation generierbar, indem man den Abschluß bzgl. $(\overset{rot}{\sqsupseteq})$ bildet, also alle rotierten Teilwörter hinzunimmt. Endliche, totale zyklische Ordnungen sind also alle von der aus den vorigen Beispielen bekannten Form: Die dreielementige Ordnung wird durch das Wort [0,1,2] generiert aber auch durch [1,2,0], die vierelementige Ordnung durch das Wort [0,1,2,3], usw.

B3820

$R = (\overset{rot}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2,3]\}]$ ist eine endliche, totale, zyklische Ordnung. Es handelt sich dabei um die vierelementige Struktur in Abb. 6.4. Es gilt $\mathcal{A}(R) = \{0,1,2,3\}$, $(\underline{li}\ R)$ -Kliquen $= \mathcal{P}(\{0,1,2,3\})$ und $(\underline{li}\ R)$ -Kens $= \{\{0,1,2,3\}\}$. Einfachheit, Teilwort- und Rotationsabgeschlossenheit sowie Totalität sind offensichtlich. Vollständigkeit folgt aus Theorem 2325 Konsistenz modulo Rotation folgt aus Theorem 1627

6.7 Projektion

Wir widmen uns in diesem Abschnitt der Projektion von totalen, zyklischen Ordnungen auf eine Menge. Das Hautresultat wird sein, daß alle Axiome zusammen unter Projektion erhalten bleiben, sich also wieder eine totale, zyklische Ordnung ergibt. Wir werden dies schrittweise für einzelne Axiome beweisen, sofern dies noch nicht im vorigen Kapitel erfolgte.

S3821

Wir beginnen mit einer Relation und einer Menge für die Projektion und knüpfen an die Ergebnissen in 2837 an.

VA3822∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$

Rotationsabgeschlossenheit ist invariant unter Projektion.

T3823 R ist $(\overset{rot}{\equiv})$ -abgeschlossen $\Rightarrow (R \rhd X)$ ist $(\overset{rot}{\equiv})$ -abgeschlossen

A3824 R ist $(\overset{rot}{\equiv})$ -abgeschlossen
G3825 $(R \rhd X)$ ist $(\overset{rot}{\equiv})$ -abgeschlossen
G3826 $\forall\, u,v \bullet u \in (R \rhd X) \wedge u \overset{rot}{\equiv} v \Rightarrow v \in (R \rhd X)$ 1343
VA3827 $u,v \bullet u \in (R \rhd X)$
A3828 $u \overset{rot}{\equiv} v$
G3829 $v \in (R \rhd X)$

T3830∗	$u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$	3828
G3831	$\exists\, v' \in R \bullet v = (v' \rhd X)$	1703
VT3832	$u' \in R \bullet u = (u' \rhd X)$	1703, 3827
T3833∗	$u' \in \mathbb{A}^*$	3832
VT3834	$v' \bullet u' \overset{\text{rot}}{\equiv} v' \wedge v = (v' \rhd X)$	0672, 3828, 3832
T3835	$v' \in R$	1343, 3824, 3832, 3834
G3836	$\mathbb{T}$	3835, 3834

Konsistenz modulo Rotation ist eine projektive Äquivalenzrelation. Wir können also Theorem 2949 anwenden und erhalten die Invarianz der Konsistenz modulo Rotation.

T3837 R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv}) \Rightarrow (R \rhd X)$ ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ . . . 2949, 0680

Kombinieren wir diese Teilresultate mit den Invarianzen, die wir schon im vorigen Kapitel gezeigt haben, so erhalten wir das gewünschte Theorem: Jede Projektion einer totalen, zyklischen Ordnung liefert wieder eine solche.

T3838 R ist eine totale, zyklische Ordnung $\Rightarrow$
$(R \rhd X)$ ist eine totale, zyklische Ordnung 3681, 2850, 2860, 3823, 2920, 2896, 3837

Insgesamt erhalten wir also die Abgeschlossenheit der Klasse aller totalen, zyklischen Ordnungen unter Projektion. Trotz seiner Einfachheit ist dieses Resultat ein gewisses Indiz für die Adäquatheit unseres Axiomsystems der totalen, zyklischen Ordnungen. Es ist das Ziel möglichst viele der bekannten Eigenschaften von totalen, azyklischen Ordnungen zu erhalten. Dies ist offenbar für die Abgeschlossenheit der azyklischen Ordnungen unter Projektion gelungen.

6.8 Zyklische Transitivität

Bei der Axiomatisierung der totalen, zyklischen Ordnungen haben wir schon bemerkt, daß die übliche Transitivität (siehe 2725) ungeeignet ist, ja sogar im Widerspruch zu Einfachheit und Rotationsabgeschlossenheit steht. Da wir nicht wußten, wie eine Form von zyklischer Transitivität aussehen könnte, haben wir zunächst ohne ein solches Axiom begonnen. In diesem Abschnitt werden wir feststellen, daß eine Eigenschaft ableitbar ist, die eine gewisse Ähnlichkeit zur üblichen Transitivität aufweist. Wir werden sie als zyklische Transitivität bezeichnen.

S3839

VA3840∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Wir definieren zuerst den zentralen Begriff. Man vergleiche diese Definition mit 2725: Formal besteht der einzige Unterschied in der Hinzunahme eines Elements a, so daß aus zweistelligen dreistellige Wörter werden.

D3841 R ist zyklisch transitiv $:\Leftrightarrow$
$\forall\, a,b,c,d \bullet [a,b,c] \in R \wedge [a,c,d] \in R \Rightarrow [a,b,d] \in R$

Was bedeutet diese Definition für unsere Systeminterpretation ? Wir betrachten dazu Abb. 6.9. Ist eine charakteristische Beobachtung von [a,b,c] und [a,c,d] möglich, so soll auch [a,b,d] eine charakteristische Beobachtung sein. Wir verwenden a als Referenzereignis: Bezüglich a liegt b vor c und c vor d, also liegt c vor d, wiederum bezüglich a. Man könnte a auch als ein Ereignis deuten, an dem wir die zyklische Ordnung kurzzeitig aufschneiden, was uns erlaubt den Transitivitätsbegriff der azyklischen Ordnungen anzuwenden.

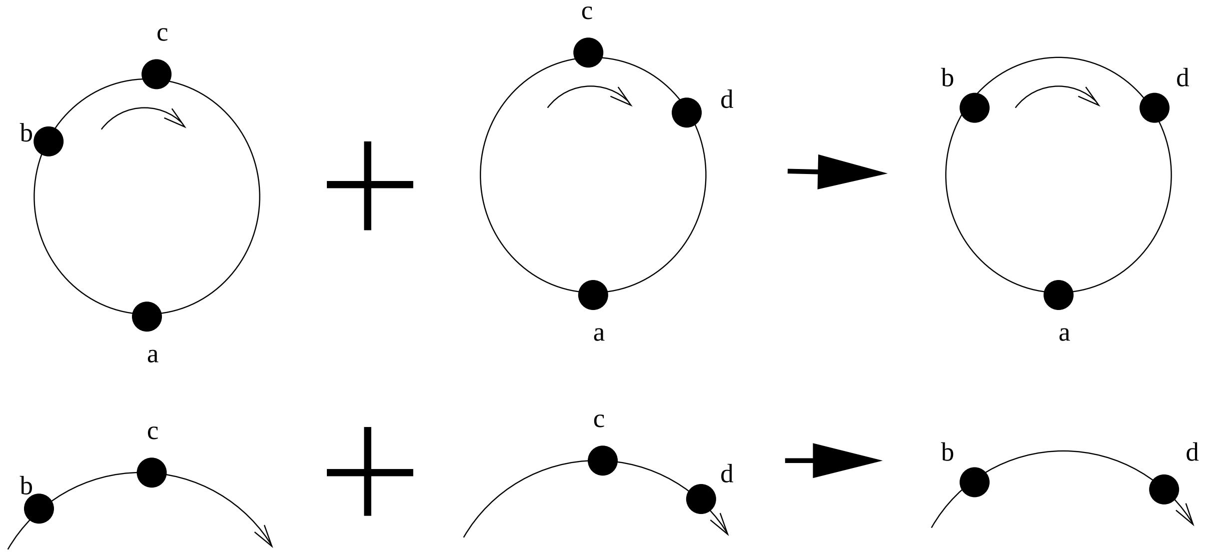


Abbildung 6.9: Zyklische Transitivität

Es gibt Relationen, bei denen die zyklische Transitivität besonders leicht zu überprüfen ist, da die Prämisse der Definition 3841 nie erfüllt ist. Dies sind beispielsweise Relationen, die überhaupt keine dreistelligen Wörter enthalten oder Relationen, in denen zwei Wörter niemals mehr als ein Element gemeinsam haben.

S3842

VA3843$*$ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T3844 $\mathcal{L}(\mathrm{R}) < 3 \Rightarrow$ R ist zyklisch transitiv

A3845	$\mathcal{L}(\mathrm{R}) < 3$	
G3846	R ist zyklisch transitiv	
G3847	$\forall$ a,b,c,d $\bullet$ [a,b,c] $\in$ R $\wedge$ [a,c,d] $\in$ R $\Rightarrow$ [a,b,d] $\in$ R	3841
VA3848	a,b,c,d $\bullet$ [a,b,c] $\in$ R $\wedge$ [a,c,d] $\in$ R	
T3849$*$	$a \in \mathbb{A} \wedge b \in \mathbb{A} \wedge c \in \mathbb{A}$	3848
T3850	$\mathcal{L}([a,b,c]) = 3$	0309
T3851	$\mathbb{F}$	1262, 3845, 3848, 3850

T3852 R ist einfach $\wedge$ ($\forall$ u $\in$ R, v $\in$ R $\bullet$ u $\neq$ v $\Rightarrow$ $|\mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)| \leq 1$) $\Rightarrow$ R ist zyklisch transitiv

A3853	R ist einfach	
VA3854	$\forall$ u $\in$ R, v $\in$ R $\bullet$ u $\neq$ v $\Rightarrow$ $|\mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)| \leq 1$	
A3855	$\neg$ R ist zyklisch transitiv	
VT3856	a,b,c,d $\bullet$ [a,b,c] $\in$ R $\wedge$ [a,c,d] $\in$ R $\wedge$ [a,b,d] $\notin$ R	3841, 3855
T3857$*$	$a \in \mathbb{A} \wedge b \in \mathbb{A} \wedge c \in \mathbb{A} \wedge d \in \mathbb{A}$	3856
T3858	$\{a,c\} \subseteq \mathcal{A}([a,b,c]) \cap \mathcal{A}([a,c,d])$	0329
T3859	[a,b,c] ist einfach	1279, 3853, 3856
T3860	$a \neq c$	0379, 3859
T3861	$2 \leq |\mathcal{A}([a,b,c]) \cap \mathcal{A}([a,c,d])|$	3858, 3860
T3862	$b \neq c$	0379, 3859
T3863	$[a,b,c] \neq [a,c,d]$	0288, 3862

T3864 $\mathbb{F}$ . . . 3854, 3856, 3863, 3861

Das Hauptresultat dieses Abschnitts wird sein: Totale, zyklische Ordnungen sind zyklisch transitiv. Auf dem Weg dorthin zeigen wir einige Eigenschaften der Transitivität im Zusammenspiel mit anderen Axiomen und führen als Hilfsdefinition noch eine schwächere Form der zyklischen Transitivität ein.

S3865

VA3866$*$ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Zunächst stellen wir fest: Bei teilwortabgeschlossenen Relationen ist die zyklische Transitivität eine Invariante unter Projektion. Dies ergänzt die in 2837 begonnene und in 3821 fortgesetzte Liste der Projektionsinvarianten.

T3867 $\forall\, X \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \bullet$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist zyklisch transitiv $\Rightarrow$ $(R \triangleright X)$ ist zyklisch transitiv

VA3868$*$ $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$
A3869 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen
A3870 R ist zyklisch transitiv
G3871 $(R \triangleright X)$ ist zyklisch transitiv
G3872 $\forall\, a,b,c,d \bullet [a,b,c] \in (R \triangleright X) \wedge [a,c,d] \in (R \triangleright X) \Rightarrow [a,b,d] \in (R \triangleright X)$ . . . 3841
VA3873 $a,b,c,d \bullet [a,b,c] \in (R \triangleright X)$
A3874 $[a,c,d] \in (R \triangleright X)$
G3875 $[a,b,d] \in (R \triangleright X)$
T3876$*$ $a \in \mathbb{A},\ b \in \mathbb{A},\ c \in \mathbb{A},\ d \in \mathbb{A}$ . . . 3873, 3874
T3877 $[a,b,c] \in R$ . . . 2839, 3869, 3873
T3878 $[a,c,d] \in R$ . . . 2839, 3869, 3874
T3879 $[a,b,d] \in R$ . . . 3841, 3870, 3877, 3878
G3880 $\mathcal{A}([a,b,d]) \subseteq X$ . . . 1712, 3879
G3881 $\{a,b,d\} \subseteq X$ . . . 0329
T3882 $\{a,b,c\} \subseteq X$
  T3883 $\mathcal{A}([a,b,c]) \subseteq \mathcal{A}(R \triangleright X)$ . . . 1245, 3873
  T3884 $\mathcal{A}([a,b,c]) \subseteq X$ . . . 1709, 3883
  G3885 $\mathbb{T}$ . . . 0329, 3884
T3886 $\{a,c,d\} \subseteq X$
  T3887 $\mathcal{A}([a,c,d]) \subseteq \mathcal{A}(R \triangleright X)$ . . . 1245, 3874
  T3888 $\mathcal{A}([a,c,d]) \subseteq X$ . . . 1709, 3887
  G3889 $\mathbb{T}$ . . . 0329, 3888
G3890 $\mathbb{T}$ . . . 3882, 3886

In Ergänzung zu den Resultaten in 2574 gilt auch die Invarianz der zyklischen Transitivität unter Spiegelung, allerdings unter der Nebenbedingung der Rotationsabgeschlossenheit.

T3891 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist zyklisch transitiv $\Rightarrow$ (REV R) ist zyklisch transitiv

A3892 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen
A3893 R ist zyklisch transitiv
G3894 (REV R) ist zyklisch transitiv
G3895 $\forall\, a,b,c,d \bullet [a,b,c] \in (\text{REV } R) \wedge [a,c,d] \in (\text{REV } R) \Rightarrow [a,b,d] \in (\text{REV } R)$ . . . 3841
VA3896 $a,b,c,d \bullet [a,b,c] \in (\text{REV } R)$
A3897 $[a,c,d] \in (\text{REV } R)$
G3898 $[a,b,d] \in (\text{REV } R)$
T3899$*$ $a \in \mathbb{A} \wedge b \in \mathbb{A} \wedge c \in \mathbb{A} \wedge d \in \mathbb{A}$ . . . 3896, 3897
T3900 $(\text{REV } [a,b,c]) \in R$ . . . 2551, 3896
T3901 $[c,b,a] \in R$ . . . 0439, 3900
T3902 $(\text{REV } [a,c,d]) \in R$ . . . 2551, 3897
T3903 $[d,c,a] \in R$ . . . 0439, 3902

T3904	[c,b,a] $\overset{\text{rot}}{\equiv}$ [a,c,b]	0501
T3905	[a,c,b] ∈ R	1343, 3892, 3901, 3904
T3906	[d,c,a] $\overset{\text{rot}}{\equiv}$ [a,d,c]	0501
T3907	[a,d,c] ∈ R	1343, 3892, 3903, 3906
T3908	[a,d,b] ∈ R	3841, 3893, 3907, 3905
T3909	[a,d,b] $\overset{\text{rot}}{\equiv}$ [d,b,a]	0500
T3910	[d,b,a] ∈ R	1343, 3892, 3908, 3909
T3911	(REV [d,b,a]) ∈ (REV R)	2550, 3910
G3912	$\mathbb{T}$	0439, 3911

Die beiden abgeleiteten Invarianzen der zyklischen Transitivität zeigen wie sich die Axiome Teilwortabgeschlossenheit und Rotationsabgeschlossenheit hervorragend ergänzen und sind Hinweise auf die Adäquatheit unserer Definition der zyklischen Transitivität: Weder soll eine Orientierung der zyklischen Ordnung gegenüber der gespiegelten bevorzugt werden, noch soll die Detailliertheit der Betrachtung (durch Projektion veränderbar) die zyklische Transitivität beeinflussen.

Der oben eingeführte Transitivitätsbegriff ist zwar sehr intuitiv, formal jedoch wird sich herausstellen, daß er eine unnötig starke Forderung darstellt. Tatsächlich wird der folgende schwächere Begriff für unsere Zwecke ausreichen. Im Gegensatz zu Definition 3841 wird als Konklusion der Implikation nur noch die (ungerichtete) Abhängigkeit von b und d gefordert.

D3913 R ist schwach zyklisch transitiv :⇔
∀ a,b,c,d • [a,b,c] ∈ R ∧ [a,c,d] ∈ R ⇒ (b,d) ∈ (li R)

Daß es sich um eine schwächere Form der Transitivität handelt, ist offensichtlich.

T3914 R ist zyklisch transitiv ⇒ R ist schwach zyklisch transitiv 3841, 1900, 3913

Wir werden gleich sehen, daß unter geeigneten Nebenbedingungen auch die umgekehrte Implikation gilt. Da diese Bedingungen in unserem Kontext immer gefordert werden, sind schwache und starke, zyklische Transitivität für uns sogar äquivalent.

Um dies zu zeigen, stellen wir fest, daß sich mit Hilfe der schwachen Transitivität und einigen unserer Axiome zwei dreistellige Wörter [a,b,c] und [a,c,d] innerhalb der Relation zu einem vierstelligen Wort [a,b,c,d] ergänzen.

T3915 R ist einfach ∧ R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen ∧ R ist vollständig ∧
R ist konsistent modulo ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) ∧ R ist schwach zyklisch transitiv ⇒
∀ a,b,c,d • [a,b,c] ∈ R ∧ [a,c,d] ∈ R ⇒ [a,b,c,d] ∈ R

A3916	R ist einfach	
A3917	R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen	
A3918	R ist vollständig	
A3919	R ist konsistent modulo ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$)	
A3920	R ist schwach zyklisch transitiv	
VA3921	a,b,c,d • [a,b,c] ∈ R	
A3922	[a,c,d] ∈ R	
G3923	[a,b,c,d] ∈ R	
T3924∗	a ∈ $\mathbb{A}$ ∧ b ∈ $\mathbb{A}$ ∧ c ∈ $\mathbb{A}$ ∧ d ∈ $\mathbb{A}$	3921, 3922
T3925	(b,d) ∈ (li R)	3913, 3920, 3921, 3922
T3926	{a,b,c,d} ∈ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	
T3927	$\mathcal{A}$([a,b,c]) ∈ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	2006, 3921
T3928	{a,b,c} ∈ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	0329, 3927
T3929	(a,d) ∈ (li R) ∧ (c,d) ∈ (li R)	1900, 3922
T3930	(a,d) ∈ ($\underline{\text{li}}$ R) ∧ (c,d) ∈ ($\underline{\text{li}}$ R)	1821, 3929
T3931	(b,d) ∈ ($\underline{\text{li}}$ R)	1821, 3925

T3932	$d \in \mathcal{A}(R)$	1820, 3931
T3933	$(d,d) \in (\underline{li}\ R)$	1822, 3932
T3934	$(\{a,b,c\} \cup \{d\}) \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen	0119, 1825, 3928, 3933, 3930, 3931
G3935	$\mathbb{T}$	3934
VT3936	$w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = \{a,b,c,d\}$	2209, 3918, 3926
T3937∗	$w \in \mathbb{A}^*$	3936
T3938	$[a,b,c] \overset{rot}{\sqsubseteq} w$	
T3939	$[a,b,c] \overset{rot}{\sim} w$	1547, 3919, 3921, 3936
T3940	$\mathcal{A}([a,b,c]) \subseteq \mathcal{A}(w)$	3936, 0329
G3941	$\mathbb{T}$	1189, 3940, 3939
T3942	$[a,c,d] \overset{rot}{\sqsubseteq} w$	
T3943	$[a,c,d] \overset{rot}{\sim} w$	1547, 3919, 3922, 3936
T3944	$\mathcal{A}([a,c,d]) \subseteq \mathcal{A}(w)$	?1911, 0329
G3945	$\mathbb{T}$	1189, 3944, 3943
T3946	w ist einfach	1279, 3916, 3936
T3947	$\mathcal{L}(w) = 4$	
G3948	$\lvert\mathcal{A}(w)\rvert = 4$	0373, 3946
G3949	$\lvert\{a,b,c,d\}\rvert = 4$	3936
T3950	[a,b,c] ist einfach	1279, 3921
T3951	$a \neq b \wedge b \neq c \wedge a \neq c$	0379, 3950
T3952	[a,c,d] ist einfach	1279, 3922
T3953	$a \neq c \wedge c \neq d \wedge a \neq d$	0379, 3952
T3954	$b \neq d$	1906, 0073, 3925
G3955	$\mathbb{T}$	3951, 3953, 3954
T3956	$w \overset{rot}{\equiv} [a,b,c,d]$	0714, 3946, 3947, 3936, 3938, 3942
G3957	$\mathbb{T}$	1343, 3917, 3936, 3956

Die Prämisse der Vollständigkeit im vorigen Theorem läßt sich ohne große Änderung des Beweises zur schwächeren 4 -Vollständigkeit abschwächen. Da die Existenz vierstelliger Wörter jedoch für die Ableitung wesentlich ist, würde die 3 -Vollständigkeit nicht ausreichen.

Nehmen wir noch die Teilwortabgeschlossenheit hinzu, muß auch das Teilwort [a,b,d] von [a,b,c,d] in der Relation enthalten sein, was gerade der Forderung nach zyklischer Transitivität entsprach.

T3958 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{rot}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist vollständig $\wedge$ R ist konsistent modulo $(\overset{rot}{\equiv})$ $\wedge$ R ist schwach zyklisch transitiv $\Rightarrow$ R ist zyklisch transitiv

A3959	R ist einfach	
A3960	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
A3961	R ist $(\overset{rot}{\equiv})$ -abgeschlossen	
A3962	R ist vollständig	
A3963	R ist konsistent modulo $(\overset{rot}{\equiv})$	
A3964	R ist schwach zyklisch transitiv	
G3965	R ist zyklisch transitiv	
G3966	$\forall\, a,b,c,d \bullet [a,b,c] \in R \wedge [a,c,d] \in R \Rightarrow [a,c,d] \in R$	3841
VA3967	$a,b,c,d \bullet [a,b,c] \in R$	
A3968	$[a,c,d] \in R$	
G3969	$[a,c,d] \in R$	
T3970∗	$a \in \mathbb{A} \wedge b \in \mathbb{A} \wedge c \in \mathbb{A} \wedge d \in \mathbb{A}$	3967, 3968
T3971	$[a,b,c,d] \in R$	3915, 3959, 3961, 3962, 3963, 3964, 3968, 3969
T3972	$[a,c,d] \sqsubseteq [a,b,c,d]$	0558

G3973	$\mathbb{T}$	1315, 3960, 3971, 3972

Kombinieren wir Einfachheit und zyklische Transitivität, so können die sich widersprechenden Wörter [a,b,c] und [a,c,b] niemals gleichzeitig in der Relation stehen. Wir erinnern uns: Dies war das Axiom der Antisymmetrie bei Tripelstrukturen. Die Form des Beweises entspricht ungefähr der Ableitung der Asymmetrie aus Irreflexivität und Transitivität bei (binären) strengen Ordnungen.

T3974 R ist einfach $\wedge$ R ist zyklisch transitiv $\Rightarrow \forall$ a,b,c $\bullet$ $[a,b,c] \in R \Rightarrow [a,c,b] \notin R$

A3975	R ist einfach	
A3976	R ist zyklisch transitiv	
VA3977	a,b,c $\bullet$ $[a,b,c] \in R$	
G3978	$[a,c,b] \notin R$	
T3979$*$	$a \in \mathbb{A} \wedge b \in \mathbb{A} \wedge c \in \mathbb{A}$	3977
A3980	$[a,c,b] \in R$	
T3981	$[a,b,b] \in R$	3841, 3976, 3977, 3980
T3982	[a,b,b] ist einfach	1279, 3975, 3981
T3983	$\mathbb{F}$	3982, 0379

Hieraus folgt, wenn wir zusätzlich noch die Rotationsabgeschlossenheit fordern, daß alle dreielementigen Wörter mit gleichem Alphabet rotationsäquivalent sind. Wörter mit dem gleichen dreielementigen Alphabet unterscheiden sich in der Reihenfolge der Elemente also höchstens bzgl. zyklischer Vertauschung.

T3984 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist zyklisch transitiv $\Rightarrow$
$\forall$ $u \in R$, $v \in R$ $\bullet$ $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v) \wedge |\mathcal{A}(u)| = 3 \Rightarrow u \overset{\text{rot}}{\equiv} v$

A3985	R ist einfach	
A3986	R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	
A3987	R ist zyklisch transitiv	
VA3988	$u \in R$	
VA3989	$v \in R$	
A3990	$\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v)$	
A3991	$\|\mathcal{A}(u)\| = 3$	
G3992	$u \overset{\text{rot}}{\equiv} v$	
T3993$*$	$u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$	3873, 3989
VT3994	$a \in \mathbb{A}$, $b \in \mathbb{A}$, $c \in \mathbb{A}$ $\bullet$ $u = [a,b,c]$	
T3995	u ist einfach	1279, 3985, 3988
T3996	$\mathcal{L}(u) = 3$	0373, 3995, 3991
G3997	$\mathbb{T}$	0368, 3996
T3998$*$	$a \in \mathbb{A} \wedge b \in \mathbb{A} \wedge c \in \mathbb{A}$	3994
T3999	$v \overset{\text{rot}}{\equiv} [a,b,c] \vee v \overset{\text{rot}}{\equiv} [c,b,a]$	
T4000	$\mathcal{A}(u) = \{a,b,c\}$	3994, 0329
T4001	$\mathcal{A}(v) = \{a,b,c\}$	4000, 3990
T4002	$\|\mathcal{A}(v)\| = 3$	3991, 3990
T4003	v ist einfach	1279, 3985, 3989
T4004	$\mathcal{L}(v) = 3$	0373, 4003, 4002
G4005	$\mathbb{T}$	0539, 4003, 4004, 4001
A4006	$v \overset{\text{rot}}{\equiv} [a,b,c]$	
T4007	$v \overset{\text{rot}}{\equiv} u$	4006, 3994
G4008	$\mathbb{T}$	0513, 4007
A4009	$v \overset{\text{rot}}{\equiv} [c,b,a]$	
T4010	$[c,b,a] \overset{\text{rot}}{\equiv} [a,c,b]$	0501
T4011	$v \overset{\text{rot}}{\equiv} [a,c,b]$	0515, 4009, 4010
T4012	$[a,b,c] \in R$	3988, 3994
T4013	$[a,c,b] \in R$	1343, 3986, 3989, 4011

T4014 $[a,c,b] \notin R$ . . . 3974, 3985, 3987, 4012
T4015 $\mathbb{F}$ . . . 4013, 4014

Die nun folgenden Theoreme garantieren unter Annahme der übrigen Axiome totaler, zyklischer Ordnungen die wechselseitige Austauschbarkeit der zyklischen Transitivität mit der Konsistenz modulo Rotation.

Durch Anwendung des vorigen Theorems und des früheren Ergebnisses 1663, daß zum Nachweis der Konsistenz modulo Rotation schon die Betrachtung dreistelliger Teilwörter ausreicht, können wir die Konsistenz modulo Rotation aus der zyklischen Transitivität ableiten.

T4016 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupset)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{rot}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist zyklisch transitiv $\Rightarrow$ R ist konsistent modulo $(\overset{rot}{\equiv})$

A4017 R ist einfach
A4018 R ist $(\sqsupset)$ -abgeschlossen
A4019 R ist $(\overset{rot}{\equiv})$ -abgeschlossen
A4020 R ist zyklisch transitiv
G4021 R ist konsistent modulo $(\overset{rot}{\equiv})$
G4022 $\forall\, u \in R,\ v \in R \bullet \mathcal{L}(u) = 3 \wedge \mathcal{L}(v) = 3 \wedge \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v) \Rightarrow u \overset{rot}{\equiv} v$ . . . 1663, 4017, 4018
VA4023 $u \in R,\ v \in R$
A4024 $\mathcal{L}(u) = 3 \wedge \mathcal{L}(v) = 3$
A4025 $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v)$
G4026 $u \overset{rot}{\equiv} v$
T4027 u ist einfach . . . 1279, 4017, 4023
T4028 $|\mathcal{A}(u)| = 3$ . . . 0373, 4025
G4029 $\mathbb{T}$ . . . 3984, 4017, 4019, 4020, 4023, 4025, 4028

Die Umkehrung dieser Implikation gilt unter geeigneten Annahmen auch: Hierfür benötigen wir abgesehen von Einfachheit und Rotationsabgeschlossenheit auch die Totalität. Aus der Konsistenz modulo Rotation folgt dann die schwache, zyklische Transitivität und damit auch die zyklische Transitivität, wenn wir 3958 unter Hinzunahme von Teilwortabgeschlossenheit und Vollständigkeit anwenden.

T4030 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\overset{rot}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist konsistent modulo $(\overset{rot}{\equiv})$ $\wedge$
R ist total $\Rightarrow$ R ist schwach zyklisch transitiv

T4031 R ist einfach
T4032 R ist $(\overset{rot}{\equiv})$ -abgeschlossen
T4033 R ist konsistent modulo $(\overset{rot}{\equiv})$
T4034 R ist total
G4035 R ist schwach zyklisch transitiv
G4036 $\forall\, a,b,c,d \bullet [a,b,c] \in R \wedge [a,c,d] \in R \Rightarrow (b,d) \in (\text{li } R)$ . . . 3913
VA4037 $a,b,c,d \bullet [a,b,c] \in R$
A4038 $[a,c,d] \in R$
G4039 $(b,d) \in (\text{li } R)$
T4040∗ $a \in \mathbb{A} \wedge b \in \mathbb{A} \wedge c \in \mathbb{A} \wedge d \in \mathbb{A}$ . . . 4037, 4038
T4041 $b \in \mathcal{A}(R)$
  T4042 $\mathcal{A}([a,b,c]) \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 1245, 4037
  T4043 $\{a,b,c\} \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 0329, 4042
  G4044 $\mathbb{T}$ . . . 4043
T4045 $d \in \mathcal{A}(R)$
  T4046 $\mathcal{A}([a,c,d]) \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 1245, 4038
  T4047 $\{a,c,d\} \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 0329, 4046
  G4048 $\mathbb{T}$ . . . 4047
T4049 $\mathcal{A}(R) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen . . . 2017, 4034

T4050	(b,d) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R)	0106, 4049, 4041, 4045
T4051	b $\neq$ d	
A4052	b = d	
T4053	[a,c,b] $\in$ R	4052, 4038
T4054	[a,c,b] $\overset{\text{rot}}{\equiv}$ [c,b,a]	0500
T4055	[c,b,a] $\in$ R	1343, 4032, 4053, 4054
T4056	[a,b,c] $\overset{\text{rot}}{\approx}$ [c,b,a]	1547, 4033, 4037, 4055
T4057	[a,b,c] ist einfach	1279, 4031, 4037
T4058	a $\neq$ b $\wedge$ b $\neq$ c $\wedge$ a $\neq$ c	0379, 4057
T4059	$\mathbb{F}$	1222, 4058, 4056
G4060	$\mathbb{T}$	1827, 4051, 4050

Totale zyklische Ordnungen erfüllen gerade alle diese Voraussetzungen, so daß wir als Zusammenfassung die folgenden beiden Theoreme erhalten.

T4061 R ist eine totale, zyklische Ordnung $\Rightarrow$ R ist schwach zyklisch transitiv 3681, 4030
T4062 R ist eine totale, zyklische Ordnung $\Rightarrow$ R ist zyklisch transitiv . . . 3681, 4061, 3958

Zusammenfassend erhalten wir die folgende Charakterisierung von totalen, zyklischen Ordnungen, die im nächsten Kapitel den Ausgangspunkt für die Verallgemeinerung zu zyklischen Ordnungen bilden wird. Sie ist vergleichbar mit unserer Definition totaler, azyklischer Ordnungen in 2727: Die Rotationsabgeschlossenheit kommt hinzu und die Transitivität wird durch die zyklische Transitivität ersetzt.

T4063 R ist eine totale, zyklische Ordnung $\Leftrightarrow$
R ist einfach $\wedge$
R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen $\wedge$
R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen $\wedge$
R ist total $\wedge$
R ist vollständig $\wedge$
R ist zyklisch transitiv 3681, 4062, 4016

Eine andere, jedoch nicht so interessante, Abschwächung der zyklischen Transitivität ist die zyklische Transitivität auf Kens.

S4064
VA4065$*$ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Bei dieser Definition wird dual (und im Gegensatz) zur oben eingeführten schwachen Transitivität keine neue Abhängigkeitsrelation zwischen b und d gefordert, sondern sie muß schon existieren, um die Prämisse der Implikation zu erfüllen. Bei der Überprüfung dieser Eigenschaft betrachtet man alle Kens unabhängig voneinander, denn die Prämisse impliziert schon, daß {a,b,c,d} auf einem Ken liegen.

D4066 R ist zyklisch transitiv auf Kens :$\Leftrightarrow$
$\forall$ a,b,c,d $\bullet$ [a,b,c] $\in$ R $\wedge$ [a,c,d] $\in$ R $\wedge$ (b,d) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) $\Rightarrow$ [a,b,d] $\in$ R

Natürlich handelt es sich wieder um eine Abschwächung der zyklischen Transitivität.

T4067 R ist zyklisch transitiv $\Rightarrow$ R ist zyklisch transitiv auf Kens 3841, 4066

Zusammen mit dem folgenden Theorem sehen wir allerdings, daß es für totale Relationen sich in Wirklichkeit nicht um eine echte Abschwächung, sondern um eine Äquivalenz handelt. Der Grund ist offensichtlich: Es gibt überhaupt nur einen Ken.

T4068 R ist zyklisch transitiv auf Kens $\wedge$ R ist total $\Rightarrow$ R ist zyklisch transitiv

A4069	R ist zyklisch transitiv auf Kens	
A4070	R ist total	
G4071	R ist zyklisch transitiv	
G4072	$\forall$ a,b,c,d $\bullet$ [a,b,c] $\in$ R $\wedge$ [a,c,d] $\in$ R $\Rightarrow$ [a,b,d] $\in$ R	3841
VA4073	a,b,c,d $\bullet$ [a,b,c] $\in$ R $\wedge$ [a,c,d] $\in$ R	
G4074	[a,b,d] $\in$ R	
T4075∗	a $\in \mathbb{A} \wedge$ b $\in \mathbb{A} \wedge$ c $\in \mathbb{A} \wedge$ d $\in \mathbb{A}$	4073
T4076	$\mathcal{A}$([a,b,c]) $\subseteq \mathcal{A}$(R) $\wedge$ $\mathcal{A}$([a,c,d]) $\subseteq \mathcal{A}$(R)	1245, 4073
T4077	{a,b,c} $\subseteq \mathcal{A}$(R) $\wedge$ {a,c,d} $\subseteq \mathcal{A}$(R)	0329, 4076
T4078	b $\in \mathcal{A}$(R) $\wedge$ d $\in \mathcal{A}$(R)	4077
T4079	$\mathcal{A}$(R) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	2017, 4070
T4080	(b,d) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R)	0106, 4079, 4078
G4081	$\mathbb{T}$	4066, 4069, 4073, 4080

Zyklische Transitivität ist offenbar zusammen mit der Rotationssymmetrie ein wesentliches Merkmal zyklischer Ordnungen. Deshalb wird sie später bei der Axiomatisierung der zyklischen Ordnungen explizit gefordert. Man beachte jedoch: Für totale zyklische-Ordnungen haben wir die zyklische Transitivität nicht gefordert, sondern konnten sie ableiten. Insofern liefern uns die totalen, zyklischen Ordnungen ohne größere Anstrengung den Schlüssel zur Definition der allgemeinen, zyklischen Ordnungen. Separat betrachtet handelt es sich bei der zyklischen Transitivität eher um eine einfache und anschauliche Eigenschaft. Interessant werden die Zusammenhänge erst durch die Wechselwirkung der Axiome untereinander, insbesondere Vollständigkeit, Rotationsabgeschlossenheit und zyklischer Transitivität bei nichttotalen, zyklischen Ordnungen. Deshalb werden wir im gleichnamigen Abschnitt des folgenden Kapitels noch einmal auf diese interessante Eigenschaft zurückkommen.

6.9 Intervalle

Der Intervallbegriff, den wir schon für azyklische Ordnungen verwendet haben, ist auch für zyklische Ordnungen geeignet, wie das folgende Beispiel zeigt. $(x \cdots y)_{\mathrm{R}}$ bezeichnet also die Elemente die in einem Wort der Relation zwischen x und y (genauer nach x und vor y) liegen. Wie auch bei azyklischen Ordnungen ist also die Reihenfolge der das Intervall begrenzenden Elemente x und y wesentlich. Ein wichtiger Unterschied zu azyklischen Ordnungen (Theorem 3487), ist daß bei zyklischen Ordnungen die beiden Intervalle $(x \cdots y)_{\mathrm{R}}$ und $(x \cdots y)_{\mathrm{R}}$ nichtleer sein können, wie es im Beispiel zu sehen ist.

B4082

Für die totale, zyklische Ordnung R = $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2,3]}] aus Beispiel 3820 gilt $(0 \cdots 3)_{\mathrm{R}} = \{1{,}2\}$, $(0 \cdots 2)_{\mathrm{R}} = \{1\}$, $(0 \cdots 1)_{\mathrm{R}} = \emptyset$, $(0 \cdots 0)_{\mathrm{R}} = \emptyset$, $(3 \cdots 0)_{\mathrm{R}} = \emptyset$, $(2 \cdots 0)_{\mathrm{R}} = \{3\}$, $(1 \cdots 0)_{\mathrm{R}} = \{2{,}3\}$.

S4083

VA4084∗ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Daß die Reihenfolge der Argumente wichtig ist, wird noch einmal durch folgendes Theorem bestätigt, das nur Einfachheit, Teilwortabgeschlossenheit und Konsistenz modulo Rotation voraussetzt: Ein Element kann entweder zwischen x und y oder zwischen y und x liegen, aber nicht auf beiden Seiten bzgl. x und y. Der Begriff "zwischen" ist also (hier) nicht symmetrisch gemeint, wie man es aufgrund des Namen vermuten könnte.

T4085 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ $\Rightarrow$
$\forall$ x,y,z $\bullet$ z $\in (x \cdots y)_{\mathrm{R}} \Rightarrow$ z $\notin (y \cdots x)_{\mathrm{R}}$

A4086 R ist einfach

A4087 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen
A4088 R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$
VA4089 x,y,z $\bullet$ $z \in (x \cdots y)_R$
A4090 $z \in (y \cdots x)_R$
T4091 $[x,z,y] \in R$ . . . 3407, 4087, 4089
T4092 $[y,z,x] \in R$ . . . 3407, 4087, 4090
T4093∗ $x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A} \wedge z \in \mathbb{A}$ . . . 4092
T4094 $[x,z,y] \overset{\text{rot}}{\approx} [y,z,x]$ . . . 1547, 4088, 4091, 4092
T4095 [y,z,x] ist einfach . . . 1279, 4086, 4092
T4096 $x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z$ . . . 0379, 4095
T4097 $\mathbb{F}$ . . . 1222, 4096, 4094

Haben wir eine dreielementige Abhängigkeitklique, so liegt eines der drei Elemente zwischen den beiden anderen.

T4098 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist 3 -vollständig $\Rightarrow (\forall$ x,y,z $\bullet$ $\{x,y,z\} \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen $\wedge |\{x,y,z\}| = 3 \Rightarrow$
$z \in (x \cdots y)_R \vee z \in (y \cdots x)_R)$

A4099 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen
A4100 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist 3 -vollständig
VA4101 x,y,z $\bullet$ $\{x,z,y\} \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen $\wedge |\{x,z,y\}| = 3$
G4102 $z \in (x \cdots y)_R \vee z \in (y \cdots x)_R$
T4103 $[x,z,y] \in R \vee [y,z,x] \in R$ . . . 2346, 4100, 4101
G4104 $\mathbb{T}$ . . . 3407, 4099, 4103

Der intuitive Sachverhalt, daß man einen Kreis durch Aufschneiden an zwei verschiedenen Elementen in zwei sich ergänzende Teile zerlegen kann, wird durch die folgende Umformulierung des vorigen Theorems beschrieben. Tatsächlich wird dies sogar für alle Teilmengen des Kreises (also Abhängigkeitskliquen) behauptet. Formal ist dies eine Art Umkehrung von 4085, jedoch unter anderen Voraussetzungen sowie eingeschränkt auf Kliquen.

T4105 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist 3 -vollständig $\Rightarrow (\forall\ C \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen, $x \in C$, $y \in C \bullet x \neq y \Rightarrow$
$\forall\ z \in C - \{x,y\} \bullet z \notin (x \cdots y)_R \Rightarrow z \in (y \cdots x)_R)$

A4106 R ist einfach
A4107 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen
A4108 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen
A4109 R ist 3 -vollständig
VA4110 $C \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen
VA4111 $x \in C$, $y \in C \bullet x \neq y$
VA4112 $z \in C - \{x,y\}$
G4113 $z \notin (x \cdots y)_R \Rightarrow z \in (y \cdots x)_R$
T4114 $C \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 2014, 4110
T4115∗ $C \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \wedge x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A} \wedge z \in \mathbb{A}$ . . . 4114, 4111, 4112
T4116 $\{x,y,z\} \subseteq C$ . . . 4111, 4112
T4117 $\{x,y,z\} \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen . . . 0117, 4110, 4116
T4118 $x \neq z \wedge y \neq z$ . . . 4112
T4119 $|\{x,y,z\}| = 3$ . . . 4111, 4118
T4120 $z \in (x \cdots y)_R \vee z \in (y \cdots x)_R$ . . . 4098, 4106, 4107, 4108, 4109, 4117, 4119
G4121 $\mathbb{T}$ . . . 4120

Zusammengefaßt ist die einfache Aussage der vorigen Theoreme unter den genannten Bedingungen gerade $(x \cdots y)_R \cap (y \cdots x)_R = \emptyset$ und $(x \cdots y)_R \cup (y \cdots x)_R \cup \{x,y\} = C$. Wir haben also zusammen mit 3420 eine Partitionierung jeder Klique in drei Mengen: Die (aufschneidende) Menge {x,y}, und die beiden sich auf dem Kreis gegenüberliegenden Seiten $(x \cdots y)_{\mathrm{R}}$ und $(y \cdots x)_{\mathrm{R}}$.

Nun ergibt sich ein einfaches, aber interessantes Theorem unter Annahme von Teilwort- und Rotationsabgeschlossenheit sowie zyklischer Transitivität: Wir betrachten keine Klique, sondern wählen zwei Elemente x und y beliebig aus dem Alphabet. Dann sind die beiden Mengen $(x \cdots y)_{\mathrm{R}}$ und $(y \cdots x)_{\mathrm{R}}$ voneinander abhängig.

T4122 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist zyklisch transitiv $\Rightarrow$ $\forall$ x $\in \mathcal{A}$(R), y $\in \mathcal{A}$(R) $\bullet$ $\forall$ z $\in (x \cdots y)_{\mathrm{R}}$, z' $\in (y \cdots x)_{\mathrm{R}}$ $\bullet$ (z,z') $\in$ (li R)

A4123	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
A4124	R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	
A4125	R ist zyklisch transitiv	
VA4126	x $\in \mathcal{A}$(R), y $\in \mathcal{A}$(R)	
VA4127	z $\in (x \cdots y)_{\mathrm{R}}$	
VA4128	z' $\in (y \cdots x)_{\mathrm{R}}$	
G4129	(z,z') $\in$ (li R)	
T4130*	x $\in \mathbb{A} \wedge$ y $\in \mathbb{A} \wedge$ z $\in \mathbb{A} \wedge$ z' $\in \mathbb{A}$	4126, 4127, 4128
T4131	[x,z,y] $\in$ R	3407, 4123, 4127
T4132	[y,z',x] $\in$ R	3407, 4123, 4128
T4133	[y,z',x] $\overset{\mathrm{rot}}{\equiv}$ [x,y,z']	0501
T4134	[x,y,z'] $\in$ R	1343, 4124, 4132, 4133
T4135	[x,z,z'] $\in$ R	3841, 4125, 4131, 4134
G4136	$\mathbb{T}$	1900, 4135

Für totale, zyklische Ordnungen ist dieses Theorem trivial, da zwischen verschiedenen Elementen (und z und z' sind verschieden nach 4085) immer eine Abhängigkeit besteht. Die Totalität wurde oben jedoch gar nicht vorausgesetzt, d.h. das Theorem wird auch für die noch zu definierenden (allgemeinen) zyklischen Ordnungen anwendbar sein.

6.10 Unmittelbare Nachfolger

Eine unmittelbare Nachfolgerrelation $(\lessdot_{\mathrm{R}})$ hatten wir bei azyklischen Ordnungen mit Hilfe der gerichteten Abhängigkeitsrelation $(<_{\mathrm{R}})$ in 3521 definiert.

Nun kann im allgemeinen (wenn $\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq 1$) anhand einer gegebenen Relation nicht unterschieden werden, ob es sich um eine (totale) azyklische Ordnung oder eine (totale) zyklische Ordnung handelt, wie die folgenden Beispiele demonstrieren. Daraus folgt zwangsläufig, daß wir azyklische und zyklische unmittelbare Nachfolgerrationen voneinander unterscheiden müssen.

B4137

R = {[]} und R$'$ = {[0], []} sind sowohl totale, azyklische Ordnungen als auch totale, zyklische Ordnungen. Wir haben die azyklischen Nachfolgerrelationen $(\lessdot_{\mathrm{R}}) = (\lessdot_{\mathrm{R}'}) = \emptyset$. Für eine zyklische Nachfolgerrelation $(\prec\!\!\cdot_{\mathrm{R}})$ würden wir uns wünschen, daß $(\prec\!\!\cdot_{\mathrm{R}}) = \emptyset$ und $(\prec\!\!\cdot_{\mathrm{R}}) = \{(0,0)\}$ gilt.

Wir werden deshalb die Definition 3521 von $(\lessdot_{\mathrm{R}})$ leicht modifizieren, um zu einer (zyklischen) unmittelbaren Nachfolgerrelation $(\prec\!\!\cdot_{\mathrm{R}})$ zu gelangen. Da sich bei rotationsabgeschlossenen Relationen die gerichtete und die ungerichtete Abhängigkeitsrelation nicht unterscheiden, werden wir $(\prec\!\!\cdot_{\mathrm{R}})$ als Teilmenge von ($\underline{\mathrm{li}}$ R) (statt $(<_{\mathrm{R}})$) definieren: Zwei verschiedene abhängige Elemente (x,y) sind in der (zyklischen) unmittelbaren Nachfolgerrelation gdw. kein Element in einem Wort der Relation zwischen x und y liegt (dieser Teil der Definition bleibt unverändert). Da anders als bei azyklischen Ordnungen bei zyklischen Ordnungen ein Element durchaus sein eigener Nachfolger sein kann (wie im obigen Beispiel), erfordert der Fall x = y eine besondere Behandlung. Aber wann ist in ein Element sein eigener Nachfolger ? Dies ist genau dann der Fall, wenn es kein anderes Element gibt, das in einem Wort vor oder nach ihm vorkommt.

S4138

VA4139∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Zunächst folgt die oben erklärte Definition der (zyklischen) unmittelbaren Nachfolgerrelation $(\prec_R)$. Wir werden von nun an $(\lessdot_R)$ explizit als azyklische, unmittelbare Nachfolgerrelation bezeichnen.

D4140 $(\prec_R) := \{(x,y) \in (\underline{li}\ R) \bullet$
$(x = y \Rightarrow \neg\exists\ z \bullet [x,z] \in (\sqsupseteq)[R] \vee [z,x] \in (\sqsupseteq)[R]) \wedge$
$(x \neq y \Rightarrow \neg\exists\ z \bullet [x,z,y] \in (\sqsupseteq)[R])\}$

D4141∗ $x \prec_R y :\Leftrightarrow (x,y) \in (\prec_R)$

Die unmittelbare Nachfolgerrelation ist natürlich wieder eine binäre Relation auf dem Alphabet, die Teil der reflexiven Abhängigkeitsrelation ist.

T4142 $(\prec_R) \subseteq (\underline{li}\ R)$ 4140

T4143∗ $(\prec_R) \in \mathcal{BR}(\mathcal{A}(R))$ 1820, 4142

B4144

Die totale, zyklische Ordnung $R = (\overset{rot}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2]\}]$ aus Beispiel 3682 besitzt die unmittelbare Nachfolgerrelation $\prec_R = \{(0,1), (1,2), (2,0)\}$.

Für die totale, zyklische Ordnung $R = (\overset{rot}{\sqsupseteq})[\{[0,1]\}]$ aus Beispiel 3683 ergibt sich $\prec_R = \{(0,1), (1,0)\}$.

In der einelementigen, totalen, zyklischen Ordnung $R = \{[0], []\}$ aus Beispiel 3684 ist das Element 0 sein eigener Nachfolger, also $\prec_R = \{(0,0)\}$.

Die leere, zyklische Ordnung $R = \{[]\}$ hat natürlich eine leere, unmittelbare Nachfolgerrelation.

S4145

VA4146∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Da wir meist mit teilwortabgeschlossenen Relationen arbeiten werden, können wir alternativ zur Definition die folgende Gleichheit verwenden.

T4147 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\Rightarrow (\prec_R) = \{(x,y) \in (\underline{li}\ R) \bullet$
$(x = y \Rightarrow \neg\exists\ z \bullet [x,z] \in R \vee [z,x] \in R) \wedge$
$(x \neq y \Rightarrow \neg\exists\ z \bullet [x,z,y] \in R)\}$ 4140, 1416

Unter Spiegelung kehrt sich die unmittelbare Nachfolgerrelation um.

T4148 $x \prec_{(\mathrm{REV}\ R)} y \Leftrightarrow y \prec_R x$

- **T4149** $(x,y) \in (\underline{li}\ R) \Leftrightarrow (x,y) \in (\underline{li}\ (\mathrm{REV}\ R))$ 2680
- **T4150** $(x,y) \in (\underline{li}\ R) \Leftrightarrow (y,x) \in (\underline{li}\ (\mathrm{REV}\ R))$ 4149, 0077, 1825
- **T4151** $[x,z] \in (\sqsupseteq)[R] \Leftrightarrow [z,x] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{REV}\ R]$ 2640, 2552
- **T4152** $[x,z,y] \in (\sqsupseteq)[R] \Leftrightarrow [y,z,x] \in (\sqsupseteq)[\mathrm{REV}\ R]$ 2640, 2553
- **G4153** $\mathbb{T}$ 4150, 4151, 4152

Wir unterscheiden die Fälle: Ein Element ist sein eigener Nachfolger oder der Nachfolger ist ein anderes Element.

T4154 $x \prec_R x \Rightarrow \neg\exists\, z \bullet [x,z] \in R \vee [z,x] \in R$ . . . 4140, 1413
T4155 $x \neq y \wedge x \prec_R y \Rightarrow \neg\exists\, z \bullet [x,z,y] \in R$ . . . 4140, 1413

Setzen wir Einfachheit und Teilwortabgeschlossenheit der unterliegenden Relation voraus und betrachten zwei abhängige Elemente x und y so sind diese nach 1906 verschieden. Ist y kein unmittelbarer Nachfolger von x, so gibt es ein Wort [x,z,y], in dem x und y durch z getrennt werden.

T4156 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$
$(x,y) \in (\text{li } R) \wedge \neg\, x \prec_R y \Rightarrow \exists\, z \bullet [x,z,y] \in R$

A4157 R ist einfach
A4158 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen
A4159 $(x,y) \in (\text{li } R)$
A4160 $\neg\, x \prec_R y$
A4161 $\neg\exists\, z \bullet [x,z,y] \in R$
T4162 $x \neq y$ . . . 0073, 1906, 4157, 4159
T4163 $(x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ . . . 1821, 4159
T4164 $x \prec_R y$ . . . 4147, 4158, 4163, 4162, 4161
T4165 $\mathbb{F}$ . . . 4164, 4160

Ist dagegen, wiederum unter Annahme der Einfachheit, y ein unmittelbarer Nachfolger von x so gilt in jedem Fall, daß ein Wort der Form [x,z,y] nicht in der Relation stehen kann. Im Fall $x = y$ folgt dies aus der Einfachheit, im anderen Fall aus 4155.

T4166 R ist einfach $\wedge\ x \prec_R y \Rightarrow \neg\exists\, z \bullet [x,z,y] \in R$

A4167 R ist einfach
A4168 $x \prec_R y$
G4169 $\neg\exists\, z \bullet [x,z,y] \in R$
T4170∗ $x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A}$ . . . 4168
A4171 $x = y$
VA4172 $z \bullet [x,z,y] \in R$
T4173∗ $z \in \mathbb{A}$ . . . 4172
T4174 $[x,z,x] \in R$ . . . 4171, 4172
T4175 [x,z,x] ist einfach . . . 1279, 4167, 4174
T4176 $\mathbb{F}$ . . . 0379, 4175
G4177 $\mathbb{T}$ . . . 4176
A4178 $x \neq y$
G4179 $\mathbb{T}$ . . . 4155, 4178, 4168

Jetzt betrachten wir die Möglichkeit, daß ein Element sein eigener Vorgänger ist, etwas genauer. Intuitiv würden wir erwarten, daß es sich hier um einen Ken mit einem einzelnen Element handelt. Dies ist in der Tat der Fall.

S4180
VA4181∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Als Lemma verwenden wir die folgende Aussage: Teilwortabgeschlossenheit und Rotationsabgeschlossenheit seien vorausgesetzt. Ist dann ein Element x sein eigener unmittelbarer Nachfolger, so gibt es kein anderes von diesem abhängiges Element.

T4182 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
$x \prec_R x \wedge (x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R) \Rightarrow x = y$

A4183 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen
A4184 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen
A4185 $x \prec_R x$

A4186 $(x,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$

G4187 $x = y$

A4188 $x \neq y$

T4189 $\neg \exists\, z \bullet [x,z] \in R$ 4154, 4185

T4190 $(x,y) \in (\mathrm{li}\ R)$ 1827, 4188, 4186

T4191 $[x,y] \in R$ 1767, 4183, 4184, 4190

T4192 $\mathbb{F}$ 4189, 4191

Insbesondere ist in diesem Fall ein Nachfolger von x notwendigerweise mit x identisch.

T4193 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
$x \prec_R x \wedge x \prec_R y \Rightarrow x = y$ 4182, 4142

Aus 4182 ergibt sich das gewünschte Resultat sofort: Bei dem betrachteten Element handelt es sich um einen einelementigen Ken.

T4194 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
$x \prec_R x \Rightarrow \{x\} \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens

A4195 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen

A4196 R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen

A4197 $x \prec_R x$

G4198 $\{x\} \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens

T4199 $\{x\} \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen

T4200 $(x,x) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ 4142, 4197

G4201 $\mathbb{T}$ 0111, 4200

T4202 $\forall\, y \bullet (y,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R) \wedge (\forall\, x \in \{x\} \bullet (x,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)) \Rightarrow y \in \{x\}$

VA4203 $y \bullet (y,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$

A4204 $\forall\, x \in \{x\} \bullet (x,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$

G4205 $y \in \{x\}$

T4206 $(x,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ 4204

G4207 $x = y$

G4208 $\mathbb{T}$ 4182, 4195, 4196, 4197, 4206

G4209 $\mathbb{T}$ 0131, 1825, 4199, 4202

Für die im diesem Kapitel betrachteten totalen, zyklischen Ordnungen bedeutet dies nach 2024, daß die gesamte Struktur nur aus diesem Element besteht. Tatsächlich benötigen wir nur die zusätzliche Annahme der Totalität.

T4210 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist total $\wedge$
$x \prec_R x \Rightarrow \mathcal{A}(R) = \{x\}$

A4211 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen

A4212 R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen

A4213 R ist total

A4214 $x \prec_R x$

G4215 $\mathcal{A}(R) = \{x\}$

T4216 $\{x\} \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens 4194, 4211, 4212, 4214

T4217 $(\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $= \{\mathcal{A}(R)\}$ 2024, 4213

G4218 $\mathbb{T}$ 4216, 4217

T4219 R ist eine totale, zyklische Ordnung $\wedge\ x \prec_R x \Rightarrow \mathcal{A}(R) = \{x\}$ 3681, 4210

Eine Umkehrung von 4194 ist allein unter Annahme der Einfachheit ableitbar: Das Element eines einelementigen Kens ist sein eigener Nachfolger.

T4220 R ist einfach $\wedge$ R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen $\wedge$ $\{x\} \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kens $\Rightarrow x \prec_R x$

A4221 R ist einfach

A4222 R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen

A4223 $\{x\} \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kens

A4224 $\neg\, x \prec_R x$

T4225 $\{x\} \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 0124, 1820, 4223

T4226∗ $x \in \mathbb{A}$ . . . 4225

T4227 $(x,x) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ . . . 1822, 4225

VT4228 $z \bullet [x,z] \in R \vee [z,x] \in R$ . . . 4147, 4222, 4224, 4227

T4229∗ $z \in \mathbb{A}$ . . . 4228

T4230 $(x,z) \in (\text{li}\ R)$ . . . 1899, 4228

T4231 $x \neq z$ . . . 0073, 1906, 4221, 4230

T4232 $(x,z) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ . . . 1821, 4230

T4233 $\{x,z\} \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen . . . 0112, 1824, 1825, 4232

T4234 $\{x\} \subset \{x,z\}$ . . . 4231

T4235 $\mathbb{F}$ . . . 0126, 4223, 4233, 4234

Analoge Betrachtungen können wir an Strukturen anstellen, in denen für zwei verschiedene Elemente x und y beide Nachfolgerrelationen gelten, d.h. y ist unmittelbarer Nachfolger von x und umgekehrt. Wir erwarten wieder, daß die beiden Elemente einen Ken konstituieren. Dies ist gerade die Aussage des folgenden Theorems. Als Voraussetzungen benötigen wir Einfachheit, Rotationsabgeschlossenheit und Vollständigkeit der unterliegenden Relation.

S4236

VA4237∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T4238 R ist einfach $\wedge$ R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen $\wedge$ R ist vollständig $\wedge$
$x \neq y \wedge x \prec_R y \wedge y \prec_R x \Rightarrow \{x,y\} \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kens

A4239 R ist einfach

A4240 R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen

A4241 R ist vollständig

A4242 $x \neq y$

A4243 $x \prec_R y$

A4244 $y \prec_R x$

G4245 $\{x,y\} \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kens

T4246 $\{x,y\} \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen

T4247 $(x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ . . . 4142, 4243

G4248 $\mathbb{T}$ . . . 0112, 1824, 1825, 4247

T4249 $\neg\exists\, C \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet \{x,y\} \subset C$

VA4250 $C \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet \{x,y\} \subset C$

VT4251 $z \in C \bullet z \notin \{x,y\}$ . . . 4250

T4252 $\{x,y,z\} \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen

T4253 $\{x,y,z\} \subseteq C$ . . . 4250, 4251

G4254 $\mathbb{T}$ . . . 0117, 4250, 4253

T4255 $x \neq z \wedge y \neq z$ . . . 4251

T4256 $|\{x,y,z\}| = 3$ . . . 4242, 4255

T4257 R ist 3 -vollständig . . . 2215, 4241

T4258 $[x,y,z] \in R \vee [z,y,x] \in R$ . . . 2346, 4239, 4240, 4257, 4252, 4256

A4259 $[x,y,z] \in R$

T4260 $[x,y,z] \overset{\text{rot}}{\equiv} [y,z,x]$ . . . 0500

T4261 $[y,z,x] \in R$ . . . 1343, 4240, 4259, 4260

T4262 $\neg\exists\, z \bullet [y,z,x] \in R$ . . . 4155, 4242, 4244

T4263 $\mathbb{F}$ . . . 4261, 4262

A4264 $[z,y,x] \in R$

T4265 $[z,y,x] \overset{\text{rot}}{\equiv} [x,z,y]$ . . . 0501

T4266 $[x,z,y] \in R$ . . . 1343, 4240, 4264, 4265

T4267 $\neg\exists\, z \bullet [x,z,y] \in R$ . . . 4155, 4242, 4243
T4268 $\mathbb{F}$ . . . 4266, 4267
G4269 $\mathbb{T}$ . . . 0126, 4246, 4249

Haben wir in einer totalen, zyklischen Ordnung zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Elemente x und y, so liegen alle anderen Elemente zwischen y und x. Dies folgt aus dem nachfolgenden Theorem, wenn wir noch Rotationsabgeschlossenheit ausnutzen, um aus [z,x,y] das Wort [y,z,x] und damit $z \in (y \cdots x)_R$ zu erhalten.

S4270
VA4271∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
T4272 R ist einfach $\wedge$ R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen $\wedge$ R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$)-abgeschlossen $\wedge$
R ist 3 -vollständig $\wedge$ R ist total $\wedge\ \forall\, x \in \mathcal{A}(R),\ y \in \mathcal{A}(R) \bullet x \lessdot_R y \Rightarrow$
$\forall\, z \in \mathcal{A}(R) - \{x,y\} \bullet [z,x,y] \in R$
A4273 R ist einfach
A4274 R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen
A4275 R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen
A4276 R ist 3 -vollständig
A4277 R ist total
VA4278 $x \in \mathcal{A}(R),\ y \in \mathcal{A}(R)$
A4279 $x \lessdot_R y$
VA4280 $z \in \mathcal{A}(R) - \{x,y\}$
G4281 $[z,x,y] \in R$
T4282 $z \in \mathcal{A}(R)$ . . . 4280
T4283∗ $x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A} \wedge z \in \mathbb{A}$ . . . 4278, 4282
A4284 $x = y$
T4285 $x \lessdot_R x$ . . . 4284, 4279
T4286 $\mathcal{A}(R) = \{x\}$ . . . 4210, 4274, 4275, 4277, 4285
T4287 $\mathcal{A}(R) - \{x,y\} = \emptyset$ . . . 4286
T4288 $\mathbb{F}$ . . . 4280, 4287
A4289 $x \neq y$
T4290 $y \neq z$ . . . 4280
T4291 $x \neq z$ . . . 4280
T4292 $|\{x,y,z\}| = 3$ . . . 4289, 4290, 4291
T4293 $[x,y,z] \in R \vee [z,y,x] \in R$ . . . 2361, 4273, 4275, 4276, 4277, 4278, 4282, 4292
A4294 $[x,y,z] \in R$
T4295 $[x,y,z] \overset{\text{rot}}{\equiv} [z,x,y]$ . . . 0501
G4296 $\mathbb{T}$ . . . 1343, 4275, 4294, 4295
A4297 $[z,y,x] \in R$
T4298 $[z,y,x] \overset{\text{rot}}{\equiv} [x,z,y]$ . . . 0501
T4299 $[x,z,y] \in R$ . . . 1343, 4275, 4297, 4298
T4300 R ist einfach . . . 4273
T4301 $\neg\exists\, z \bullet [x,z,y] \in R$ . . . 4166, 4300, 4279
T4302 $\mathbb{F}$ . . . 4299, 4301

Besitzen alle Kens mindestens drei Elemente, so sind Alphabet, Abhängigkeitsrelation und unmittelbare Nachfolgerrelation ($\lessdot_R$) auf besonders einfache Weise aus der Angabe aller Intervalle $(x \cdots y)_R$ ableitbar.

S4303
VA4304∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A4305 R ist einfach
A4306 R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen
A4307 R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen

A4308	R ist 3 -vollständig	
A4309	$\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ 3 $\vert\leq\vert$ L	

Das Alphabet ist genau die Menge der Elemente, die zwischen zwei anderen liegen.

T4310	z $\in \mathcal{A}$(R) $\Leftrightarrow \exists$ x,y $\bullet$ z $\in (x \cdots y)_{\mathrm{R}}$	
A4311	z $\in \mathcal{A}$(R)	
T4312	(z,z) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R)	1822, 4311
T4313	{z} $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	0111, 4312
VT4314	L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ {z} $\subseteq$ L	0134, 4313
T4315	3 $\vert\leq\vert$ L	4309, 4314
VT4316	x,y $\bullet$ {x,y,z} $\subseteq$ L $\wedge$ $\vert${x,y,z}$\vert$ = 3	4315, 4314
T4317	L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	0125, 4314
T4318	{x,y,z} $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	0117, 4317, 4316
T4319	z $\in (x \cdots y)_{\mathrm{R}} \vee$ z $\in (y \cdots x)_{\mathrm{R}}$	4098, 4305, 4306, 4307, 4308, 4318, 4316
A4320	$\exists$ x,y $\bullet$ z $\in (x \cdots y)_{\mathrm{R}}$	
T4321	z $\in \mathcal{A}$(R)	3404, 4320
G4322	$\mathbb{T}$	4321, 4319

Zwei Elemente sind abhängig gdw. zwischen ihnen (in beliebiger Reihenfolge) ein weiteres Element liegt.

T4323	$\forall$ x $\in \mathcal{A}$(R), y $\in \mathcal{A}$(R) $\bullet$ (x,y) $\in$ (li R) $\Leftrightarrow (x \cdots y)_{\mathrm{R}} \cup (y \cdots x)_{\mathrm{R}} \neq \emptyset$	
VA4324	x $\in \mathcal{A}$(R), y $\in \mathcal{A}$(R)	
A4325	(x,y) $\in$ (li R)	
T4326	(x,y) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R)	1821, 4325
T4327	{x,y} $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	0112, 1824, 1825, 4326
VT4328	L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ {x,y} $\subseteq$ L	0134, 4327
T4329	3 $\vert\leq\vert$ L	4309, 4328
T4330	x $\neq$ y	0073, 1906, 4305, 4325
VT4331	z $\bullet$ {x,y,z} $\subseteq$ L $\wedge$ $\vert${x,y,z}$\vert$ = 3	4329, 4330, 4328
T4332	L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	0125, 4328
T4333	{x,y,z} $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	0117, 4332, 4331
T4334	z $\in (x \cdots y)_{\mathrm{R}} \vee$ z $(y \cdots x)_{\mathrm{R}}$	4098, 4305, 4306, 4307, 4308, 4333, 4331
T4335	$(x \cdots y)_{\mathrm{R}} \cup (y \cdots x)_{\mathrm{R}} \neq \emptyset$	4334
A4336	$(x \cdots y)_{\mathrm{R}} \cup (y \cdots x)_{\mathrm{R}} \neq \emptyset$	
T4337	$(x \cdots y)_{\mathrm{R}} \neq \emptyset \vee (y \cdots x)_{\mathrm{R}} \neq \emptyset$	4336
T4338	(x,y) $\in$ (li R) $\vee$ (y,x) $\in$ (li R)	3428, 4324, 4337
T4339	(x,y) $\in$ (li R)	0076, 1730, 4338
G4340	$\mathbb{T}$	4335, 4339

Zwei Elemente folgen unmittelbar aufeinander gdw. sie abhängig sind und zwischen ihnen kein anderes Element liegt.

T4341	x $\prec_{\mathrm{R}}$ y $\Leftrightarrow$ (x,y) $\in$ (li R) $\wedge$ $(x \cdots y)_{\mathrm{R}} = \emptyset$	
A4342	x $\prec_{\mathrm{R}}$ y	
T4343	(x,y) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R)	4142, 4342
T4344	x $\neq$ y	
A4345	x = y	
T4346	x $\prec_{\mathrm{R}}$ x	4342, 4345
T4347	{x} $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens	4194, 4306, 4307, 4346
T4348	3 $\vert\leq\vert$ {x}	4309, 4347
T4349	$\mathbb{F}$	4348
T4350	(x,y) $\in$ (li R)	1827, 4344, 4343
T4351	$(x \cdots y)_{\mathrm{R}} = \emptyset$	

A4352 $(x \cdots y)_{\mathrm{R}} \neq \emptyset$
VT4353 $\mathrm{z} \bullet \mathrm{z} \in (x \cdots y)_{\mathrm{R}}$ 4352
T4354 $[\mathrm{x,z,y}] \in \mathrm{R}$ 3407, 4306, 4353
T4355 $\mathbb{F}$ 4155, 4344, 4342, 4354
A4356 $(\mathrm{x,y}) \in (\mathrm{li\ R}) \wedge (x \cdots y)_{\mathrm{R}} = \emptyset$
T4357 $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ 0073, 1906, 4305, 4356
T4358 $(\mathrm{x,y}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ 1821, 4356
T4359 $\neg\exists\ \mathrm{z} \bullet \mathrm{z} \in (x \cdots y)_{\mathrm{R}}$ 4356
T4360 $\neg\exists\ \mathrm{z} \bullet [\mathrm{x,z,y}] \in \mathrm{R}$ 3407, 4306, 4359
T4361 $\mathrm{x} \prec_{\mathrm{R}} \mathrm{y}$ 4147, 4306, 4358, 4357, 4360
G4362 $\mathbb{T}$ 4350, 4351, 4361

6.11 Kens und Zyklen

Nachdem wir im vorigen Abschnitt die unmittelbare Nachfolgerrelation definiert und ein- und zweielementige Kens und Zyklen separat untersucht haben, betrachten wir nun die Korrespondenz zwischen Kens und Zyklen von unmittelbaren Nachfolgern für jede endliche Zahl von Elementen. Wir beschränken uns auf endliche Kens, da wir von ihnen intuitiv erwarten können, daß ihre Elemente auf einem Zyklus der unmittelbaren Nachfolgerrelation angeordnet sind.

Noch eine Bemerkung zur Allgemeinheit der Definitionen und Theoreme in diesem Abschnitt: Die totalen, zyklischen Ordnungen, die wir in diesem Kapitel untersuchen, besitzen genau einen Ken, auf dem alle Elemente liegen. Dies hatten wir schon als triviale Folgerung aus der Totalität in 2024 abgeleitet. Die Definitionen und Theoreme in diesem Abschnitt nutzten jedoch absichtlich die Totalität nicht aus und sind damit für den allgemeinen Fall, daß mehrere verschiedene Kens existieren, ausgelegt. Diese Allgemeinheit wird erst später für die Behandlung von zyklischen Ordnungen eine Rolle spielen. Einige der folgenden Theoreme sind für den Spezialfall der totalen Relationen sogar trivial. Trotzdem werden wir sie schon hier beweisen.

S4363

VA4364$*$ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Unter den uns interessierenden Bedingungen, die insbesondere für totale, zyklische Ordnungen erfüllt sind, ist jeder endliche, nichtleere Ken ein Zyklus (genauer gesagt: es gibt einen Zyklus, der genau die Elemente des Kens enthält), der in Form eines Wortes sogar in der Relation vorkommt. Die Forderung nach (starker) Vollständigkeit ist nötig um die Existenz eines geeigneten Wortes in der Relation abzuleiten. Von diesem Wort wird dann bewiesen, daß es sich um einen Zyklus handeln muß.

T4365 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist vollständig $\wedge$ R ist zyklisch transitiv $\Rightarrow$
$(\forall\ \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens $\bullet$ L ist endlich $\wedge\ 1 \leq |\mathrm{L}| \Rightarrow$
$\exists\ \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet$ w ist ein $(\prec_{\mathrm{R}})$ -Zyklus $\wedge\ \mathcal{A}(\mathrm{w}) = \mathrm{L})$

A4366 R ist einfach
A4367 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen
A4368 R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen
A4369 R ist vollständig
A4370 R ist zyklisch transitiv
VA4371 $\mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens
A4372 L ist endlich
A4373 $1 \leq |\mathrm{L}|$
G4374 $\exists\ \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet$ w ist ein $(\prec_{\mathrm{R}})$ -Zyklus $\wedge\ \mathcal{A}(\mathrm{w}) = \mathrm{L}$

T4375 $1 = |L| \vee 2 \leq |L|$ . . . 4373
A4376 $1 = |L|$
VT4377 $x \bullet L = \{x\}$ . . . 4376
T4378 $\{x\} \in (\underline{li}\ R)$ -Kens . . . 4377, 4371
T4379 $x \prec_R x$ . . . 4220, 4366, 4367, 4378
T4380 $x \in \mathcal{A}(R)$ . . . 4143, 4379
T4381 $[x] \in R$ . . . 1325, 4367, 4380
T4382 $[x]$ ist ein $(\prec_R)$ -Zyklus . . . 1233, 4379
T4383 $\mathcal{A}([x]) = L$ . . . 4377, 0327
G4384 $\mathbb{T}$ . . . 4381, 4382, 4383
A4385 $2 \leq |L|$
T4386 $L \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen . . . 0125, 4371
VT4387 $w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = L$ . . . 2209, 4369, 4386, 4372
T4388∗ $w \in \mathbb{A}^*$ . . . 4387
T4389 w ist einfach . . . 1279, 4366, 4387
T4390 $2 \leq \mathcal{L}(w)$ . . . 0373, 4389, 4387, 4385
G4391 w ist ein $(\prec_R)$ -Zyklus . . . 4387
A4392 $\neg$ w ist ein $(\prec_R)$ -Zyklus
VT4393 $u \bullet w \overset{rot}{\equiv} u \wedge \neg\, u_0 \prec_R u_1$ . . . 1234, 4390, 4392
T4394∗ $u \in \mathbb{A}^*$ . . . 4393
T4395 $u \in R$ . . . 1343, 4368, 4387, 4393
T4396 u ist einfach . . . 1279, 4366, 4395
T4397 $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(w)$ . . . 0520, 4393
T4398 $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(w)$ . . . 0519, 4393
T4399 $\mathcal{A}(u) = L$ . . . 4398, 4387
T4400 $2 \leq \mathcal{L}(u)$ . . . 4397, 4390
T4401 $0 \in \mathcal{I}(u) \wedge 1 \in \mathcal{I}(u)$ . . . 0298, 4400
T4402 $(u_0,u_1) \in (li\ R)$ . . . 1733, 4395, 4401
VT4403 $z \bullet [u_0, z, u_1] \in R$ . . . 4156, 4366, 4367, 4402, 4393
T4404 $(u_0, z) \in (li\ R)$ . . . 1900, 4403
T4405 $\forall\, i \in \mathcal{I}(u) \bullet 1 \leq i \Rightarrow [u_0, z, u_i] \in R$
T4406 $0 \in \mathcal{I}(u) \wedge 1 \leq 0 \Rightarrow [u_0, z, u_i] \in R$
T4407 $\forall\, i \in \mathbb{N} \bullet (i \in \mathcal{I}(u) \wedge 1 \leq i \Rightarrow [u_0, z, u_i] \in R) \Rightarrow$
$(i + 1 \in \mathcal{I}(u) \wedge 1 \leq i + 1 \Rightarrow [u_0, z, u_{i+1}] \in R)$
VA4408∗ $i \in \mathbb{N}$
A4409 $i \in \mathcal{I}(u) \wedge 1 \leq i \Rightarrow [u_0, z, u_i] \in R$
A4410 $i + 1 \in \mathcal{I}(u)$
A4411 $1 \leq i + 1$
G4412 $[u_0, z, u_{i+1}] \in R$
A4413 $i = 0$
G4414 $[u_0, z, u_1] \in R$ . . . 4413
G4415 $\mathbb{T}$ . . . 4403
A4416 $1 \leq i$
T4417 $i \in \mathcal{I}(u)$ . . . 0300, 4410
T4418 $[u_0, z, u_i] \in R$ . . . 4409, 4417, 4416
T4419 $[u_0, u_i, u_{i+1}] \in R$
T4420 $[u_0, u_i, u_{i+1}] \sqsubseteq u$ . . . 0585, 4401, 4417, 4410, 4416
G4421 $\mathbb{T}$ . . . 1315, 4367, 4395, 4420
G4422 $\mathbb{T}$ . . . 3841, 4370, 4418, 4419
G4423 $\mathbb{T}$ . . . 4406, 4407
T4424 $\forall\, i \in \mathcal{I}(u) \bullet 1 \leq i \Rightarrow (u_i, z) \in (li\ R)$ . . . 1900, 4405
T4425 $\forall\, i \in \mathcal{I}(u) \bullet (u_i, z) \in (li\ R)$ . . . 4404, 4424
T4426 $\forall\, x \in L \bullet (x,z) \in (li\ R)$
VA4427 $x \in L$
G4428 $(x,z) \in (li\ R)$
T4429 $x \in \mathcal{A}(u)$ . . . 4399, 4427

VT4430	$i \in \mathcal{I}(u) \bullet x = u_i$	0356, 4429
G4431	$\mathbb{T}$	4425, 4430
T4432	$(L \cup \{z\}) \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen	
T4433	$(z,z) \in (\underline{li}\ R)$	1903, 4403
T4434	$\forall\ x \in L \bullet (x,z) \in (\underline{li}\ R)$	4426, 1821
G4435	$\mathbb{T}$	0119, 1825, 4386, 4433, 4434
T4436	$L \subset (L \cup \{z\})$	
T4437	$L \subseteq L \cup \{z\}$	
T4438	$\forall\ x \in L \bullet x \neq z$	1916, 4366, 4426
T4439	$z \notin L$	4438
G4440	$\mathbb{T}$	4437, 4439
T4441	$\neg\exists\ L' \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen $\bullet\ L \subset L'$	0126, 4371
T4442	$\mathbb{F}$	4441, 4432, 4436

Daß es sich unter den Voraussetzungen des vorigen Theorems umgekehrt bei jedem Zyklus um einen Ken handelt, können wir nicht erwarten, wie das folgende einfache Beispiel zeigt.

B4443

Wir definieren R = {[0,1], [1,0], [0,2], [2,0], [0], [1], [2], []}. R ist einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen und trivialerweise vollständig und zyklisch transitiv. Es gilt $\mathcal{A}(R) = \{0,1,2\}$ und (li R) = {(0,1), (1,0), (0,2), (2,0)}. Offenbar ist R nicht total, da die Elemente 1 und 2 in keinem Wort gemeinsam vorkommen. R ist also keine totale, zyklische Ordnung. Die Menge der Kens ist $(\underline{li}\ R)$ -Kens = {{0,1}, {0,2}}. Als unmittelbare Nachfolgerrelation ergibt sich $(\prec_R)$ = {(0,1), (1,0), (0,2), (2,0) }. [0,1,0,2] ist ein Zyklus dieser Relation. $\mathcal{A}([0,1,0,2])$ ist jedoch kein Ken. Jeder einfache Zyklus, wie z.B. [0,1] und [2,0] entspricht jedoch einem Ken.

Die Relation in diesem Beispiel ist nicht total. Für totale Relationen können wir unter den üblichen Voraussetzungen tatsächlich zeigen, daß jeder Zyklus einem Ken entspricht. Hierzu benötigen wir jedoch einige Lemmata.

S4444

VA4445∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ w \in \mathbb{A}^*$

Wir betrachten einfache Ketten der unmittelbaren Nachfolgerrelation. Handelt es sich bei einer solchen Kette um eine Abhängigkeitsklique, so ist diese Kette als Wort in der Relation enthalten. Da jeder Zyklus eine Kette ist, gilt das Theorem natürlich auch für Zyklen.

T4446 $\forall\ w \in \mathbb{A}^* \bullet$ R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{rot}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist vollständig $\wedge$ w ist einfach $\wedge$ w ist eine $(\prec_R)$ -Kette $\wedge$ $\mathcal{A}(w) \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen $\Rightarrow w \in R$

VA4447∗	$w \in \mathbb{A}^*$	
A4448	R ist einfach	
A4449	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
A4450	R ist $(\overset{rot}{\equiv})$ -abgeschlossen	
A4451	R ist vollständig	
A4452	w ist einfach	
A4453	w ist ein $(\prec_R)$ -Kette	
A4454	$\mathcal{A}(w) \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen	
G4455	$w \in R$	
A4456	$\mathcal{L}(w) = 0$	
G4457	$[] \in R$	0362, 4456
G4458	$\mathbb{T}$	2228, 4451
A4459	$1 \leq \mathcal{L}(w)$	
T4460	$\mathcal{A}(w)$ ist endlich	0240

VT4461	$u \in R \bullet \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(w)$	2209, 4454, 4460
T4462$*$	$u \in \mathbb{A}^*$	4461
T4463	u ist einfach	1279, 4448, 4461
T4464	$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(w)$	0373, 4463, 0373, 4452, 4461
A4465	$u \overset{\text{rot}}{\equiv} w$	
G4466	$\mathbb{T}$	1343, 4450, 4461, 4465
A4467	$\neg\, u \overset{\text{rot}}{\equiv} w$	
T4468	$0 \in \mathcal{I}(w)$	0298, 4459
VT4469	$u' \bullet u' \overset{\text{rot}}{\equiv} u \wedge u'_0 = w_0$	
T4470	$w_0 \in \mathcal{A}(w)$	0350, 4468
T4471	$w_0 \in \mathcal{A}(u)$	4461, 4470
VT4472	$i \in \mathcal{I}(u) \bullet u_i = w_0$	0356, 4471
D4473	$u' := (u \gg (-\, i))$	
T4474$*$	$u' \in \mathbb{A}^*$	4473
T4475	$u'_0 = u_i$	4473, 0483, 4472
T4476	$u'_0 = w_0$	4472, 4475
T4477	$u' \overset{\text{rot}}{\equiv} u$	0491, 4473
G4478	$\mathbb{T}$	4477, 4476
T4479$*$	$u' \in \mathbb{A}^*$	4469
T4480	$u' \in R$	
T4481	$u \overset{\text{rot}}{\equiv} u'$	0513, 4469
G4482	$\mathbb{T}$	1343, 4450, 4461, 4481
T4483	$\mathcal{L}(u') = \mathcal{L}(w)$	
T4484	$\mathcal{L}(u') = \mathcal{L}(u)$	0520, 4469
G4485	$\mathbb{T}$	4464, 4484
T4486	$\mathcal{I}(u') = \mathcal{I}(w)$	0299, 4483
T4487	$u' \neq w$	
A4488	$u' = w$	
T4489	$w \overset{\text{rot}}{\equiv} u$	4488, 4469
T4490	$u \overset{\text{rot}}{\equiv} w$	0513, 4489
T4491	$\mathbb{F}$	4467, 4490
VT4492	$i \bullet i$ ist minimal in $\{i \in \mathcal{I}(u') \bullet u'_i \neq w_i\}$	
T4493	$\mathcal{I}(u') \subseteq \mathbb{N}$	0237
T4494	$\{i \in \mathcal{I}(u') \bullet u'_i \neq w_i\} \subseteq \mathbb{N}$	4493
T4495	$\{i \in \mathcal{I}(u') \bullet u'_i \neq w_i\} \neq \emptyset$	
G4496	$\exists\, i \in \mathcal{I}(u') \bullet u'_i \neq w_i$	
G4497	$\mathbb{T}$	0359, 4487, 4486
G4498	$\mathbb{T}$	0186, 4494, 4495
T4499$*$	$i \in \mathcal{I}(u')$	0187, 4492
T4500	$u'_i \neq w_i$	0187, 4492
T4501	$1 \leq i$	
A4502	$\neg\, 1 \leq i$	
T4503	$i = 0$	4502
T4504	$u'_0 \neq w_0$	4503, 4500
T4505	$\mathbb{F}$	4469, 4504
T4506	$i \in \mathcal{I}(w)$	4486, 4499
T4507	$0 \leq i - 1$	4501
T4508	$i - 1 \in \mathcal{I}(w)$	0300, 4507, 4506
T4509	$w_{i\,-\,1} \prec_R w_i$	1226, 4453, 4508, 4506
T4510	$\mathcal{A}(u') = \mathcal{A}(w)$	
T4511	$\mathcal{A}(u') = \mathcal{A}(u)$	0519, 4469
G4512	$\mathbb{T}$	4461, 4511
VT4513	$j \in \mathcal{I}(u') \bullet u'_j = w_i$	
T4514	$w_i \in \mathcal{A}(w)$	0350, 4506
T4515	$w_i \in \mathcal{A}(u')$	4510, 4514
G4516	$\mathbb{T}$	0356, 4515

T4517∗ $j \in \mathbb{N}$ . . . 4513
T4518 $j \in \mathcal{I}(w)$ . . . 4486, 4513
T4519 $\forall\, k \in \mathcal{I}(u') \bullet k < i \Rightarrow u'_k = w_k$
  VA4520 $k \in \mathcal{I}(u')$
  T4521∗ $k \in \mathbb{N}$ . . . 4520
  G4522 $k < i \Rightarrow u'_k = w_k$
  G4523 $u'_k \neq w_k \Rightarrow i \leq k$
  T4524 $\forall\, k \in \{i \in \mathcal{I}(u') \bullet u'_i \neq w_i\} \bullet i \leq k$ . . . 0188, 4492
  T4525 $\forall\, k \bullet k \in \mathcal{I}(u') \wedge u'_k \neq w_k \Rightarrow i \leq k$ . . . 4524
  G4526 $\mathbb{T}$ . . . 4525, 4520
T4527 $i < j$
  A4528 $j = i$
    T4529 $u'_i = w_i$ . . . 4528, 4513
    T4530 $\mathbb{F}$ . . . 4500, 4529
  A4531 $j < i$
    T4532 $u'_j = w_j$ . . . 4519, 4513, 4531
    T4533 $w_i = w_j$ . . . 4532, 4513
    T4534 $i \neq j$ . . . 4531
    T4535 $w_j \neq w_i$ . . . 0372, 4452, 4506, 4518, 4534
    T4536 $\mathbb{F}$ . . . 4533, 4535
  G4537 $\mathbb{T}$ . . . 4530, 4536
T4538 $i - 1 \in \mathcal{I}(u')$ . . . 4486, 4508
T4539 $[u'_{i-1}, u'_i, u'_j] \sqsubseteq u'$ . . . 0585, 4538, 4499, 4513, 4527
T4540 $[u'_{i-1}, u'_i, u'_j] \in R$ . . . 1315, 4449, 4480, 4539
T4541 $\neg\, u'_{i-1} \prec_R u'_j$ . . . 4166, 4448, 4540
T4542 $\neg\, w_{i-1} \prec_R w_i$
  T4543 $u'_{i-1} = w_{i-1}$ . . . 4519, 4538
  G4544 $\mathbb{T}$ . . . 4541, 4543
T4545 $\mathbb{F}$ . . . 4542, 4509

Das vorige Theorem läßt sich formal als eine abgeschwächte Umkehrung von 4365 deuten. Man könnte es jedoch auch als eine modifizierte Umkehrung von 2006 auffassen.

Wir haben im vorigen Beispiel 4443 schon gesehen, daß, wenn wir die Totalität nicht annehmen, Zyklen von unmittelbaren Nachfolgern nicht immer Kens entsprechen. Für einige Zyklen ist dies jedoch der Fall. Im allgemeinen gilt dies, wenn der Zyklus einfach und schon eine Abhängigkeitsklique ist, wie folgendes Theorem zeigt.

S4546

VA4547∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Unter unseren üblichen Voraussetzungen sind einfache Zyklen von unmittelbaren Nachfolgern, die auch Abhängigkeitskliquen sind, sogar maximale Kliquen, also Kens. Tatsächlich benötigt man um dies zu zeigen nur die 3 -Vollständigkeit anstatt der (starken) Vollständigkeit.

T4548 $\forall\, w \in \mathbb{A}^* \bullet$ R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist 3 -vollständig $\wedge$ R ist zyklisch transitiv $\wedge$ w ist einfach $\wedge$ w ist ein $(\prec_R)$ -Zyklus $\wedge$ $\mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen $\Rightarrow \mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kens

VA4549∗ $w \in \mathbb{A}^*$
A4550 R ist einfach
A4551 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen
A4552 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen
A4553 R ist 3 -vollständig
A4554 R ist zyklisch transitiv
A4555 w ist einfach

A4556 w ist ein $(\prec_R)$ -Zyklus
A4557 $\mathcal{A}(w) \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen
G4558 $\mathcal{A}(w) \in (\underline{li}\ R)$ -Kens
A4559 $\mathcal{L}(w) \leq 1$
  T4560 $1 \leq \mathcal{L}(w)$ . . . 1231, 4556
  T4561 $\mathcal{L}(w) = 1$ . . . 4559, 4560
  VT4562 $w = [w_0]$ . . . 0363, 4561
  T4563 $w_{\mathcal{L}(w) - 1} \prec_R w_0$ . . . 1231, 4556
  T4564 $w_0 \prec_R w_0$ . . . 4561, 4563
  T4565 $\{w_0\} \in (\underline{li}\ R)$ -Kens . . . 4194, 4551, 4552, 4564
  T4566 $\mathcal{A}(w) = \{w_0\}$ . . . 4562, 0327
  G4567 $\mathbb{T}$ . . . 4566, 4565
A4568 $1 < \mathcal{L}(w)$
  A4569 $\mathcal{A}(w) \notin (\underline{li}\ R)$ -Kens
  T4570 $0 \in \mathcal{I}(w)$ . . . 0298, 4568
  VT4571 $y \bullet (y,y) \in (\underline{li}\ R) \wedge (\forall\ x \in \mathcal{A}(w) \bullet (x,y) \in (\underline{li}\ R)) \wedge y \notin \mathcal{A}(w)$ 0131, 1825, 4569, 4557
  T4572 $\forall\ a \in \mathcal{A}(w),\ b \in \mathcal{A}(w) \bullet \{y,a,b\} \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen
    VA4573 $a \in \mathcal{A}(w),\ b \in \mathcal{A}(w)$
    G4574 $\{y,a,b\} \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen
    T4575 $\{a,b\} \subseteq \mathcal{A}(w)$ . . . 4573
    T4576 $\{a,b\} \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen . . . 0117, 4557, 4575
    T4577 $(y,y) \in (\underline{li}\ R)$ . . . 4571
    T4578 $\forall\ x \in \{a,b\} \bullet (x,y) \in (\underline{li}\ R)$ . . . 4571, 4575
    T4579 $\{a,b\} \cup \{y\} \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen . . . 0119, 1825, 4576, 4577, 4578
    G4580 $\mathbb{T}$ . . . 4579
  T4581 $\forall\ a \in \mathcal{A}(w),\ b \in \mathcal{A}(w) \bullet a \neq b \wedge a \prec_R b \Rightarrow [y,a,b] \in R$
    VA4582 $a \in \mathcal{A}(w),\ b \in \mathcal{A}(w)$
    A4583 $a \neq b$
    A4584 $a \prec_R b$
    G4585 $[y,a,b] \in R$
    T4586 $\{y,a,b\} \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen . . . 4572, 4582
    T4587 $|\{y,a,b\}| = 3$
      T4588 $y \notin \mathcal{A}(w)$ . . . 4571
      T4589 $y \neq a \wedge y \neq b$ . . . 4582, 4588
      G4590 $\mathbb{T}$ . . . 4583, 4589
    T4591 $[y,a,b] \in R \vee [b,a,y] \in R$ . . . 2346, 4550, 4552, 4553, 4586, 4587
    A4592 $[y,a,b] \in R$
      G4593 $\mathbb{T}$ . . . 4592
    A4594 $[b,a,y] \in R$
      T4595 $[b,a,y] \stackrel{rot}{\equiv} [a,y,b]$ . . . 0500
      T4596 $[a,y,b] \in R$ . . . 1343, 4552, 4594, 4595
      T4597 $\neg\exists\ z \bullet [a,z,b] \in R$ . . . 4155, 4583, 4584
      T4598 $\mathbb{F}$ . . . 4596, 4597
  T4599 $\forall\ i \in \mathbb{N} \bullet i \in \mathcal{I}(w) \wedge 1 \leq i \Rightarrow [y,\ w_0,\ w_i] \in R$
    T4600 $0 \in \mathcal{I}(w) \wedge 1 \leq 0 \Rightarrow [y,\ w_0,\ w_0] \in R$
    T4601 $\forall\ i \in \mathbb{N} \bullet (i \in \mathcal{I}(w) \wedge 1 \leq i \Rightarrow [y,\ w_0,\ w_i] \in R) \Rightarrow$
    $(i + 1 \in \mathcal{I}(w) \wedge 1 \leq i + 1 \Rightarrow [y,\ w_0,\ w_{i+1}] \in R)$
      VA4602* $i \in \mathbb{N}$
      A4603 $i \in \mathcal{I}(w) \wedge 1 \leq i \Rightarrow [y,\ w_0,\ w_i] \in R$
      A4604 $i + 1 \in \mathcal{I}(w)$
      A4605 $1 \leq i + 1$
      G4606 $[y,\ w_0,\ w_{i+1}] \in R$
      T4607 w ist eine $(\prec_R)$ -Kette . . . 1231, 4556
      T4608 $0 \leq i$ . . . 4605
      A4609 $i = 0$
        G4610 $[y,\ w_0,\ w_1] \in R$ . . . 4609

T4611	$1 \in \mathcal{I}(w)$	4604, 4609
T4612	$w_0 \prec_R w_1$	1226, 4607, 4570, 4611
T4613	$w_0 \neq w_1$	0372, 4555, 4570, 4611
T4614	$w_0 \in \mathcal{A}(w)$	0350, 4570
T4615	$w_1 \in \mathcal{A}(w)$	0350, 4611
G4616	$\mathbb{T}$	4581, 4614, 4615, 4613, 4612
A4617	$1 \leq i$	
T4618	$i \in \mathcal{I}(w)$	0300, 4604, 4608
T4619	$[y, w_0, w_i] \in R$	4603, 4618, 4617
T4620	$[y, w_i, w_{i+1}] \in R$	
T4621	$w_i \in \mathcal{A}(w)$	0350, 4618
T4622	$w_{i+1} \in \mathcal{A}(w)$	0350, 4604
T4623	$w_i \neq w_{i+1}$	0372, 4555, 4618, 4604
T4624	$w_i \prec_R w_{i+1}$	1226, 4607, 4618, 4604
G4625	$\mathbb{T}$	4581, 4621, 4622, 4623, 4624
T4626	$[y, w_0, w_{i+1}] \in R$	3841, 4554, 4619, 4620
G4627	$\mathbb{T}$	4626
G4628	$\mathbb{T}$	4600, 4601
T4629	$\mathcal{L}(w) - 1 \in \mathcal{I}(w)$	0298, 4568
T4630	$[y, w_0, w_{\mathcal{L}(w)-1}] \in R$	
T4631	$1 \leq \mathcal{L}(w) - 1$	4568
G4632	$\mathbb{T}$	4599, 4629, 4631
T4633	$[y, w_{\mathcal{L}(w)-1}, w_0] \in R$	
T4634	$w_{\mathcal{L}(w)-1} \in \mathcal{A}(w)$	0350, 4629
T4635	$w_0 \in \mathcal{A}(w)$	0350, 4570
T4636	$\mathcal{L}(w) - 1 \neq 0$	4568
T4637	$w_{\mathcal{L}(w)-1} \neq w_0$	0372, 4555, 4629, 4570, 4636
T4638	$w_{\mathcal{L}(w)-1} \prec_R w_0$	1231, 4556
G4639	$\mathbb{T}$	4581, 4634, 4635, 4637, 4638
T4640	$[y, w_0, w_0] \in R$	3841, 4554, 4630, 4633
T4641	$[y, w_0, w_0]$ ist einfach	1279, 4550, 4640
T4642	$\mathbb{F}$	0379, 4641

Daß sich die Einfachheit der Zyklen im vorigen Theorem sogar noch eliminieren läßt, überlegt man sich wie folgt: Jeder Zyklus enthält einen einfachen Zyklus. Dieser Zyklus ist wie der ursprüngliche ebenfalls eine Abhängigkeitsklique und damit nach dem Theorem ein Ken. Aufgrund der Maximalität des Kens kann der ursprüngliche Zyklus nicht echt größer gewesen sein, was die Menge seiner Elemente betrifft. Seine Elemente werden also genau durch diesen Ken gegeben.

Für totale Relationen ist natürlich jede Teilmenge von $\mathcal{A}(R)$ eine Abhängigkeitsklique, so daß bei totalen, zyklischen Ordnungen jeder (einfache) Zyklus einem Ken entspricht.

T4643 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist 3 -vollständig $\wedge$ R ist total $\wedge$ w ist einfach $\wedge$ w ist ein $(\prec_R)$ -Zyklus $\Rightarrow \mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kens

A4644	R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist 3 -vollständig $\wedge$ R ist zyklisch transitiv	
A4645	R ist total	
A4646	w ist einfach	
A4647	w ist ein $(\prec_R)$ -Zyklus	
G4648	$\mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kens	
T4649	$\mathcal{A}(w) \subseteq \mathcal{F}(\prec_R)$	1232, 4647
T4650	$\mathcal{A}(w) \subseteq \mathcal{A}(R)$	4649, 4143
T4651	$\mathcal{A}(R) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen	2017, 4645
T4652	$\mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen	0117, 4651, 4650

G4653 $\mathbb{T}$ 4548, 4644, 4646, 4647, 4652

6.12 Repräsentation durch unmittelbare Nachfolger

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß eine endliche, totale, zyklische Ordnung allein durch Angabe der unmittelbaren Nachfolgerrelation eindeutig bestimmt ist. Für unendliche, totale, zyklische Ordnungen können wir ein entsprechendes Resultat nicht erwarten, da die Nachfolgerrelation im Extremfall leer sein kann (wenn zwischen je zwei Elementen ein weiteres liegt) und somit keinerlei Aussagen über die relative Lage der Elemente zueinander liefert.

Tatsächlich benötigen wir nur einen einfachen Zyklus w der unmittelbaren Nachfolgerrelation ($\prec_R$), um eine endliche, totale, zyklische Ordnung R eindeutig zu bestimmen: Der Zyklus w entspricht einem Ken $\mathcal{A}(w)$. Da R total ist, ist $\mathcal{A}(w)$ der einzige Ken der Relation. Mit Hilfe von Theorem 4446 erhalten wir $w \in R$. Da $\mathcal{A}(w)$ eine maximale Abhängigkeitsklique ist, gilt für jede Abhängigkeitsklique, also insbesondere $\mathcal{A}(u)$ für $u \in R$, daß $\mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(w)$ ist. Aufgrund der Konsistenz modulo Rotation ist jedes $u \in R$ konsistent mit w modulo Rotation. Damit gilt $u \overset{\mathrm{rot}}{\sqsubseteq} w$. Jedes Wort $u \in R$ ist also ein rotiertes Teilwort von w. Da R rotations- und teilwortabgeschlossen ist, sind alle rotierten Teilwörter von w in R enthalten. Wir haben also $R = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{w\}]$.

S4654

VA4655∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ w \in \mathbb{A}^*$

T4656 R ist eine totale, zyklische Ordnung $\wedge$ R ist endlich $\wedge\ \mathcal{A}(R) \neq \emptyset \Rightarrow$
$\exists\, w \in R \bullet$ w ist einfach $\wedge$ w ist ein ($\prec_R$) -Zyklus $\wedge\ \mathcal{A}(w) = \mathcal{A}(R)$

A4657 R ist eine totale, zyklische Ordnung
A4658 R ist endlich
A4659 $\mathcal{A}(R) \neq \emptyset$
G4660 $\exists\, w \in R \bullet$ w ist einfach $\wedge$ w ist ein ($\prec_R$) -Zyklus $\wedge\ \mathcal{A}(w) = \mathcal{A}(R)$
T4661 R ist einfach 3681, 4657
T4662 R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen $\wedge$ R ist ($\overset{\mathrm{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen $\wedge$
R ist vollständig 3681, 4657
T4663 R ist zyklisch transitiv 4062, 4657
T4664 R ist total 3681, 4657
T4665 ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kens = $\{\mathcal{A}(R)\}$ 2024, 4664
T4666 $\mathcal{A}(R) \in$ ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kens 4665
T4667 $\mathcal{A}(R)$ ist endlich 1293, 4658
T4668 1¡= $|\mathcal{A}(R)|$ 4667, 4659
T4669 $w \in R \bullet$ w ist ein ($\prec_R$) -Zyklus $\wedge\ \mathcal{A}(w) = \mathcal{A}(R)$ . . . .
. . . . 4365, 4661, 4662, 4663, 4666, 4667, 4668
T4670 w ist einfach 1279, 4661, 4669
G4671 $\mathbb{T}$ 4669, 4670

T4672 R ist eine totale, zyklische Ordnung $\wedge$ w ist einfach $\wedge$
w ist ein ($\prec_R$) -Zyklus $\Rightarrow R = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{w\}]$

A4673 R ist eine totale, zyklische Ordnung
A4674 w ist einfach
A4675 w ist ein ($\prec_R$) -Zyklus
G4676 $R = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{w\}]$
T4677 R ist einfach 3681, 4673
T4678 R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen 3681, 4673
T4679 R ist ($\overset{\mathrm{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen 3681, 4673
T4680 R ist total 3681, 4673
T4681 R ist vollständig 3681, 4673

T4682	R ist konsistent modulo $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$	3681, 4673
T4683	R ist 3 -vollständig	2215, 4681
T4684	$\mathcal{A}(\mathrm{w}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens	4643, 4677, 4678, 4679, 4683, 4680, 4674, 4675
T4685	$\mathcal{A}(\mathrm{w}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen	0125, 4684
T4686	w ist eine $(\lessdot_{\mathrm{R}})$ -Kette	1231, 4675
T4687	$\mathrm{w} \in \mathrm{R}$	4446, 4677, 4678, 4679, 4681, 4674, 4686, 4685
T4688	R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})$ -abgeschlossen	1463, 4678, 4679
T4689	$(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{\mathrm{w}\}] \subseteq \mathrm{R}$	1313, 4688, 4687
G4690	$\mathrm{R} \subseteq (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{\mathrm{w}\}]$	4689
G4691	$\forall\, \mathrm{u} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{u} \in (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{\mathrm{w}\}]$	
VA4692	$\mathrm{u} \in \mathrm{R}$	
G4693	$\mathrm{u} \in (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{\mathrm{w}\}]$	
T4694∗	$\mathrm{u} \in \mathbb{A}^*$	4692
T4695	$\mathcal{A}(\mathrm{u}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{w})$	
T4696	$(\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens $= \{\mathcal{A}(\mathrm{R})\}$	2024, 4680
T4697	$\mathcal{A}(\mathrm{w}) = \mathcal{A}(\mathrm{R})$	4696, 4684
T4698	$\mathcal{A}(\mathrm{u}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	1245, 4692
G4699	$\mathbb{T}$	4698, 4697
T4700	$\mathrm{u} \overset{\mathrm{rot}}{\approx} \mathrm{w}$	1547, 4682, 4692, 4687
T4701	$\mathrm{u} \overset{\mathrm{rot}}{\sqsubseteq} \mathrm{w}$	1189, 4695, 4700
G4702	$\mathbb{T}$	4701

Mit Hilfe der vorigen beiden Theoreme 4656 und 4672 läßt sich Theorem 3783 und damit auch Theorem 3782 sofort ableiten. Wir haben mit 4656 und 4672 jedoch die schärfere Aussage, daß es sich bei dem bzgl. der Quasiordnung $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsubseteq})$ größten Wort, das die Ordnung wieder generiert, um einen einfachen Zyklus handelt, den wir direkt aus dem Graphen der Nachfolgerrelation ablesen können.

Eine totale, zyklische Ordnung mit einem einfachen Zyklus ist auf die genannte Weise aus einem Wort generierbar und damit endlich. Die Einfachheit kann natürlich auch entfallen, da jeder Zyklus einen einfachen Zyklus enthält.

T4703 R ist eine totale, zyklische Ordnung $\wedge$ w ist einfach $\wedge$
w ist ein $(\lessdot_{\mathrm{R}})$ -Zyklus $\Rightarrow$ R ist endlich . . . 4672, 1501

Die Elemente des Alphabets sind bei endlichen, totalen, zyklischen Ordnungen durch die unmittelbare Nachfolgerrelation gegeben.

T4704 R ist eine totale, zyklische Ordnung $\wedge$ R ist endlich $\Rightarrow \mathcal{F}(\lessdot_{\mathrm{R}}) = \mathcal{A}(\mathrm{R})$

A4705	R ist eine totale, zyklische Ordnung $\wedge$ R ist endlich	
G4706	$\mathcal{F}(\lessdot_{\mathrm{R}}) = \mathcal{A}(\mathrm{R})$	
G4707	$\mathcal{A}(\mathrm{R}) \subseteq \mathcal{F}(\lessdot_{\mathrm{R}})$	4143
A4708	$\mathcal{A}(\mathrm{R}) = \emptyset$	
G4709	$\mathbb{T}$	4708
A4710	$\mathcal{A}(\mathrm{R}) \neq \emptyset$	
VT4711	$\mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet$ w ist ein $(\lessdot_{\mathrm{R}})$ -Zyklus $\wedge\ \mathcal{A}(\mathrm{w}) = \mathcal{A}(\mathrm{R})$	4656, 4705, 4710
T4712∗	$\mathrm{w} \in \mathbb{A}^*$	4711
T4713	$\mathcal{A}(\mathrm{w}) \subseteq \mathcal{F}(\lessdot_{\mathrm{R}})$	1232, 4711
G4714	$\mathbb{T}$	4713, 4711

Zwei endliche, totale, zyklische Ordnungen mit gleichen unmittelbaren Nachfolgerrelationen sind identisch.

T4715 $\forall\, R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})\ \bullet$
R ist eine totale, zyklische Ordnung $\wedge$ R ist endlich $\wedge$
R′ ist eine totale, zyklische Ordnung $\wedge$ R′ ist endlich $\wedge$
$(\prec_R) = (\prec_{R'}) \Rightarrow R = R'$

VA4716∗	$R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	
A4717	R ist eine totale, zyklische Ordnung	
A4718	R ist endlich	
A4719	R′ ist eine totale, zyklische Ordnung	
A4720	R′ ist endlich	
A4721	$(\prec_R) = (\prec_{R'})$	
G4722	$R = R'$	
T4723	$\mathcal{A}(R) = \mathcal{F}(\prec_R)$	4704, 4717, 4718
T4724	$\mathcal{A}(R') = \mathcal{F}(\prec_{R'})$	4704, 4719, 4720
T4725	$\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(R')$	4721, 4723, 4724
A4726	$\mathcal{A}(R) \neq \emptyset$	
T4727	$\mathcal{A}(R') \neq \emptyset$	4726, 4725
VT4728	$w \in R\ \bullet$ w ist einfach $\wedge$ w ist ein $(\prec_R)$ -Zyklus	4656, 4717, 4718, 4726
T4729∗	$w \in \mathbb{A}^*$	4728
T4730	w ist einfach	4728
VT4731	w ist ein $(\prec_{R'})$ -Zyklus	4728, 4721
T4732	$R = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{w\}]$	4672, 4717, 4728
T4733	$R' = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{w\}]$	4672, 4719, 4730, 4731
G4734	$\mathbb{T}$	4732, 4733
A4735	$\mathcal{A}(R) = \emptyset$	
T4736	$\mathcal{A}(R') = \emptyset$	4735, 4725
T4737	R ist vollständig	3681, 4717
T4738	R′ ist vollständig	3681, 4719
T4739	$R = \{[]\}$	2242, 4737, 4735
T4740	$R' = \{[]\}$	2242, 4738, 4736
G4741	$\mathbb{T}$	4739, 4740

6.13 Einschränkung der Wortlänge

Für azyklische Ordnungen R haben wir festgestellt, daß sie allein durch ihre Wörter bis zur Länge zwei $(R|2)$ eindeutig bestimmt sind, was schließlich zu dem Begriff der azyklischen Ordnungsbasen führte. Bei totalen, zyklischen Ordnungen ist dies nicht der Fall. Es gilt sogar nahezu das Gegenteil: Zwei totale, zyklische Ordnungen mit gleichem Alphabet unterscheiden sich in den Wörtern $(R|2)$ überhaupt nicht.

S4742

VA4743∗	$R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	
A4744	R ist eine totale, zyklische Ordnung	
A4745	R′ ist eine totale, zyklische Ordnung	
T4746	$\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(R') \Rightarrow (R\|2) = (R'\|2)$	
A4747	$\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(R')$	
G4748	$(R\|2) = (R'\|2)$	
T4749	R ist einfach $\wedge$ R′ ist einfach	3681, 4744, 4745
T4750	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R′ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	3681, 4744, 4745
T4751	R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R′ ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	3681, 4744, 4745
T4752	R ist vollständig $\wedge$ R′ ist vollständig	3681, 4744, 4745
T4753	$R \neq \emptyset \wedge R' \neq \emptyset$	2228, 4752
T4754	R ist total $\wedge$ R′ ist total	3681, 4744, 4745

T4755	(co R) = (co R′)	2042, 4754
T4756	($\underline{\text{co}}$ R) = ($\underline{\text{co}}$ R′)	1942, 4755, 4747
T4757	(li R) = (li R′)	2002, 4749, 4747, 4756
G4758	$\mathbb{T}$	1768, 4753, 4750, 4751, 4747, 4757

Wie schon aufgrund des Axiomsystems der Tripelstrukturen zu vermuten war, wird die volle Allgemeinheit unseres (verallgemeinerten) Relationenbegriffs zur eindeutigen Beschreibung von totalen, zyklischen Ordnungen trotzdem nicht benötigt. Relationen von Wörtern bis zur Länge drei reichen hierzu aus.

Haben wir also zwei totale, zyklische Ordnungen die sich in ihren Wörtern mit höchstens drei Elementen nicht unterscheiden, so sind sie identisch. Eine totale, zyklische Ordnung R ist also eindeutig durch ihre Wörter bis zur Länge drei (R|3) festgelegt.

S4759

T4760 $\forall$ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, R′ $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ $\bullet$ R ist eine totale, zyklische Ordnung $\wedge$
R′ ist eine totale, zyklische Ordnung $\wedge$ (R|3) = (R′|3) $\Rightarrow$ R = R′

Der Beweis dieses Theorems wird hier nicht ausgeführt, da eine allgemeinere Version später für zyklische Ordnungen in dem gleichnamigen Abschnitt ausführlich behandelt wird. Dieser Abschnitt verfolgt vielmehr die Absicht, den folgenden Begriff der totalen, zyklischen Ordnungsbasis zu motivieren.

Für endliche, totale, zyklische Ordnungen ist Theorem 4760 direkt aus unseren bisherigen Resultaten ableitbar: Eine endliche, totale, zyklische Ordnung R ist allein durch die unmittelbare Nachfolgerrelation ($\prec_{\mathrm{R}}$) bestimmt. ($\prec_{\mathrm{R}}$) ist nach Theorem 4147 für teilwortabgeschlossene Relationen aus (R|3) und ($\underline{\text{li}}$ R) ableitbar. ($\underline{\text{li}}$ R) ergibt sich aus $\mathcal{A}$(R) und (li R), die aus einstelligen Wörtern (Theorem 1325) bzw. zweistelligen Wörtern (Theorem 1767) ableitbar sind. Damit ist R durch (R|3) eindeutig bestimmt.

6.14 Totale, zyklische Ordnungsbasen

Unter einer totalen, zyklischen Ordnungsbasis einer totalen, zyklischen Ordnung R wollen wir eine Teilmenge der Relation R verstehen, die es uns erlaubt den Rest der Relation zu generieren. Der folgende Basisbegriff wird dieses Kriterium erfüllen.

S4761

VA4762∗ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, n $\in \mathbb{N}$

Aus der Feststellung, daß die Wörter bis zur Länge drei die wesentliche Information tragen, ergibt sich die folgende Definition. Man vergleiche sie mit der Charakterisierung 4063 von totalen, zyklischen Ordnungen. Modifikationen erfolgten an zwei Stellen: Zum einen fordern wir, daß die Länge der Wörter drei nicht übersteigt. Zum anderen können wir gerade aus diesem Grund (für größere Strukturen) nicht mehr die Vollständigkeit erreichen, so daß wir uns mit der schwachen 3 -Vollständigkeit zufrieden geben müssen.

D4763 R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis :$\Leftrightarrow$
$\mathcal{L}$(R) $\leq$ 3 $\wedge$
R ist einfach $\wedge$
R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen $\wedge$
R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen $\wedge$
R ist total $\wedge$

R ist 3 -vollständig $\wedge$
R ist zyklisch transitiv

T4764 R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis $\Rightarrow$ (R|3) = R 1269, 4763

Wie wir in 4016 zeigten, impliziert die zyklische Transitivität zusammen mit den anderen Bedingungen auch die Konsistenz modulo Rotation.

T4765 R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis $\Rightarrow$ R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ 4763, 4016

B4766

Die Relation R = $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2], [0,1,3], [0,2,3], [1,2,3]}] ist einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen sowie total. R ist ferner konsistent modulo Rotation, da zwei Wörter höchstens zwei Elemente gemeinsam haben (Theorem 1160). Außerdem ist R zyklisch transitiv. Wir haben $\mathcal{A}$(R) = {0,1,2,3}, (li R) -Kliquen = $\mathcal{P}$(0,1,2,3) und (li R) -Kens = {{0,1,2,3}}. Weil die Klique {0,1,2,3} nicht als Alphabet eines Wortes in R vorkommt, ist R nicht vollständig. R ist jedoch 3 -vollständig, da jede dreielementige Klique als Wort in R repräsentiert ist (Theorem 2300). Damit ist R keine totale, zyklische Ordnung aber eine totale, zyklische Ordnungsbasis.

Daß wir statt von der Charakterisierung 4063 nicht von der Definition 3681 der totalen, zyklischen Ordnungen ausgehen, hat folgenden Grund: Durch die Einschränkung der Wortlänge ist es nicht mehr möglich, die zyklische Transitivität aus der Konsistenz (modulo Rotation) und den anderen Axiomen abzuleiten, wie dies in 4062 der Fall war (Wir erinnern uns: Der Weg führte in Theorem 3915 über vierstellige Wörter). Dies wird durch das folgende Beispiel demonstriert.

B4767

Wir wählen R = $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2], [0,1,3], [3,2,1], [0,2,3]}]. Offenbar gilt Einfachheit, Teilwort- und Rotationsabgeschlossenheit, 3 -Vollständigkeit und Totalität. Konsistenz modulo Rotation ist nicht verletzt, da zwei Wörter aus R höchstens zweistellige Teilwörter gemeinsam haben (Theorem 1160). Zyklische Transitivität ist aber nicht erfüllt, da mit [2,0,1] $\in$ R und [2,1,3] $\in$ R auch [2,0,3] $\in$ R folgt, was nicht der Fall ist.

Die Axiome der totalen, zyklischen Ordnungsbasen nach Definition 4763 sind nicht voneinander unabhängig. Die Teilwortabgeschlossenheit folgt aus $\mathcal{L}$(R) ≤ 3, Einfachheit, Rotationsabgeschlossenheit und 3 -Vollständigkeit nach Theorem 2500. Damit erhalten wir die folgende vereinfachte Charakterisierung.

S4768

VA4769$*$ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T4770 R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis :$\Leftrightarrow$
$\mathcal{L}$(R) ≤ 3 $\wedge$
R ist einfach $\wedge$
R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist total $\wedge$
R ist 3 -vollständig $\wedge$
R ist zyklisch transitiv 4763, 2500, 2216

Die Bedingungen in 4770 sind nun voneineinder unabhängig. Dies wird in den folgenden zum Teil schon bekannten Beispielen für jede Bedingung separat gezeigt.

B4771

R = $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2,3]}] ist die vierelementige, totale, zyklische Ordnung aus Beispiel 3820 und damit einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen, total und konsistent modulo Rotation. R ist außerdem vollständig also auch 3 -vollständig. Es gilt jedoch $\mathcal{L}(\mathrm{R}) = 4$.

B4772

Es sei R = {[0,0], [0], []}. Es gilt $\mathcal{A}(\mathrm{R}) = \{0\}$, $(\underline{\text{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen = $\{\{0\}, \emptyset\}$ und $\mathcal{L}(\mathrm{R}) = 2$. R ist teilwort- und rotationsabgeschlossen sowie total. R ist vollständig und damit auch 3 -vollständig. R ist zyklisch transitiv, da $\mathcal{L}(\mathrm{R}) < 3$ gilt (Theorem 3844). R ist jedoch nicht einfach.

B4773

Wir verwenden R = {[0,1], [0], [1], []} aus Beispiel 3693. Es gilt $\mathcal{L}(\mathrm{R}) = 2$. R ist einfach und teilwortabgeschlossen, total und konsistent modulo Rotation. R ist vollständig und damit auch 3 -vollständig. R ist zyklisch transitiv, da $\mathcal{L}(\mathrm{R}) < 3$ gilt. R ist jedoch nicht rotationsabgeschlossen.

B4774

R = {[0], [1], []} in Beispiel 3694 ist einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen und konsistent modulo Rotation. R ist vollständig also auch 3 -vollständig. Es gilt $\mathcal{L}(\mathrm{R}) = 1$ und R ist zyklisch transitiv. R ist jedoch nicht total.

B4775

Die Relation R = $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1], [1,2], [2,0]}] aus Beispiel 3695 ist einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen sowie total. R ist zyklisch transitiv, da $\mathcal{L}(\mathrm{R}) = 2$ gilt (Theorem 3844). R ist jedoch nicht 3 -vollständig (und damit auch nicht vollständig), da die Klique $\{0,1,2\} \in (\underline{\text{li}}\ \mathrm{R})$ nicht durch ein Wort der Relation abgedeckt wird.

B4776

Ebenso wie in 3696 wählen wir R = $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2], [2,1,0]}]. Es gilt $\mathcal{A}(\mathrm{R}) = \{0,1,2\}$ und $(\underline{\text{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen = $\mathcal{P}(\{0,1,2\})$. Wir stellten in 3696 schon fest: R ist einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen und total. R ist vollständig, also auch 3 -vollständig. R ist jedoch nicht zyklisch transitiv: Aus [0,1,2] ∈ R und [0,2,1] ∈ R folgt mit zyklischer Transitivität [0,1,1] ∈ R, was hier nicht der Fall ist.

Damit Basen für uns von Nutzen sind, erwarten wir, daß jede totale, zyklische Ordnung R eine Basis besitzt. Schränken wir die Ordnung auf Wörter bis zur Länge drei ein, d.h. bilden wir (R|3), so erhalten wir nach obiger Definition auf jeden Fall eine Basis: Zusätzlich zu den schon in 3575 gezeigten Lemmata, die sicherstellen, daß Einfachheit, Teilwortabgeschlossenheit sowie Alphabet und Abhängigkeitsrelation unter der Operation der Einschränkung (R|3) erhalten bleiben, liefern uns die folgenden Theoreme die noch die entsprechenden Resultate für die Rotationsabgeschlossenheit, die 3 -Vollständigkeit und die zyklische Transitivität.

S4777

VA4778∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, $\mathrm{m} \in \mathbb{N}$

Rotationsabgeschlossenheit kann durch Einschränkung niemals zerstört werden.

T4779 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen ⇒ (R|n) ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen

A4780 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen
G4781 (R|n) ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen
G4782 $\forall$ u,v • u ∈ (R|n) ∧ u $\overset{\text{rot}}{\equiv}$ v ⇒ v ∈ (R|n) 1343
VA4783 u,v • u ∈ (R|n)
A4784 u $\overset{\text{rot}}{\equiv}$ v

G4785	$v \in (R\|n)$	
T4786∗	$u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$	4784
T4787	$\mathcal{L}(R\|n) \leq n$	1268
T4788	$\mathcal{L}(u) \leq n$	1262, 4787, 4783
T4789	$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(v)$	0520, 4784
T4790	$\mathcal{L}(v) \leq n$	4789, 4788
T4791	$u \in R$	1267, 4783
T4792	$v \in R$	1343, 4780, 4791, 4784
G4793	$\mathbb{T}$	1265, 4792, 4790

Für einfache, teilwortabgeschlossene Relationen gilt: Die Einschränkung ist n -vollständig (für $2 \leq n$), wenn die Relation schon vorher n -vollständig war.

T4794 R ist einfach $\wedge$ R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen $\wedge\ 2 \leq n\ \wedge$
R ist n -vollständig $\Rightarrow$ $(R|n)$ ist n -vollständig

A4795	R ist einfach	
A4796	R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen	
A4797	$2 \leq n$	
A4798	R ist n -vollständig	
G4799	$(R\|n)$ ist n -vollständig	
G4800	$\forall\ C \in (\underline{\text{li}}\ (R\|n))$ -Kliquen $\bullet\ \|C\| \leq n \Rightarrow \exists\ w \in (R\|n) \bullet \mathcal{A}(w) = C$	2210
VA4801	$C \in (\underline{\text{li}}\ (R\|n))$ -Kliquen	
A4802	$\|C\| \leq n$	
G4803	$\exists\ w \in (R\|n) \bullet \mathcal{A}(w) = C$	
T4804	$(\underline{\text{li}}\ (R\|n)) = (\underline{\text{li}}\ R)$	3621, 4796, 4797
T4805	$C \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen	4801, 4804
VT4806	$w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$	2210, 4798, 4805, 4802
T4807∗	$w \in \mathbb{A}^*$	4806
T4808	w ist einfach	1279, 4795, 4806
T4809	$\|\mathcal{A}(w)\| = \mathcal{L}(w)$	0373, 4808
T4810	$\mathcal{L}(w) \leq n$	4809, 4806, 4802
T4811	$w \in (R\|n)$	1265, 4806, 4810
G4812	$\mathbb{T}$	4811, 4806

Zyklische Transitivität bleibt ohne Nebenbedingung unter Einschränkung erhalten.

T4813 R ist zyklisch transitiv $\Rightarrow$ $(R|n)$ ist zyklisch transitiv

A4814	R ist zyklisch transitiv	
G4815	$(R\|n)$ ist zyklisch transitiv	
A4816	$n < 3$	
T4817	$\mathcal{L}(R\|n) < 3$	1268, 4816
G4818	$\mathbb{T}$	3844, 4817
A4819	$3 \leq n$	
T4820	$\forall\ x,y,z \bullet [x,y,z] \in R \Leftrightarrow [x,y,z] \in (R\|n)$	1276, 4819
G4821	$\mathbb{T}$	3841, 4814, 4820

Bei teilwortabgeschlossenen Relationen ergibt sich die unmittelbare Nachfolgerrelation schon aus Wörtern bis zur Länge drei.

T4822 $3 \leq n\ \wedge$ R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen $\Rightarrow (\prec_R) = (\prec_{(R|n)})$

A4823	$3 \leq n$	
A4824	R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen	
G4825	$(\prec_R) = (\prec_{(R\|n)})$	
T4826	$(\underline{\text{li}}\ R) = (\underline{\text{li}}\ (R\|n))$	3621, 4824, 4823
T4827	$\forall\ x,y \bullet [x,y] \in R \Leftrightarrow [x,y] \in (R\|n)$	1275, 4823

T4828 $\forall$ x,y,z $\bullet$ [x,y,z] $\in$ R $\Leftrightarrow$ [x,y,z] $\in$ (R|n) . . . 1276, 4823
G4829 $\mathbb{T}$ . . . 4147, 4824, 4826, 4827, 4828

Kombinieren wir diese Lemmata mit den Aussagen in 3575, so erhalten wir das angekündigte Resultat: Die Einschränkung (R|3) einer totalen, zyklischen Ordnung R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis mit unveränderten Alphabet und Abhängigkeitsrelationen. Auch die unmittelbare Nachfolgerrelation bleibt unverändert.

S4830

VA4831$*$ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A4832 R ist eine totale, zyklische Ordnung
T4833 $\mathcal{A}$(R|3) = $\mathcal{A}$(R) . . . 3592, 4063, 4832
T4834 (li (R|3)) = (li R) . . . 3605, 4063, 4832
T4835 ($\underline{\text{li}}$ (R|3)) = ($\underline{\text{li}}$ R) . . . 3621, 4063, 4832
T4836 (R|3) ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis

T4837 $\mathcal{L}$(R|3) $\leq$ 3 . . . 1268
T4838 R ist einfach . . . 4063, 4832
T4839 (R|3) ist einfach . . . 3577, 4838
T4840 R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen . . . 4063, 4832
T4841 (R|3) ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen . . . 3578, 4840
T4842 R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$)-abgeschlossen . . . 4063, 4832
T4843 (R|3) ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen . . . 4779, 4842
T4844 R ist total . . . 4063, 4832
T4845 (R|3) ist total . . . 3622, 4840, 4844
T4846 R ist vollständig . . . 4063, 4832
T4847 R ist 3 -vollständig . . . 2215, 4846
T4848 (R|3) ist 3 -vollständig . . . 4794, 4838, 4840, 4847
T4849 R ist zyklisch transitiv . . . 4063, 4832
T4850 (R|3) ist zyklisch transitiv . . . 4813
G4851 $\mathbb{T}$ . . . 4763, 4837, 4839, 4841, 4843, 4845, 4848, 4850

T4852 $(\prec_{\mathrm{R}}) = (\prec_{(\mathrm{R}|3)})$ . . . 4822, 4063, 4832

B4853

Wir betrachten die vierelementige, zyklische Ordnung R = ($\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq}$)[{[0,1,2,3]}] aus Beispiel 3820. Hieraus erhalten wir (R|3) = ($\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq}$)[{[0,1,2], [0,1,3], [0,2,3], [1,2,3]}]. Dies ist die totale, Ordnungsbasis aus dem Beispiel 4766.

Aufgrund von Theorem 4760 ist die totale, zyklische Ordnung R durch ihre Basis (R|3) eindeutig bestimmt. Daß sogar jede totale, zyklische Basis, also nicht nur eine aus einer totalen, zyklischen Ordnung gewonnene, eine eindeutige totale, zyklische Ordnung definiert, wird in einem späteren Abschnitt noch gezeigt, nachdem wir die Operation der konsistenten, totalen Vervollständigung (der Basis) kennengelernt haben.

Die meisten Eigenschaften, die wir bereits bei totalen, zyklischen Ordnungen kennengelernt haben, sind auch für die Basen gültig, wenn von der (starken) Vollständigkeit in den entsprechenden Beweisen kein Gebrauch gemacht wurde.

S4854

VA4855$*$ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, X $\in \mathcal{P}(\mathbb{A})$

Das folgende Theorem zeigt analog zu 3838, daß auch die Basis-Eigenschaft unter Projektion erhalten bleibt.

T4856 R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis ⇒
(R ⊳ X) ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis 4763, 1714, 2850, 2860, 3823, 2920, 2879, 3867

Wir werden nicht von allen Theoremen, die wir schon für totale, zyklische Ordnungen gezeigt haben, entsprechende Versionen für Ordnungsbasen neu ausarbeiten. Die wird auch nicht nötig sein, da wir am Ende dieses Kapitels gezeigt haben werden, daß totale, zyklische Ordnungsbasen nur eine andere Repräsentation von totalen, zyklischen Ordnungen sind. Mit diesem Resultat können alle für totale, zyklische Ordnungen abgeleiteten Theoreme ohne großen Aufwand auf Ordnungsbasen übertragen werden. Die verbleibenden Abschnitte dieses Kapitels sind im wesentlichen Vorbereitungen für dieses Resultat und mögen daher etwas technisch und unvollständig erscheinen. Entsprechendes gilt auch für die Vorgehensweise im nachfolgenden Kapitel über (allgemeine) zyklische Ordnungen und deren Ordnungsbasen.

6.15 Kens und Zyklen von Basen

In Theorem 4263 haben wir für totale, zyklische Ordnungen gezeigt, daß jeder endliche Ken durch einen Zyklus geordnet wird, der sogar als Wort in der Relation enthalten ist. Dazu war insbesondere die (starke) Vollständigkeit nötig, so daß das Theorem in dieser Form für totale, zyklische Ordnungsbasen unbrauchbar ist. Im folgenden werden wir deshalb unter schwächeren Bedingungen (nämlich der 3 -Vollständigkeit) ein ähnliches Theorem zeigen, jedoch mit der schwächeren Aussage, daß eine dem endlichen Ken entsprechende Kette existiert, nicht jedoch in der Relation liegen muß. Vorher benötigen wir noch einige Lemmata.

S4857
VA4858∗ R ∈ $\mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Theorem 4156 liefert uns zwischen zwei abhängigen aber nicht unmittelbar aufeinanderfolgenden Elementen die Existenz eines dazwischenliegenden weiteren Elements. Dies war eine triviale Folgerung aus der Definition der unmittelbaren Nachfolgerrelation. Das nun folgende Theorem geht unter geeigneten Annahmen noch einen Schritt weiter: Wir wählen einen beliebigen Ken und zwei verschiedene nicht aufeinanderfolgende Elemente darin. Dann existiert wie in 4156 ein dazwischenliegendes Element, hier jedoch mit der zusätzlichen Eigenschaft, auch auf dem Ken zu liegen.

T4859 R ist einfach ∧ R ist (⊒) -abgeschlossen ∧ R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen ∧
R ist 3 -vollständig ∧ R ist zyklisch transitiv ⇒
∀ L ∈ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens, x ∈ L, y ∈ L • x ≠ y ∧ ¬ x $\prec_R$ y ⇒ ∃ z ∈ L • [x,z,y] ∈ R

A4860 R ist einfach
A4861 R ist (⊒) -abgeschlossen
A4862 R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen
A4863 R ist 3 -vollständig
A4864 R ist zyklisch transitiv
VA4865 L ∈ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens
VA4866 x ∈ L, y ∈ L • x ≠ y
A4867 ¬ x $\prec_R$ y
G4868 ∃ z ∈ L • [x,z,y] ∈ R
A4869 ¬∃ z ∈ L • [x,z,y] ∈ R
T4870∗ L ∈ $\mathcal{P}(\mathbb{A})$ ∧ x ∈ $\mathbb{A}$ ∧ y ∈ $\mathbb{A}$ 0124, 4865, 4866
T4871 ¬∃ z ∈ L • z ∈ $(x \cdots y)_R$ 3407, 4861, 4869
T4872 L ∈ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen 0125, 4865
VT4873 z • [x,z,y] ∈ R
T4874 (x,y) ∈ ($\underline{\text{li}}$ R) 0106, 4872, 4866

T4875 $(x,y) \in (\mathrm{li}\ R)$ . . . 1827, 4866, 4874
G4876 $\mathbb{T}$ . . . 4156, 4860, 4861, 4875, 4867
T4877∗ $z \in \mathbb{A}$ . . . 4873
T4878 $z \in (x \cdots y)_R$ . . . 3407, 4861, 4873
T4879 $z \notin L$ . . . 4871, 4878
T4880 $L \subseteq \{x,y\} \cup (y \cdots x)_R$
G4881 $\forall z' \in L \bullet z' \in \{x,y\} \vee z' \in (y \cdots x)_R$
G4882 $\forall z' \in L - \{x,y\} \bullet z' \in (y \cdots x)_R$
VA4883 $z' \in L - \{x,y\}$
G4884 $z' \in (y \cdots x)_R$
T4885∗ $z' \in \mathbb{A}$ . . . 4883
T4886 $z' \notin (x \cdots y)_R$ . . . 4871, 4883
G4887 $\mathbb{T}$ . . . 4105, 4860, 4861, 4862, 4863, 4872, 4866, 4883, 4886
T4888 $(z,z) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ . . . 1903, 4873
T4889 $\forall z' \in L \bullet (z',z) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$
VA4890 $z' \in L$
G4891 $(z',z) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$
T4892∗ $z' \in \mathbb{A}$ . . . 4890
T4893 $z' \in \{x,y\} \cup (y \cdots x)_R$ . . . 4880, 4890
A4894 $z' \in \{x,y\}$
T4895 $z' = x \vee z' = y$ . . . 4894
T4896 $(x,z) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R) \wedge (y,z) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ . . . 1903, 4873
G4897 $\mathbb{T}$ . . . 4895, 4896
A4898 $z' \in (y \cdots x)_R$
T4899 $L \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 2014, 4872
T4900 $x \in \mathcal{A}(R) \wedge y \in \mathcal{A}(R)$ . . . 4899, 4866
T4901 $(z,z') \in (\mathrm{li}\ R)$ . . . 4122, 4861, 4862, 4864, 4900, 4878, 4898
T4902 $(z,z') \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ . . . 1821, 4901
G4903 $\mathbb{T}$ . . . 0076, 1825, 4902
T4904 $(L \cup \{z\}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen . . . 0119, 1825, 4872, 4888, 4889
T4905 $L \subset L \cup \{z\}$ . . . 4879
T4906 $\mathbb{F}$ . . . 0126, 4865, 4904, 4905

Betrachten wir die Struktur von endlichen Kens bzgl. der unmittelbaren Nachfolgerrelation, so stellen wir fest: Jedes Element des Kens besitzt einen unmittelbaren Nachfolger, der ebenfalls in dem Ken liegt. Der Beweis erfolgt mit Hilfe des vorigen Lemmas.

T4907 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist 3 -vollständig $\wedge$ R ist zyklisch transitiv $\Rightarrow$
$\forall L \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $\bullet$ L ist endlich $\wedge\ y \in L \Rightarrow \exists x \in L \bullet x \prec_R y$

A4908 R ist einfach
A4909 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen
A4910 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen
A4911 R ist 3 -vollständig
A4912 R ist zyklisch transitiv
VA4913 $L \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens
A4914 L ist endlich
A4915 $y \in L$
G4916 $\exists x \in L \bullet x \prec_R y$
A4917 $\neg\exists x \in L \bullet x \prec_R y$
T4918 $\forall x \in L \bullet \neg\, x \prec_R y$ . . . 4917
T4919∗ $L \in \mathcal{P}(\mathbb{A}),\ y \in \mathbb{A}$ . . . 0124, 4913, 4915
T4920∗ $\downarrow(|L|)$ . . . 4914
T4921 $2 \leq |L|$
A4922 $\neg\, 2 \leq |L|$

T4923 $1 \leq |L|$ . . . 4915

T4924 $1 = |L|$ . . . 4922, 4923

T4925 $L = \{y\}$ . . . 4915, 4924

T4926 $\{y\} \in (\underline{li}\ R)$ -Kens . . . 4925, 4913

T4927 $y \prec_R y$ . . . 4220, 4908, 4909, 4926

T4928 $\mathbb{F}$ . . . 4917, 4915, 4927

T4929 $\forall\, n \in \mathbb{N} \bullet 2 \leq n \Rightarrow$
$\exists\, w \in L^* \bullet \mathcal{L}(w) = n \wedge \forall\, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i < j \Rightarrow [y, w_i, w_j] \in R$

T4930 $2 \leq 0 \Rightarrow \exists\, w \in L^* \bullet \mathcal{L}(w) = n \wedge \forall\, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i < j \Rightarrow [y, w_i, w_j] \in R$

T4931 $\forall\, n \in \mathbb{N} \bullet$
$(\ 2 \leq n \Rightarrow \exists\, w \in L^* \bullet \mathcal{L}(w) = n \wedge \forall\, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i < j \Rightarrow [y, w_i, w_j] \in R\ ) \Rightarrow$
$(\ 2 \leq n + 1 \Rightarrow \exists\, w \in L^* \bullet \mathcal{L}(w) = n + 1 \wedge \forall\, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i < j \Rightarrow [y, w_i, w_j]$
$\in R\ )$

VA4932$*$ $n \in \mathbb{N}$

A4933 $2 \leq n \Rightarrow$
$\exists\, w \in L^* \bullet \mathcal{L}(w) = n \wedge \forall\, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i < j \Rightarrow [y, w_i, w_j] \in R$

A4934 $2 \leq n + 1$

G4935 $\exists\, w \in L^* \bullet \mathcal{L}(w) = n + 1 \wedge \forall\, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i < j \Rightarrow [y, w_i, w_j] \in R$

T4936 $1 \leq n$ . . . 4934

A4937 $1 = n$

VT4938 $x \in L \bullet x \neq y$ . . . 4921, 4915

T4939$*$ $x \in \mathbb{A}$ . . . 4938

T4940 $\neg\, x \prec_R y$ . . . 4918, 4938

VT4941 $z \in L \bullet [x, z, y] \in R$ . . .
. . . 4859, 4908, 4909, 4910, 4911, 4912, 4913, 4938, 4915, 4938, 4940

T4942$*$ $z \in \mathbb{A}$ . . . 4941

T4943 $[x, z, y] \overset{\text{rot}}{\equiv} [y, x, z]$ . . . 0501

T4944 $[y, x, z] \in R$ . . . 1343, 4910, 4941, 4943

D4945 $w' := [x, z]$

T4946$*$ $w' \in \mathbb{A}^*$ . . . 4945

T4947 $w' \in L^*$ . . . 0268, 4938, 4941

T4948 $\mathcal{L}(w') = n + 1$ . . . 4945, 4937, 0308

T4949 $\forall\, i \in \mathcal{I}(w'), j \in \mathcal{I}(w') \bullet i < j \Rightarrow [y, w'_i, w'_j] \in R$

T4950 $\mathcal{I}(w') = \{0, 1\}$ . . . 4945, 0315

T4951 $w'_0 = x \wedge w'_1 = z$ . . . 4945, 0345, 0346

T4952 $[y, w'_0, w'_1] \in R$ . . . 4944, 4951

G4953 $\mathbb{T}$ . . . 4950, 4952

G4954 $\mathbb{T}$ . . . 4947, 4948, 4949

A4955 $2 \leq n$

VT4956 $w \in L^* \bullet \mathcal{L}(w) = n \wedge \forall\, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet$
$i < j \Rightarrow [y, w_i, w_j] \in R$ . . . 4933, 4955

T4957$*$ $w \in \mathbb{A}^*$ . . . 0233, 4956

T4958 $\mathcal{A}(w) \subseteq L$ . . . 0319, 4956

T4959 $\mathcal{L}(w) = n$ . . . 4956

T4960 $2 \leq \mathcal{L}(w)$ . . . 4955, 4959

T4961$*$ $\mathcal{L}(w) - 1 \in \mathcal{I}(w)$ . . . 0298, 4960

T4962 $w_{\mathcal{L}(w) - 1} \in L$

T4963 $w_{\mathcal{L}(w) - 1} \in \mathcal{A}(w)$ . . . 0351, 4960

G4964 $\mathbb{T}$ . . . 4958, 4963

T4965 $w_{\mathcal{L}(w) - 1} \neq y$

T4966$*$ $0 \in \mathcal{I}(w)$ . . . 0298, 4960

T4967 $0 < \mathcal{L}(w) - 1$ . . . 4960

T4968 $[y, w_0, w_{\mathcal{L}(w) - 1}] \in R$ . . . 4956, 4966, 4961, 4967

T4969 $[y, w_0, w_{\mathcal{L}(w) - 1}]$ ist einfach . . . 1279, 4908, 4968

G4970 $\mathbb{T}$ . . . 0379, 4969

T4971 $\neg\, w_{\mathcal{L}(w) - 1} \prec_R y$ . . . 4918, 4962

VT4972	$z \in L \bullet [w_{\mathcal{L}(w)-1},z,y] \in R$	4859, 4908, 4909, 4910, 4911, 4912, 4913, 4962, 4915, 4965, 4971
T4973$*$	$z \in \mathbb{A}$	4972
T4974	$[y,w_{\mathcal{L}(w)-1},z] \in R$	
T4975	$[w_{\mathcal{L}(w)-1},z,y] \overset{\text{rot}}{\equiv} [y,w_{\mathcal{L}(w)-1},z]$	0501
G4976	$\mathbb{T}$	1343, 4910, 4972, 4975
D4977	$w' := w * [z]$	
T4978$*$	$w' \in \mathbb{A}^*$	4977
T4979	$w' \in L^*$	
G4980	$\mathcal{A}(w') \subseteq L$	0320
T4981	$\mathcal{A}(w') = \mathcal{A}(w) \cup \mathcal{A}([z])$	4977, 0414
T4982	$\mathcal{A}(w') = \mathcal{A}(w) \cup \{z\}$	4981, 0327
G4983	$\mathbb{T}$	4982, 4958, 4972
T4984	$\mathcal{L}(w') = \mathcal{L}(w) + 1$	
T4985	$\mathcal{L}(w') = \mathcal{L}(w) + \mathcal{L}([z])$	4977, 0413
G4986	$\mathbb{T}$	4985, 0307
T4987	$\mathcal{L}(w') = n + 1$	4959, 4984
T4988	$\forall\, i \in \mathcal{I}(w'), j \in \mathcal{I}(w') \bullet i < j \Rightarrow [y,w'_i,w'_j] \in R$	
VA4989$*$	$i \in \mathcal{I}(w')$	
VA4990$*$	$j \in \mathcal{I}(w')$	
A4991	$i < j$	
G4992	$[y,w'_i,w'_j] \in R$	
T4993	$\forall\, k \in \mathbb{N} \bullet k < \mathcal{L}(w) \Rightarrow w'_k = w_k$	4977, 0415
T4994	$j < \mathcal{L}(w')$	0298, 4990
T4995	$j < \mathcal{L}(w') - 1 \vee j = \mathcal{L}(w') - 1$	4994
A4996	$j < \mathcal{L}(w') - 1$	
T4997	$j < \mathcal{L}(w)$	4996, 4984
T4998	$i < \mathcal{L}(w)$	4991, 4997
T4999$*$	$i \in \mathcal{I}(w) \wedge j \in \mathcal{I}(w)$	0298, 4997, 0298, 4998
T5000	$[y,w_i,w_j] \in R$	4956, 4999, 4991
T5001	$w'_i = w_i \wedge w'_j = w_j$	4993, 4998, 4993, 4997
G5002	$\mathbb{T}$	5001, 5000
A5003	$j = \mathcal{L}(w') - 1$	
T5004	$j = \mathcal{L}(w)$	5003, 4984
T5005	$i < \mathcal{L}(w)$	4991, 5004
T5006$*$	$i \in \mathcal{I}(w)$	0298, 5005
T5007	$w'_j = z$	4977, 5004, 0418
T5008	$w_i = w'_i$	4993, 5005
T5009	$i < \mathcal{L}(w) - 1 \vee i = \mathcal{L}(w) - 1$	5005
A5010	$i < \mathcal{L}(w) - 1$	
T5011	$[y,w_i,w_{\mathcal{L}(w)-1}] \in R$	4956, 5006, 4961, 5010
T5012	$[y,w_i,z] \in R$	3841, 4912, 5011, 4974
G5013	$\mathbb{T}$	5012, 5008, 5007
A5014	$i = \mathcal{L}(w) - 1$	
T5015	$[y,w_i,z] \in R$	5014, 4974
G5016	$\mathbb{T}$	5015, 5008, 5007
G5017	$\mathbb{T}$	4979, 4987, 4988
G5018	$\mathbb{T}$	4930, 4931
VT5019	$w \in L^* \bullet \mathcal{L}(w) = \|L\| + 1 \wedge$ $\forall\, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i < j \Rightarrow [y,w_i,w_j] \in R$	4929, 4921
T5020	w ist einfach	
G5021	$\forall\, i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w) \bullet i \neq j \Rightarrow w_i \neq w_j$	0372
VA5022$*$	$i \in \mathcal{I}(w), j \in \mathcal{I}(w)$	
A5023	$i \neq j$	
G5024	$w_i \neq w_j$	
T5025	$i < j \vee j < i$	5023

A5026	i < j	
T5027	$[y,w_i,w_j] \in R$	5019, 5022, 5026
T5028	$[y,w_i,w_j]$ ist einfach	1279, 4908, 5027
G5029	$\mathbb{T}$	0379, 5028
A5030	j < i	
T5031	$[y,w_j,w_i] \in R$	5019, 5022, 5030
T5032	$[y,w_j,w_i]$ ist einfach	1279, 4908, 5031
G5033	$\mathbb{T}$	0379, 5032
T5034	$\|\mathcal{A}(w)\| = \mathcal{L}(w)$	0373, 5020
T5035	$\|\mathcal{A}(w)\| = \|L\| + 1$	5019, 5034
T5036	$\mathcal{A}(w) \subseteq L$	0319, 5019
T5037	$\mathbb{F}$	5035, 5036

Mit Hilfe der Spiegelung der Relation können wir eine zu dem vorigen Theorem äquivalente Aussage auch für die unmittelbaren Vorgänger auf Kens ableiten.

T5038 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist 3 -vollständig $\wedge$ R ist zyklisch transitiv -¿
$\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ L ist endlich $\wedge$ x $\in$ L $\Rightarrow \exists$ y $\in$ L $\bullet$ x $\prec_R$ y

A5039	R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist 3 -vollständig $\wedge$ R ist zyklisch transitiv	
G5040	$\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ L ist endlich $\wedge$ x $\in$ L $\Rightarrow \exists$ y $\in$ L $\bullet$ x $\prec_R$ y	
D5041	$R' := (\text{REV } R)$	
T5042*	$R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	5041
T5043	R' ist einfach $\wedge$ R' ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R' ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R' ist 3 -vollständig $\wedge$ R' ist zyklisch transitiv	5041, 5039, 2576, 2641, 2648, 2682, 3891
G5044	$\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R') -Kens $\bullet$ L ist endlich $\wedge$ x $\in$ L $\Rightarrow \exists$ y $\in$ L $\bullet$ y $\prec_{R'}$ x	5041, 2680, 4148
G5045	$\mathbb{T}$	4907, 5043

Nun sind wir vorbereitet, das folgende Theorem abzuleiten, das zu 4365 schon eine recht starke Ähnlichkeit aufweist: Jeder endliche Ken entspricht danach einer einfachen Kette der unmittelbaren Nachfolgerrelation.

T5046 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist 3 -vollständig $\wedge$ R ist zyklisch transitiv $\Rightarrow$ ($\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ L ist endlich $\Rightarrow$
$\exists$ w $\in \mathbb{A}^*$ $\bullet$ w ist einfach $\wedge$ w ist eine $(\prec_R)$ -Kette $\wedge$ $\mathcal{A}(w) = L$)

A5047	R ist einfach	
A5048	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
A5049	R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	
A5050	R ist 3 -vollständig	
A5051	R ist zyklisch transitiv	
VA5052	L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens	
A5053	L ist endlich	
G5054	$\exists$ w $\in \mathbb{A}^*$ $\bullet$ w ist einfach $\wedge$ w ist eine $(\prec_R)$ -Kette $\wedge$ $\mathcal{A}(w) = L$	
T5055*	$L \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	0124, 5052
T5056*	$\downarrow(\|L\|)$	5053
T5057	$\forall$ n $\in \mathbb{N}$ $\bullet$ n $\leq \|L\| \Rightarrow$ $\exists$ w $\in \mathbb{A}^*$ $\bullet$ $\|\mathcal{A}(w)\| = n$ $\wedge$ w ist einfach $\wedge$ w ist eine $(\prec_R)$ -Kette $\wedge$ $\mathcal{A}(w) \subseteq L$	
T5058	$0 \leq \|L\| \Rightarrow$ $\exists$ w $\in \mathbb{A}^*$ $\bullet$ $\|\mathcal{A}(w)\| = 0$ $\wedge$ w ist einfach $\wedge$ w ist eine $(\prec_R)$ -Kette $\wedge$ $\mathcal{A}(w) \subseteq L$	
T5059	$\|\mathcal{A}([])\| = 0$	0323
T5060	[] ist einfach	0376
T5061	[] ist eine $(\prec_R)$ -Kette	1227
T5062	$\mathcal{A}([]) \subseteq L$	0323

G5063	$\mathbb{T}$	5059, 5060, 5061, 5062
T5064	$\forall\, n \in \mathbb{N} \bullet$ $(n \leq \lvert L\rvert \Rightarrow \exists\, w \in \mathbb{A}^* \bullet \lvert\mathcal{A}(w)\rvert = n\ \wedge$ w ist einfach $\wedge$ w ist eine $(\prec_R)$ -Kette $\wedge\ \mathcal{A}(w) \subseteq L) \Rightarrow$ $(n+1 \leq \lvert L\rvert \Rightarrow \exists\, w \in \mathbb{A}^* \bullet \lvert\mathcal{A}(w)\rvert = n+1\ \wedge$ w ist einfach $\wedge$ w ist eine $(\prec_R)$ -Kette $\wedge\ \mathcal{A}(w) \subseteq L)$	
VA5065$*$	$n \in \mathbb{N}$	
A5066	$n \leq \lvert L\rvert \Rightarrow \exists\, w \in \mathbb{A}^* \bullet \lvert\mathcal{A}(w)\rvert = n\ \wedge$ w ist einfach $\wedge$ w ist eine $(\prec_R)$ -Kette $\wedge\ \mathcal{A}(w) \subseteq L$	
A5067	$n+1 \leq \lvert L\rvert$	
G5068	$\exists\, w \in \mathbb{A}^* \bullet \lvert\mathcal{A}(w)\rvert = n+1\ \wedge$ w ist einfach $\wedge$ w ist eine $(\prec_R)$ -Kette $\wedge\ \mathcal{A}(w) \subseteq L$	
T5069	$1 \leq \lvert L\rvert$	5067
T5070	$0 = n \vee 1 \leq n$	
A5071	$0 = n$	
VT5072	$x \in L$	5069
D5073	$w' := [x]$	
T5074$*$	$x \in \mathbb{A}$, $w' \in \mathbb{A}^*$	5072, 5073
T5075	$\mathcal{A}(w') = \{x\}$	5073, 0327
T5076	$\lvert\mathcal{A}(w')\rvert = n+1$	5075, 5071
T5077	w' ist einfach	5073, 0377
T5078	w' ist eine $(\prec_R)$ -Kette	5073, 1228
T5079	$\mathcal{A}(w') \subseteq L$	5075, 5072
G5080	$\mathbb{T}$	5076, 5077, 5078, 5079
A5081	$1 \leq n$	
T5082	$n < \lvert L\rvert$	5067
VT5083	$w \in \mathbb{A}^* \bullet \lvert\mathcal{A}(w)\rvert = n\ \wedge$ w ist einfach $\wedge$ w ist eine $(\prec_R)$ -Kette $\wedge\ \mathcal{A}(w) \subseteq L$	5066, 5082
T5084$*$	$w \in \mathbb{A}^*$	5083
T5085	$\lvert\mathcal{A}(w)\rvert = n$	5083
T5086	w ist einfach	5083
T5087	$\mathcal{L}(w) = n$	0373, 5086, 5085
T5088	w ist eine $(\prec_R)$ -Kette	5083
T5089	$\mathcal{A}(w) \subseteq L$	5083
T5090	$1 \leq \mathcal{L}(w)$	5087, 5081
T5091	$\mathcal{L}(w) - 1 \in \mathcal{I}(w)$	0298, 5090
VT5092	$x \in L \bullet w_{\mathcal{L}(w)-1} \prec_R x$	
T5093	$w_{\mathcal{L}(w)-1} \in \mathcal{A}(w)$	0351, 5091
T5094	$w_{\mathcal{L}(w)-1} \in L$	5089, 5093
G5095	$\mathbb{T}$	5038, 5047, 5048, 5049, 5050, 5051, 5052, 5053, 5094
T5096$*$	$x \in \mathbb{A}$	5092
T5097	$x \notin \mathcal{A}(w)$	
A5098	$x \in \mathcal{A}(w)$	
T5099	$i \in \mathcal{I}(w) \bullet w_i = x$	0356, 5098
T5100$*$	$i \in \mathbb{N}$	5099
T5101	$w_{\mathcal{L}(w)-1} \prec_R w_i$	5092, 5099
T5102	$i < \mathcal{L}(w)$	0298, 5099
T5103	$i \leq \mathcal{L}(w) - 1$	5102
T5104	$(w \triangleleft [i \ldots \mathcal{L}(w) - 1])$ ist ein $(\prec_R)$ -Zyklus	1235, 5099, 5091, 5103, 5088, 5101
T5105	$\mathcal{A}(w \triangleleft [i \ldots \mathcal{L}(w) - 1]) \subseteq \mathcal{A}(w)$	0625
T5106	$L \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen	0125, 5052
T5107	$\mathcal{A}(w \triangleleft [i \ldots \mathcal{L}(w) - 1]) \subseteq L$	5105, 5089
T5108	$\mathcal{A}(w \triangleleft [i \ldots \mathcal{L}(w) - 1]) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen	0117, 5106, 5107
T5109	$(w \triangleleft [i \ldots \mathcal{L}(w) - 1])$ ist einfach	0626, 5086

T5110	$\mathcal{A}(w \triangleleft [i \ldots \mathcal{L}(w)]) \in (\underline{li}\ R)$ -Kens	4548, 5047, 5048, 5049, 5050, 5051, 5109, 5104, 5108
T5111	$\lvert\mathcal{A}(w)\rvert < \lvert L\rvert$	5085, 5082
T5112	$\mathcal{A}(w) \subset L$	5089, 5111
T5113	$\mathcal{A}(w \triangleleft [i \ldots \mathcal{L}(w) - 1]) \subset L$	5107, 5112
T5114	$\mathbb{F}$	0126, 5110, 5106, 5113
D5115	$w' := w * [x]$	
T5116∗	$w' \in \mathbb{A}^*$	5115
T5117	w' ist einfach	
T5118	$[x]$ ist einfach	0377
T5119	$\mathcal{A}(w) \cap \mathcal{A}([x]) = \emptyset$	
G5120	$\mathcal{A}(w) \cap \{x\} = \emptyset$	0327
G5121	$\mathbb{T}$	5097
G5122	$\mathbb{T}$	5115, 0419, 5086, 5118, 5119
T5123	$\lvert\mathcal{A}(w')\rvert = n + 1$	
G5124	$\lvert\mathcal{A}(w) \cup \mathcal{A}([x])\rvert = n + 1$	5115, 0414
G5125	$\lvert\mathcal{A}(w) \cup \{x\}\rvert = n + 1$	0327
G5126	$\lvert\mathcal{A}(w)\rvert + 1 = n + 1$	5097
G5127	$\mathbb{T}$	5085
T5128	w' ist eine $(\prec_R)$ -Kette	
G5129	$(w * [x])$ ist eine $(\prec_R)$ -Kette	5115
T5130	$[x]$ ist eine $(\prec_R)$ -Kette	1228
T5131	$1 \leq \mathcal{L}([x])$	0307
T5132	$w_{\mathcal{L}(w) - 1} \prec_R [x]_0$	0344, 5092
G5133	$\mathbb{T}$	1230, 5088, 5130, 5090, 5131, 5132
T5134	$\mathcal{A}(w') \subseteq L$	
G5135	$\mathcal{A}(w) \cup \mathcal{A}([x]) \subseteq L$	5115, 0414
G5136	$\mathcal{A}(w) \cup \{x\} \subseteq L$	0327
G5137	$\mathbb{T}$	5089, 5092
G5138	$\mathbb{T}$	5123, 5117, 5128, 5134
G5139	$\mathbb{T}$	5058, 5064
T5140	$w \in \mathbb{A}^* \bullet \lvert\mathcal{A}(w)\rvert = \lvert L\rvert \wedge w$ ist einfach $\wedge$ w ist ein $(\prec_R)$ -Kette $\wedge\ \mathcal{A}(w) \subseteq L$	5057
T5141	$\mathcal{A}(w) = L$	5140
G5142	$\mathbb{T}$	5140, 5141

Mit etwas Mühe könnten wir (wie in Theorem 4365) ableiten, daß es sich bei der Kette im vorigen Theorem sogar um einen Zyklus handelt. Wir werden darauf jedoch aus dem schon genannten Grund, daß unser Ziel der Nachweis der Äquivalenz von totalen, zyklischen Ordnungen und Ordnungsbasen, verzichten. Ist diese Äquivalenz einmal gezeigt, dann können wir ohnehin Theorem 4365 direkt verwenden.

Da in endlichen, totalen Basen nur ein Ken existiert, der natürlich endlich ist, können wir Theorem 5046 anwenden, um eine einfache Kette von unmittelbaren Nachfolgern zu finden, die das gesamte Alphabet abdeckt.

S5143

VA5144∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T5145 R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis $\wedge$ R ist endlich $\Rightarrow$
$\exists\, w \in \mathbb{A}^* \bullet$ w ist einfach $\wedge$ w ist eine $(\prec_R)$ -Kette $\wedge\ \mathcal{A}(w) = \mathcal{A}(R)$

A5146	R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis	
A5147	R ist endlich	
G5148	$\exists\, w \in \mathbb{A}^* \bullet$ w ist einfach $\wedge$ w ist eine $(\prec_R)$ -Kette $\wedge\ \mathcal{A}(w) = \mathcal{A}(R)$	
T5149	R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist 3 -vollständig $\wedge$ R ist zyklisch transitiv	4763, 5146
T5150	R ist total	4763, 5146

T5151 $\mathcal{A}(\mathrm{R}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens . . . 2024, 5150
T5152 $\mathcal{A}(\mathrm{R})$ ist endlich . . . 1293, 5147
G5153 $\mathbb{T}$ . . . 5046, 5149, 5151, 5152

6.16 Konsistenz mit Ketten

Als Vorbereitung auf dem nächsten Abschnitt, wo die einer Basis entsprechende totale, zyklische Ordnung als konsistente, totale Vervollständigung angegeben wird, zeigen wir, daß die Wörter einer Basis konsistent modulo Rotation mit jeder Kette der unmittelbaren Nachfolgerrelation sind.

S5154
VA5155∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A5156 R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis

Wir beginnen wieder mit einigen Lemmata und wiederholen zunächst Theorem 4272 im Kontext von Basen.

T5157 $\forall\ \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}),\ \mathrm{y} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}) \bullet \mathrm{x} \prec_{\mathrm{R}} \mathrm{y} \Rightarrow \forall\ \mathrm{z} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}) - \{\mathrm{x,y}\} \bullet [\mathrm{z,x,y}] \in \mathrm{R}$ 4763, 5156, 4272

Nach Theorem 1229 ist klar, daß die Elemente von Ketten der unmittelbaren Nachfolgerrelation mit mindestens zwei Elementen im Alphabet enthalten sind.

T5158 $\forall\ \mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ \mathrm{w} \in \mathbb{A}^* \bullet$ w ist eine $(\prec_{\mathrm{R}})$ -Kette $\wedge\ 2 \leq \mathcal{L}(\mathrm{w}) \Rightarrow \mathcal{A}(\mathrm{w}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$
VA5159∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ \mathrm{w} \in \mathbb{A}^*$
A5160 w ist eine $(\prec_{\mathrm{R}})$ -Kette
A5161 $2 \leq \mathcal{L}(\mathrm{w})$
G5162 $\mathcal{A}(\mathrm{w}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$
T5163 $\mathcal{F}(\prec_{\mathrm{R}}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$ . . . 4143
T5164 $\mathcal{A}(\mathrm{w}) \subseteq \mathcal{F}(\prec_{\mathrm{R}})$ . . . 1229, 5160, 5161
G5165 $\mathbb{T}$ . . . 5163, 5164

Ein wichtiges Lemma zeigt, daß alle dreistelligen Teilwörter von einfachen Ketten schon in der Basis enthalten sind.

T5166 $\forall\ \mathrm{w} \in \mathbb{A}^* \bullet$ w ist einfach $\wedge$ w ist eine $(\prec_{\mathrm{R}})$ -Kette $\Rightarrow$
$(\forall\ \mathrm{u} \in \mathbb{A}^* \bullet \mathcal{L}(\mathrm{u}) = 3 \wedge \mathrm{u} \sqsubseteq \mathrm{w} \Rightarrow \mathrm{u} \in \mathrm{R})$
VA5167∗ $\mathrm{w} \in \mathbb{A}^*$
A5168 w ist einfach
A5169 w ist eine $(\prec_{\mathrm{R}})$ -Kette
VA5170∗ $\mathrm{u} \in \mathbb{A}^*$
A5171 $\mathcal{L}(\mathrm{u}) = 3$
A5172 $\mathrm{u} \sqsubseteq \mathrm{w}$
G5173 $\mathrm{u} \in \mathrm{R}$
VT5174 $\mathrm{i} \in \mathcal{I}(\mathrm{w}),\ \mathrm{j} \in \mathcal{I}(\mathrm{w}),\ \mathrm{k} \in \mathcal{I}(\mathrm{w}) \bullet \mathrm{i} < \mathrm{j} \wedge \mathrm{j} < \mathrm{k} \wedge \mathrm{u} = [\mathrm{w_i},\ \mathrm{w_j},\ \mathrm{w_k}]$ . . . 0589, 5171, 5172
T5175 $\mathrm{i} \in \mathcal{I}(\mathrm{w})$ . . . 5174
T5176 $\mathrm{j} \in \mathcal{I}(\mathrm{w})$ . . . 5174
T5177 $\mathrm{k} \in \mathcal{I}(\mathrm{w})$ . . . 5174
T5178∗ $\mathrm{i} \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{j} \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{k} \in \mathbb{N}$ . . . 5175, 5176, 5177
T5179 $\mathrm{i} < \mathrm{j}$ . . . 5174
T5180 $\mathrm{j} < \mathrm{k}$ . . . 5174
T5181 $\mathrm{u} = [\mathrm{w_i},\ \mathrm{w_j},\ \mathrm{w_k}]$ . . . 5174
T5182 $\forall\ \mathrm{m} \in \mathbb{N} \bullet \mathrm{j} \leq \mathrm{m} \wedge \mathrm{m} < \mathrm{k} \Rightarrow [\mathrm{w_i},\ \mathrm{w_m},\ \mathrm{w_{m+1}}] \in \mathrm{R}$
VA5183∗ $\mathrm{m} \in \mathbb{N}$
A5184 $\mathrm{j} \leq \mathrm{m}$

A5185 $m < k$
G5186 $[w_i, w_m, w_{m+1}] \in R$
T5187 $\mathcal{A}(w) \subseteq \mathcal{A}(R)$
  T5188 $\mathcal{L}(u) \leq \mathcal{L}(w)$ . . . 0570, 5172
  T5189 $3 \leq \mathcal{L}(w)$ . . . 5171, 5188
  G5190 $\mathbb{T}$ . . . 5158, 5169, 5189
T5191 $m \in \mathcal{I}(w)$ . . . 0300, 5177, 5185
T5192 $w_m \in \mathcal{A}(R)$ . . . 0350, 5191, 5187
T5193 $m + 1 \in \mathcal{I}(w)$ . . . 0300, 5177, 5185
T5194 $w_{m+1} \in \mathcal{A}(R)$ . . . 0350, 5193, 5187
T5195 $w_m \prec_R w_{m+1}$ . . . 1226, 5169, 5191, 5193
T5196 $w_i \in \mathcal{A}(R) - \{w_m, w_{m+1}\}$
  T5197 $w_i \in \mathcal{A}(R)$ . . . 0350, 5175, 5187
  T5198 $i < m$ . . . 5179, 5184
  T5199 $w_i \neq w_m$ . . . 0372, 5168, 5175, 5191, 5198
  T5200 $i < m + 1$ . . . 5198
  T5201 $w_i \neq w_{m+1}$ . . . 0372, 5168, 5175, 5193, 5200
  G5202 $\mathbb{T}$ . . . 5197, 5199, 5201
G5203 $\mathbb{T}$ . . . 5157, 5192, 5194, 5195, 5196
T5204 $[w_i, w_j, w_k] \in R$
G5205 $\forall\, m \in \mathbb{N} \bullet m = k \Rightarrow [w_i, w_j, w_m] \in R$
G5206 $\forall\, m \in \mathbb{N} \bullet j < m \land m \leq k \Rightarrow [w_i, w_j, w_m] \in R$ . . . 5180
T5207 $j < 0 \land 0 \leq k \Rightarrow [w_i, w_j, w_0] \in R$ . . . 5178
T5208 $\forall\, m \in \mathbb{N} \bullet$
$(\, j < m \land m \leq k \Rightarrow [w_i, w_j, w_m] \in R\,) \Rightarrow$
$(\, j < m + 1 \land m + 1 \leq k \Rightarrow [w_i, w_j, w_{m+1}] \in R\,)$
  VA5209∗ $m \in \mathbb{N}$
  A5210 $j < m \land m \leq k \Rightarrow [w_i, w_j, w_m] \in R$
  A5211 $j < m + 1$
  A5212 $m + 1 \leq k$
  G5213 $[w_i, w_j, w_{m+1}] \in R$
  T5214 $j \leq m$ . . . 5211
  A5215 $j = m$
    T5216 $[w_i, w_j, w_{j+1}] \in R$ . . . 5182, 5180
    G5217 $\mathbb{T}$ . . . 5216, 5215
  A5218 $j < m$
    T5219 $m < k$ . . . 5212
    T5220 $[w_i, w_j, w_m] \in R$ . . . 5210, 5218, 5219
    T5221 $[w_i, w_m, w_{m+1}] \in R$ . . . 5182, 5218, 5219
    T5222 R ist zyklisch transitiv . . . 4763, 5156
    G5223 $\mathbb{T}$ . . . 3841, 5222, 5220, 5221
G5224 $\mathbb{T}$ . . . 5207, 5208
G5225 $\mathbb{T}$ . . . 5181, 5204

Wir erinnern uns, daß nach Theorem 1039 die Konsistenz modulo Rotation allein anhand dreistelliger Teilwörter nachgewiesen werden kann. Zusammen mit dem vorigen Lemma erhalten wir damit das gewünschte Resultat: Jede einfache Kette ist konsistent modulo Rotation mit allen Wörtern der Relation.

T5226 $\forall\, w \in \mathbb{A}^* \bullet$ w ist einfach $\land$ w ist eine $(\prec_R)$ -Kette $\Rightarrow \forall\, u \in R \bullet u \overset{\text{rot}}{\approx} w$

VA5227∗ $w \in \mathbb{A}^*$
A5228 w ist einfach
A5229 w ist eine $(\prec_R)$ -Kette
VA5230 $u \in R$
G5231 $u \overset{\text{rot}}{\approx} w$
T5232∗ $u \in \mathbb{A}^*$ . . . 5230

A5233	$\neg\ u \overset{\text{rot}}{\sim} w$	
D5234	$D := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(w)$	
T5235∗	$D \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	5234
T5236	$D \subseteq \mathcal{A}(u)$	5234
T5237	$D \subseteq \mathcal{A}(w)$	5234
T5238	R ist einfach	4763, 5156
T5239	u ist einfach	1279, 5238, 5230
VT5240	$C \bullet C \subseteq D \wedge \lvert C \rvert = 3 \wedge \neg\ (u \triangleright C) \overset{\text{rot}}{\equiv} (w \triangleright C)\ )$	1039, 5239, 5228, 5234, 5233
T5241	$C \subseteq D$	5240
T5242∗	$C \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	5241
T5243	$\lvert C \rvert = 3$	5240
T5244	$\neg\ (u \triangleright C) \overset{\text{rot}}{\equiv} (w \triangleright C)$	5240
T5245	$\mathcal{A}(w \triangleright C) = C$	
T5246	$C \subseteq \mathcal{A}(w)$	5241, 5237
T5247	$\mathcal{A}(w \triangleright C) = \mathcal{A}(w) \cap C$	0657
G5248	$\mathbb{T}$	5246, 5247
T5249	$\mathcal{A}(u \triangleright C) = C$	
T5250	$C \subseteq \mathcal{A}(u)$	5241, 5236
T5251	$\mathcal{A}(u \triangleright C) = \mathcal{A}(u) \cap C$	0657
G5252	$\mathbb{T}$	5250, 5251
T5253	$(w \triangleright C) \in R$	
T5254	$\forall\ v \in \mathbb{A}^* \bullet \mathcal{L}(v) = 3 \wedge v \sqsubseteq w \Rightarrow v \in R\ )$	5166, 5228, 5229
T5255	$\mathcal{L}(w \triangleright C) = 3$	
T5256	$(w \triangleright C)$ ist einfach	0656, 5228
T5257	$\lvert \mathcal{A}(w \triangleright C) \rvert = 3$	5245, 5243
G5258	$\mathbb{T}$	0373, 5256, 5257
T5259	$(w \triangleright C) \sqsubseteq w$	0655
G5260	$\mathbb{T}$	5254, 5255, 5259
T5261	$(u \triangleright C) \in R$	
T5262	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	4763, 5156
T5263	$(u \triangleright C) \sqsubseteq u$	0655
G5264	$\mathbb{T}$	1315, 5262, 5230, 5263
T5265	$(u \triangleright C) \overset{\text{rot}}{\equiv} (w \triangleright C)$	
T5266	R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$	4765, 5156
T5267	$(w \triangleright C) \overset{\text{rot}}{\sim} (u \triangleright C)$	1547, 5266, 5253, 5261
T5268	$\mathcal{A}(w \triangleright C) = \mathcal{A}(u \triangleright C)$	5245, 5249
G5269	$\mathbb{T}$	0996, 5267, 5268
T5270	$\mathbb{F}$	5244, 5265

6.17 Konsistente, totale Vervollständigung

Wir haben schon gesehen, daß wir von einer totalen, zyklischen Ordnung zu einer Basis mit gleichem Alphabet und gleicher Abhängigkeitsrelation gelangen, indem wir Wörter, die länger sind als drei Elemente, aus der Relation entfernen. Wir wissen auch, daß diese Basis die ursprüngliche Ordnung eindeutig bestimmt. Zwei Fragen sind in diesem Kontext jedoch noch zu klären:

- Wie können wir die Ordnung aus der Basis generieren ? Wir fragen uns also, wie wir die Menge der generierten Wörter explizit angeben können. Hierzu werden wir unten die Operation der konsistenten, totalen Vervollständigung (einer Basis) einführen.
- Generiert jede Basis eine totale, zyklische Ordnung ? Bisher sind wir immer von einer totalen, zyklischen Ordnung R ausgegangen und haben ihre Basis (R|3) untersucht. Können wir aber auch aus jeder beliebigen Basis eine totale, zyklische Ordnung R generieren, so daß sich die Basis

als (R|3) schreiben läßt ? Auch diese Frage werden wir positiv mit Hilfe der konsistenten, totalen Vervollständigung beantworten.

In diesem Abschnitt konzentrieren wir uns also auf die konsistente, totale Vervollständigung einer Basis. Als Hauptresultat wird sich herausstellen, daß diese Operation eine totale, zyklische Ordnungsbasis immer zu einer totalen, zyklischen Ordnung ergänzt.

S5271

VA5272∗ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A5273 R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis

Gegeben sei eine beliebige Basis R. Die konsistente, totale Vervollständigung (KTV R) umfaßt genau die Wörter über dem Alphabet, die konsistent modulo Rotation mit allen Wörtern der Basis sind.

D5274 KTV R := $\{w \in \mathcal{A}(R)^* \bullet \forall\, v \in R \bullet v \overset{\text{rot}}{\approx} w\}$
T5275∗ (KTV R) $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ 5274

B5276

Wir wenden diese Operation auf die Basis der vierelementigen, totalen, zyklischen Ordnung aus Beispiel 4853 an. Die Basis war gegeben durch die Menge R′ = $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$ [{[0,1,2], [0,1,3], [0,2,3], [1,2,3]}]. Wir prüfen z.B. ob [3,2,1,0] in der Vervollständigung (KTV R′) ist. Dies ist jedoch nicht der Fall, da [0,1,2] nicht mit diesem Wort konsistent modulo Rotation ist. Das Wort [3,0,1,2] ist dagegen in der Vervollständigung enthalten, da es mit allen Wörtern der Menge (und damit auch mit allen rotierten Teilwörtern) konsistent modulo Rotation ist. Insgesamt enthält (KTV R′) das Wort [0,1,2,3] sowie alle rotierten Teilwörter von diesem. Es ergibt sich also wieder die totale, zyklische Ordnung R = (KTV R′) = $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2,3]}] von der R′ gemäß R′ = (R|3) eine Basis ist.

Nun behandeln wir die Eigenschaften der Vervollständigung im Detail, insbesondere ihre Invarianten.

S5277

VA5278∗ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A5279 R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis

Da jedes Wort der Basis mit sich selbst und allen anderen konsistent modulo Rotation ist, ist die Basis R auf jeden Fall in der Vervollständigung (KTV R) enthalten.

T5280 R $\subseteq$ (KTV R)

G5281 $\forall\, w \in R \bullet w \in$ (KTV R)
VA5282 $w \in R$
G5283 $w \in$ (KTV R)
T5284∗ $w \in \mathbb{A}^*$ 5282
G5285 $w \in \mathcal{A}(R)^* \wedge \forall\, v \in R \bullet v \overset{\text{rot}}{\approx} w$ 5274
T5286 $w \in \mathcal{A}(R)^*$
G5287 $\mathcal{A}(w) \subseteq \mathcal{A}(R)$ 0320
G5288 $\mathbb{T}$ 1245, 5282
T5289 $\forall\, v \in R \bullet v \overset{\text{rot}}{\approx} w$
T5290 R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ 4765, 5279
T5291 $\forall\, v \in R, w \in R \bullet v \overset{\text{rot}}{\approx} w$ 1547, 5290
G5292 $\mathbb{T}$ 5291, 5282
G5293 $\mathbb{T}$ 5286, 5289

Da die Vervollständigung nur aus Wörtern über dem Alphabet der Basis gebildet wird, ergibt sich mit dem vorigen Theorem, daß sich das Alphabet bei Vervollständigung nicht verändert.

T5294 $\mathcal{A}(\mathrm{R}) = \mathcal{A}(\mathrm{KTV\ R})$

T5295	$\mathcal{A}(\mathrm{R}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{KTV\ R})$	1246, 5280
T5296	$\mathcal{A}(\mathrm{KTV\ R}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	
G5297	$\forall\, x \in \mathcal{A}(\mathrm{KTV\ R}) \bullet x \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$	
VA5298	$x \in \mathcal{A}(\mathrm{KTV\ R})$	
G5299	$x \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$	
T5300	$x \in \mathcal{A}(\{w \in \mathcal{A}(\mathrm{R})^* \bullet \forall\, v \in \mathrm{R} \bullet v \overset{\mathrm{rot}}{\sim} w\})$	5298, 5274
VT5301	$w \in \{w \in \mathcal{A}(\mathrm{R})^* \bullet \forall\, v \in \mathrm{R} \bullet v \overset{\mathrm{rot}}{\sim} w\} \bullet x \in \mathcal{A}(w)$	5300, 1243
T5302	$w \in \mathcal{A}(\mathrm{R})^*$	5301
T5303	$x \in \mathcal{A}(w)$	5301
T5304	$\mathcal{A}(w) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	0319, 5302
G5305	$\mathbb{T}$	5303, 5304
G5306	$\mathbb{T}$	5295, 5296

Die Einfachheit der Basis überträgt sich ebenfalls auf ihre Vervollständigung.

T5307 (KTV R) ist einfach

G5308	$\forall\, w \in (\mathrm{KTV\ R}) \bullet w$ ist einfach	1279
VA5309	$w \in (\mathrm{KTV\ R})$	
G5310	w ist einfach	
T5311∗	$w \in \mathbb{A}^*$	5309
T5312	$\forall\, v \in \mathrm{R} \bullet v \overset{\mathrm{rot}}{\sim} w$	5309, 5274
T5313	R ist einfach	4763, 5279
G5314	$\forall\, x \in \mathcal{A}(w) \bullet (\mathrm{OCC}\ x\ w) = 1$	0386
VA5315	$x \in \mathcal{A}(w)$	
G5316	$(\mathrm{OCC}\ x\ w) = 1$	
T5317	$x \in \mathcal{A}(\mathrm{KTV\ R})$	1243, 5309, 5315
T5318	$x \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$	5317, 5294
VT5319	$w' \in \mathrm{R} \bullet x \in \mathcal{A}(w')$	1243, 5318
T5320∗	$w' \in \mathbb{A}^*$	5319
T5321	w′ ist einfach	1279, 5313, 5319
T5322	$\forall\, x \in \mathcal{A}(w') \bullet (\mathrm{OCC}\ x\ w') = 1$	0386, 5321
T5323	$(\mathrm{OCC}\ x\ w') = 1$	5322, 5319
T5324	$w' \overset{\mathrm{rot}}{\sim} w$	5312, 5319
T5325	$\forall\, x \in \mathcal{A}(w') \cap \mathcal{A}(w) \bullet (\mathrm{OCC}\ x\ w') = (\mathrm{OCC}\ x\ w)$	1216, 5324
T5326	$x \in \mathcal{A}(w) \cap \mathcal{A}(w')$	5315, 5319
T5327	$(\mathrm{OCC}\ x\ w') = (\mathrm{OCC}\ x\ w)$	5325, 5326
G5328	$\mathbb{T}$	5327, 5323

Entsprechendes gilt auch für die Teilwortabgeschlossenheit.

T5329 (KTV R) ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen

G5330	$\forall\, u,w \bullet w \in (\mathrm{KTV\ R}) \wedge u \sqsubseteq w \Rightarrow u \in (\mathrm{KTV\ R})$	1315
VA5331	$u,w \bullet w \in (\mathrm{KTV\ R})$	
A5332	$u \sqsubseteq w$	
G5333	$u \in (\mathrm{KTV\ R})$	
T5334∗	$u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$	5332
T5335	$w \in \mathcal{A}(\mathrm{R})^*$	5331, 5274
T5336	$\forall\, v \in \mathrm{R} \bullet v \overset{\mathrm{rot}}{\sim} w$	5331, 5274
G5337	$u \in \mathcal{A}(\mathrm{R})^* \wedge \forall\, v \in \mathrm{R} \bullet v \overset{\mathrm{rot}}{\sim} u$	5274
T5338	$u \in \mathcal{A}(\mathrm{R})^*$	
G5339	$\mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	0320
T5340	$\mathcal{A}(w) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	0319, 5335
T5341	$\mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(w)$	0569, 5332
G5342	$\mathbb{T}$	5341, 5340

T5343	$\forall\, v \in R \bullet v \overset{rot}{\sim} u$	
VA5344	$v \in R$	
G5345	$v \overset{rot}{\sim} u$	
T5346$*$	$v \in \mathbb{A}^*$	5344
T5347	$v \overset{rot}{\sim} w$	5336, 5344
T5348	w ist einfach	1279, 5307, 5331
G5349	$\mathbb{T}$	1015, 5348, 5347, 5332
G5350	$\mathbb{T}$	5338, 5343

Auch die Rotationsabgeschlossenheit bleibt bestehen.

T5351 (KTV R) ist $(\overset{rot}{\equiv})$ -abgeschlossen

G5352	$\forall\, u,v \bullet u \in (\mathrm{KTV}\ R) \wedge u \overset{rot}{\equiv} v \Rightarrow v \in (\mathrm{KTV}\ R)$	1343
VA5353	$u \in (\mathrm{KTV}\ R)$, v	
A5354	$u \overset{rot}{\equiv} v$	
G5355	$v \in (\mathrm{KTV}\ R)$	
T5356$*$	$u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$	5354
T5357	$u \in \mathcal{A}(R)^*$	5353, 5274
T5358	$\forall\, v \in R \bullet v \overset{rot}{\sim} u$	5353, 5274
G5359	$v \in \mathcal{A}(R)^* \wedge \forall\, w \in R \bullet w \overset{rot}{\sim} v$	5274
T5360	$v \in \mathcal{A}(R)^*$	
G5361	$\mathcal{A}(v) \subseteq \mathcal{A}(R)$	0320
T5362	$\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v)$	0519, 5354
T5363	$\mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(R)$	0319, 5357
G5364	$\mathbb{T}$	5363, 5362
T5365	$\forall\, w \in R \bullet w \overset{rot}{\sim} v$	
VA5366	$w \in R$	
G5367	$w \overset{rot}{\sim} v$	
T5368	$w \overset{rot}{\sim} u$	5358, 5366
G5369	$\mathbb{T}$	0999, 5368, 5354
G5370	$\mathbb{T}$	5360, 5365

Totalität und Vollständigkeit lassen sich gemeinsam als Eigenschaften der Vervollständigung ableiten. Hierbei (insbesondere für die Vollständigkeit) spielen unsere früheren Überlegungen bzgl. Konsistenz und Ketten eine wesentliche Rolle.

T5371 (KTV R) ist total $\wedge$ (KTV R) ist vollständig

G5372	$\forall\, C \bullet C \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{KTV}\ R) \wedge C$ ist endlich $\Rightarrow \exists\, w \in (\mathrm{KTV}\ R) \bullet \mathcal{A}(w) = C$	2290
VA5373	$C \bullet C \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{KTV}\ R)$	
A5374	C ist endlich	
G5375	$\exists\, w \in (\mathrm{KTV}\ R) \bullet \mathcal{A}(w) = C$	
T5376$*$	$C \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	5373
G5377	$\exists\, w \bullet w \in \mathcal{A}(R)^* \wedge (\ \forall\, v \in R \bullet v \overset{rot}{\sim} w\ ) \wedge \mathcal{A}(w) = C$	5274
D5378	$R' := R \triangleright C$	
T5379$*$	$R' \in \mathbb{A}^*$	5378
T5380	R' ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis	5378, 4856, 5279
T5381	R' ist endlich	
T5382	$\mathcal{A}(R') \subseteq C$	5378, 1709
T5383	$\mathcal{A}(R')$ ist endlich	5374, 5382
T5384	R ist einfach	4763, 5279
T5385	R' ist einfach	5378, 2850, 5384
G5386	$\mathbb{T}$	1300, 5383, 5385
T5387	$\mathcal{A}(R') = C$	
T5388	$C \subseteq \mathcal{A}(R)$	5294, 5373
T5389	$\mathcal{A}(R') = \mathcal{A}(R) \cap C$	5378, 1710

G5390	$\mathbb{T}$	5388, 5389
VT5391	$w \in \mathbb{A}^* \bullet w$ ist einfach $\wedge$ w ist eine $(\prec_{R'})$ -Kette $\wedge \mathcal{A}(w) = \mathcal{A}(R')$	5145, 5380, 5381
T5392$*$	$w \in \mathbb{A}^*$	5391
T5393	w ist einfach	5391
T5394	w ist eine $(\prec_{R'})$ -Kette	5391
T5395	$\mathcal{A}(w) = C$	5391, 5387
T5396	$w \in \mathcal{A}(R)^*$	
G5397	$\mathcal{A}(w) \subseteq \mathcal{A}(R)$	0320
T5398	$\mathcal{A}(w) = \mathcal{A}(R')$	5395, 5387
T5399	$\mathcal{A}(R') \subseteq \mathcal{A}(R)$	5378, 1708
G5400	$\mathbb{T}$	5398, 5399
T5401	$\forall u \in R' \bullet u \overset{\text{rot}}{\approx} w$	5226, 5380, 5393, 5394
T5402	$\forall u \in (R \triangleright C) \bullet u \overset{\text{rot}}{\approx} w$	5401, 5378
T5403	$\forall u \in R \bullet (u \triangleright C) \overset{\text{rot}}{\approx} w$	5402, 1703
T5404	$\forall u \in R \bullet u \overset{\text{rot}}{\approx} (w \triangleright C)$	5403, 1013
T5405	$\forall u \in R \bullet u \overset{\text{rot}}{\approx} w$	5404, 0647, 5395
G5406	$\mathbb{T}$	5396, 5405, 5395

Schließlich bleibt auch die Konsistenz modulo Rotation bei Vervollständigung erhalten.

T5407 (KTV R) ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$

G5408	$\forall u \in (\text{KTV R}), v \in (\text{KTV R}) \bullet u \overset{\text{rot}}{\approx} v$	1547
VA5409	$u \in (\text{KTV R}), v \in (\text{KTV R})$	
G5410	$u \overset{\text{rot}}{\approx} v$	
T5411$*$	$u \in \mathbb{A}^*, v \in \mathbb{A}^*$	5409
T5412	$\forall w \in R \bullet w \overset{\text{rot}}{\approx} u$	5409, 5274
T5413	$\forall w \in R \bullet w \overset{\text{rot}}{\approx} v$	5409, 5274
A5414	$\neg u \overset{\text{rot}}{\approx} v$	
D5415	$D := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)$	
T5416$*$	$D \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	5415
T5417	$D \subseteq \mathcal{A}(u)$	5415
T5418	$D \subseteq \mathcal{A}(v)$	5415
T5419	u ist einfach	5307, 1279, 5409
T5420	v ist einfach	5307, 1279, 5409
VT5421	$C \bullet C \subseteq D \wedge \lvert C\rvert = 3 \wedge \neg (u \triangleright C) \overset{\text{rot}}{\equiv} (v \triangleright C)$	1039, 5419, 5420, 5415
T5422	$C \subseteq D$	5421
T5423$*$	$C \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	5422
T5424	$C \subseteq \mathcal{A}(u)$	5417, 5422
T5425	$C \subseteq \mathcal{A}(v)$	5418, 5422
T5426	$\lvert C\rvert = 3$	5421
D5427	$u' := (u \triangleright C)$	
D5428	$v' := (v \triangleright C)$	
T5429$*$	$u' \in \mathbb{A}^* \wedge v' \in \mathbb{A}^*$	5427, 5428
T5430	$\neg u' \overset{\text{rot}}{\equiv} v'$	5427, 5428, 5421
T5431	$\mathcal{A}(u') = C$	
T5432	$\mathcal{A}(u') = \mathcal{A}(u) \cap C$	5427, 0657
G5433	$\mathbb{T}$	5424, 5432
T5434	$\mathcal{A}(v') = C$	
T5435	$\mathcal{A}(v') = \mathcal{A}(v) \cap C$	5428, 0657
G5436	$\mathbb{T}$	5425, 5435
T5437	$C \subseteq \mathcal{A}(R)$	
T5438	$\mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(\text{KTV R})$	1245, 5409
T5439	$\mathcal{A}(u) \subseteq \mathcal{A}(R)$	5294, 5438
G5440	$\mathbb{T}$	5424, 5439
VT5441	$w' \in R \bullet \mathcal{A}(w') = C$	
T5442	R ist total $\wedge$ R ist 3 -vollständig	4763, 5279

G5443	$\mathbb{T}$	2245, 5437, 5426
T5444	$w' \stackrel{\text{rot}}{\sim} u$	5412, 5441
T5445	$w' \stackrel{\text{rot}}{\sim} v$	5413, 5441
T5446	$u' \stackrel{\text{rot}}{\sim} w'$	
T5447	$u' \sqsubseteq u$	5427, 0655
T5448	$w' \stackrel{\text{rot}}{\sim} u'$	1015, 5419, 5444, 5447
G5449	$\mathbb{T}$	0989, 0076, 5448
T5450	$w' \stackrel{\text{rot}}{\sim} v'$	
T5451	$v' \sqsubseteq v$	5428, 0655
G5452	$\mathbb{T}$	1015, 5420, 5445, 5451
T5453	$u' \stackrel{\text{rot}}{\equiv} w'$	
T5454	$\mathcal{A}(u') = \mathcal{A}(w')$	5431, 5441
G5455	$\mathbb{T}$	0996, 5454, 5446
T5456	$w' \stackrel{\text{rot}}{\equiv} v'$	
T5457	$\mathcal{A}(w') = \mathcal{A}(v')$	5434, 5441
G5458	$\mathbb{T}$	0996, 5457, 5450
T5459	$u' \stackrel{\text{rot}}{\equiv} v'$	0515, 5453, 5456
T5460	$\mathbb{F}$	5459, 5430

Die Zusammenfassung dieser Lemmata liefert uns nun das angekündigte Resultat: Die Vervollständigung einer totalen, zyklischen Ordnungsbasis ergibt immer eine totale, zyklische Ordnung.

T5461 (KTV R) ist eine totale, zyklische Ordnung . . 3681, 5307, 5329, 5351, 5371, 5407

Jetzt bleibt noch festzustellen, daß die konsistente, totale Vervollständigung die Menge der Wörter bis zur Länge drei nicht verändert. Hierzu verwenden wir ein Lemma, daß später in allgemeinerer Form für zyklische Ordnungsbasen gezeigt wird. Aus diesem Grund verzichten wir hier auf den Beweis.

S5462

VA5463∗	$R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	
A5464	R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis	
T5465	$\forall\, R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet R'$ ist einfach $\wedge\, R'$ ist konsistent modulo $(\stackrel{\text{rot}}{\equiv}) \wedge$ $\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(R') \wedge R \subseteq R' \Rightarrow (R'\vert 3) = R$	
T5466	$((\text{KTV } R)\vert 3) = (R\vert 3)$	5464, 5307, 5407, 5294, 5280

Sind unsere am Anfang dieses Abschnitts gestellten Fragen damit beantwortet ?

- Zum einen haben wir die Menge der von einer Basis generierten Wörter explizit als konsistente, totale Vervollständigung angegeben. Wir gehen von einer totalen, zyklischen Ordnung R aus und bilden die Basis $(R|3)$. Die konsistente, Vervollständigung von $(R|3)$ liefert dann wieder eine totale, zyklische Ordnung R' . Zu zeigen ist, daß es sich dabei um die ursprüngliche Ordnung R handelt. Mit Hilfe des letzten Theorems 5466 stellen wir fest, daß sich R und R' in den Wörtern bis zur Länge drei nicht unterscheiden. Theorem 4760 liefert uns dann $R = R'$.
- Zum anderen haben wir uns gefragt, ob jede beliebige Basis R' eine totale, zyklische Ordnung R generiert, so daß R' eine Basis von R ist, also $R' = (R|3)$ gilt. Dies ist tatsächlich der Fall: Bilden wir R als konsistente, totale Vervollständigung von R' so brauchen wir nur noch Theorem 5466, also $(R|3) = (R'|3)$, anzuwenden sowie die Eigenschaft 4764, also $(R'|3) = R'$, einer Basis.

6.18 Eindeutigkeit

Wir haben im vorigen Abschnitt scheinbar recht willkürlich eine Operation angegeben, die uns von einer Basis zu einer totalen, zyklischen Ordnung führt. Mit Hilfe dieser Operation haben wir gesehen, daß jede beliebige Basis mindestens eine totale, zyklische Ordnung generiert. Es stellt sich nun die Frage, ob eine Basis die totale, zyklische Ordnung sogar eindeutig bestimmt. Daß dies der Fall ist, wird in diesem Abschnitt festgestellt. Wiederum handelt es sich hier um ein Ergebnis, das später für zyklische Ordnungen und deren Basen ausführlich bewiesen wird, so daß wir hier auf den spezielleren (mit den vorigen Resultaten recht einfachen) Beweis verzichten.

Wir gehen von einer beliebigen Basis aus. Wir interessieren uns für solche totalen, zyklischen Ordnungen, die die Basis erweitern, aber das gleiche Alphabet besitzen. Von diesen Ordnungen gibt es genau eine, nämlich die konsistente, totale Vervollständigung.

S5467

VA5468∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

A5469 R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis

T5470 $\exists!\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathcal{A}(\mathrm{R}) = \mathcal{A}(\mathrm{R}') \wedge \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}' \wedge \mathrm{R}'$ ist eine totale, zyklische Ordnung

Zusammenfassend ergibt sich aus diesen Untersuchungen, daß die beiden Axiomensysteme, also die Axiome für totale, zyklische Ordnungen und die Axiome für totale, zyklische Ordnungsbasen austauschbar sind. Von Ordnungen zu Basen gelangen wir durch Einschränkung. Der umgekehrte Weg führt über die totale, konsistente Vervollständigung, die im Sinne von Theorem 5469 die einzige Operation ist. Totale, zyklische Ordnungen haben den Vorteil alle charakteristischen Beobachtungen zu repräsentieren und somit direkt aus unserer Interpretation zu folgen. Totale, zyklische Ordnungsbasen erlauben eine effizientere Darstellung, da es die Länge der Wörter auf drei Elemente beschränkt ist. Eine weitere Verringerung der Redundanz ist in beiden Repräsentationen leicht möglich, wenn wir noch Teilwort- und Rotationsabgeschlossenheit ausnutzen.

Kapitel 7

Zyklische Ordnungen

Totale, zyklische Ordnungen, besonders die endlichen, haben eine recht einfache Struktur. Aus verschiedenen Gründen haben wir sie dennoch im Detail behandelt: Zum einen lieferten sie uns den wichtigen Begriff der zyklischen Transitivität, den wir in diesem Kapitel zur Axiomatisierung verwenden werden. Zu anderen sind viele Resultate direkt auf zyklische Ordnungen übertragbar, da wir die Grundaxiome nicht verändern werden. Schließlich hatten das Kapitel über totale, zyklische Ordnungen ebenfalls wie das davorliegende Kapitel über azyklische Ordnungen, einen vorbereitenden Charakter: Die Argumentation im vorliegenden Kapitel wird abgesehen von einigen Erweiterungen völlig analog verlaufen. Wir beginnen also wieder mit der informalen Motivation der Axiome anhand einer Interpretation.

7.1 Zyklische Systeme

Wir verwenden den Systembegriff aus dem vorigen Kapitel 6, jedoch mit der Verallgemeinerung, daß wir auf die Forderung nach Sequentialität verzichten und somit Nebenläufigkeit zulassen: Zwei Ereignisse müssen nicht mehr streng alternierend aufeinanderfolgen, sondern können mehr oder weniger unabhängig voneinander sein und nebenläufig stattfinden.

B5471

Wir betrachten das Netzsystem in Abb. 7.1. Dort haben wir Transitionen, die mit den Ereignissen $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ beschriftet sind, sowie eine unsichtbare Transition. Das Stattfinden der unbeschrifteten Transition ist nicht beobachtbar. Ferner gibt es verschiedene Transitionen mit gleicher Beschriftung. Diese Transitionen sind für einen Beobachter ununterscheidbar. In jeder erreichbaren Markierung kann jedes Ereignis vorwärts und rückwärts wieder stattfinden. Damit handelt es sich um ein zyklisches System. Alle möglichen Abläufe (die per Definition maximal sind) sind also rückwärts und vorwärts unendlich ausgedehnt. Betrachten wir jedes einzelne Ereignis aus $\{0,1,2,3,4,6,7\}$, so wiederholt es sich in jedem Ablauf permanent. Für Ereignis 5 gilt dies nicht, da es einen Ablauf gibt, in dem statt dem Ereignis 5 immer die unbeschriftete Transition (unsichtbar) schaltet. Das System ist nicht sequentiell, da beispielsweise die voneinander unabhängigen Transitionen 3 und 4 nicht alternierend stattfinden müssen: Es kann beispielsweise nach dem Ereignis 4 zweimal das Ereignis 3 stattfinden. Auch die Ereignisse 1 und 4 müssen nicht alternierend stattfinden. Entsprechendes gilt für Ereignisse 1 und 2, obwohl die entsprechenden Transitionen nicht unabhängig sind. Ferner ist das Ereignis 6 völlig unabhängig von allen anderen Ereignissen. Trotz dieser Unabhängigkeit besitzen die Ereignisse des Systems eine gewisse Ordnung: Betrachten wir z.B. nur die Ereignisse $\{0,1,2,3\}$, so stellen wir fest, daß nach dem Ereignis 0 immer die Ereignisse

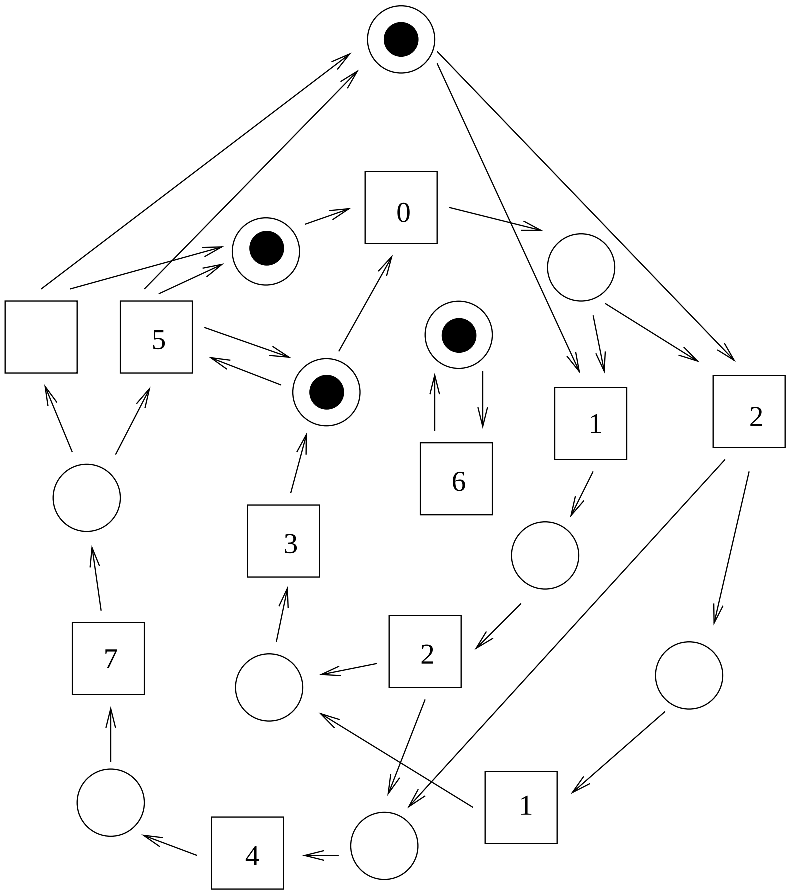


Abbildung 7.1: Ein zyklisches System

1 und 2 in beliebiger Reihenfolge stattfinden. Danach findet Ereignis 3 statt, so daß wieder Ereignis 0 aktiviert werden kann und der Vorgang von neuem beginnt.

Da wir die Definitionen der Kausalzyklen, der verläßlichen Ereignisse, der Kausalrelation sowie der Kausalkliquen im vorigen Kapitel von der dort geforderten Sequentialität unabhängig formuliert haben, können wir diese Begriffe weiterhin verwenden. Die Menge der Kausalzyklen bezeichnen wir als zyklische Ordnung R der Ereignisse des Systems.

B5472

Die Kausalzyklen des Netzsystems in Abb. 7.1 sind $\mathrm{R} = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsubseteq})[\{[0,1,3], [0,2,3], [0,2,4,7], [6]\}]$. [0,1,3] ist ein Kausalzyklus, weil nach dem Ereignis 0 die Ereignisse 2 und 3 in einer eindeutigen Reihenfolge stattfinden. [0,2] ist ein Kausalzyklus, da 0 und 2 immer streng alternierend, d.h. in der zyklischen Reihenfolge [0,2], stattfinden. [0,2] ist in dem größeren Kausalzyklus [0,2,3] enthalten. [6] ist ein Kausalzyklus, da sich das Ereignis 6 in jedem Ablauf (der nach Definition maximal sein muß) permanent wiederholt. [5] ist kein Kausalzyklus, da es einen Ablauf gibt, in dem das Ereignis 5 überhaupt nicht stattfindet. [3,4] und [1,4] sind keine Kausalzyklen, da die Ereignisse nicht streng alternieren. [0,1,4] ist kein Kausalzyklus, da nach dem Ereignis 0 die Reihenfolge der Ereignisse 1 und 4 nicht eindeutig ist. Die verläßlichen Ereignisse $\{0,1,2,3,4,6,7\}$ stimmen mit $\mathcal{A}(\mathrm{R})$ überein.

Bis auf eine Ausnahme lassen sich die Eigenschaften der Relation R auf die gleiche Weise überprüfen: Die Relation R ist einfach, teilwortabgeschlossen, rotationsabgeschlossen, vollständig und konsistent modulo Rotation. Im allgemeinen nicht gültig ist die Totalität der Relation, da sie aus der zyklischen Sequentialität abgeleitet wurde. Leider reichen, wie wir später noch sehen werden, diese Eigenschaften nicht zur Axiomatisierung von zyklischen Ordnungen aus. Eine weitere Eigenschaft, die wir noch benötigen ist die zyklische Transitivität, die natürlich auch für die sequentiellen, zyklischen Systeme ableitbar ist.

Die Relation R ist zyklisch transitiv, d.h. haben wir Kausalzyklen [a,b,c] und [a,c,d] so ist auch [a,b,d] ein Kausalzyklus. Um dies zu verifizieren, verwenden wir die zeitliche Transitivität: Wir nehmen Kausalzyklen [a,b,c] und [a,c,d] an. Für jeden Ablauf gilt also: Zwischen zwei (aufeinanderfolgenden) Vorkommen von a finden die Ereignisse b und c sowie c und d in der Reihenfolge (b,c) und (c,d) statt. Mit Hilfe der zeitlichen Transitivität schließen wir, daß zwischen zwei Vorkommen von a die Ereignisse b und d in der Reihenfolge (b,d) stattfinden, was gerade die Existenz eines Kausalzyklus [a,b,d] impliziert.

B5473

Die Relation R = $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,3], [0,2,3], [0,2,4,7], [5], [6]}] aus dem vorigen Beispiel 5472 ist klarerweise einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen. Die verläßlichen Ereignisse sind $\mathcal{A}$(R) = {0,1,2,3,4,6,7}. Die Relation ist nicht total, da beispielsweise die Ereignisse 3 und 4 nicht gemeinsam in einem Wort der Relation vorkommen. Die Relation ist konsistent modulo Rotation, da alle oben genannten Wörter einfach und paarweise miteinander konsistent modulo Rotation sind (Theorem 1627). Als Kausalrelation erhalten wir (li R) = $\updownarrow${(0,1), (1,3), (0,3), (0,2), (2,3), (0,3), (0,4), (0,7), (2,4), (2,7), (4,7)}. Die Kausalkliquen sind damit ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen = $\mathcal{P}$({0,2,3}) ∪ $\mathcal{P}$({0,2,4,7}) ∪ {{5}, {6}, ∅}. Jede dieser Kausalkliquen wird durch ein Wort der Relation repräsentiert: {0,2,4,7} durch [0,2,4,7], {0,2,3} durch [0,2,3], {0,4} durch [0,4], {5} durch [5], ∅ durch [], usw. Damit ist R vollständig. Wir können zum Nachweis der Konsistenz modulo Rotation auch über die Kens ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens = {{0,2,4,7}, {0,2,3}, {5}, {6}} argumentieren, indem wir Theorem 2325 anwenden. Schließlich ist R auch zyklisch transitiv: Mit [0,2,4] ∈ R und [0,4,7] ∈ R gilt auch [0,2,7] ∈ R, aus [7,0,2] ∈ R und [7,2,4] ∈ R folgt [7,0,4] ∈ R, usw.

Damit haben wir alle Axiome für die zyklischen Ordnungen motiviert: Einfachheit, Teilwort- und Rotationsabgeschlossenheit, Vollständigkeit und zyklische Transitivität.

7.2 Darstellung

Aufgrund der Einfachheit, Teilwort- und Rotationsabgeschlossenheit der zyklischen Ordnungen können wir auf die Darstellung mit Kreisen, also geschlossenen Kanten, im vorigen Kapitel zurückgreifen. Wie schon erwähnt, gilt die Vollständigkeit bei Darstellungen dieser Art nicht im allgemeinen. Auch die zyklische Transitivität ist nicht immer erfüllt.

B5474

Abb. 7.2 ist eine Darstellung, die drei Kreise zeigt. Auf jedem Kreis liegen vier Elemente. Aus dem durchgezogenen Kreis lesen wir das Wort [0,1,2,3] und alle rotierten Teilwörter ab, also die Menge $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2,3]}]. Aus dem gestrichelten Kreis lesen wir die Wörter $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,4,5,1]}] ab. Der gepunktete Kreis liefert schließlich $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[2,3,4,5]}]. Insgesamt ist also die Relation R = $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2,3], [0,4,5,1], [2,3,4,5]}] dargestellt. Es gilt $\mathcal{A}$(R) = {0,1,2,3,4,5}. R ist offensichtlich einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen. R ist jedoch nicht vollständig: Wir haben {(1,2),(1,5),(2,5)} ⊆ (li R). Damit ist {1,2,5} ∈ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen. Es gibt jedoch kein Wort w ∈ R mit $\mathcal{A}$(w) = {1,2,5}, das diese Klique repräsentiert. R ist auch nicht zyklisch transitiv: Wir haben [1,2,0] ∈ R und [1,0,4] ∈ R, aber [1,2,4] ∉ R.

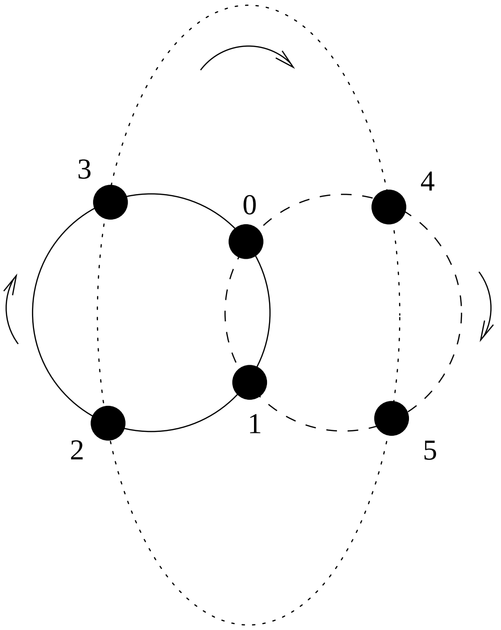


Abbildung 7.2: Drei unverzweigte Kreise

Im allgemeinen kann unsere Darstellung viele verschiedene Kreise enthalten. Um ihre Zahl möglichst gering zu halten, wollen wir auch verzweigte Kreise zulassen, wobei wir sie so interpretieren, daß ein verzweigter Kreis als Abkürzung für die Menge aller Kreise steht, die man beim Durchlaufen erhält, wenn man alle Verzweigungsmöglichkeiten berücksichtigt.

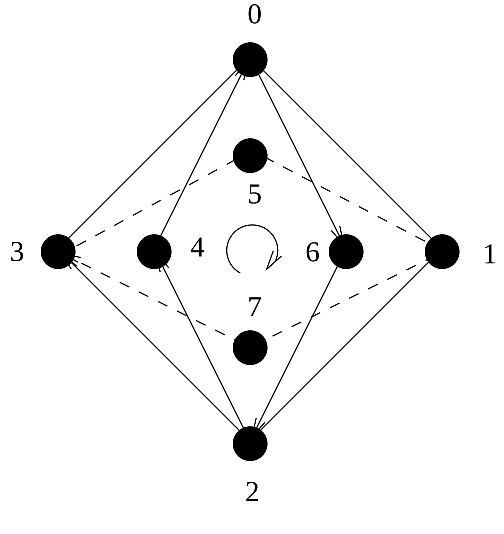


Abbildung 7.3: Ein verzweigter und ein unverzweigter Kreis

B5475

Die Abb. 7.3 stellt eine Relation mit Hilfe von zwei Kreisen dar. Der durchgezogene Kreis ist verzweigt. Der gestrichelte Kreis ist unverzweigt. Beide Kreise sollen im Uhrzeigersinn orientiert sein. Aus dem gestrichelten Kreis lesen wir die Wörter $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[1,7,3,5]\}]$ ab. Der durchgezogene Kreis steht als Abkürzung für vier Kreise $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2,3]\}]$, $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,6,2,4]\}]$, $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2,4]\}]$ und

$(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,6,2,3]}]. Damit erhalten wir die Relation R = $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[1,7,3,5], [0,1,2,3], [0,6,2,4], [0,1,2,4], [0,6,2,3]}], die klarerweise einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen ist.

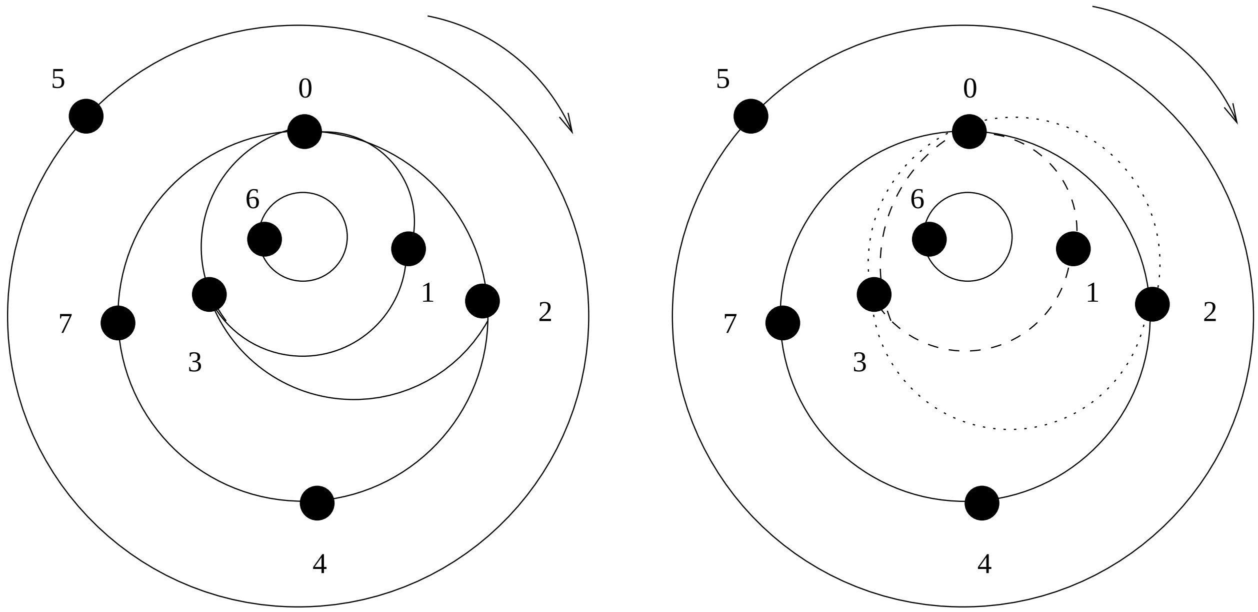


Abbildung 7.4: Die zyklische Ordnung des Systems in Abb. 7.1

B5476

Die zyklische Ordnung des Netzsystems aus Beispiel 5472 ist in Abb. 7.4 in zwei äquivalenten Darstellungen zu sehen. In beiden Darstellungen sind alle Kreise im Uhrzeigersinn orientiert. Links benötigen wir nur drei Kreise, von denen einer mehrfach verzweigt ist. Rechts haben wir fünf unverzweigte Kreise. Der verzweigte Kreis ist also nichts anderes als eine Abkürzung für drei unverzweigte Kreise.

Später werden wir sehen, das jede endliche zyklische Ordnung eine solche Darstellung besitzt, wenn wir nur genügend verschiedene (unverzweigte) Kreise benutzen. Leider ist diese Darstellung jedoch für viele interessante zyklische Ordnungen noch nicht ausreichend kompakt. Dies ist beispielsweise dann nicht der Fall, wenn aus der Kombination von Kreisen neue verzweigte Kreise entstehen, die wir nicht als Wörter in die Relation aufnehmen wollen. Um dies zu vermeiden müßten wir die Kreise explizit voneinander unterscheiden. Das bedeutet aber, daß wir teilweise auf verzweigte Kreise verzichten müssen, womit sich die Gesamtzahl der Kreise eventuell beträchtlich erhöht.

Aus diesem Grund erweitern wir die Darstellungsmöglichkeiten um sogenannte Barrieren. Eine Barriere liegt auf einem Kreis entweder genau in einem Element oder zwischen zwei Elementen. Diese Barriere hat eine sehr einfache Bedeutung: Beim Durchlaufen des Kreises darf höchstens eine Barriere überschritten werden. Damit ist es in vielen Fällen möglich, die Wirkung von unerwünschten Kreisen zu eliminieren.

Die Einfachheit der abgelesenen Relation bleibt gültig, da wir beim Durchlaufen eines Kreises spätestens vor dem wiederholten Auftreten eines Elements abbrechen. Die Teilwortabgeschlossenheit bleibt ebenfalls gültig. Da ein Kreis mehrere Barrieren besitzen kann, erhalten wir nicht aus jeder Darstellung eine rotationsabgeschlossene Relation. Die Vollständigkeit und die zyklische Transitivität gelten wie vorher auch nicht allgemein.

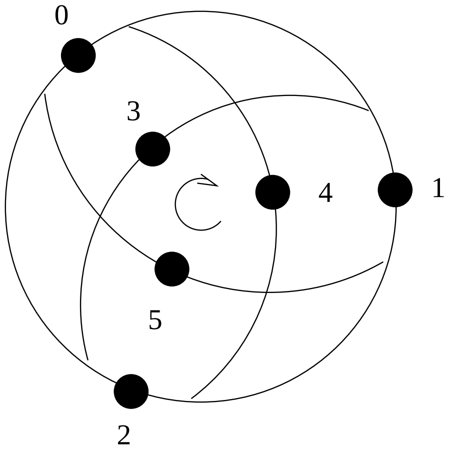


Abbildung 7.5: Ein mehrfach verzweigter Kreis

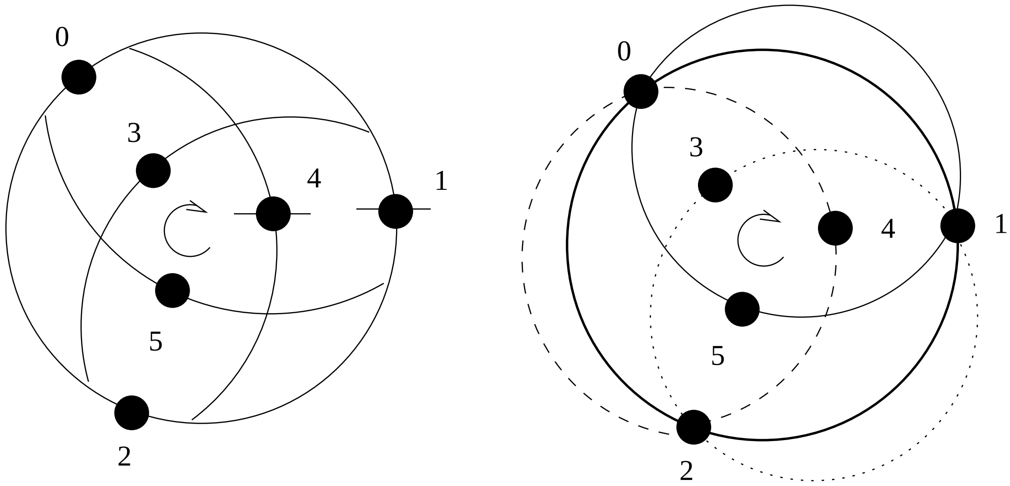


Abbildung 7.6: Ein verzweigter Kreis mit Barrieren und eine äquivalente Darstellung ohne Barrieren

B5477

In Abb. 7.5 und Abb. 7.6 (links) ist zweimal der gleiche mehrfach verzweigte Kreis dargestellt. In Abb. 7.6 wurden jedoch in den Elementen 1 und 4 Barrieren eingefügt, die dazu führen, daß es sich grundlegend verschiedene Relationen ergeben.

Aus Abb. 7.5 erhalten wir die Relation $\mathrm{R} = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2], [0,4,2], [1,5,0], [2,3,1], [0,4,2,3,1,5]\}]$. Die Relation ist nicht konsistent modulo Rotation, da [0,1,2] und [0,4,2,3,1,5] nicht miteinander konsistent modulo Rotation sind. R ist auch nicht zyklisch transitiv, da $[0,2,1] \in \mathrm{R}$ und $[0,1,2] \in \mathrm{R}$ aber $[0,2,2] \notin \mathrm{R}$ gilt. Es handelt sich also auf keinen Fall um eine zyklische Ordnung.

Links in Abb. 7.6 können wir das Wort [0,4,2,3,1,5] nicht ablesen, da beim Durchlaufen der Kante wiederholt Barrieren überschritten werden müssen. Wir haben also nur die Relation $\mathrm{R}' = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2], [0,4,2], [1,5,0], [2,3,1]\}]$, bei der es sich um eine zyklische Ordnung handelt, wie wir später noch überprüfen werden.

Eine äquivalente Darstellung der Relation R' ohne Barrieren ist rechts in Abb. 7.6 angegeben. Hierzu benötigen wir jedoch vier unverzweigte Kreise, was die Darstellungskomplexität schon in diesem kleinen Beispiel beträchtlich erhöht.

Die hier aufgeführten Beispiele sollen nur die Möglichkeiten der Darstellung von Relationen verdeutlichen. Beispiele zyklischer Ordnungen werden wir uns noch im Detail anschauen.

7.3 Definition

Die Axiome für zyklische Ordnungen sind auch ohne die angegebene Interpretation sehr naheliegend, wenn wir die totalen, zyklischen Ordnungen (in der gewählten Axiomatisierung) schon kennen: Wir fordern Einfachheit, Teilwortabgeschlossenheit, Rotationsabgeschlossenheit und zyklische Transitivität. Vergleichen wir diese Axiome mit der Charakterisierung von totalen, zyklischen Ordnungen in Theorem 4063, so stellen wir nur einen einzigen, naheliegenden Unterschied fest: Die Totalität wird für zyklische Ordnungen nicht gefordert.

S5478

VA5479∗ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

D5480 R ist eine zyklische Ordnung :$\Leftrightarrow$
R ist einfach $\wedge$
R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen $\wedge$
R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen $\wedge$
R ist vollständig $\wedge$
R ist zyklisch transitiv

Somit sind zyklische Ordnungen tatsächlich eine Verallgemeinerung von totalen, zyklischen Ordnungen.

T5481 R ist eine totale, zyklische Ordnung $\Rightarrow$ R ist eine zyklische Ordnung 3681, 4062, 5480

Bei azyklischen Ordnungen konnten wir die Konsistenz mit Hilfe der Transitivität ableiten (siehe 2760). Ganz analog ist bei totalen, zyklischen Ordnungen die Konsistenz modulo Rotation mit Hilfe der zyklischen Transitivität nach 4016 ableitbar.

T5482 R ist eine zyklische Ordnung $\Rightarrow$ R ist konsistent modulo ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) 5480, 4016

Eine zyklische Ordnung mit einer totalen Relation ist eine totale, zyklische Ordnung.

T5483 R ist eine zyklische Ordnung $\wedge$ R ist total $\Leftrightarrow$
R ist eine totale, zyklische Ordnung 5480, 5482, 3681, 4062

Wie bei totalen, zyklischen Ordnungen sind auch die Axiome der zyklischen Ordnungen invariant unter Spiegelung der Relation, d.h. Umkehrung der Orientierung. Auch Alphabet, Abhängigkeit und Unabhängigkeit bleiben erhalten (Theoreme 2588, 2679 und 2697).

T5484 R ist eine zyklische Ordnung $\Rightarrow$
(REV R) ist eine zyklische Ordnung 5480, 2576, 2641, 2648, 2696, 3891

Natürlich gilt auch Theorem 3700 für zyklische Ordnungen, nachdem sich die zyklische Ordnung genau dann von ihrer Spiegelung unterscheidet, wenn sie Wörter mit mindestens drei Elementen enthält.

Zu Veranschaulichung der Definition behandeln wir nun zunächst einige kleine Beispiele für nichttotale, zyklische Ordnungen.

B5485

Das vierelementige Beispiel in Abb. 1.2 liefert die Relation R = $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,3], [0,2,3]}]. Einfachheit, Teilwortabgeschlossenheit und Rotationsabgeschlossenheit sind offensichtlich. Wir haben $\mathcal{A}$(R) = {0,1,2,3} und, da die Elemente 1 und 2 nicht gemeinsam in einem Wort vorkommen, ist R nicht total. Die Menge der Abhängigkeitskliquen ist ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kliquen = $\mathcal{P}$({0,1,3}) ∪ $\mathcal{P}$({0,2,3}) und die Kens sind ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kens = {{0,1,3}, {0,2,3}}. Jeder dieser Kens ist durch ein Wort in R repräsentiert. Die Relation ist also nach Theorem 2325 vollständig. Es bleibt noch die zyklische Transitivität zu überprüfen. Die dreistelligen Wörter von R sind {[0,1,3], [1,3,0], [3,0,1], [0,2,3], [2,3,0], [3,0,2]}. Zur Erfüllung der Prämisse von Definition 3841 benötigen wir zwei dreistellige Wörter der Form [a,b,c] und [a,c,d]. Da kein solches Paar existiert, ist die zyklische Transitivität erfüllt. Damit ist R eine nichttotale, zyklische Ordnung.

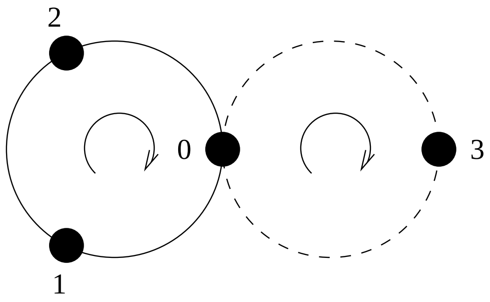


Abbildung 7.7: Eine zyklische Ordnung mit zwei Kens

B5486

Wir lesen die Relation R = $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2], [0,3] }] aus Abb. 7.7 ab. Einfachheit, Teilwortabgeschlossenheit und Rotationsabgeschlossenheit sind offenbar erfüllt. Es gilt $\mathcal{A}$(R) = {0,1,2,3}. R ist nicht total, da die Elemente 2 und 3 nicht gemeinsam in einem Wort vorkommen. Die Abhängigkeitskliquen sind ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kliquen = $\mathcal{P}$({0,1,2}) ∪ $\mathcal{P}$({0,3}). Jede dieser Kliquen ist durch ein Wort in R repräsentiert. Die Relation ist also vollständig. Die dreistelligen Wörter von R sind gerade {[0,1,2], [1,2,0], [2,0,1]}. Kein Paar aus dieser Menge erfüllt die Prämisse von Definition 3841. Das Axiom der zyklischen Transitivität ist somit ebenfalls erfüllt. R ist also eine nichttotale, zyklische Ordnung.

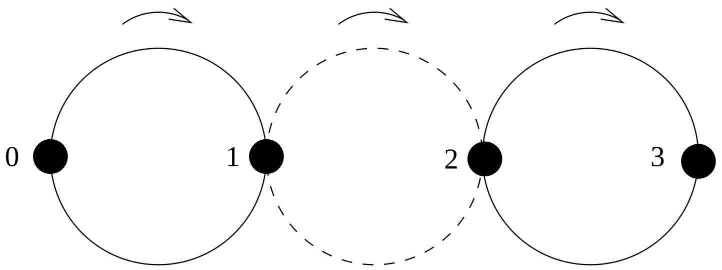


Abbildung 7.8: Eine zyklische Ordnung mit drei Kens

B5487

Aus Abb. 7.8 ergibt sich die Relation R = $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1], [1,2], [2,3]}] mit dem Alphabet $\mathcal{A}$(R) = {0,1,2,3}. Die Abhängigkeitskliquen sind ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kliquen = {{0,1}, {1,2}, {2,3}, {0}, {1}, {2}, {3}, ∅}. Wir haben die Kens ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kens = {{0,1}, {1,2}, {2,3}}. Die Vollständigkeit läßt sich leicht überprüfen. Die zyklische Transitivität gilt, da keine dreistelligen Wörter in der Relation enthalten sind (Theorem 3844). R ist demnach eine zyklische Ordnung, die nicht total ist, da sie mehrere

Kens besitzt (Theorem 2024). Man beachte, daß sich die zyklische Ordnung nicht verändert, wenn man in der Darstellung bei einzelnen oder bei allen Kreisen die Orientierung umkehrt.

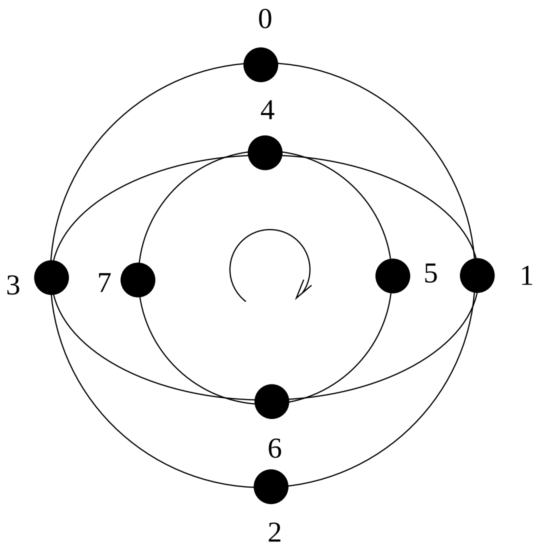


Abbildung 7.9: Eine zyklischen Ordnung mit fünf Kens

B5488

In Abb. 7.9 ist die Relation R = $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2,3], [3,4,1,6], [4,5,6,7], [3,4,5,6], [1,6,7,4], [1,2,3,4], [1,6,3,0]}] zu sehen. Wir haben das Alphabet $\mathcal{A}(\mathrm{R})$ = {0,1,2,3,4,5,6,7} und die Kens $(\underline{\text{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens = {{0,1,2,3}, {1,3,4,6}, {4,5,6,7}, {3,4,5,6}, {1,6,7,4}, {1,2,3,4}, {1,6,3,0}}. R ist klarerweise einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen. R ist vollständig, da jeder Ken durch ein Wort der Relation repräsentiert wird (Theorem 2325). Etwas mühsam zu überprüfen ist die zyklische Transitivität. Insgesamt ist R eine zyklische Ordnung. Sie ist nicht total, da sie mehrere Kens besitzt (Theorem 2024).

Die Axiome der zyklischen Ordnungen nach Definition 5480 sind voneinander unabhängig. Da wir entsprechendes schon bei totalen, zyklischen Ordnungen und Ordnungsbasen untersucht hatten, können wir auf die dort konstruierten Beispiele zurückgreifen: Wir haben die Unabhängigkeit der Einfachheit (Beispiel 4772), der Rotationsabgeschlossenheit (Beispiel 3693), der Vollständigkeit (Beispiel 3695) und der zyklischen Transitivität (Beispiel 4776). Es fehlt nur noch der Nachweis der Unabhängigkeit der Teilwortabgeschlossenheit, der durch das folgende Beispiel gegeben wird.

B5489

Wir setzen $\mathrm{R}' = (\overset{\text{rot}}{\equiv})$[{[3,2,1,0]}], $\mathrm{R}'' = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2], [0,1,3], [0,2,3], [1,2,3]}] und $\mathrm{R} = \mathrm{R}' \cup \mathrm{R}''$. Wir haben $\mathcal{A}(\mathrm{R})$ = {0,1,2,3}. Die Einfachheit von R ist offensichtlich. Als Vereinigung $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossener Mengen R′ und R″ ist R natürlich auch $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen. Alle Teilmengen des Alphabets sind Abhängigkeitskliquen , also $(\underline{\text{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen = $\mathcal{P}$({0,1,2,3}) und es gibt nur einen Ken $(\underline{\text{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens = {{0,1,2,3}}. Abhängigkeitskliquen bis zu drei Elementen werden von Wörtern aus R″ abgedeckt. Die vierelementige Klique {0,1,2,3} wird durch [3,2,1,0] repräsentiert. R ist also vollständig. R″ ist die totale, zyklische Ordnungsbasis aus Beispiel 4766 und damit zyklisch transitiv. Da durch R″ nur vierstellige Wörter zu R′ hinzugefügt werden, ist auch R zyklisch transitiv. R ist jedoch nicht $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen, da [3,2,1,0] ∈ R aber nicht [3,2,1] ∈ R gilt.

Schließlich stellt sich noch die Frage, ob statt der zyklischen Transitivität in Definition 5480 nicht schon die Konsistenz modulo Rotation ausgereicht hätte, wie es in Definition 3681 der totalen, zyklischen Ordnungen der Fall war. Aus dem folgenden Beispiel ist jedoch ersichtlich, daß die zyklische Transitivität in diesem Fall nicht ableitbar wäre.

B5490

Die Relation $R = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2],[0,2,3]\}]$ ist einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen, vollständig und konsistent modulo Rotation aber nicht zyklisch transitiv, da $[2,3,0] \in R$ und $[2,0,1] \in R$ aber $[2,3,1] \notin R$ gilt.

7.4 Projektion

Aus unseren Untersuchungen bei totalen, zyklischen Ordnungen ergibt sich auch die Invarianz aller Axiome unter Projektion. Insbesondere liefert Projektion einer zyklischen Ordnung auf eine Abhängigkeitsklique sogar eine totale, zyklische Ordnung.

Für unsere Interpretation der zyklischen Ordnung auf Ereignissen bedeutet dies folgendes: Beobachten wir nur eine bestimmte Ereignismenge eines zyklischen Systems, so hat diese wieder die Form einer zyklischen Ordnung. Die Detailliertheit der Beobachtung hat also auf die Tatsache, daß es sich um eine zyklische Ordnung handelt, keinen Einfluß.

B5491

Wir gehen von der zyklischen Ordnung $R = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2,3], [3,4,1,6], [4,5,6,7], [3,4,5,6], [1,6,7,4], [1,2,3,4], [1,6,3,4]\}]$ in Beispiel 5488 aus.

Zunächst berechnen wir die Projektion $R' = (R \triangleright \{1,2,3,4,5\}) = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[3,4,5], [1,2,3,4]\}]$. Wir haben $\mathcal{A}(R') = \{1,2,3,4,5\}$ und $(\underline{\text{li}}\ R')$ -Kens $= \{\{3,4,5\}, \{1,2,3,4\}\}$. R' ist einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen, vollständig und zyklisch transitiv. Es handelt sich bei R' also wieder um eine zyklische Ordnung. R' ist nicht total, da mehrere Kens existieren (Theorem 2024). R ist eine Erweiterung von R', d.h. $R' \subseteq R$.

Eine andere Projektion ist $R'' = (R \triangleright \{1,2,3\})$. Dies ist eine Projektion auf die Abhängigkeitsklique $\{1,2,3\} \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen. Wir erhalten $R'' = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[1,2,3]\}]$, also eine totale, zyklische Ordnung.

S5492

VA5493∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$
A5494 R ist eine zyklische Ordnung
T5495 $(R \triangleright X)$ ist eine zyklische Ordnung 5494, 5480, 2850, 2860, 3823, 2896, 3867
T5496 $\forall\ C \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet$ $(R \triangleright C)$ ist eine totale, zyklische Ordnung

VA5497 $C \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen
G5498 $(R \triangleright C)$ ist eine totale, zyklische Ordnung
T5499∗ $C \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ 0105, 5497
T5500 $(R \triangleright C)$ ist eine zyklische Ordnung 5495
T5501 $(R \triangleright C)$ ist total 2195, 5497
G5502 T 5483, 5500, 5501

Das letzte Theorem ist einfach, aber sehr nützlich, da es uns erlaubt alle Ergebnisse für totale, zyklische Ordnungen aus dem vorigen Kapitel auf zyklische Ordnungen anzuwenden.

Als nächstes interessieren wir uns für die Charakterisierung einer zyklischen Ordnung mit Hilfe von Projektionen auf Kens. Projektionen auf Kens sind für totale Relationen trivial (das gesamte Alphabet bildet nach Theorem 2024 den einzigen Ken), weshalb sie im vorigen Kapitel nicht behandelt wurden.

Nach Theorem 2968 und 2982 übertragen sich Einfachheit und Vollständigkeit, wenn sie für alle Projektionen auf Kens gelten, auf die Relation selbst.

Unter der Nebenbedingung der Teilwortabgeschlossenheit, vererbt sich auch die Rotationsabgeschlossenheit von den Kens auf die Relation.

S5503

VA5504∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T5505 R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen $\wedge$ ($\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ (R $\rhd$ L) ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen) $\Rightarrow$ R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen

A5506	R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen	
A5507	$\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ (R $\rhd$ L) ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen	
G5508	R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen	
G5509	$\forall$ u,v $\bullet$ u $\in$ R $\wedge$ u $\overset{\text{rot}}{\equiv}$ v $\Rightarrow$ v $\in$ R	1343
VA5510	u,v $\bullet$ u $\in$ R	
A5511	u $\overset{\text{rot}}{\equiv}$ v	
G5512	v $\in$ R	
T5513∗	u $\in \mathbb{A}^*$ $\wedge$ v $\in \mathbb{A}^*$	5511
T5514	$\mathcal{A}$(u) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	2006, 5510
VT5515	L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ $\mathcal{A}$(u) $\subseteq$ L	0134, 5514
T5516∗	L $\in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	0124, 5515
T5517	(R $\rhd$ L) ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen	5507, 5515
T5518	u = (u $\rhd$ L)	0647, 5515
T5519	u $\in$ (R $\rhd$ L)	5518, 1703, 5510
T5520	v $\in$ (R $\rhd$ L)	1343, 5517, 5519, 5511
T5521	(R $\rhd$ L) $\subseteq$ R	2839, 5506
G5522	$\mathbb{T}$	5520, 5521
A5523	v $\notin$ R	
VT5524	w $\in$ R $\bullet$ v = (w $\rhd$ L)	
T5525	v $\sqsubseteq$ w	
T5526	v $\neq$ w	
T5527	$\neg$ $\mathcal{A}$(w) $\subseteq$ L	
T5528	$\mathcal{A}$(v) $\subset$ $\mathcal{A}$(w)	
T5529	$\mathcal{A}$(w) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	

Daß wir die Nebenbedingung der Teilwortabgeschlossenheit im vorigen Theorem benötigen, wird durch folgendes Beispiel demonstriert. Es ist auch ersichtlich, daß die in 2982 schon abgeleitete Vollständigkeit als Nebenbedingung nicht ausreicht.

B5530

Es sei R = ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$)[{[0,1,2], [1,2,3]}] $\cup$ {[2,1]}. Wir berechnen $\mathcal{A}$(R) = {0,1,2,3}, ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen = $\mathcal{P}$({0,1,2}) $\cup$ $\mathcal{P}$({1,2,3}). Wir haben also zwei Kens ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens = {{0,1,2}, {1,2,3}}. Die beiden Projektionen auf Kens (R $\rhd$ {0,1,2}) = ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$)[{[0,1,2],[1,2]}] und (R $\rhd$ {1,2,3}) = ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$)[{[1,2],[1,2,3]}] sind klarerweise rotationsabgeschlossen. Für die Relation R selbst gilt dies jedoch nicht, da [2,1] $\in$ R aber [1,2] $\notin$ R. Im übrigen gilt für R sogar die Vollständigkeit.

Die Vererbung der Konsistenz modulo E von den Kenprojektionen auf die Relation haben wir schon in Theorem 3021 gezeigt. Für die konkrete Konsistenz modulo Rotation erhalten wir damit sofort die folgenden Resultate.

S5531

VA5532∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T5533 $(\ \forall\ \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen $\bullet$ $(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})$ ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})\ ) \Rightarrow$
R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ 2997

T5534 $(\ \forall\ \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens $\bullet$ $(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})$ ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})\ ) \Rightarrow$
R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ 3021, 0680

Völlig analog zur Situation bei azyklischen Ordnungen ist es auch hier nicht möglich, entsprechende Theoreme für die Teilwortabgeschlossenheit und die zyklische Transitivität abzuleiten. Dies ist auch dann nicht möglich, wenn die übrigen Axiome für die Relation erfüllt sind und es sich bei allen Kenprojektionen um totale, zyklische Ordnungen handelt. Diese Tatsache wird durch die nächsten Beispiele belegt.

B5535

Die Relation $\mathrm{R} = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[\{[0,1], [0,2], [1], [2]\}]$ erhalten wir als Rotationsabschluß aus der Relation in Beispiel 3037. Sie besitzt die Kens $(\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens $= \{\{0,1\}, \{0,2\}\}$. Sie ist einfach, rotationsabgeschlossen, vollständig und zyklisch transitiv, aber nicht teilwortabgeschlossen. Die Projektionen auf die Kens sind $(\mathrm{R} \triangleright \{0,1\}) = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[\{[0,1], [0], [1], []\}]$. $(\mathrm{R} \triangleright \{0,2\}) = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[\{[0], [0,2], [], [2]\ \}]$. Beide Projektionen sind teilwortabgeschlossen und sogar totale, zyklische Ordnungen.

B5536

Wir verwenden die Relation $\mathrm{R} = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2], [0,2,3]\}]$ aus Beispiel 5490. Sie ist einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen, vollständig aber nicht zyklisch transitiv. Die Relation besitzt genau die beiden Kens $(\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens $= \{\{0,1,2\}, \{0,2,3\}\}$. Die Projektionen $(\mathrm{R} \triangleright \{0,1,2\}) = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2]\}]$ und $(\mathrm{R} \triangleright \{0,2,3\}) = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,2,3]\}]$ sind klarerweise zyklisch transitiv und sogar totale, zyklische Ordnungen.

In Analogie zu Theorem 3041 für azyklische Ordnungen können wir nun eine Charakterisierung der zyklischen Ordnungen angeben. Diese Charakterisierung entspricht unserer Intuition, daß eine zyklische Ordnung aus totalen, zyklischen Ordnungen (den Kens) zusammengesetzt ist.

S5537

VA5538∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T5539 R ist eine zyklische Ordnung $\Leftrightarrow$
R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist zyklisch transitiv $\wedge$
$\forall\ \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens $\bullet$ $(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})$ ist eine totale, zyklische Ordnung

A5540 R ist eine zyklische Ordnung
T5541 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen 5480, 5540
T5542 R ist zyklisch transitiv 5480, 5540
T5543 $(\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens $\subseteq$ $(\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen 0125
T5544 $\forall\ \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens $\bullet$ $(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})$ ist eine totale, zyklische Ordnung 5496, 5543
A5545 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen
A5546 R ist zyklisch transitiv
A5547 $\forall\ \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens $\bullet$ $(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})$ ist eine totale, zyklische Ordnung
T5548 $\forall\ \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens $\bullet$ $(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})$ ist einfach 5547, 3681
T5549 R ist einfach 2968, 5548
T5550 $\forall\ \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens $\bullet$ $(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})$ ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen 5547, 3681
T5551 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen 5505, 5545, 5550
T5552 $\forall\ \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens $\bullet$ $(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})$ ist vollständig 5547, 3681
T5553 R ist vollständig 2982, 5552
T5554 R ist eine zyklische Ordnung 5480, 5549, 5545, 5551, 5553, 5546

G5555 T 5541, 5542, 5544, 5554

Analog zur Vorgehensweise bei azyklischen Ordnungen, können wir wieder aufgrund der Teilwortabgeschlossenheit den Zerlegungssatz 2066 anwenden: Jede zyklische Ordnung läßt sich als Vereinigung von totalen, zyklischen Ordnungen (den Projektionen auf Kens) beschreiben. Den Beweis der Charakterisierung 5539 hätten wir auch über diese Zerlegung führen können: Die Nebenbedingung der Teilwortabgeschlossenheit in 5505 spielt die gleiche Rolle wie die Teilwortabgeschlossenheit in 2066.

S5556

VA5557∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

A5558 R ist eine zyklische Ordnung

T5559 $\mathrm{R} = \bigcup\{\mathrm{R}' \bullet \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})\text{ -Kens} \bullet \mathrm{R}' = (\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})\}$ 5480, 5558, 2066

Die Begriffe der (vollständigen und unvollständigen) Gerichtetheit, die wir für azyklische Ordnungen kennenlernten, lassen sich nun auch auf zyklische Ordnungen anwenden. Eine zyklische Ordnung R ist gerichtet ($\mathrm{R} \neq (\mathrm{REV\ R})$) oder nichtgerichtet ($\mathrm{R} = (\mathrm{REV\ R})$). Nach Theorem 3077 ist jede zyklische Ordnung durch die Vereinigung ihrer Projektionen auf Kens, also totalen, zyklischen Ordnungen gegeben. R ist vollständig gerichtet gdw. alle diese Projektionen gerichtet sind. Eine gerichtete, zyklische Ordnung, die eine nichtgerichtete Ken-Projektion enthält, ist unvollständig gerichtet. Besitzen alle Kens einer nichtleeren, zyklischen Ordnung mindestens drei Elemente, dann ist sie offenbar vollständig gerichtet.

B5560

Die zyklische Ordnung $\mathrm{R} = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,3], [0,2,3]\}]$ aus Beispiel 5485 ist gerichtet, da $[0,1,3] \in \mathrm{R}$ aber $(\mathrm{REV}\ [3,1,0]) \notin \mathrm{R}$ und damit $\mathrm{R} \neq (\mathrm{REV\ R})$ gilt. Sie ist sogar vollständig gerichtet, da die den Kens entsprechenden beiden totalen, zyklischen Ordnungen $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,3]\}]$ und $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,2,3]\}]$ dreielementig und damit gerichtet sind.

Die zyklische Ordnung $\mathrm{R} = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1], [1,2], [2,3]\}]$ aus Beispiel 5487 ist nichtgerichtet, da keine der totalen, zyklischen Ordnungen $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1]\}]$, $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[1,2]\}]$ und $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[2,3]\}]$ gerichtet ist. Die Nichtgerichtetheit folgt aber auch schon aus $(\mathrm{REV\ R}) = \mathrm{R}$.

Die zyklische Ordnung $\mathrm{R} = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2], [0,3]\ \}]$ aus Beispiel 5486 ist gerichtet, da $[0,1,2] \in \mathrm{R}$ aber $(\mathrm{REV}\ [0,1,2]) \notin \mathrm{R}$ und damit $\mathrm{R} \neq (\mathrm{REV\ R})$ gilt. R ist jedoch unvollständig gerichtet, da die dem Ken $\{0,3\}$ entsprechende totale, zyklische Relation $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,3]\}]$ nichtgerichtet ist.

Nicht- oder unvollständig gerichtete, zyklische Ordnungen führen in Definitionen und Beweisen gelegentlich zur Sonderbehandlungen. Diese etwas unangenehme Tatsache ist uns schon bei Definition der unmittelbaren Nachfolgerrelation aufgefallen. Der Ausschluß dieser Strukturen mit teilweise zu kleinen Kens (wie bei Tripelstrukturen oder Trennungsstrukturen geschehen) könnte einiges vereinfachen, würde jedoch von dem Prinzip abweichen, sich möglichst wenig von den Axiomen der azyklischen Ordnungen zu entfernen, die nicht- oder unvollständig gerichtete Strukturen zulassen.

7.5 Zyklische Transitivität

Nach den Resultaten aus dem vorigen Abschnitt läßt sich jede zyklische Ordnung aus totalen, zyklischen Ordnungen zusammensetzen. Da die zyklische Transitivität die zulässigen Formen der Zusammensetzung wesentlich bestimmt, wollen wir uns in diesem Abschnitt ihre Wirkung anhand einer Reihe von Beispielen veranschaulichen.

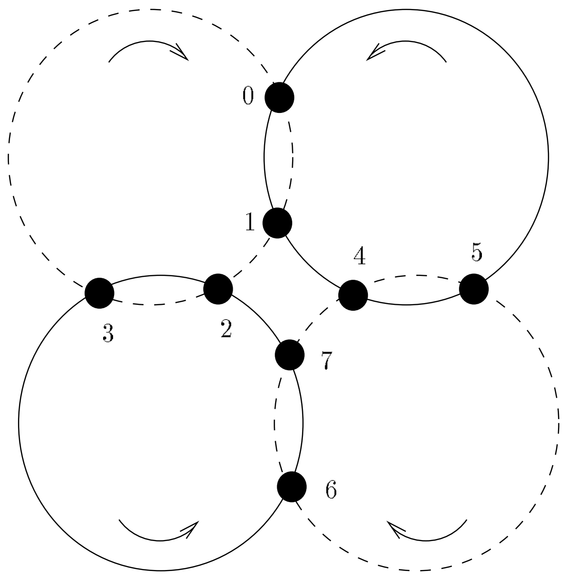


Abbildung 7.10: Eine zyklische Ordnung, die aus vier totalen, zyklischen Ordnungen besteht

B5561

Wir beginnen mit den totalen, zyklischen Ordnungen $R_1 = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2,3]\}]$, $R_2 = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,4,5]\}]$, $R_3 = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[2,3,6,7]\}]$, $R_4 = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[4,5,6,7]\}]$. Wir bilden nun die Vereinigung R $= R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$, bei der es sich um eine zyklische Ordnung handelt, die nicht total ist (siehe Abb. 7.10). Die resultierende Relation hat vier Kens ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Ken $= \{\{0,1,2,3\}, \{0,1,4,5\}, \{2,3,6,7\}, \{4,5,6,7\}\}$. Als Projektionen auf diese Kens ergeben sich wieder die ursprünglichen, totalen, zyklischen Ordnungen $R_1 = (R \rhd \{0,1,2,3\})$, $R_2 = (R \rhd \{0,1,4,5\})$, usw.

Daß nicht jede Kombination von totalen, zyklischen Ordnungen eine zyklische Ordnung liefert, zeigen die folgenden Beispiele.

B5562

Wir wählen die totalen, zyklischen Ordnungen $R_1 = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,2,3,4]\}]$, $R_2 = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[1,2,5,4]\}]$ und $R_3 = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,3,5]\}]$. Die Komposition $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ ist in Abb. 7.11 dargestellt. Es ist keine zyklische Ordnung. R ist zwar einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen und konsistent modulo Rotation, aber nicht zyklisch transitiv, da $[1,2,5] \in R$ und $[1,5,0] \in R$, aber nicht $[1,2,0] \in R$ gilt.

B5563

In Beispiel 5474 (Abb. 7.2 hatten wir schon festgestellt, daß die Relation $R = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2,3], [0,4,5,1], [2,3,4,5]\}]$ nicht zyklisch transitiv und damit keine zyklische Ordnung ist. Auch diese Relation ergibt sich als Vereinigung von drei totalen, zyklischen Ordnungen $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2,3]\}]$, $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,4,5,1]\}]$, $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[2,3,4,5]\}]$. Diese Relation unterscheidet sich von dem vorigen Beispiel nicht nur durch Umbenennung der Elemente.

B5564

Wir setzen die totalen, zyklischen Ordnungen $R_1 = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2,3,4]\}]$, $R_2 = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[1,2,6,7,9]\}]$, $R_3 = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[3,4,5,6,7,8]\}]$ zu einer Relation $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ zusammen, die in Abb. 7.12 zu sehen ist. Die Elemente $\{0,9,5,8\}$ sollen sicherzustellen, daß sich genau drei verschiedene Kens ergeben.

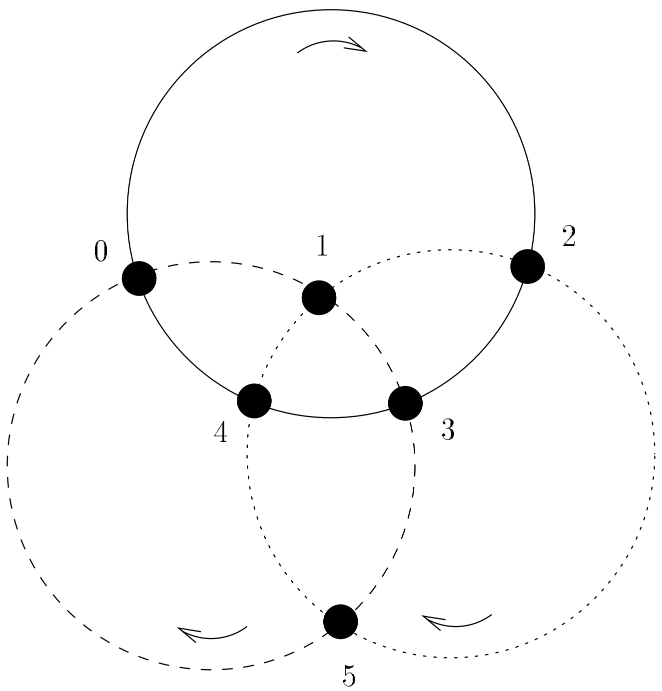


Abbildung 7.11: Drei totale, zyklische Ordnungen, die keine zyklische Ordnung ergeben

Würden wir beispielsweise auf Element 0 verzichten, so wäre {1,2,3,4} kein Ken. R ist zwar einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen sowie zyklisch transitiv, jedoch nicht vollständig. Folgende Kliquen werden nicht durch Wörter der Relation repräsentiert: {6,3,1}, {6,3,2}, {6,4,1}, {6,4,2}, {7,3,1}, {7,3,2}, {7,4,1}, {7,4,2}.

Die Unvollständigkeit im letzten Beispiel ist offenbar auf eine zu enge Koppelung der einzelnen tota-

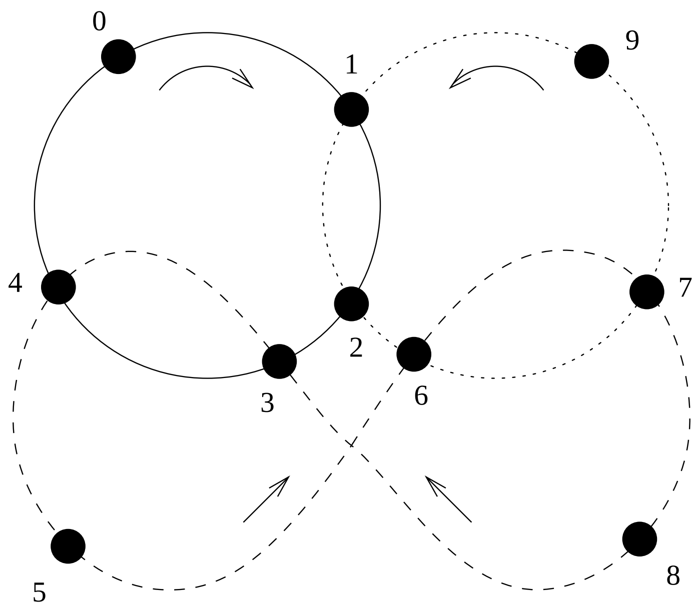


Abbildung 7.12: Drei totale, zyklische Ordnungen, die keine zyklische Ordnung ergeben

len, zyklischen Ordnungen zurückzuführen. Es entstehen hier unerwünschte, dreielementige Kliquen. Wir können dies vermeiden, wenn wir eine größere Zahl von totalen, zyklischen Ordnungen geeignet zusammensetzen, wie wir es schon in Beispiel 5561 mit vier Komponenten durchgeführt haben. Es folgen nun noch zwei Beispiele in denen fünf totale, zyklische Ordnungen auf verschiedene Weise zusammengesetzt werden.

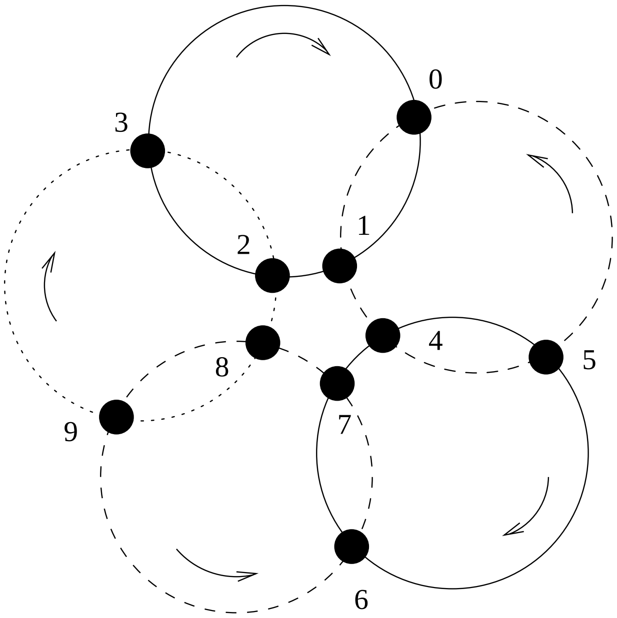


Abbildung 7.13: Keine zyklische Ordnung

B5565

In Abb. 7.13 wurden fünf vierelementige, totale, zyklische Ordnungen (auf eine zu Beispiel 5563 analoge Weise) zu einer Relation R = $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})$[{[2,3,0,1], [0,1,4,5], [4,5,6,7], [6,7,8,9], [8,9,3,2]}] zusammengesetzt. R ist einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen und vollständig. R ist auch konsistent modulo Rotation, da sich zwei Linien in höchstens zwei Elementen schneiden. Bei R handelt es sich aber nicht um eine zyklische Ordnung, da die zyklische Transitivität verletzt ist: Wir haben [2,9,3] $\in$ R und [2,3,0] $\in$ R aber [2,9,0] $\notin$ R.

B5566

Die Relation R = $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})$[{[2,3,0,1], [0,1,4,5], [4,5,6,7], [6,7,8,9], [8,9,2,3]}] in Abb. 7.14 ist eine zyklische Ordnung.

Es ist offenbar die zyklische Transitivität, die eine korrekte Art der Zusammensetzung von totalen, zyklischen Ordnungen lokal sichergestellt. Die zyklische Transitivität überträgt die Orientierung von einem Ken auf einen anderen, wenn sich die beiden Kens in mindestens zwei Elementen schneiden.

Um die Wirkung der zyklischen Transitivität zu verdeutlichen, betrachten wir die in Abb. 7.15 und Abb. 7.16 dargestellten Strukturen. Sie unterscheiden sich in der relativen Orientierung der beiden Kreise.

B5567

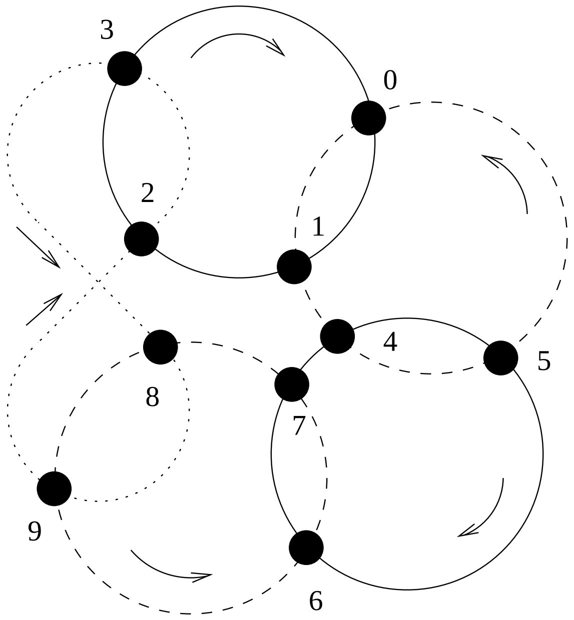


Abbildung 7.14: Eine zyklische Ordnung aus fünf totalen, zyklischen Ordnungen

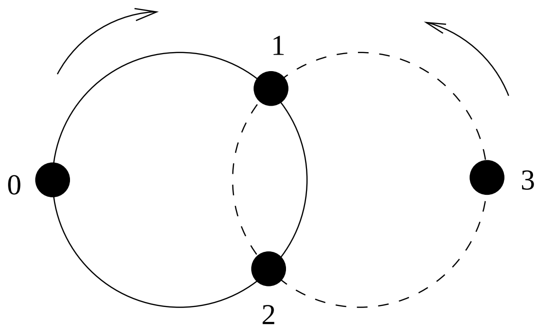


Abbildung 7.15: Gegensinnig orientierte Kreise

Die zyklische Ordnung in Abb. 7.15 ist durch $R = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2], [3,1,2]\}]$ gegeben. Diese Ordnung besitzt die zwei Kens $(\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $= \{\{0,1,2\}, \{1,2,3\}\}$. Die zyklische Transitivität gilt, da es keine zwei Wörter gibt, die die Prämisse der Definition 3841 erfüllen. Die anderen Axiome sind ebenfalls leicht zu verifizieren.

B5568

Wir versuchen die linke Seite von Abb. 7.16 als zyklische Ordnung zu interpretieren: Aus der Darstellung lesen wir $[1,3,2] \in R$ und $[1,2,0] \in R$ ab. Um die zyklische Transitivität zu erfüllen, muß auch $[1,3,0] \in R$ gelten. Hieraus ergibt sich, daß je zwei verschiedene Elemente abhängig sind. Es folgt $(\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kens $= \{\{0,1,2,3\}\}$. Es gibt also genau einen Ken. Dies widerspricht jedoch der Abbildung, die zwei Kreise zeigt. Es handelt sich also bei der dargestellten Struktur nicht um eine zyklische Ordnung. Wohl aber, läßt sie sich zu einer zyklischen Ordnung (in diesem Fall sogar einer totalen) ergänzen (siehe rechts).

Im ersten Beispiel sind die beiden Kreise der Ordnung so orientiert, daß sie im Schnittbereich in die gleiche Richtung weisen. Aus diesem Grund war die zyklische Transitivität nicht verletzt. Im zwei-

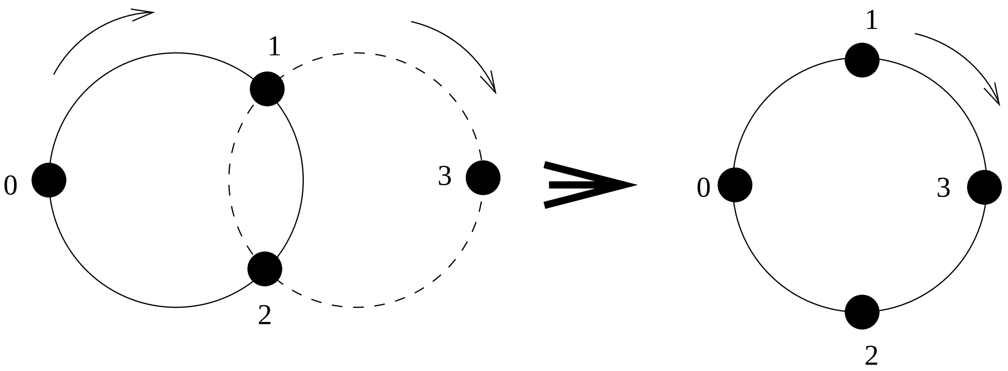


Abbildung 7.16: Gleichsinnig orientierte Kreise

ten Beispiel kommt es im Schnittbereich der beiden Kreise zu einem lokalen Orientierungskonflikt. Dieser Konflikt wird durch die zyklische Transitivität aufgelöst, indem sie die beiden Kreise zu einem Kreis vereinigt. Dieser Sachverhalt läßt sich etwas ungenau auch so ausdrücken: Kommen sich zwei gleichsinnig orientierte Kreise in mehreren Elementen zu nahe, so verschmelzen sie zu einem Kreis. Zwei gegensinnig orientierte Kreise bleiben strikt getrennt, synchronisieren sich aber in ihren Schnittelementen.

B5569

Indem wir in Beispiel 5565 die beiden gleichsinnig orientierten, totalen, zyklischen Ordnungen $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[8,9,3,2]\}]$ und $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[2,3,0,1]\}]$, wie in Abb. 7.16 angedeutet, zu einer totalen zyklischen Ordnung $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[8,9,3,0,1,2]\}]$ verschmelzen erhalten wir eine zyklische Ordnung $R' = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[8,9,3,0,1,2]\}]\ [0,1,4,5],\ [4,5,6,7],\ [6,7,8,9]\}]$ als Vereinigung von vier totalen, zyklischen Ordnungen. Diese Relation ist eine echte Erweiterung, d.h. $R \subset R'$, der Relation aus Beispiel 5565.

In Beispiel 5567 liegen zwei gegensinnig orientierte Kreise vor. Die zyklische Transitivität gilt hier trivialerweise. Dies ändert sich, wenn wir zwischen den Elementen 1 und 2 weitere Elemente einfügen, wie dies links in Abb. 7.17 zu sehen ist. Wir können nun sowohl eine Darstellung mit gegensinnig orientierten Kreisen (oben), also auch eine Darstellung mit gleichsinnig orientierten Kreisen (unten) angeben, so daß beide Beispiele 5567 und 5568 in der Relation wiederzufinden sind.

B5570

Die beiden Darstellungen links in Abb. 7.17 zeigen die gleiche Relation $R = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,5,2],\ [1,4,2,3]\}]$. Die Relation ist nicht zyklisch transitiv, da $[1,4,2] \in R$ und $[1,2,0] \in R$ aber nicht $[1,4,0] \in R$ gilt. Die Relation kann jedoch zu der rechts in Abb. 7.17 in zwei verschiedenen Darstellungen gegebenen Relation $R' = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,5,2],\ [1,4,2,3],\ [0,1,4,2],\ [1,5,2,3]\}]$ erweitert werden. Diese Relation ist zyklisch transitiv. Es handelt sich sogar um eine zyklische Ordnung. Die Darstellungen dieser Relation benötigen nur eine verzweigte Kante. Man erkennt also, daß sich die Darstellungsweise in diesem Fall gut mit der zyklischen Transitivität verträgt.

7.6 Vereinigung

In den vorigen Abschnitten haben eine zyklische Ordnung als Vereinigung von totalen, zyklischen Ordnungen aufgefaßt. Nun wollen wir allgemeiner untersuchen, unter welchen Bedingungen wir zyklische

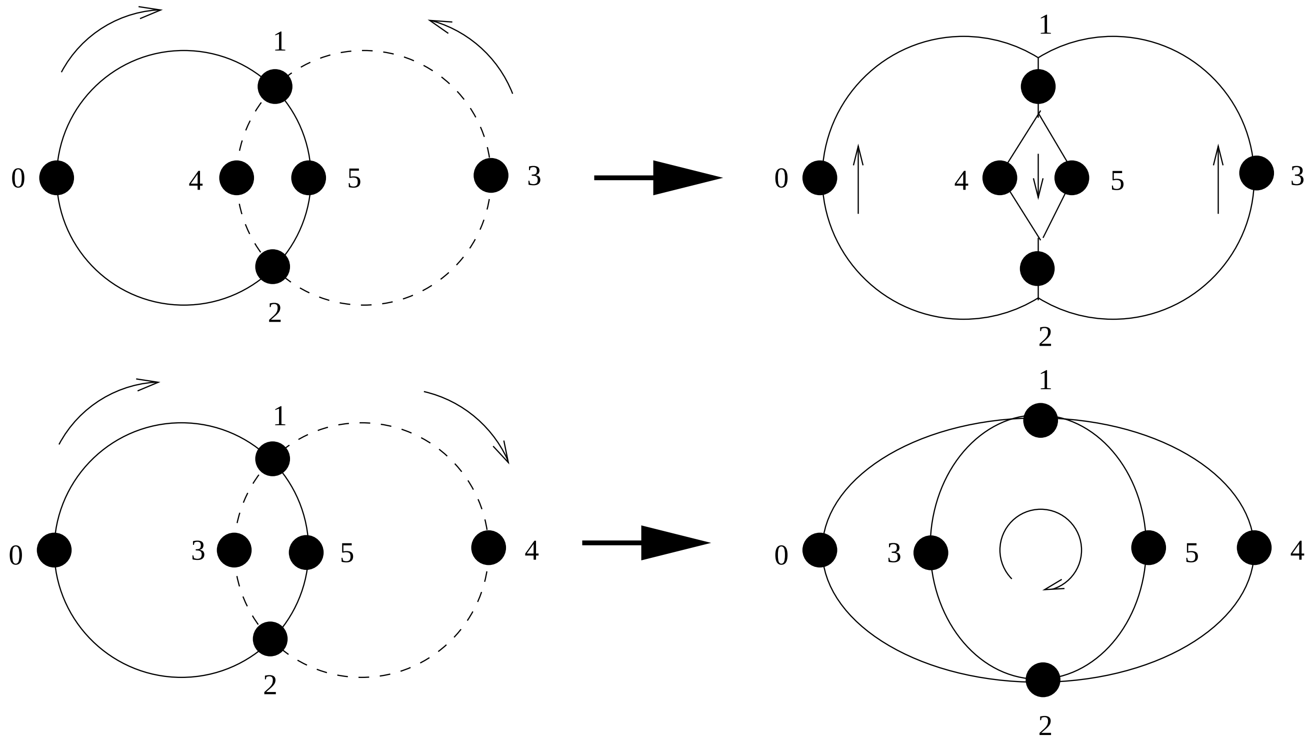


Abbildung 7.17: Gleichsinnige und gegensinnige Darstellungen einer Relation

Ordnungen durch Vereinigung bereits konstruierter zyklischer Ordnungen erzeugen können.

Die Vereinigung von zyklischen Ordnungen muß nicht notwendigerweise wieder eine zyklische Ordnung liefern. Dies gilt selbst dann nicht, wenn wir totale, zyklische Ordnungen wählen. Es gibt zwei Gründe, warum dies nicht immer der Fall sein muß: Zum einen kann es passieren, daß die Vereinigung nicht vollständig ist, d.h. durch die Vereinigung entstehen neue Kliquen, die durch kein Wort der vereinigten Komponenten abgedeckt wird. Die andere Möglichkeit ist, daß die Vereinigung die zyklische Transitivität verletzt. Den letzten Fall hatten wir im vorigen Abschnitt über zyklische Transitivität bereits ausführlich diskutiert. Beide Fälle werden im folgenden an kleinen Beispielen demonstriert.

B5571

Wir wählen totale, zyklische Ordnungen $R_1 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1]\}]$, $R_2 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[1,2]\}]$, $R_3 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,2]\}]$. Die Vereinigung $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ ist einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen, zyklisch transitiv, aber nicht vollständig, da die Klique $\{0,1,2\} \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen nicht als Wort in R vorkommt. R ist also keine zyklische Ordnung.

B5572

Wir wählen die totalen, zyklischen Ordnungen $R_1 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[1,3,2]\}]$ und $R_2 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[1,2,0]\}]$. Als Vereinigung ergibt sich die Relation $R = R_1 \cup R_2 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[1,3,2], [1,2,0]\}]$ aus Beispiel 5568, die einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen und vollständig und konsistent modulo Rotation, jedoch nicht zyklisch transitiv ist, da $[1,3,2] \in R$ und $[1,2,0] \in R$ aber $[1,3,0] \notin R$ gilt.

Die Verletzung der zyklischen Transitivität kann auch anders als im vorigen Beispiel durch eine Verletzung der Konsistenz modulo Rotation bedingt sein (siehe Theorem 4016). Dies ist im folgenden

Beispiel der Fall.

B5573

Es sei $R_1 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2]\}]$ und $R_2 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[2,1,0]\}]$. Als Vereinigung dieser beiden totalen, zyklischen Ordnungen erhalten wir $R = R_1 \cup R_2 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2], [2,1,0]\}]$. R ist nicht konsistent, da [0,1,2] und [2,1,0] nicht miteinander konsistent sind. Damit ist R auch nicht zyklisch transitiv: Es gilt $[0,1,2] \in R$ und $[0,2,1] \in R$ aber $[0,1,1] \notin R$.

Nichtsdestotrotz eignet sich die einfache mengentheoretische Operation der Vereinigung zur Konstruktion interessanter zyklischer Ordnungen, wie wir schon in Beispiel 5561 bemerkten. Aus diesem Grund ist es nützlich die Eigenschaften dieser Operation im Detail zu untersuchen.

S5574

VA5575∗ $S \in \mathcal{P}(\mathcal{R}^*(\mathbb{A}))$

T5576∗ $(\bigcup S) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Wir knüpfen an die Resultate 3061 an. Alphabet und Abhängigkeitsrelation sind mit der Vereinigung vertauschbar. Abgesehen von Einfachheit und Teilwortabgeschlossenheit bleibt auch die Rotationsabgeschlossenheit unter Vereinigung erhalten.

T5577 $(\forall R \in S \bullet R$ ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen$) \Rightarrow (\bigcup S)$ ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen 3141

Damit ist eine Vereinigung von zyklischen Ordnungen wieder eine zyklische Ordnung, wenn das Resultat zyklisch transitiv und vollständig ist.

T5578 $(\forall R \in S \bullet R$ ist eine zyklische Ordnung$) \wedge (\bigcup S)$ ist zyklisch transitiv $\wedge$
$(\bigcup S)$ ist vollständig $\Rightarrow (\bigcup S)$ ist eine zyklische Ordnung . . 5480, 3128, 3154, 5577

In einigen speziellen Fällen läßt sich die Konsistenz modulo Rotation der Vereinigung besonders leicht leicht sicherstellen.

S5579

VA5580∗ $S \in \mathcal{P}(\mathcal{R}^*(\mathbb{A}))$, $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T5581∗ $(\bigcup S) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Gewinnen wir die Komponenten S als Teilmengen aus einer einzigen, totalen, zyklischen Ordnung (tatsächlich reicht eine beliebige konsistente Relation), so ist die Vereinigung als Teilmenge einer konsistenten Relation konsistent.

T5582 R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv}) \wedge (\forall R' \in S \bullet R' \subseteq R) \Rightarrow (\bigcup S)$ ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$

A5583	R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$	
A5584	$\forall R' \in S \bullet R' \subseteq R$	
G5585	$(\bigcup S)$ ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$	
T5586	$(\bigcup S) \subseteq R$	5584
G5587	$\mathbb{T}$	1553, 5583, 5586

Die Konsistenz der Vereinigung setzt sich aus der inneren Konsistenz jeder Komponente sowie ihrer Konsistenz miteinander zusammen. Das Theorem zeigt auch, daß die Konsistenz der zu vereinigenden Relationen miteinander natürlich eine notwendige Bedingung ist, um als Vereinigung eine konsistente Relation und insbesondere eine zyklische Ordnung zu erhalten.

T5588 $\forall$ E $\in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*) \bullet (\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist konsistent modulo E) $\wedge$
($\forall$ R $\in$ S, R$' \in$ S $\bullet$ R $\neq$ R$' \Rightarrow$ R und R$'$ sind miteinander konsistent modulo E) $\Leftrightarrow$
($\bigcup$ S) ist konsistent modulo E

VA5589$*$ E $\in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$
A5590 $\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist konsistent modulo E
A5591 $\forall$ R $\in$ S, R$' \in$ S $\bullet$ R $\neq$ R$' \Rightarrow$ R und R$'$ sind miteinander konsistent modulo E
G5592 $\forall$ u $\in (\bigcup$ S), v $\in (\bigcup$ S) $\bullet$ u $\stackrel{E}{\sim}$ v ... 1545
VA5593 u $\in (\bigcup$ S), v $\in (\bigcup$ S)
G5594 u $\stackrel{E}{\sim}$ v
VT5595 R $\in$ S, R$' \in$ S $\bullet$ u $\in$ R $\wedge$ v $\in$ R$'$ ... 5593
A5596 R = R$'$
T5597 u $\in$ R $\wedge$ v $\in$ R ... 5595, 5596
T5598 R ist konsistent modulo E ... 5590, 5595
G5599 $\mathbb{T}$ ... 1545, 5598, 5597
A5600 R $\neq$ R$'$
T5601 R uns R$'$ sind miteinander konsistent ... 5591, 5595, 5600
G5602 $\mathbb{T}$ ... 1548, 5601, 5595

Damit ist die Vereinigung von zyklischen Ordnungen insbesondere konsistent modulo Rotation, wenn die Relationen paarweise höchstens zwei Elemente gemeinsam haben.

T5603 ($\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist einfach) $\wedge$ ($\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist konsistent modulo ($\stackrel{\text{rot}}{\equiv}$)) $\wedge$
($\forall$ R $\in$ S, R$' \in$ S $\bullet$ R $\neq$ R$' \Rightarrow |\mathcal{A}(\mathrm{R}) \cap \mathcal{A}(\mathrm{R}')| \leq 2) \Rightarrow$
($\bigcup$ S) ist konsistent modulo ($\stackrel{\text{rot}}{\equiv}$) ... 5588, 1583

Die im Verglich zur Konsistenz modulo Rotation stärkere Forderung der zyklischen Transitivität der Vereinigung läßt sich besonders leicht verifizieren, wenn sich die zyklischen Ordnungen paarweise in höchstens einem Element schneiden. Man beachte die formale Ähnlichkeit zum vorigen Theorem.

S5604

VA5605$*$ S $\in \mathcal{P}(\mathcal{R}^*(\mathbb{A}))$, R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
T5606$*$ ($\bigcup$ S) $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
T5607 ($\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist einfach) $\wedge$ ($\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist zyklisch transitiv) $\wedge$
($\forall$ R $\in$ S, R$' \in$ S $\bullet$ R $\neq$ R$' \Rightarrow |\mathcal{A}(\mathrm{R}) \cap \mathcal{A}(\mathrm{R}')| \leq 1) \Rightarrow$ ($\bigcup$ S) ist zyklisch transitiv

A5608 $\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist einfach
A5609 $\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist zyklisch transitiv
A5610 $\forall$ R in S, R$' \in$ S $\bullet$ R $\neq$ R$' \Rightarrow |\mathcal{A}(\mathrm{R}) \cap \mathcal{A}(\mathrm{R}')| \leq 1$
G5611 ($\bigcup$ S) ist zyklisch transitiv
G5612 $\forall$ a,b,c,d $\bullet$ [a,b,c] $\in (\bigcup$ S) $\wedge$ [a,c,d] $\in (\bigcup$ S) $\Rightarrow$ [a,b,d] $\in (\bigcup$ S) ... 3841
VA5613 a,b,c,d $\bullet$ [a,b,c] $\in (\bigcup$ S) $\wedge$ [a,c,d] $\in (\bigcup$ S)
G5614 [a,b,d] $\in (\bigcup$ S)
T5615$*$ a $\in \mathbb{A} \wedge$ b $\in \mathbb{A} \wedge$ c $\in \mathbb{A} \wedge$ d $\in \mathbb{A}$ ... 5613
VT5616 R $\in$ S, R$' \in$ S $\bullet$ [a,b,c] $\in$ R $\wedge$ [a,c,d] $\in$ R$'$ ... 5613
G5617 $\exists$ R $\in$ S $\bullet$ [a,b,d] $\in$ R
A5618 R = R$'$
T5619 [a,b,c] $\in$ R $\wedge$ [a,c,d] $\in$ R ... 5618, 5616
T5620 R ist zyklisch transitiv ... 5609, 5616
T5621 [a,b,d] $\in$ R ... 3841, 5620, 5619
G5622 $\mathbb{T}$ ... 5616, 5621
A5623 R $\neq$ R$'$
T5624 $|\mathcal{A}(\mathrm{R}) \cap \mathcal{A}(\mathrm{R}')| \leq 1$ ... 5610, 5616, 5623
T5625 $\mathcal{A}([\mathrm{a,b,c}]) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R}) \wedge \mathcal{A}([\mathrm{a,c,d}]) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R}')$ ... 1245, 5616
T5626 $\{\mathrm{a,b,c}\} \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R}) \wedge \{\mathrm{a,c,d}\} \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R}')$ ... 0329, 5625
T5627 $\{\mathrm{a,b,c}\} \cap \{\mathrm{a,c,d}\} \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R}) \cap \mathcal{A}(\mathrm{R}')$ ... 5626
T5628 $|\{\mathrm{a,b,c}\} \cap \{\mathrm{a,c,d}\}| \leq 1$ ... 5624, 5627

T5629	R ist einfach	5608, 5616
T5630	[a,b,c] ist einfach	1279, 5629, 5616
T5631	$a \neq c$	0379, 5630
T5632	$\mathbb{F}$	5631, 5628

Wenn wir sicherstellen, daß jede Klique der Vereinigung schon Klique in einer der Komponenten ist, d.h. durch die Vereinigung keine neuen Kliquen entstehen, so können wir von der Vollständigkeit aller Komponenten auf die Vollständigkeit ihrer Vereinigung schließen.

S5633

VA5634∗ $S \in \mathcal{P}(\mathcal{R}^*(\mathbb{A}))$

T5635∗ $(\bigcup S) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Wir setzen voraus: Jeder Ken der Vereinigung soll als Klique in einer Komponente existieren.

A5636

$\forall K \in (\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcup S))$ -Kens $\bullet\ \exists R \in S \bullet K \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen

Diese Annahme ist natürlich äquivalent zu der Forderung, daß durch die Vereinigung keine neuen Kliquen entstehen, die nicht schon in einer der Komponenten vorkommen.

T5637 $\forall C \in (\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcup S))$ -Kliquen $\bullet\ \exists R \in S \bullet C \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen

VA5638	$C \in (\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcup S))$ -Kliquen	
G5639	$\exists R \in S \bullet C \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen	
VT5640	$K \in (\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcup S))$ -Kens $\bullet\ C \subseteq K$	0134, 5638
T5641	$R \in S \bullet K \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen	5636, 5640
T5642	$C \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen	0117, 5641, 5640
G5643	$\mathbb{T}$	5641, 5642

Damit sind Kliquenbildung und Vereinigung als Operationen vertauschbar.

T5644 $(\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcup S))$ -Kliquen $= \bigcup \{(\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet\ R \in S\}$

T5645	$(\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcup S))$ -Kliquen $\subseteq \bigcup \{(\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet\ R \in S\}$	5637
T5646	$\bigcup \{(\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen $\bullet\ R \in S\} \subseteq (\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcup S))$ -Kliquen	3068
G5647	$\mathbb{T}$	5645, 5646

Vollständigkeit überträgt sich von allen Komponenten auf ihre Vereinigung.

T5648 $(\forall R \in S \bullet R$ ist vollständig$) \Rightarrow (\bigcup S)$ ist vollständig

A5649	$\forall R \in S \bullet R$ ist vollständig	
G5650	$\forall C \in (\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcup S)$ -Kliquen $\bullet$ C ist endlich $\Rightarrow \exists w \in (\bigcup S) \bullet \mathcal{A}(w) = C$	2209
VA5651	$C \in (\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcup S))$ -Kliquen	
A5652	C ist endlich	
G5653	$\exists w \in (\bigcup S) \bullet \mathcal{A}(w) = C$	
VT5654	$R \in S \bullet C \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen	5637, 5651
T5655∗	$R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	5654
T5656	$R \subseteq (\bigcup S)$	5654
T5657	R ist vollständig	5649, 5654
VT5658	$w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$	2209, 5657, 5654, 5652
G5659	$\mathbb{T}$	5656, 5658

Die in diesem Abschnitt (und in den vorigen Abschnitten) genannten Theoreme können hilfreich sein, wenn wir eine Relation als Vereinigung ihrer Komponenten auffassen, und anhand der Komponenten und ihrer Zusammensetzung überprüfen wollen, ob es sich bei der Vereinigung um eine zyklische Ordnung handelt.

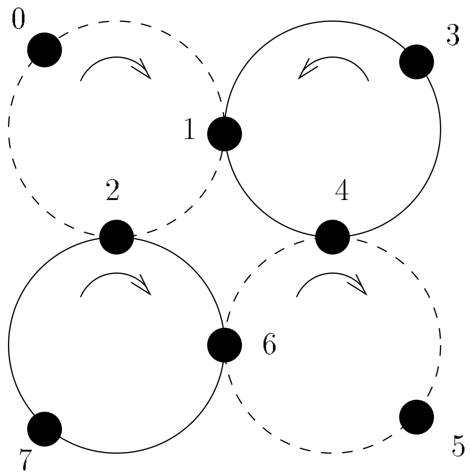


Abbildung 7.18: Vier in maximal einem Element gekoppelte totale, zyklische Ordnungen

B5660

In Abb. 7.18 ist die Vereinigung $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$ aus totalen, zyklischen Ordnungen $R_1 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2]\}]$, $R_2 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[1,4,3]\}]$, $R_3 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[4,5,6]\}]$ und $R_4 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[2,6,7]\}]$. Mit Hilfe der Theoreme 5607 und 5648 können wir sofort verifizieren, daß es sich um eine zyklische Ordnung handelt.

7.7 Durchschnitt

Aufgrund seiner Einfachheit ist abgesehen von den Operationen der Projektion und der Vereinigung auch die Bildung der Schnittmenge ein Kandidat für eine Operation, die uns aus gegebenen, zyklischen Ordnungen neue konstruiert. Ebenso wie die Vereinigung liefert der Schnitt zweier zyklischer Ordnungen nicht notwendigerweise wieder eine zyklische Ordnung. Das folgende Beispiel zeigt dies sogar für den Schnitt von zwei endlichen, totalen, zyklischen Ordnungen.

B5661

Wir wählen die totalen, zyklischen Ordnungen $R_1 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2]\}]$ und $R_2 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[2,1,0]\}]$. Als Schnitt erhalten wir die Relation $R = R_1 \cap R_2 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1], [1,2], [0,2]\}]$, die einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen, konsistent modulo Rotation, zyklisch transitiv, aber nicht vollständig und insbesondere nicht 3 -vollständig ist.

Daß der Schnitt von zyklischen Ordnungen nicht immer eine zyklische Ordnung liefert, wie dieses Beispiel demonstriert, ist ein fundamentaler Unterschied zur Situation bei azyklischen Ordnungen, wo der Schnitt von azyklischen Ordnungen immer zu einer azyklischen Ordnung führt (siehe Theorem 3321).

S5662

VA5663$*$	$S \in \mathcal{P}(\mathcal{R}^*(\mathbb{A}))$	
A5664	$S \neq \emptyset$	
T5665$*$	$(\bigcap S) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	5664

Wir knüpfen an die in 3160 abgeleiteten Theoreme an.

Für teilwort- und rotationsabgeschlossene Relationen sind die Operationen $\mathcal{A}(\mathrm{R})$ (siehe Theorem 3169) sowie (li R) und ($\underline{\text{li}}$ R) mit der Schnittbildung verträglich.

T5666 $(\forall\, \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathrm{R}$ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen$) \wedge (\forall\, \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathrm{R}$ ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen$) \Rightarrow$
$(\text{li}\ (\bigcap \mathrm{S})) = \bigcap \{(\text{li R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\}$

A5667 $\forall\, \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathrm{R}$ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen
A5668 $\forall\, \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathrm{R}$ ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen
T5669 $(\text{li}\ (\bigcap \mathrm{S})) \subseteq \bigcap \{(\text{li R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\}$ . . . 3166, 5664
T5670 $\bigcap \{(\text{li R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\} \subseteq (\text{li}\ (\bigcap \mathrm{S}))$
G5671 $\forall\, x,y \bullet (x,y) \in \bigcap \{(\text{li R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\} \Rightarrow (x,y) \in (\text{li}\ (\bigcap \mathrm{S}))$
VA5672 $x,y \bullet (x,y) \in \bigcap \{(\text{li R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\}$
G5673 $(x,y) \in (\text{li}\ (\bigcap \mathrm{S}))$
T5674 $\forall\, \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet (x,y) \in (\text{li R})$ . . . 5672
T5675 $\forall\, \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet [x,y] \in \mathrm{R}$ . . . 1767, 5667, 5668, 5674
T5676 $[x,y] \in (\bigcap \mathrm{S})$ . . . 5675
G5677 $\mathbb{T}$ . . . 1761, 5676
G5678 $\mathbb{T}$ . . . 5669, 5670

T5679 $(\forall\, \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathrm{R}$ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen$) \wedge (\forall\, \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathrm{R}$ ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen$) \Rightarrow$
$(\underline{\text{li}}\ (\bigcap \mathrm{S})) = \bigcap \{(\underline{\text{li}}\ \mathrm{R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\}$

A5680 $\forall\, \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathrm{R}$ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen
A5681 $\forall\, \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathrm{R}$ ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen
T5682 $(\underline{\text{li}}\ (\bigcap \mathrm{S})) \subseteq \bigcap \{(\underline{\text{li}}\ \mathrm{R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\}$ . . . 3167, 5664
T5683 $\bigcap \{(\underline{\text{li}}\ \mathrm{R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\} \subseteq (\underline{\text{li}}\ (\bigcap \mathrm{S}))$
G5684 $\forall\, x,y \bullet (x,y) \in \bigcap \{(\underline{\text{li}}\ \mathrm{R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\} \bullet (x,y) \in (\underline{\text{li}}\ (\bigcap \mathrm{S}))$
VA5685 $x,y \bullet (x,y) \in \bigcap \{(\underline{\text{li}}\ \mathrm{R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\}$
G5686 $(x,y) \in (\underline{\text{li}}\ (\bigcap \mathrm{S}))$
T5687 $\forall\, \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet (x,y) \in (\underline{\text{li}}\ \mathrm{R})$
T5688 $\forall\, \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet (x,y) \in (\text{li R}) \vee (x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(\mathrm{R}))$ . . . 1819, 5687
G5689 $(x,y) \in (\text{li}\ (\bigcap \mathrm{S})) \vee (x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(\bigcap \mathrm{S}))$ . . . 1819
A5690 $x = y$
T5691 $\forall\, \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet (x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(\mathrm{R}))$
VA5692 $\mathrm{R} \in \mathrm{S}$
G5693 $(x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(\mathrm{R}))$
T5694∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ . . . 5692
T5695 $(x,y) \in (\text{li R}) \vee (x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(\mathrm{R}))$ . . . 5688, 5692
A5696 $(x,y) \in (\text{li R})$
T5697 $x \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$ . . . 1718, 5696
T5698 $(x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(\mathrm{R}))$ . . . 5690, 5697
G5699 $\mathbb{T}$ . . . 5695, 5698
T5700 $(x,y) \in \bigcap \{\mathcal{ID}(\mathcal{A}(\mathrm{R})) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\}$ . . . 5664, 5691
T5701 $(x,y) \in \mathcal{ID}(\bigcap \{\mathcal{A}(\mathrm{R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\})$ . . . 5700
T5702 $(x,y) \in \mathcal{ID}(\mathcal{A}(\bigcap \mathrm{S}))$ . . . 5701, 3169, 5664, 5680
G5703 $\mathbb{T}$ . . . 5702
A5704 $x \neq y$
T5705 $\forall\, \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet (x,y) \notin \mathcal{ID}(\mathcal{A}(\mathrm{R}))$ . . . 5704
T5706 $\forall\, \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet (x,y) \in (\text{li R})$ . . . 5688, 5705
T5707 $(x,y) \in \bigcap \{(\text{li R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\}$ . . . 5664, 5706
T5708 $(x,y) \in (\text{li}\ (\bigcap \mathrm{S}))$ . . . 5707, 5666, 5680, 5681
G5709 $\mathbb{T}$ . . . 5708
G5710 $\mathbb{T}$ . . . 5682, 5683

Ebenso wie die Einfachheit (Theorem 3183) und die Teilwortabgeschlossenheit (Theorem 3215) überträgt sich auch die Rotationsabgeschlossenheit und die zyklische Transitivität auf den Schnitt.

T5711 $(\forall\, \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathrm{R}$ ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen$) \Rightarrow (\bigcap \mathrm{S})$ ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen . . 3200, 5664

T5712 $(\forall\, R \in S \bullet R$ ist zyklisch transitiv$) \Rightarrow (\bigcap S)$ ist zyklisch transitiv

A5713 $\forall\, R \in S \bullet R$ ist zyklisch transitiv

G5714 $(\bigcap S)$ ist zyklisch transitiv

G5715 $\forall\, a,b,c,d \bullet [a,b,c] \in (\bigcap S) \wedge [a,c,d] \in (\bigcap S) \Rightarrow [a,b,d] \in (\bigcap S)$ 3841

VA5716 $a,b,c,d \bullet [a,b,c] \in (\bigcap S)$

A5717 $[a,c,d] \in (\bigcap S)$

G5718 $[a,b,d] \in (\bigcap S)$

T5719∗ $a \in \mathbb{A} \wedge b \in \mathbb{A} \wedge c \in \mathbb{A} \wedge d \in \mathbb{A}$ 5716, 5717

T5720 $\forall\, R' \in S \bullet [a,b,c] \in R'$ 5716

T5721 $\forall\, R' \in S \bullet [a,c,d] \in R'$ 5717

G5722 $\forall\, R' \in S \bullet [a,c,d] \in R'$

VA5723 $R' \in S$

G5724 $[a,c,d] \in R'$

T5725∗ $R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ 5723

T5726 $[a,b,c] \in R'$ 5720, 5723

T5727 $[a,c,d] \in R'$ 5721, 5723

T5728 R' ist zyklisch transitiv 5713, 5723

G5729 $\mathbb{T}$ 3841, 5728, 5726, 5727

Entsprechendes gilt auch für die Konsistenz modulo Rotation.

T5730 $(\forall\, R \in S \bullet R$ ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})) \Rightarrow (\bigcap S)$ ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ 3191, 5664

Der Grund, warum Beispiel 5661 keine vollständige Relation lieferte, ist, daß die Wörter [0,1,2] und [2,1,0] nicht miteinander konsistent modulo Rotation sind. Sind alle beteiligten Relationen paarweise miteinander konsistent modulo Rotation und sind die zu schneidenden Relationen rotationsabgeschlossen und vollständig, so überträgt sich die Vollständigkeit auf das Resultat. Im Beweis dieses Theorems wird explizit das Auswahlaxiom in Form von Theorem 3230 verwendet.

T5731 $(\forall\, R \in S, R' \in S \bullet R$ und R' sind miteinander konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})) \wedge$
$(\forall\, R \in S \bullet R$ ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen$) \wedge (\forall\, R \in S \bullet R$ ist vollständig$) \Rightarrow$
$(\bigcap S)$ ist vollständig

A5732 $\forall\, R \in S, R' \in S \bullet R$ und R' sind miteinander konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$

A5733 $\forall\, R \in S \bullet R$ ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen

A5734 $\forall\, R \in S \bullet R$ ist vollständig

G5735 $(\bigcap S)$ ist vollständig

G5736 $\forall\, C \in (\underline{\text{li}}\,(\bigcap S))$ -Kliquen $\bullet$ C ist endlich $\Rightarrow \exists\, w \in (\bigcap S) \bullet \mathcal{A}(w) = C$ 2209

VA5737 $C \in (\underline{\text{li}}\,(\bigcap S))$ -Kliquen

A5738 C ist endlich

G5739 $\exists\, w \in (\bigcap S) \bullet \mathcal{A}(w) = C$

T5740∗ $C \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ 0105, 5737

T5741 $\forall\, R \in S \bullet C \in (\underline{\text{li}}\, R)$ -Kliquen 3168, 5664, 5737

T5742 $\forall\, R \in S \bullet \exists\, w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C$ 2209, 5734, 5741, 5738

VT5743 $f \in (S \rightarrow \mathbb{A}^*) \bullet \forall\, R \in S \bullet (f\ R) \in R \wedge \mathcal{A}(f\ R) = C$ 3230, 5664, 5742

T5744∗ $f \in (S \Rightarrow \mathbb{A}^*)$ 5743

VT5745 $R \in S$ 5664

T5746∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ 5745

T5747 $(f\ R) \in R$ 5743

T5748∗ $(f\ R) \in \mathbb{A}^*$ 5747

T5749 $\forall\, R' \in S \bullet (f\ R) \in R'$

VA5750 $R' \in S$

G5751 $(f\ R) \in R'$

T5752∗ $R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ 5750

T5753 $(f\ R') \in R'$ 5743, 5750

T5754∗ $(\mathrm{f\ R'}) \in \mathbb{A}^*$ . . . 5753
T5755 $\mathrm{R'}$ ist $(\stackrel{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen . . . 5733, 5750
G5756 $(\mathrm{f\ R'}) \stackrel{\text{rot}}{\equiv} (\mathrm{f\ R})$ . . . 1343, 5755, 5753
T5757 $\mathrm{R'}$ und R sind miteinander konsistent modulo $(\stackrel{\text{rot}}{\equiv})$ . . . 5732, 5750, 5745
T5758 $(\mathrm{f\ R'}) \stackrel{\text{rot}}{\precsim} (\mathrm{f\ R})$ . . . 1548, 5757, 5753, 5747
T5759 $\mathcal{A}(\mathrm{f\ R'}) = \mathcal{A}(\mathrm{f\ R})$ . . . 5743, 5750, 5745
G5760 $\mathbb{T}$ . . . 0996, 5759, 5758
T5761 $(\mathrm{f\ R}) \in (\bigcap \mathrm{S})$ . . . 5749
T5762 $\mathcal{A}(\mathrm{f\ R}) = \mathrm{C}$ . . . 5743, 5745
G5763 $\mathbb{T}$ . . . 5761, 5762

Zusammenfassend ist jeder Schnitt von zyklischen Ordnungen wieder eine zyklische Ordnung, wenn alle beteiligten Relationen paarweise miteinander konsistent modulo Rotation sind. Man beachte, daß auch unendliche Schnitte zulässig sind.

T5764 $(\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S},\ \mathrm{R'} \in \mathrm{S} \bullet$ R und R′ sind miteinander konsistent modulo $(\stackrel{\text{rot}}{\equiv})) \wedge$
$(\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet$ R ist eine zyklische Ordnung$) \Rightarrow$
$(\bigcap \mathrm{S})$ ist eine zyklische Ordnung . . . 5480, 5664, 3183, 3215, 5711, 5731, 5712

Abgesehen von der Prämisse im vorigen Theorem, die eine recht strenge Forderung darstellt, ergibt sich noch ein weiteres höchst unerwünschtes Resultat: Die Totalität vererbt sich auf den Durchschnitt, wenn alle geschnittenen Relationen total, teilwort- und rotationsabgeschlossen sind.

T5765 $(\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen$) \wedge (\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet$ R ist $(\stackrel{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen$) \wedge$
$(\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet$ R ist total$) \Rightarrow (\bigcap \mathrm{S})$ ist total

A5766 $\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen
A5767 $\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet$ R ist $(\stackrel{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen
A5768 $\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet$ R ist total
G5769 $(\bigcap \mathrm{S})$ ist total
T5770 $\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R}) = \mathcal{A}(\mathrm{R})^2$ . . . 2020, 5768
G5771 $(\underline{\mathrm{li}}\ (\bigcap \mathrm{S})) = \mathcal{A}(\bigcap \mathrm{S})^2$ . . . 2020
G5772 $\bigcap \{(\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\} = \bigcap \{\mathcal{A}(\mathrm{R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\}^2$ . . 5679, 5664, 5766, 5767, 3169, 5664, 5766
G5773 $\bigcap \{(\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R}) \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\} = \bigcap \{\mathcal{A}(\mathrm{R})^2 \bullet \mathrm{R} \in \mathrm{S}\}$
G5774 $\mathbb{T}$ . . . 5770

Damit ist der Schnitt einer Menge von miteinander konsistenten, totalen, zyklischen Ordnungen wieder eine totale, zyklische Ordnung.

T5775 $(\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S},\ \mathrm{R'} \in \mathrm{S} \bullet$ R und R′ sind miteinander konsistent modulo $(\stackrel{\text{rot}}{\equiv})) \wedge$
$(\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet$ R ist eine totale, zyklische Ordnung$) \Rightarrow$
$(\bigcap \mathrm{S})$ ist eine totale, zyklische Ordnung . . . 5483, 3681, 5764, 5765

Die Prämisse der Konsistenz in Theorem 5764 ist schon dann unverzichtbar, wenn der Schnitt von totalen, zyklischen Ordnungen mit gleichem Alphabet überhaupt eine zyklische Ordnung liefern soll, wie das übernächste Theorem zeigt. Die Aussage gilt sogar unter den schwächeren Bedingungen im folgenden Theorem.

T5776 $(\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathcal{A}(\mathrm{R}) = \mathcal{A}(\bigcap \mathrm{S})) \wedge (\bigcap \mathrm{S})$ ist vollständig $\wedge (\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet$ R ist einfach$) \wedge$
$(\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen$) \wedge (\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet$ R ist $(\stackrel{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen$) \wedge$
$(\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet$ R ist konsistent modulo $(\stackrel{\text{rot}}{\equiv})) \wedge (\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet$ R ist total$) \Rightarrow$
$(\bigcup \mathrm{S})$ ist konsistent modulo $(\stackrel{\text{rot}}{\equiv})$

A5777 $\forall\ \mathrm{R} \in \mathrm{S} \bullet \mathcal{A}(\mathrm{R}) = \mathcal{A}(\bigcap \mathrm{S})$
A5778 $(\bigcap \mathrm{S})$ ist vollständig

A5779	$\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist einfach	
A5780	$\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	
A5781	$\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	
A5782	$\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$	
A5783	$\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist total	
A5784	$\neg$ $(\bigcup$ S) ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$	
T5785	$(\bigcup$ S) ist einfach	3128, 5779
T5786	$(\bigcup$ S) ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	3154, 5780
VT5787	w $\in$ $(\bigcup$ S), w$'$ $\in$ $(\bigcup$ S) $\bullet$ $\mathcal{L}(\mathrm{w}) = 3 \wedge \mathcal{L}(\mathrm{w}') = 3 \wedge \mathcal{A}(\mathrm{w}) = \mathcal{A}(\mathrm{w}') \wedge \neg\, \mathrm{w} \overset{\text{rot}}{\equiv} \mathrm{w}'$	1663, 5785, 5786, 5784
T5788	$\mathcal{A}(\mathrm{w}) = \mathcal{A}(\mathrm{w}')$	5787
VT5789	R $\in$ S, R$'$ $\in$ S $\bullet$ w $\in$ R $\wedge$ w$'$ $\in$ R$'$	5787
T5790$*$	R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \wedge$ R$'$ $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \wedge$ w $\in \mathbb{A}^* \wedge$ w$'$ $\in \mathbb{A}^*$	5789
T5791	$\mathcal{A}(\mathrm{w}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	1245, 5789
T5792	$\mathcal{A}(\mathrm{w}) \subseteq \mathcal{A}(\bigcap \mathrm{S})$	5777, 5789, 5791
T5793	$\mathcal{A}(\mathrm{w})$ ist endlich	0240
T5794	$(\bigcap$ S) ist total	5765, 5780, 5781, 5783
T5795	u $\in$ $(\bigcap$ S) $\bullet$ $\mathcal{A}(\mathrm{u}) = \mathcal{A}(\mathrm{w})$	2281, 5794, 5778, 5792, 5793
T5796$*$	u $\in \mathbb{A}^*$	5795
T5797	u $\in$ R $\wedge$ u $\in$ R$'$	5795, 5789
T5798	R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ $\wedge$ R$'$ ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$	5782, 5789
T5799	$\mathrm{w} \overset{\text{rot}}{\eqsim} \mathrm{u} \wedge \mathrm{u} \overset{\text{rot}}{\eqsim} \mathrm{w}'$	1547, 5798, 5789, 5797
T5800	$\mathcal{A}(\mathrm{u}) = \mathcal{A}(\mathrm{w}')$	5795, 5788
T5801	$\mathrm{w} \overset{\text{rot}}{\eqsim} \mathrm{w}'$	0998, 5795, 5800, 5799
T5802	$\mathbb{F}$	0996, 5787, 5801, 5787

Es folgt hieraus sofort:

T5803 $(\forall$ R $\in$ S $\bullet$ $\mathcal{A}(\mathrm{R}) = \mathcal{A}(\bigcap \mathrm{S}))$ $\wedge$ $(\bigcap$ S) ist eine zyklische Ordnung $\wedge$
$(\forall$ R $\in$ S $\bullet$ R ist eine totale, zyklische Ordnung) $\Rightarrow$
$(\forall$ R $\in$ S, R$'$ $\in$ S $\bullet$ R und R$'$ sind miteinander konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv}))$ 5480, 3681, 5776, 1553, 1556

Die Prämisse der Konsistenz in Theorem 3200 schränkt die Verwendung des Schnittoperators stark ein. Die Konsistenz der Relationen untereinander ist jedoch nicht immer notwendig, um als Schnitt eine zyklische Ordnung zu erhalten, wie das folgende Beispiel zeigt. Allerdings wirken Fälle dieser Art recht künstlich, da Kliquen, die zu Unvollständigkeit führen könnten, durch Schnittbildung mit weiteren Relationen eliminiert werden.

B5804

Wir erweitern Beispiel 5661: Es sei $\mathrm{R}_1 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2],[2,3]}], $\mathrm{R}_2 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[2,1,0], [3] }], $\mathrm{R}_3 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1], [1,2], [2,3]}]. R_1, R_2 und R_2 sind zyklische Ordnungen. R_1 und R_2 sind nicht miteinander konsistent modulo Rotation. $\bigcap$ {R_1, R_2, R_3} $= (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1], [1,2], [3]}] ist wieder eine zyklische Ordnung.

Wir hatten schon in Beispiel 5661 gesehen, daß der Schnittoperator insbesondere nicht geeignet ist, um aus einer nichtkonsistenten Menge von zyklischen Ordnungen eine gemeinsame, konsistente Teilrelation zu extrahieren, wie dies bei azyklischen Ordnungen üblich ist.

Theorem 5765 hat zusätzlich zur Konsequenz, daß wir niemals nichttotale, zyklische Ordnungen durch Schnittbildung von totalen, zyklischen Ordnungen erzeugen können. Dieses negative Resultat, das bei einer Axiomatisierung auf Basis von Teilwort- und Rotationsabgeschlossenheit und Vollständigkeit unvermeidlich ist, zeigt, daß die Schnittoperation zur Konstruktion interessanter, zyklischer Ordnungen auf diese Weise unbrauchbar ist. Tatsächlich ist die Lage noch unangenehmer, als sie auf den ersten Blick erscheint: Ein Schnitt zweier verschiedener totaler, zyklischer Ordnungen mit gleichem Alphabet liefert niemals eine zyklische Ordnung, wie Theorem 3756 in Kombination mit Theorem 5776 zeigt.

Abschließend folgt noch ein einfaches Beispiel, in dem ein Schnitt einer Menge von miteinander konsistenten, nichttotalen, zyklischen Ordnungen nach Theorem 3200 tatsächlich eine zyklische Ordnung liefert.

B5805

Wir wählen die zyklischen Ordnungen $R_1 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2], [1,2,3,4,5]\}]$ und $R_2 = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2,6], [1,2,4,5], [5,6]\}]$. R_1 und R_2 sind miteinander konsistent modulo Rotation. Es ergibt sich die zyklische Ordnung $(R_1 \cap R_2) = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2], [1,2,4,5]\}]$.

Die Abgeschlossenheit der zyklischen Ordnungen unter Schnittbildung gilt also im allgemeinen nicht. Dies ist ein fundamentaler Unterschied zur Klasse der azyklischen Ordnungen, die unter Schnittbildung abgeschlossen sind. Man könnte diese Eigenschaft erzwingen, wenn wir auf die Abgeschlossenheit unter Projektion verzichten würden (z.B. verallgemeinerte Tripelsysteme, die nicht nur totale, zyklische Ordnungen beschreiben). Die letztere Eigenschaft scheint jedoch elementarer zu sein, so daß wir die Nichtabgeschlossenheit unter (der einfachen mengentheoretischen) Schnittbildung sogar als wesentliches Merkmal der Klasse aller zyklischen Ordnungen auffassen sollten.

7.8 Intervalle

Wir behandeln in diesem Abschnitt Intervalle in zyklischen Ordnungen und untersuchen ihr Verhältnis zu anderen Elementen der Ordnung bzgl. Abhängigkeit und Unabhängigkeit. Interessant ist vor allem der Vergleich mit der Situation bei azyklischen Ordnungen.

Da wir Intervalle bisher nur bei totalen, zyklischen Ordnungen kennengelernt haben, folgt zunächst ein Beispiel für Intervalle einer nichttotalen, zyklischen Ordnung.

B5806

Für die zyklische Ordnung $R = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2,3], [3,4,1,6], [4,5,6,7], [3,4,5,6], [1,6,7,4], [1,2,3,4], [1,6,3,0]\}]$ aus Beispiel 5488 (Abb. 7.9) berechnen wir einige Intervalle: Es gilt $(0 \cdots 2)_R = \{1\}$, $(2 \cdots 0)_R = \{3\}$, $(0 \cdots 3)_R = \{1,2,6\}$, $(3 \cdots 0)_R = \emptyset$, $(5 \cdots 4)_R = \{3,6,7\}$, $(4 \cdots 5)_R = \emptyset$, $(4 \cdots 4)_R = \emptyset$.

Zur Vorbereitung benötigen wir einige Lemmata, die aber auch unabhängig von unserem eigentlichen Ziel interessant sind, da sie wesentliche Eigenschaften von zyklischen Ordnungen beschreiben und besonders anschaulich sind. Die folgenden beiden Lemmata sind dual zueinander bzgl. der Relationen (li R) und (co R). Zyklische Ordnungen in denen die Aussagen der Theoreme nachvollziehbar ist, sind in Abb. 7.19 und Abb. 7.20 dargestellt.

B5807

x,y,a,b,b' seien paarweise verschiedene Elemente. Die zyklische Ordnung in Abb. 7.19 ist durch $R = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})\ [\{[x,b,y,b'], [x,a,y,b']\}]$ gegeben. Damit haben wir die Kens $(\underline{\text{li}}\ R)$ -Kens $= \{\{x,b,y,b'\}, \{x,a,y,b'\}\}$ und die Relation der Unabhängigkeit $(\text{co } R) = \updownarrow\{(a,b), (a,b')\}$. Man könnte sich die Relation R natürlich auch als Teil einer größeren Relation vorstellen.

S5808

VA5809$*$ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

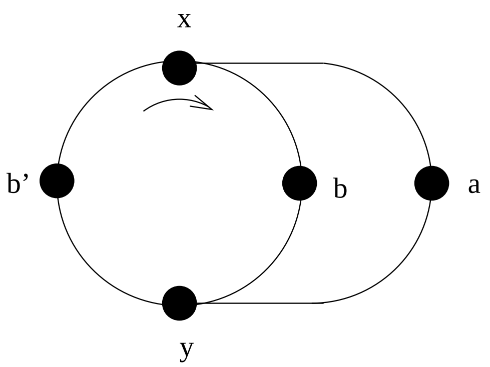


Abbildung 7.19: Quadrupel-Eigenschaften bzgl. li

A5810 R ist eine zyklische Ordnung

Wir betrachten Abb. 7.19. Wir haben einen Ken, der $[x,b,y,b']$ enthält. Steht nun ein Element a zu zwei sich gegenüberliegenden Elementen, hier x und y in der Abhängigkeitsrelation, so muß eines der x und y trennenden Elemente b oder b' ebenfalls abhängig von a sein. Mit anderen Worten: Die Abhängigkeit muß über ein zwischen x und y liegendes Element von x nach y vermittelt werden. Oder noch anders formuliert: Wird ein Kreis durch x und y in zwei Seiten b und b' geteilt und liegt a auf einem anderen Kreis mit x und y, so muß eine Seite (hier b) dem Element a abgewandt, d.h. abhängig sein.

T5811 $\forall\, x,y,b,b',a \bullet [x,b,y,b'] \in R \Rightarrow$
$(a,x) \in (\mathrm{li}\ R) \wedge (a,y) \in (\mathrm{li}\ R) \Rightarrow (a,b) \in (\mathrm{li}\ R) \vee (a,b') \in (\mathrm{li}\ R)$

VA5812 $x,y,b,b',a \bullet [x,b,y,b'] \in R$
A5813 $(a,x) \in (\mathrm{li}\ R)$
A5814 $(a,y) \in (\mathrm{li}\ R)$
G5815 $(a,b) \in (\mathrm{li}\ R) \vee (a,b') \in (\mathrm{li}\ R)$
T5816∗ $\{x,y,b,b',a\} \subseteq \mathbb{A}$ . . . 5812, 5813
T5817 $(x,y) \in (\mathrm{li}\ R)$ . . . 1901, 5812
T5818 $\{x,a,y\} \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen
  T5819 $(x,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ . . . 1821, 5817
  G5820 $\mathbb{T}$ . . . 0113, 1824, 1825, 5813, 5819, 5814
T5821 R ist einfach . . . 5480, 5810
T5822 $|\{x,a,y\}| = 3$
  T5823 $a \neq x$ . . . 0073, 1906, 5813
  T5824 $a \neq y$ . . . 0073, 1906, 5814
  T5825 $x \neq y$ . . . 1906, 5821, 0073, 5817
  G5826 $\mathbb{T}$ . . . 5823, 5824, 5825
T5827 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen . . . 5480, 5810
T5828 R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen . . . 5480, 5810
T5829 R ist zyklisch transitiv . . . 5480, 5810
T5830 R ist vollständig . . . 5480, 5810
T5831 R ist 3 -vollständig . . . 2215, 5830
T5832 $[x,a,y] \in R \vee [y,a,x] \in R$ . . . 2346, 5821, 5828, 5831, 5818, 5822
A5833 $[x,a,y] \in R$
  T5834 $[x,y,b'] \sqsubseteq [x,b,y,b']$ . . . 0558
  T5835 $[x,y,b'] \in R$ . . . 1315, 5827, 5812, 5834
  T5836 $[x,a,b'] \in R$ . . . 3841, 5829, 5833, 5835
  T5837 $(a,b') \in (\mathrm{li}\ R)$ . . . 1900, 5836
  G5838 $\mathbb{T}$ . . . 5837
A5839 $[y,a,x] \in R$

T5840	$[x,b,y,b'] \overset{rot}{\equiv} [y,b',x,b]$	0503
T5841	$[y,b',x,b] \in R$	1343, 5828, 5812, 5840
T5842	$[y,x,b] \sqsubseteq [y,b',x,b]$	0558
T5843	$[y,x,b] \in R$	1315, 5827, 5841, 5842
T5844	$[y,a,b] \in R$	3841, 5829, 5839, 5843
T5845	$(a,b) \in (\text{li } R)$	1900, 5844
G5846	$\mathbb{T}$	5845

Eine dem vorigen Theorem ähnliche Eigenschaft wird in *Petri 1991* als Axiom für Trennungsstrukturen gefordert. Hier konnten wir diese Eigenschaft mit Hilfe der scheinbar noch grundlegenderen Forderung nach zyklischer Transitivität ableiten. Dies ist bemerkenswert, da es sich bei den zyklischen Ordnungen um einen gerichteten Ansatz handelt, während Trennungsstrukturen prinzipiell nicht gerichtet sind.

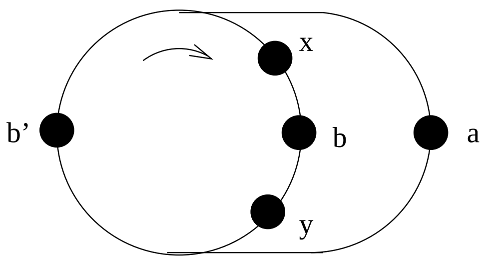


Abbildung 7.20: Quadrupel-Eigenschaften bzgl. co

B5847

x,y,a,b,b′ seien paarweise verschieden. Abb. 7.20 stellt die zyklische Ordnung $R = (\overset{rot}{\sqsupseteq})\ [\{[x,b,y,b'], [a,b']\}]$ dar, die wiederum Teil einer größeren Relation sein könnte. Insbesondere gilt $(\underline{\text{li}}\ R)$ -Kens $= \{\{x,b,y,b'\}, \{a,b'\}\}$ und $(\text{co } R) = \updownarrow\{(a,x), (a,b), (a,y)\}$.

Es folgt nun das zu 5811 duale Lemma:

S5848

VA5849∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A5850 R ist eine zyklische Ordnung

In Abb. 7.20 sehen wir einen Ken der [x,b,y,b′] enthält. Ist ein Element a von x und y unabhängig, so muß auch eines der beiden x und y trennenden Elemente b und b′ unabhängig von a sein. Mit anderen Worten: Unabhängigkeit breitet sich entlang der einen Seite b oder der anderen Seite b′ von x nach y aus.

T5851 $[x,b,y,b'] \in R \Rightarrow$
$(a,x) \in (\text{co } R) \wedge (a,y) \in (\text{co } R) \Rightarrow (a,b) \in (\text{co } R) \vee (a,b') \in (\text{co } R)$

A5852	$[x,b,y,b'] \in R$	
G5853	$(a,x) \in (\text{co } R) \wedge (a,y) \in (\text{co } R) \Rightarrow (a,b) \in (\text{co } R) \vee (a,b') \in (\text{co } R)$	
G5854	$(a,b) \notin (\text{co } R) \wedge (a,b') \notin (\text{co } R) \Rightarrow (a,x) \notin (\text{co } R) \vee (a,y) \notin (\text{co } R)$	
A5855	$(a,b) \notin (\text{co } R)$	
A5856	$(a,b') \notin (\text{co } R)$	
G5857	$(a,x) \notin (\text{co } R) \vee (a,y) \notin (\text{co } R)$	
G5858	$(a,x) \in (\text{li } R) \vee (a,y) \in (\text{li } R)$	1985
A5859	$a \notin \mathcal{A}(R)$	
T5860	$(a,x) \notin (\text{co } R)$	1926, 5859
G5861	$\mathbb{T}$	5860
A5862	$a \in \mathcal{A}(R)$	

T5863	$\mathrm{b} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}) \wedge \mathrm{b}' \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$	
T5864	$\mathcal{A}([\mathrm{x,b,y,b'}]) \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$	1245, 5852
G5865	$\mathbb{T}$	0330, 5864
A5866	$\mathrm{a} = \mathrm{b}$	
T5867	$[\mathrm{x,a,y,b'}] \in \mathrm{R}$	5866, 5852
T5868	$(\mathrm{a,x}) \in (\mathrm{li\ R})$	1901, 5867
G5869	$\mathbb{T}$	5868
A5870	$\mathrm{a} = \mathrm{b}'$	
T5871	$[\mathrm{x,b,y,a}] \in \mathrm{R}$	5870, 5852
T5872	$(\mathrm{a,y}) \in (\mathrm{li\ R})$	1901, 5871
G5873	$\mathbb{T}$	5872
A5874	$\mathrm{a} \neq \mathrm{b} \wedge \mathrm{a} \neq \mathrm{b}'$	
T5875	$[\mathrm{x,b,y,b'}] \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} [\mathrm{b,y,b',x}]$	0502
T5876	R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	5480, 5850
T5877	$[\mathrm{b,y,b',x}] \in \mathrm{R}$	1343, 5876, 5852, 5875
T5878	$(\mathrm{a,b}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$	1982, 5862, 5863, 5855
T5879	$(\mathrm{a,b'}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$	1982, 5862, 5863, 5856
T5880	$(\mathrm{a,b}) \in (\mathrm{li\ R})$	1827, 5874, 5878
T5881	$(\mathrm{a,b'}) \in (\mathrm{li\ R})$	1827, 5874, 5879
G5882	$\mathbb{T}$	5811, 5850, 5877, 5880, 5881

Obwohl dies anhand der Abbildungen nicht so offensichtlich ist, erhält man Lemma 5851 im wesentlichen durch Umkehrung der zweiten Implikation aus 5811 sowie Ausnutzung der Rotationsabgeschlossenheit.

Die für die Anwendung der obigen Lemmata notwendigen vierstelligen Wörter, liefert uns ein weiteres Lemma:

S5883

VA5884$*$ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

VA5885 R ist eine zyklische Ordnung

Wir betrachten eine beliebige, zyklische Ordnung. Liegt b zwischen x und y und liegt b′ zwischen y und x, so ist das Wort [x,b,y,b′] in der Relation enthalten.

T5886 $\mathrm{b} \in (x \cdots y)_{\mathrm{R}} \wedge \mathrm{b}' \in (y \cdots x)_{\mathrm{R}} \Rightarrow [\mathrm{x,b,y,b'}] \in \mathrm{R}$

A5887	$\mathrm{b} \in (x \cdots y)_{\mathrm{R}}$	
A5888	$\mathrm{b}' \in (y \cdots x)_{\mathrm{R}}$	
G5889	$[\mathrm{x,b,y,b'}] \in \mathrm{R}$	
T5890	R ist einfach	5480, 5885
T5891	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	5480, 5885
T5892	R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	5480, 5885
T5893	R ist vollständig	5480, 5885
T5894	R ist konsistent modulo $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$	5482, 5885
T5895	R ist schwach zyklisch transitiv	5480, 5885, 3914
T5896	$[\mathrm{x,b,y}] \in \mathrm{R}$	3407, 5891, 5887
T5897	$[\mathrm{y,b',x}] \in \mathrm{R}$	3407, 5891, 5888
T5898$*$	$\mathrm{x} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{y} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{b} \in \mathbb{A} \wedge \mathrm{b}' \in \mathbb{A}$	5896, 5897
T5899	$[\mathrm{y,b',x}] \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} [\mathrm{x,y,b'}]$	0501
T5900	$[\mathrm{x,y,b'}] \in \mathrm{R}$	1343, 5892, 5897, 5899
G5901	$\mathbb{T}$	3915, 5890, 5892, 5893, 5894, 5895, 5896, 5900

Das Theorem 3493, welches wir für azyklische Ordnungen ableiten konnten, gilt für zyklische Ordnungen R nicht. Wir werden jedoch eine Abschwächung finden, die (co R) und sogar (li R) symmetrisch behandelt und damit die Dualität zwischen (co R) und (li R) herstellt, die bei azyklischen Ordnungen verletzt wurde.

S5902

VA5903∗ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

A5904 R ist eine zyklische Ordnung

Wir betrachten nun zwei Intervalle $(x \cdots y)_\mathrm{R}$ und $(y \cdots x)_\mathrm{R}$ mit den gleichen Randelementen x und y. Besteht nun eine Abhängigkeitsrelation zwischen einem Element a und diesen Randpunkten, so läßt sich die Abhängigkeitsbeziehung auf eines der Intervalle ausdehnen.

T5905 (a,x) $\in$ (li R) $\wedge$ (a,y) $\in$ (li R) $\Rightarrow$
($\forall$ b $\in (x \cdots y)_\mathrm{R}$ $\bullet$ (a,b) $\in$ (li R)) $\vee$ ($\forall$ b $\in (y \cdots x)_\mathrm{R}$ $\bullet$ (a,b) $\in$ (li R))

A5906 (a,x) $\in$ (li R)

A5907 (a,y) $\in$ (li R)

A5908 $\neg$ (($\forall$ b $\in (x \cdots y)_\mathrm{R}$ $\bullet$ (a,b) $\in$ (li R)) $\vee$ ($\forall$ b $\in (y \cdots x)_\mathrm{R}$ $\bullet$ (a,b) $\in$ (li R)))

VT5909 b $\in (x \cdots y)_\mathrm{R}$ $\bullet$ (a,b) $\notin$ (li R) 5908

VT5910 b′ $\in (y \cdots x)_\mathrm{R}$ $\bullet$ (a,b′) $\notin$ (li R) 5908

T5911 [x,b,y,b′] $\in$ R 5886, 5904, 5909, 5910

T5912 $\neg$ ((a,b) $\in$ (li R) $\vee$ (a,b′) $\in$ (li R)) 5909, 5910

T5913 $\neg$ ((a,x) $\in$ (li R) $\wedge$ (a,y) $\in$ (li R)) 5811, 5904, 5911, 5912

T5914 $\mathbb{F}$ 5913, 5906, 5907

Völlig dual zu dem vorigen Theorem ist nun das Verhältnis zwischen Intervallen und der Unabhängigkeitsrelation: Wir betrachten wieder die beiden Intervalle $(x \cdots y)_\mathrm{R}$ und $(y \cdots x)_\mathrm{R}$ mit Randpunkten x und y. Ist nun ein Element a von den Randpunkten unabhängig, so ist es auch von einem der Intervalle vollständig unabhängig. Man vergleiche dies mit Theorem 3493 für azyklische Ordnungen.

T5915 (a,x) $\in$ (co R) $\wedge$ (a,y) $\in$ (co R) $\Rightarrow$
($\forall$ b $\in (x \cdots y)_\mathrm{R}$ $\bullet$ (a,b) $\in$ (co R)) $\vee$ ($\forall$ b $\in (y \cdots x)_\mathrm{R}$ $\bullet$ (a,b) $\in$ (co R))

A5916 (a,x) $\in$ (co R)

A5917 (a,y) $\in$ (co R)

A5918 $\neg$ (($\forall$ b $\in (x \cdots y)_\mathrm{R}$ $\bullet$ (a,b) $\in$ (co R)) $\vee$ ($\forall$ b $\in (y \cdots x)_\mathrm{R}$ $\bullet$ (a,b) $\in$ (co R)))

VT5919 b $\in (x \cdots y)_\mathrm{R}$ $\bullet$ (a,b) $\notin$ (co R) 5918

VT5920 b′ $\in (y \cdots x)_\mathrm{R}$ $\bullet$ (a,b′) $\notin$ (co R) 5918

T5921 [x,b,y,b′] $\in$ R 5886, 5904, 5919, 5920

T5922 $\neg$ ((a,b) $\in$ (co R) $\vee$ (a,b′) $\in$ (co R)) 5919, 5920

T5923 $\neg$ ((a,x) $\in$ (co R) $\wedge$ (a,y) $\in$ (co R)) 5851, 5904, 5921, 5922

T5924 $\mathbb{F}$ 5923, 5916, 5917

Wir bemerken, daß diese beiden Theoreme trivialerweise auch gelten, wenn R eine azyklische Ordnung ist, aber nur weil in diesem Fall eines der Intervalle $(x \cdots y)_\mathrm{R}$ und $(y \cdots x)_\mathrm{R}$ leer ist (Theorem 3479).

Zusammenfassend stellen wir als interessantes Ergebnis fest: Die durch die beiden Theoreme 5905 und 5915 verkörperte Dualität von Abhängigkeit und Unabhängigkeit wird erst in zyklischen Ordnungen in nichttrivialer Weise deutlich. Der Grund: In zyklischen Ordnungen R ist mit jedem Intervall $(x \cdots y)_\mathrm{R}$ ein inverses Intervall $(y \cdots x)_\mathrm{R}$ assoziiert, so daß auch beide Intervalle nichtleer sein können.

7.9 Kens und Zyklen

Dieser Abschnitt kann recht kurz ausfallen, da nahezu alle Ergebnisse aus dem gleichnamigen Abschnitt im vorigen Kapitel auch für zyklische Ordnungen gültig bleiben. Wir hatten es dort absichtlich vermieden die Totalität in Beweisen auszunutzen. Zwei Punkte wollen wir jedoch anhand einiger Beispiele noch etwas genauer beleuchten: Zu einen wird demonstriert, daß das Verhältnis zwischen Zyklen der Nachfolgerrelation und endlichen Kens keineswegs so direkt ist, wie dies bei totalen, zyklische Ordnungen der Fall war. Zum anderen stellen wir uns die Frage, inwieweit eine zyklische Ordnung allein durch ihre unmittelbare Nachfolgerrelation eindeutig bestimmt ist.

Nach Theorem 4365 gibt es in zyklischen Ordnungen für jeden nichtleeren, endlichen Ken einen Zyklus der unmittelbaren Nachfolgerrelation, der jedes Element des Kens genau einmal enthält. Für unendliche Kens kann dies natürlich nicht gelten, da Zyklen immer endlich sind.

Bei totalen, zyklischen Ordnungen haben wir festgestellt, daß auch umgekehrt jeder Zyklus der unmittelbaren Nachfolgerrelation einem Ken entspricht. Dies war eine direkte Folgerung aus Theorem 4548. Bei zyklischen Ordnungen gilt diese direkte Korrespondenz zwischen Zyklen und Kens nicht, wie schon das Beispiel 4443 und auch das folgende Beispiel zeigt.

B5925

Die zyklische Ordnung R = $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,3], [0,2,3] }] aus Beispiel 5485 besitzt zwei Kens ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kens = {{0,1,3}, {0,2,3}}. Wir berechnen die unmittelbare Nachfolgerrelation $\lessdot_{\mathrm{R}}$ = {(0,1), (1,3), (3,0), (0,2), (2,3) }. Der ($\lessdot_{\mathrm{R}}$) -Zyklus [1,3,0] entspricht der Ken {0,1,3}. Es gibt jedoch einen ($\lessdot_{\mathrm{R}}$) -Zyklus [0,1,3,0,2,3] der durch keinen Ken abgedeckt wird. Es handelt sich hierbei allerdings nicht um einen einfachen Zyklus.

Anhand dieses Beispiels könnte man vermuten, daß wenigstens alle einfachen Zyklen endlichen Kens entsprechen. Selbst dies ist jedoch im allgemeinen nicht der Fall, wie eine zyklische Ordnung zeigt, die wir schon in Beispiel 5477 kennengelernt haben.

B5926

Wir betrachten Abb. 7.6. Die Darstellungen rechts und unten zeigen die gleiche Relation R = $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2], [0,4,2], [1,5,0], [2,3,1]}]. Einfachheit, Teilwort- und Rotationsabgeschlossenheit sind offensichtlich. Es gilt $\mathcal{A}$(R) = {0,1,2,3,4,5} und ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kens = {{0,1,2}, {0,4,2}, {1,5,0}, {2,3,1}}. Die Vollständigkeit ist direkt mit Hilfe von Theorem 2325 überprüfbar. Die zyklische Transitivität gilt, da die Prämisse aus Definition 3841 niemals erfüllt ist. R ist also eine zyklische Ordnung.

Jedem Ken entspricht ein einfacher ($\lessdot_{\mathrm{R}}$) -Zyklus: Dem Ken {1,2,3} entspricht das Wort [1,2,3], usw. Es gibt jedoch einen einfachen ($\lessdot_{\mathrm{R}}$) -Zyklus [0,4,2,3,1,5] der von keinem Ken abgedeckt wird.

Wir erinnern uns (Beispiel 5477), daß dieses Wort in Abb. 7.5 dargestellten Relation, die keine zyklische Ordnung ist, vorkommt. Um diesen unerwünschten Zyklus als Wort der Relation R auszuschließen, hatten wir die Barrieren eingeführt.

Im vorigen Kapitel haben wir für endliche, totale, zyklische Ordnungen festgestellt, daß sie aus einem beliebigen ($\lessdot_{\mathrm{R}}$) -Zyklus durch $(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})$ -Abschluß generiert werden. Damit ist eine totale, zyklische Ordnung allein durch Angabe der unmittelbaren Nachbarschaftsrelation ($\lessdot_{\mathrm{R}}$) eindeutig bestimmt. Daß dies für endliche, zyklische Ordnungen im allgemeinen nicht zutrifft, wollen wir uns anhand des folgenden Beispiels überlegen. Es werden zwei verschiedene, endliche, zyklische Ordnungen angegeben, die die gleiche unmittelbare Nachfolgerrelation besitzen.

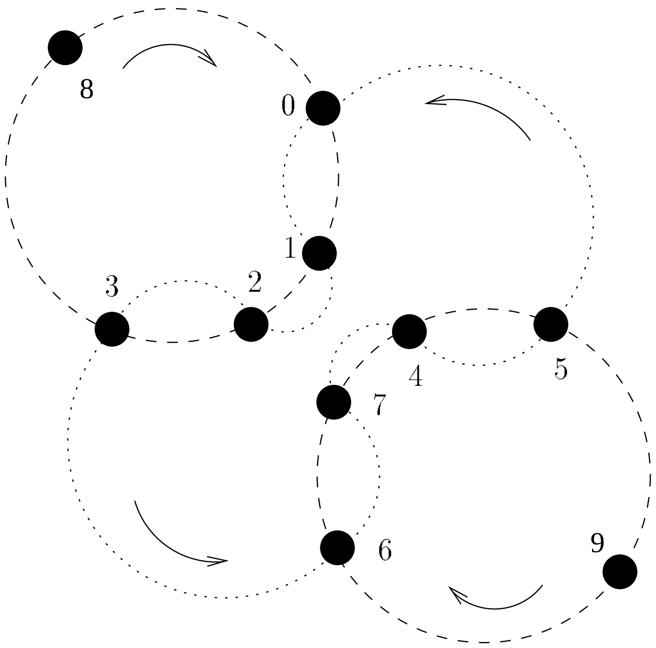


Abbildung 7.21: Eine zyklische Ordnung mit drei Kens

B5927

In Abb. 7.21 ist die zyklische Ordnung $\mathrm{R} = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2,3,8], [4,5,9,6,7], [0,1,2,3,6,7,4,5]\,\}]$ dargestellt. Die Relation besitzt drei Kens, die gerade den dargestellten unverzweigten Kreisen entsprechen.

In Abb. 7.22 sehen wir eine andere zyklische Ordnung $\mathrm{R}' = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2,3,8], [4,5,9,6,7], [2,3,6,7,10],$

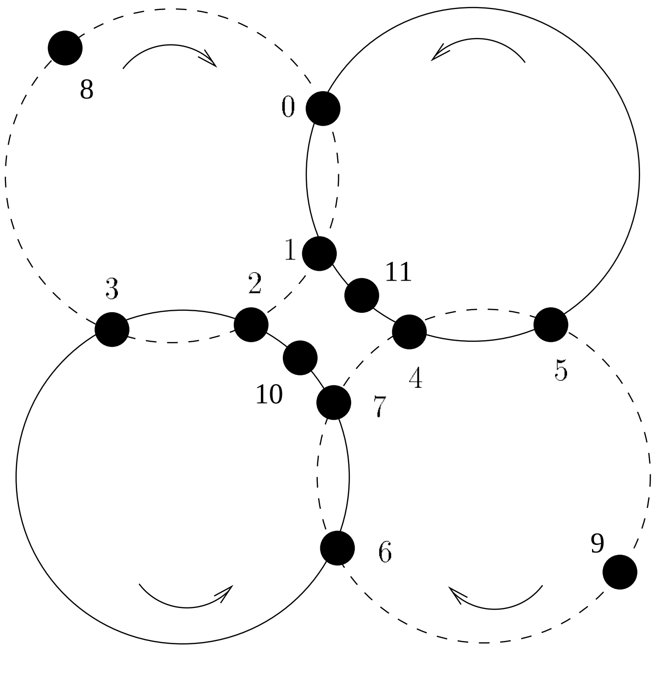


Abbildung 7.22: Eine zyklische Ordnung mit vier Kens

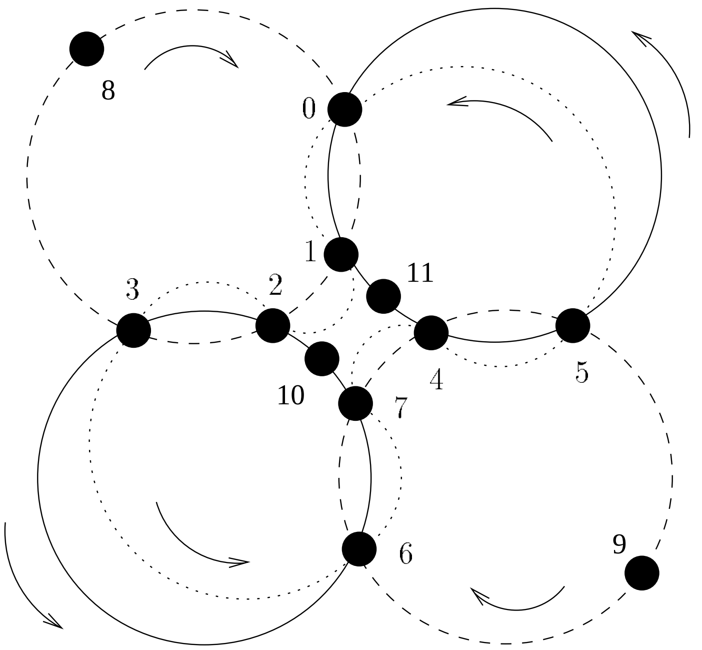


Abbildung 7.23: Eine zyklische Ordnung mit fünf Kens

[0,1,11,4,5]}]. Diese Relation hat vier Kens, die wieder den unverzweigten Kreisen entsprechen.

Wir bilden nun die Vereinigung $R'' = R \cup R' = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2,3,8], [4,5,9,6,7], [2,3,6,7,10], [0,1,11,4,5], [0,1,2,3,6,7,4,5]}]. Es handelt sich dabei wieder um eine zyklische Ordnung, die in Abb. 7.23 zu sehen ist.

Berechnen wir nun die unmittelbaren Nachfolgerrelationen $(\prec_{R'})$ und $(\prec_{R''})$, so stellen wir fest,

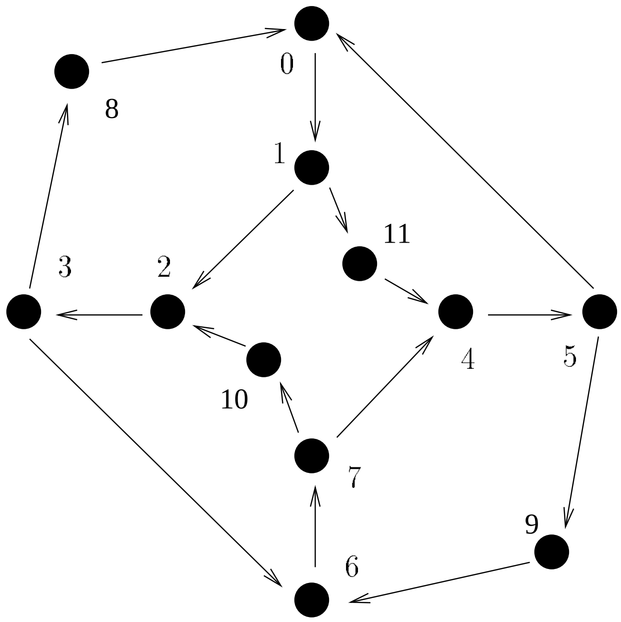


Abbildung 7.24: Die unmittelbare Nachfolgerrelation der Ordnungen in Abb. 7.22 und Abb. 7.23

daß sich in beiden Fällen die in Abb. 7.24 gezeigte binäre Relation $(\prec_{R'}) = (\prec_{R''}) = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,8), (8,0), (1,11), (11,4), (4,5), (5,0), (5,9), (9,6), (6,7), (7,4), (3,6), (7,10), (10,2)\}$ ergibt.

Aus der Tatsache, daß jeder endliche Ken einem einfachen Zyklus der unmittelbaren Nachfolgerrelation entspricht, können wir sofort die folgenden Theoreme ableiten.

S5928

VA5929∗	$R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A5930	R ist eine zyklische Ordnung
A5931	R ist endlich

Sind zwei Elemente abhängig oder identisch, so finden wir einen Ken, der sie enthält und damit auch einen einfachen Zyklus in dem beide Elemente vorkommen. Man beachte, daß wir aus den oben erläuterten Gründen keine Äquivalenz sondern nur eine Implikation haben.

T5932 $(x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R) \Rightarrow$
$\exists\, w \in \mathbb{A}^* \bullet w$ ist einfach $\wedge$ w ist ein $(\prec_R)$ -Zyklus $\wedge\ x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$

A5933	$(x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R)$	
G5934	$\exists\, w \in \mathbb{A}^* \bullet w$ ist einfach $\wedge$ w ist ein $(\prec_R)$ -Zyklus $\wedge\ x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$	
T5935	$\{x,y\} \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen	0112, 1824, 1825, 5933
T5936	$L \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kens $\bullet \{x,y\} \subseteq L$	0134, 5935
T5937	$\mathcal{A}(R)$ ist endlich	1293, 5931
T5938	$L \subseteq \mathcal{A}(R)$	0124, 1820, 5936
T5939	L ist endlich	5938, 5937
T5940	$1 \leq \lvert L \rvert$	5936, 5939
VT5941	$w \in R \bullet w$ ist ein $(\prec_R)$ -Zyklus $\wedge\ \mathcal{A}(w) = L$	4365, 5480, 5930, 5936, 5939, 5940
T5942∗	$w \in \mathbb{A}^*$	5941
T5943	R ist einfach	5480, 5930
T5944	w ist einfach	1279, 5943, 5941
T5945	$x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$	5936, 5941
G5946	$\mathbb{T}$	5944, 5941, 5945

Die Umkehrung des Theorems ist nützlich, um aus der Nichtexistenz einfacher Zyklen auf die Unabhängigkeit von Elementen zu schließen.

T5947 $\forall\, x \in \mathcal{A}(R), y \in \mathcal{A}(R) \bullet$
$(\ \neg\exists\, w \in \mathbb{A}^* \bullet w$ ist einfach $\wedge$ w ist ein $(\prec_R)$ -Zyklus $\wedge\ x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)\ ) \Rightarrow$
$(x,y) \in (\text{co } R)$ . . . 1982, 5932

Aus dem vorigen Beispiel 5927 ergibt sich, daß die endlichen, zyklischen Ordnungen, die eindeutig durch ihre unmittelbare Nachfolgerrelation bestimmt sind, eine echte Teilklasse innerhalb aller endlichen, zyklischen Ordnungen bilden. Diese Teilklasse ist nicht leer, da, wie wir uns überlegten, alle endlichen, totalen, zyklischen Ordnungen darin enthalten sind. Abgesehen von diesen, enthält die Teilklasse jedoch auch nichttotale, zyklische Ordnungen wir die folgende Überlegung zeigt.

B5948

Wir greifen auf die zyklische Ordnung $R = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,3],[0,2,3]\}]$ aus Beispiel 5485 zurück, die schon in Abb. 1.2 zu sehen war. Wir wollen versuchen R aus dem Alphabet $\mathcal{A}(R) = \{0,1,2,3\}$ und der in Abb. 1.4 dargestellten Nachfolgerrelation $(\prec_R) = \{(0,1), (1,3), (3,0), (0,2), (2,3)\}$ abzuleiten. Nach Theorem 4142 gilt $(\prec_R) \subseteq (\underline{\text{li}}\ R)$. Da R reflexiv und symmetrisch ist, haben wir $\updownarrow\{(0,1), (1,3), (3,0), (0,2), (2,3), (0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\} \subseteq (\underline{\text{li}}\ R)$. Da $(\underline{\text{li}}\ R) \subseteq \mathcal{A}(R) \times \mathcal{A}(R)$ gilt, stellt sich nur noch die Frage ob $(1,2) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ gilt. Dies ist jedoch nicht der Fall, da 1 und 2 in keinen einfacheren Zyklus enthalten sind (Theorem 5932). Damit ist $(\underline{\text{li}}\ R) = \updownarrow\{(0,1), (1,3), (3,0), (0,2),$

(2,3), (0,0), (1,1), (2,2), (3,3)} eindeutig bestimmt und wir haben die Kens ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens = {{0,1,3}, {0,2,3}}. Nach Theorem 4446 ist jeder einfache Zyklus, der einer Klique entspricht, in der Relation enthalten, also [0,1,3] $\in$ R und [0,2,3] $\in$ R. Aus Rotations- und Teilwortabgeschlossenheit folgt $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,3], [0,2,3]}] $\subseteq$ R. $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,3], [0,2,3]}] enthält alle einfachen Wörter auf $\mathcal{A}$(R), die mit [0,1,3] und [0,2,3] konsistent (modulo Rotation) und in denen 1 und 2 nicht gemeinsam vorkommen. Da wir (1,2) $\notin$ ($\underline{\text{li}}$ R) feststellten, sind dies alle Wörter der Relation, also erhalten wir wieder die ursprüngliche Relation R = $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,3], [0,2,3] }].

Insgesamt zeigen die Beispiele dieses Abschnitts einen fundamentalen Unterschied gegenüber der Situation bei azyklischen Ordnungen, wo wir die Relation (mindestens) im endlichen Fall allein aus der unmittelbaren Nachfolgerrelation rekonstruieren können. Selbst endliche, zyklische Ordnungen können also nicht allein graphentheoretisch, durch Untersuchung der Zyklen im Graphen der unmittelbaren Nachfolger behandelt werden. Würden wir dies trotzdem versuchen (indem wir eine andere Definition von zyklischen Ordnungen wählen), so könnten wir wesentliche Eigenschaften der Ordnung nicht repräsentieren und damit hinsichtlich dieser Eigenschaften verschiedene Ordnungen nicht unterscheiden. Gerade diese über eine rein graphentheoretische Beschreibung hinausgehenden Eigenschaften einer zyklischen Ordnung führen einerseits zu einer etwas ungewohnten Darstellung, andererseits jedoch zu einer nichttrivialen und damit interessanten Theorie.

7.10 Repräsentation durch binäre Relationen

Endliche totale, zyklische Ordnungen sind nach Theorem 4715 allein durch ihre unmittelbare Nachfolgerrelation eindeutig festgelegt. Dies laßt sich für zyklische Ordnungen wie folgt verallgemeinern: Eine Ken-endliche zyklische Ordnung ist durch Angabe der unmittelbaren Nachfolgerrelation und der (reflexiven) Abhängigkeitsrelation eindeutig bestimmt. Statt der Abhängigkeitsrelation können wir natürlich auch die Unabhängigkeitsrelation verwenden. Auf jeden Fall können wir Ken-endliche und somit auch endliche zyklische Ordnungen durch nur zwei binäre Relationen vollständig (und anschaulich) beschreiben. Statt der Abhängigkeitsrelation können wir natürlich auch alle Kens angeben. Zum Beweis der Aussage folgen zunächst einige Vorbereitungen.

S5949

VA5950$*$ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Erweitern wir eine Relation von R auf R$'$, so verhält sich die unmittelbare Nachfolgerrelation umgekehrt monoton, wenn wir sie auf die Abhängigkeitsrelation ($\underline{\text{li}}$ R) beschränken.

T5951 R $\subseteq$ R$'$ $\Rightarrow$ $(\prec_{R'}) \cap$ ($\underline{\text{li}}$ R) $\subseteq$ $(\prec_R)$

A5952 R $\subseteq$ R$'$

G5953 $\forall$ (x,y) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) $\bullet$ x $\prec_{R'}$ y $\Rightarrow$ x $\prec_R$ y

VA5954 x,y $\bullet$ (x,y) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R)

A5955 x $\prec_{R'}$ y

G5956 x $\prec_R$ y

T5957 $(\sqsupseteq)$[R] $\subseteq$ $(\sqsupseteq)$[R$'$] 1403, 5952

A5958 x = y

T5959 $\neg\exists$ z $\bullet$ [x,z] $\in$ $(\sqsupseteq)$[R$'$] $\vee$ [z,x] $\in$ $(\sqsupseteq)$[R$'$] 4140, 5955, 5958

T5960 $\neg\exists$ z $\bullet$ [x,z] $\in$ $(\sqsupseteq)$[R] $\vee$ [x,z] $\in$ $(\sqsupseteq)$[R] 5959, 5957

G5961 $\mathbb{T}$ 4140, 5954, 5958, 5960

A5962 x $\neq$ y

T5963 $\neg\exists$ z $\bullet$ [x,z,y] $\in$ $(\sqsupseteq)$[R$'$] 4140, 5955, 5962

T5964 $\neg\exists$ z $\bullet$ [x,z,y] $\in$ $(\sqsupseteq)$[R] 5963, 5957

G5965 $\mathbb{T}$ . . . 4140, 5954, 5962, 5964

Diese Feststellung liefert die eine Inklusion für das folgende Lemma, das uns erlaubt bei Berechnung der unmittelbaren Nachfolgerrelation Projektionen auf Kens mit Restriktion auf Kens zu vertauschen, sofern wir von einer zyklischen Ordnung ausgehen.

T5966 R ist eine zyklische Ordnung $\Rightarrow$
$\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ $(\prec_{(R \triangleright L)}) = ((\prec_R)|L)$

A5967 R ist eine zyklische Ordnung
VA5968 L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens
G5969 $(\prec_{(R \triangleright L)}) = ((\prec_R)|L)$
T5970∗ $L \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ . . . 0124, 5968
T5971 R ist einfach . . . 5480, 5967
T5972 R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen . . . 5480, 5967
T5973 R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen . . . 5480, 5967
T5974 R ist 3 -vollständig . . . 5480, 5967, 2215
T5975 R ist zyklisch transitiv . . . 5480, 5967
T5976 $\mathcal{A}(R \triangleright L) = L$
  G5977 $\mathcal{A}(R) \cap L = L$ . . . 1710
  T5978 $L \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 1820, 0124, 5968
  G5979 $\mathbb{T}$ . . . 5978
T5980 $(\prec_{(R \triangleright L)}) \subseteq ((\prec_R)|L)$
  G5981 $\forall$ x,y $\bullet$ $x \prec_{(R \triangleright L)} y \Rightarrow x \prec_R y \wedge x \in L \wedge y \in L$
  VA5982 x,y $\bullet$ $x \prec_{(R \triangleright L)} y$
  G5983 $x \prec_R y \wedge x \in L \wedge y \in L$
  T5984∗ $x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A}$ . . . 5982
  T5985 $x \in \mathcal{A}(R \triangleright L) \wedge y \in \mathcal{A}(R \triangleright L)$ . . . 4143, 5982
  T5986 $x \in L \wedge y \in L$ . . . 5976, 5985
  T5987 L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen . . . 0125, 5968
  G5988 $x \prec_R y$ . . . 5986
  A5989 $x = y$
    T5990 $x \prec_{(R \triangleright L)} x$ . . . 5982, 5989
    T5991 $(R \triangleright L)$ ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen . . . 2860, 5972
    T5992 $(R \triangleright L)$ ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen . . . 3823, 5973
    T5993 $\{x\} \in$ ($\underline{\text{li}}$ $(R \triangleright L)$) -Kens . . . 4194, 5991, 5992, 5990
    T5994 $(R \triangleright L)$ ist total . . . 2195, 5987
    T5995 ($\underline{\text{li}}$ $(R \triangleright L)$) -Kens $= \{\mathcal{A}(R \triangleright L)\}$ . . . 2024, 5994
    T5996 $\mathcal{A}(R \triangleright L) = \{x\}$ . . . 5993, 5995
    T5997 $L = \{x\}$ . . . 5976, 5996
    T5998 $\{x\} \in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens . . . 5997, 5968
    T5999 $x \prec_R x$ . . . 4220, 5971, 5972, 5998
    G6000 $\mathbb{T}$ . . . 5989, 5999
  A6001 $x \neq y$
    A6002 $\neg\, x \prec_R y$
    T6003 (x,y) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) . . . 0106, 5987, 5986
    VT6004 $z \in L \bullet [x,z,y] \in R$ 4859, 5971, 5972, 5973, 5974, 5975, 5968, 5986, 6001, 6002
    T6005∗ $z \in \mathbb{A}$ . . . 6004
    T6006 $([x,z,y] \triangleright L) \in (R \triangleright L)$ . . . 1703, 6004
    T6007 $[x,z,y] \in (R \triangleright L)$
      T6008 $\{x,z,y\} \subseteq L$ . . . 5986, 6004
      T6009 $\mathcal{A}([x,z,y]) = \{x,z,y\}$ . . . 0329
      T6010 $\mathcal{A}([x,z,y]) \subseteq L$ . . . 6009, 6008
      T6011 $([x,z,y] \triangleright L) = [x,z,y]$ . . . 0647, 6010
      G6012 $\mathbb{T}$ . . . 6006, 6011
    T6013 $\mathbb{F}$ . . . 4155, 6001, 5982, 6007

T6014 $((\prec_{\mathrm{R}})|\mathrm{L}) \subseteq (\prec_{(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})})$

T6015 $(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L}) \subseteq \mathrm{R}$ . . . 2839, 5972

T6016 $(\prec_{\mathrm{R}}) \cap (\underline{\mathrm{li}}\,(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})) \subseteq (\prec_{(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})})$ . . . 5951, 6015

T6017 $(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})$ ist total . . . 2195, 5987

T6018 $(\underline{\mathrm{li}}\,(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})) = \mathcal{A}(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})^2$ . . . 2020, 6017

T6019 $(\underline{\mathrm{li}}\,(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})) = \mathrm{L}^2$ . . . 5976, 6018

T6020 $(\prec_{\mathrm{R}}) \cap \mathrm{L}^2 \subseteq (\prec_{(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})})$ . . . 6019, 6016

G6021 $\mathbb{T}$ . . . 6020

G6022 $\mathbb{T}$ . . . 5980, 6014

Das angekündigte Haupttheorem zeigt die Eindeutigkeit von Ken-endlichen zyklischen Ordnungen bei fixierter Nachfolger- und Abhängigkeitsrelation. Der Beweis erfolgt durch Zerlegung in endliche totale, zyklische Ordnungen nach Theorem 2066 und Übertragung der Nachfolgerrelation mit Hilfe des vorigen Lemmas. Auf jede einzelne totale, zyklische Ordnung können wir Theorem 4715 anwenden.

T6023 $\forall\, \mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet$
R ist eine zyklische Ordnung $\wedge$ R′ ist eine zyklische Ordnung $\wedge$
R ist Ken-endlich $\wedge$
$(\prec_{\mathrm{R}}) = (\prec_{\mathrm{R}'}) \wedge (\underline{\mathrm{li}}\,\mathrm{R}) = (\underline{\mathrm{li}}\,\mathrm{R}') \Rightarrow \mathrm{R} = \mathrm{R}'$

VA6024∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

A6025 R ist eine zyklische Ordnung

A6026 R′ ist eine zyklische Ordnung

A6027 R ist Ken-endlich

A6028 $(\prec_{\mathrm{R}}) = (\prec_{\mathrm{R}'})$

A6029 $(\underline{\mathrm{li}}\,\mathrm{R}) = (\underline{\mathrm{li}}\,\mathrm{R}')$

G6030 $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$

T6031 $(\underline{\mathrm{li}}\,\mathrm{R})$ -Kens $= (\underline{\mathrm{li}}\,\mathrm{R}')$ -Kens . . . 6029

T6032 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen . . . 5480, 6025

T6033 $\mathrm{R} = \bigcup\{\mathrm{R}'' \bullet \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\,\mathrm{R})\text{ -Kens} \bullet \mathrm{R}'' = (\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})\}$ . . . 2066, 6032

T6034 R′ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen . . . 5480, 6026

T6035 $\mathrm{R}' = \bigcup\{\mathrm{R}'' \bullet \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\,\mathrm{R}')\text{ -Kens} \bullet \mathrm{R}'' = (\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L})\}$ . . . 2066, 6034

G6036 $\bigcup\{\mathrm{R}'' \bullet \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\,\mathrm{R})\text{ -Kens} \bullet \mathrm{R}'' = (\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})\} = \bigcup\{\mathrm{R}'' \bullet \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\,\mathrm{R}')\text{ -Kens} \bullet \mathrm{R}'' = (\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L})\}$
. . . 6033, 6035

G6037 $\forall\, \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\,\mathrm{R})\text{ -Kens} \bullet (\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L}) = (\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L})$ . . . 6031

VA6038 $\mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\,\mathrm{R})$ -Kens

G6039 $(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L}) = (\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L})$

T6040∗ $\mathrm{L} \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ . . . 0124, 6038

T6041 $\mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\,\mathrm{R})$ -Kliquen . . . 0125, 6038

T6042 $(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})$ ist eine totale, zyklische Ordnung . . . 5496, 6025, 6041

T6043 $(\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L})$ ist eine totale, zyklische Ordnung . . . 5496, 6026, 6041

T6044 L ist endlich . . . 2054, 6027, 6038

T6045 $\mathcal{A}(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L}) \subseteq \mathrm{L} \wedge \mathcal{A}(\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L}) \subseteq \mathrm{L}$ . . . 1709

T6046 $\mathcal{A}(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})$ ist endlich $\wedge$ $\mathcal{A}(\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L})$ ist endlich . . . 6044, 6045

T6047 $(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})$ ist einfach $\wedge$ $(\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L})$ ist einfach . . . 3681, 6042, 6043

T6048 $(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})$ ist endlich $\wedge$ $(\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L})$ ist endlich . . . 1300, 6046, 6047

G6049 $(\prec_{(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})}) = (\prec_{(\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L})})$ . . . 4715, 6042, 6043, 6048

T6050 $(\prec_{(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})}) = ((\prec_{\mathrm{R}})|\mathrm{L})$ . . . 5966, 6025, 6038

T6051 $\mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\,\mathrm{R}')$ -Kens . . . 6038, 6031

T6052 $(\prec_{(\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L})}) = ((\prec_{\mathrm{R}'})|\mathrm{L})$ . . . 5966, 6026, 6051

G6053 $((\prec_{\mathrm{R}})|\mathrm{L}) = ((\prec_{\mathrm{R}'})|\mathrm{L})$ . . . 6050, 6052

G6054 $\mathbb{T}$ ... 6028

Das vorige Theorem liefert uns als Nebenprodukt eine erste Abschätzung für die Anzahl der zyklischen Ordnungen auf einer endlichen Menge X. Sei n := |X|. Da zwei binäre Relationen zur eindeutigen Beschreibung ausreichen erhalten wir $|\{R \in \mathcal{R}^*(X) \bullet R$ ist eine zyklische Ordnung$\}| \leq n^2$. Dies laßt sich noch geringfügig verbessern, indem wir Eigenschaften der reflexiven Abhängigkeitsrelation, wie Reflexivität und Symmetrie ausnutzen. Wir werden jedoch später noch auf einem völlig anderen Weg zu einer genaueren Abschätzung gelangen.

7.11 Unabhängigkeit in der Nachbarschaft

In diesem Abschnitt werden wir untersuchen, wie die Relation der Unabhängigkeit (co R) innerhalb der unmittelbaren Nachbarschaft eines Elements, also zwischen unmittelbaren Vorgängern und Nachfolgern, aussieht.

Wir überlegen uns dies zunächst für eine azyklische Ordnung $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$. Die unmittelbare Nachfolgerrelation ist durch $\lessdot_R$ gegeben. Haben wir ein Element x und zwei verschiedene, unmittelbare Nachfolger y und z, so sind y und z unabhängig. Wären sie abhängig, z.B. $y <_R z$, so hätten wir $x <_R y <_R z$, also einen Widerspruch zu unserer Annahme, daß z ein unmittelbarer Nachfolger von x ist.

Haben wir eine zyklische Ordnung vorliegen, so erhält man eine entsprechende Eigenschaft: Wählen wir ein Element x und zwei unmittelbare Nachfolger y und z, so sind diese entweder identisch oder unabhängig. Der Beweis läuft ganz analog ab.

S6055

VA6056* $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

A6057 R ist einfach

A6058 R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen

A6059 R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen

A6060 R ist vollständig

T6061 $x \prec_R y \wedge x \prec_R z \Rightarrow (y,z) \in (\underline{\text{co}}\ R)$

A6062 $x \prec_R y$

A6063 $x \prec_R z$

G6064 $(y,z) \in (\underline{\text{co}}\ R)$

T6065 $x \in \mathcal{A}(R) \wedge y \in \mathcal{A}(R) \wedge z \in \mathcal{A}(R)$ ... 4143, 6062, 4143, 6063

A6066 $y = z$

G6067 $(y,y) \in (\underline{\text{co}}\ R)$ ... 6066

G6068 $\mathbb{T}$ ... 1945, 6065

A6069 $y \neq z$

T6070 $x \neq y$

A6071 $x = y$

T6072 $x \prec_R x$ ... 6071, 6062

T6073 $x = z$ ... 4193, 6058, 6059, 6072, 6063

T6074 $\mathbb{F}$ ... 6071, 6073, 6069

T6075 $x \neq z$

A6076 $x < z$

T6077 $x \prec_R x$ ... 6076, 6063

T6078 $x = y$ ... 4182, 6058, 6059, 6077, 6062

T6079 $\mathbb{F}$ ... 6076, 6078, 6069

G6080 $(y,z) \in (\underline{\text{co}}\ R)$

A6081 $(y,z) \notin (\underline{\text{co}}\ R)$

T6082 $\{x,y,z\} \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen

T6083	$(y,z) \in (\mathrm{li}\ R)$	1960, 6065, 6081
T6084	$(x,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$	4142, 6062
T6085	$(y,z) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$	1821, 6083
T6086	$(x,z) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$	4142, 6063
G6087	$\mathbb{T}$	0113, 1824, 1825, 6084, 6085, 6086
T6088	$\lvert\{x,y,z\}\rvert = 3$	6069, 6070, 6075
T6089	R ist 3 -vollständig	2215, 6060
T6090	$[x,y,z] \in R \vee [z,y,x] \in R$	2346, 6057, 6059, 6089, 6082, 6088
A6091	$[x,y,z] \in R$	
T6092	$\neg\exists\, y \bullet [x,y,z] \in R$	4166, 6057, 6063, 6091
T6093	$\mathbb{F}$	6091, 6092
A6094	$[z,y,x] \in R$	
T6095	$[z,y,x] \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} [x,z,y]$	0501
T6096	$[x,z,y] \in R$	1343, 6059, 6094, 6095
T6097	$\neg\exists\, z \bullet [x,z,y] \in R$	4166, 6057, 6062
T6098	$\mathbb{F}$	6096, 6097

Selbstverständlich gilt eine entsprechende Aussage auch für die Vorgänger y und z eines Elements x. Dies ergibt sich aus der gespiegelten Relation (REV R).

T6099 $y \prec_R x \wedge z \prec_R x \Rightarrow (y,z) \in (\underline{\mathrm{co}}\ R)$

A6100	$y \prec_R x$	
A6101	$z \prec_R x$	
G6102	$(y,z) \in (\underline{\mathrm{co}}\ R)$	
D6103	$R' := (\mathrm{REV}\ R)$	
T6104∗	$R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	6103
T6105	R' ist einfach	6103, 2576, 6057
T6106	R' ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	6103, 2641, 6058
T6107	R' ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	6103, 2648, 6059
T6108	R' ist vollständig	6103, 2696, 6060
T6109	$x \prec_{R'} y$	6103, 4148, 6100
T6110	$x \prec_{R'} z$	6103, 4148, 6101
T6111	$(y,z) \in (\underline{\mathrm{co}}\ R')$	6061, 6105, 6106, 6107, 6108, 6109, 6110
T6112	$(\underline{\mathrm{co}}\ R) = (\underline{\mathrm{co}}\ R')$	6103, 2712
G6113	$\mathbb{T}$	6112, 6111

Hit Hilfe des letzten Theorems können als Nebenprodukt zeigen, daß zwei Schritte der unmittelbaren Nachfolgerrelation zwischen verschiedenen Elementen niemals durch einen Schritt abgedeckt werden können.

T6114 $x \neq y \wedge x \prec_R y \wedge y \prec_R z \Rightarrow \neg\, x \prec_R z$

A6115	$x \neq y$	
A6116	$x \prec_R y$	
A6117	$y \prec_R z$	
A6118	$x \prec_R z$	
T6119	$(x,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$	4142, 6116
T6120	$(x,y) \in (\mathrm{li}\ R)$	1827, 6115, 6119
T6121	$(x,y) \notin (\underline{\mathrm{co}}\ R)$	1994, 6057, 6120
T6122	$(x,y) \in (\underline{\mathrm{co}}\ R)$	6099, 6118, 6117

T6123 $\mathbb{F}$ 6121, 6122

In der Concurrency-Theorie ist die unmittelbare Nachfolgerrelation mit der Flußrelation $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{li}$ vergleichbar, die zur Bildung der mit einer Concurrency-Struktur (X,li,co) assoziierten Petri-Netz-Struktur verwendet wird. Während sich die obigen Resultate bzgl. der Flußrelation in der Concurrency-Theorie auch ergeben, d.h. $\mathrm{F} \odot \mathrm{F}^{-1} \subseteq \underline{\mathrm{co}}$ und $\mathrm{F}^{-1} \odot \mathrm{F} \subseteq \underline{\mathrm{co}}$, gilt dort zusätzlich noch $\mathrm{F} \odot \mathrm{F} \subseteq \mathrm{li}$ und $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^{-1} = \emptyset$ (dies sind Eigenschaften, die Petri von einer konsistenten Orientierung fordert). Die letzten beiden Eigenschaften gelten dagegen bei zyklischen Ordnungen (bzgl. der unmittelbaren Nachfolgerrelation) nicht, wie man aus Beispiel 5487 entnehmen kann. Bei der unmittelbaren Nachfolgerrelation handelt es sich also im allgemeinen nicht um eine konsistente Orientierung im Sinne Petris. Der Grund ist einfach, daß die Allgemeinheit der zyklischen Ordnungen nicht bei der für die Concurrency-Theorie zugeschnittenen speziellen Definition berücksichtigt wurde. In speziellen Fällen in denen Abhängigkeits- und Nachfolgerrelation der zyklischen Ordnung R mit Kausal- und Flußrelation einer Concurrency-Struktur übereinstimmen, ist $(\prec_{\mathrm{R}})$ natürlich eine konsistente Orientierung. Das folgende Beispiel haben wir schon in der Einleitung als Concurrency-Struktur kennengelernt.

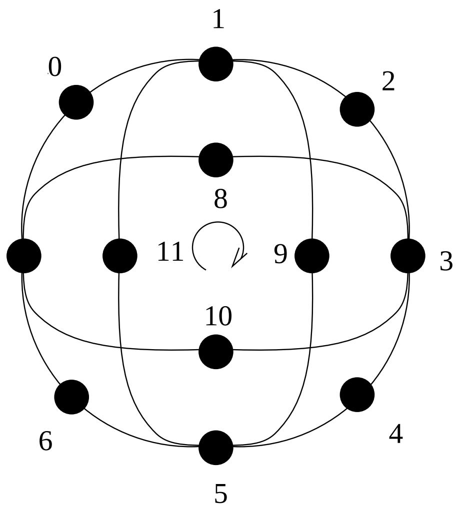


Abbildung 7.25: Die Concurrency-Struktur aus Abb. 1.7 als zyklische Ordnung

B6124

In Abb. 7.25 ist die Concurrency-Struktur aus Abb. 1.7 als eine im Uhrzeigersinn orientierte zyklische Ordnung $\mathrm{R} = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2,3,4,5,6,7], [0,1,2,3,10,7], [1,2,3,4,5,11], [3,4,5,6,7,8], [5,6,7,0,1,9], [1,9,5,11], [3,10,7,8]}] dargestellt. Es gilt $\mathcal{A}(\mathrm{R})$ = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} und aus (li R) erhalten wir die ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kens = {{0,1,2,3,4,5,6,7}, {0,1,2,3,10,7}, {1,2,3,4,5,11}, {3,4,5,6,7,8}, {5,6,7,8,1,9}, {1,9,5,11}, {3,10,7,8}}. Die Relation (co R) = $\updownarrow${(0,1), (0,2), (9,2), (9,3), (9,4), (10,4), (10,5), (10,6), (11,6), (11,7), (11,0), (8,0), (8,9), (9,10), (10,11), (11,8)} ist in Abb. 7.26 gestrichelt dargestellt. Die Relation (li R) ist das irreflexive Komplement von (co R). (co R) und (li R) stimmen mit den Relationen co und li der Concurrency-Struktur überein. Berechnen wir $(\prec_{\mathrm{R}})$ so erhalten wir die in Abb. 7.26 durch Pfeile dargestellte binäre Relation $(\prec_{\mathrm{R}})$ = {(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7), (7,0), (7,8), (8,3), (3,10), (10,7), (1,9), (9,5), (5,11), (11,1)}. Dies ist gerade die Flußrelation F eines mit der Concurrency-Struktur assoziierten Netzes. Man erkennt an diesem Beispiel auch, daß jedem einfachen $(\prec_{\mathrm{R}})$ -Zyklus ein Ken entspricht. Deshalb benötigen wir keine Barrieren in der Darstellung.

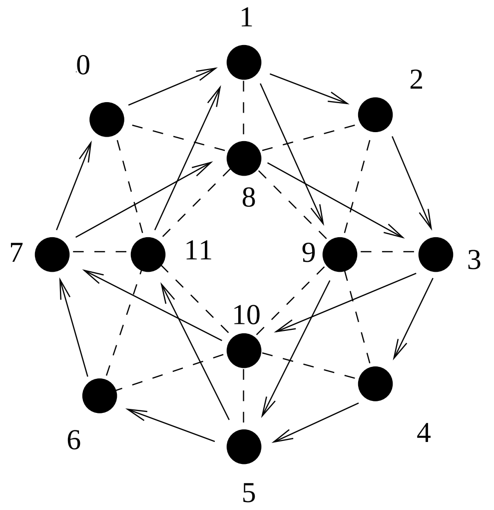


Abbildung 7.26: Die Relation der unmittelbaren Nachfolger und der Unabhängigkeit der zyklischen Ordnung aus Abb. 7.25

7.12 Lokale Regeln für Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Wir werden jetzt studieren, inwieweit in der globalen Abhängigkeitsstruktur einer zyklischen Ordnung lokale Gesetzmäßigkeiten zu erkennen ist. Solche Gesetzmäßigkeiten sind in einer Interpretation als Beobachtungen an Systemen zu erwarten, da sich ein System durch lokale Wechselwirkungen seiner Zustände in der Zeit entwickelt. Gesetzmäßigkeiten sind außerdem wünschenswert, da sie Redundanzen in der Struktur offenlegen und somit möglicherweise Hinweise zu einer kompakteren Darstellung von zyklischen Ordnungen geben.

Unter lokalen Gesetzmäßigkeiten wollen wir solche verstehen, die sich bzgl. der unmittelbaren Nachbarschaft eines Elements formulieren lassen. Die unmittelbare Nachbarschaft umfaßt die unmittelbaren Vorgänger und Nachfolger des Elements. Hierzu werden wir jetzt zwei aus der Netztheorie stammende Abkürzungen einführen.

S6125

VA6126∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $\mathrm{x} \in \mathbb{A}$, $\mathrm{y} \in \mathbb{A}$

Die Menge der unmittelbaren Vorgänger eines Elements x bezeichnen wir als Vormenge ${}^\bullet\mathrm{x}_\mathrm{R}$ von x. Die Menge der unmittelbaren Nachfolger von x nennen wir die Nachmenge $\mathrm{x}^\bullet_\mathrm{R}$ von x.

D6127	${}^\bullet\mathrm{x}_\mathrm{R} := \{\mathrm{y} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}) \bullet \mathrm{y} \prec_\mathrm{R} \mathrm{x}\}$	
D6128	$\mathrm{x}^\bullet_\mathrm{R} := \{\mathrm{y} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}) \bullet \mathrm{x} \prec_\mathrm{R} \mathrm{y}\}$	
T6129∗	${}^\bullet\mathrm{x}_\mathrm{R} \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	6127
T6130∗	$\mathrm{x}^\bullet_\mathrm{R} \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	6128
T6131	$\mathrm{y} \in {}^\bullet\mathrm{x}_\mathrm{R} \Leftrightarrow \mathrm{y} \prec_\mathrm{R} \mathrm{x}$	6127, 4143
T6132	$\mathrm{y} \in \mathrm{x}^\bullet_\mathrm{R} \Leftrightarrow \mathrm{x} \prec_\mathrm{R} \mathrm{y}$	6128, 4143
T6133	$\mathrm{y} \in {}^\bullet\mathrm{x}_\mathrm{R} \Leftrightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{y}^\bullet_\mathrm{R}$	6131, 6132

Damit überhaupt Gesetzmäßigkeiten innerhalb der Nachbarschaft feststellbar sind, werden wir im folgenden zyklische Ordnungen mit endlichen Kens betrachten, da wir in diesem Fall die Existenz von unmittelbaren Vorgängern und Nachfolgern garantieren können. Man sollte sich dabei bewußt sein, daß eine Reihe interessanter Strukturen durch diese Forderung ausgeschlossen werden.

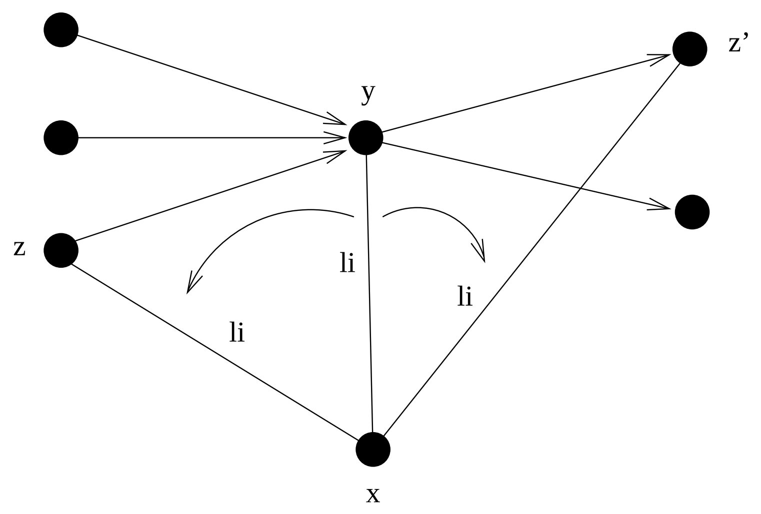


Abbildung 7.27: Ausbreitungsregel für li

Die erste lokale Gesetzmäßigkeit, die wir erkennen, wollen wir als Ausbreitungsregel für (li R) bezeichnen. Wir gehen von einer Abhängigkeitsbeziehung zwischen zwei Elementen x und y aus und stellen fest, daß sich die Abhängigkeit aus der Sicht von x auf einen Vorgänger und einen Nachfolger von y ausbreitet. Dieser Sachverhalt ist beispielhaft in Abb. 7.27 dargestellt.

S6134

VA6135∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

A6136 R ist eine zyklische Ordnung

A6137 R ist Ken-endlich

T6138 $(x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R) \Rightarrow (\exists\, z \in {}^\bullet y_R \bullet (x,z) \in (\underline{\text{li}}\ R)) \wedge (\exists\, z \in y_R^\bullet \bullet (x,z) \in (\underline{\text{li}}\ R))$

A6139 $(x,y) \in (\underline{\text{li}}\ R)$

G6140 $(\exists\, z \in {}^\bullet y_R \bullet (x,z) \in (\underline{\text{li}}\ R)) \wedge (\exists\, z \in y_R^\bullet \bullet (x,z) \in (\underline{\text{li}}\ R))$

T6141 $\{x,y\} \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen . . . 0112, 1824, 1825, 6139

VT6142 $L \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kens $\bullet$ $\{x,y\} \subseteq L$ . . . 0134, 6141

T6143 L ist endlich . . . 2054, 6137, 6142

T6144 $1 \leq |L|$ . . . 6142

T6145 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist zyklisch transitiv . . . 5480, 6136

T6146 R ist 3 -vollständig . . . 5480, 6136, 2215

VT6147 $z \in L \bullet z \prec_R y$ . . . 4907, 6145, 6146, 6142, 6143, 6142

T6148 $z \in {}^\bullet y_R$ . . . 6131, 6147

VT6149 $z' \in L \bullet y \prec_R z'$ . . . 5038, 6145, 6146, 6142, 6143, 6142

T6150 $z' \in y_R^\bullet$ . . . 6132, 6147

T6151 $L \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen . . . 0125, 6142

T6152 $(x,z) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ . . . 0106, 6151, 6142, 6147

T6153 $(x,z') \in (\underline{\text{li}}\ R)$ . . . 0106, 6151, 6142, 6149

G6154 $\top$ . . . 6148, 6152, 6150, 6153

Zwei auf den ersten Blick ganz andere lokale Gesetzmäßigkeiten sind in Abb. 7.28 gezeigt: Wir gehen von zwei Elementen x und y aus. Nun sei x unabhängig von allen Vorgängern von y. Dann läßt sich, wieder aus der Sicht von x, die Unabhängigkeit von den Vorgängern auf y übertragen. Eine entsprechende Regel gilt für die Übertragung der Unabhängigkeit von allen Nachfolgern von y auf y selbst. Fassen wir diese beiden Regeln zu einem Theorem zusammen, so stellen wir fest, daß es sich nur um die logische Umkehrung des vorigen Theorems handelt.

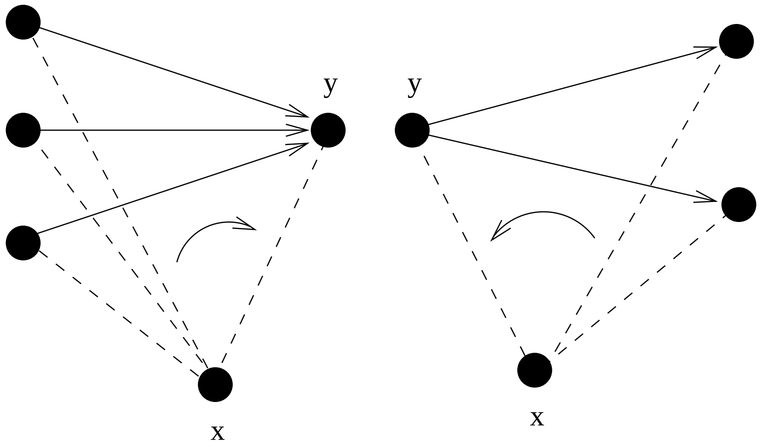


Abbildung 7.28: Ausbreitungsregel für co

S6155

VA6156$*$ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

A6157 R ist eine zyklische Ordnung

A6158 R ist Ken-endlich

T6159 $\forall\ x \in \mathcal{A}(R),\ y \in \mathcal{A}(R) \bullet$
$(\forall\ z \in {}^\bullet y_R \bullet (x,z) \in (\mathrm{co}\ R)) \vee (\forall\ z \in y^\bullet_R \bullet (x,z) \in (\mathrm{co}\ R)) \Rightarrow (x,y) \in (\mathrm{co}\ R)$

VA6160 $x \in \mathcal{A}(R),\ y \in \mathcal{A}(R)$

G6161 $(x,y) \notin (\mathrm{co}\ R) \Rightarrow (\exists\ z \in {}^\bullet y_R \bullet (x,z) \notin (\mathrm{co}\ R)) \wedge (\exists\ z \in y^\bullet_R \bullet (x,z) \notin (\mathrm{co}\ R))$

G6162 $(x,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R) \Rightarrow (\exists\ z \in {}^\bullet y_R \bullet (x,z) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)) \wedge (\exists\ z \in y^\bullet_R \bullet (x,z) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R))$ 1997

G6163 $\mathbb{T}$ 6138, 6157, 6158

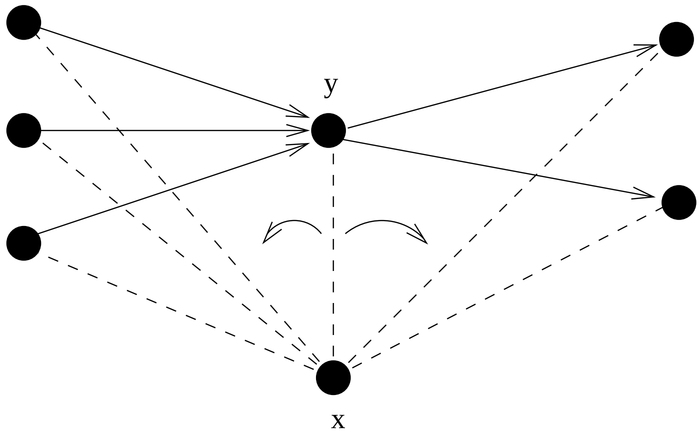


Abbildung 7.29: Eine weitere Ausbreitungsregel für co

Überdenken wir die letzte Regel so stellt sich sofort die Frage, ob nicht auch eine entsprechende Regel mit umgekehrter Ausbreitungsrichtung existiert, wie sie z.B. in Abb. 7.29 angedeutet ist. Unter einer geeigneten Forderung an die Nachbarschaft können wir eine solche Regel in der Tat ableiten. Es werden hier getrennte Theoreme für Vorgänger und Nachfolger angegeben.

S6164

VA6165$*$ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

A6166 R ist eine zyklische Ordnung
A6167 R ist Ken-endlich

Wir gehen wieder von zwei unabhängigen Elementen x und y aus. Als Nebenbedingung fordern wir, daß alle Nachfolger von y nur einen Vorgänger haben (nämlich y selbst). In diesem Fall können wir die Unabhängigkeit wieder aus Sicht von x auf alle Nachfolger ausdehnen.

T6168 $(x,y) \in (\mathrm{co}\ R) \wedge (\forall\, z \in y^\bullet_R \bullet |{}^\bullet z_R| = 1) \Rightarrow \forall\, z \in y^\bullet_R \bullet (x,z) \in (\mathrm{co}\ R)$

A6169	$(x,y) \in (\mathrm{co}\ R)$	
A6170	$\forall\, z \in y^\bullet_R \bullet |{}^\bullet z_R| = 1$	
A6171	$\neg \forall\, z \in y^\bullet_R \bullet (x,z) \in (\mathrm{co}\ R)$	
VT6172	$z \in y^\bullet_R \bullet (x,z) \notin (\mathrm{co}\ R)$	6171
T6173	$x \in \mathcal{A}(R) \wedge y \in \mathcal{A}(R)$	1926, 6169
T6174	$z \in \mathcal{A}(R)$	6130, 6172
T6175	$(x,z) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$	1982, 6173, 6174, 6172
T6176	$|{}^\bullet z_R| = 1$	6170, 6172
T6177	$y \in {}^\bullet z_R$	6133, 6172
T6178	${}^\bullet z_R = \{y\}$	6176, 6177
VT6179	$y' \in {}^\bullet z_R \bullet (x,y') \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$	6138, 6166, 6167, 6175
T6180	$y' = y$	6178, 6179
T6181	$(x,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$	6180, 6179
T6182	$\mathbb{F}$	1992, 6181, 6169

Ganz analog gilt dieses Theorem auch für die Vorgänger, wenn alle nur einen Nachfolger besitzen.

T6183 $(x,y) \in (\mathrm{co}\ R) \wedge (\forall\, z \in {}^\bullet y_R \bullet |z^\bullet_R| = 1) \Rightarrow \forall\, z \in {}^\bullet y_R \bullet (x,z) \in (\mathrm{co}\ R)$

A6184	$(x,y) \in (\mathrm{co}\ R)$	
A6185	$\forall\, z \in {}^\bullet y_R \bullet |z^\bullet_R| = 1$	
A6186	$\neg \forall\, z \in {}^\bullet y_R \bullet (x,z) \in (\mathrm{co}\ R)$	
VT6187	$z \in {}^\bullet y_R \bullet (x,z) \notin (\mathrm{co}\ R)$	6186
T6188	$x \in \mathcal{A}(R) \wedge y \in \mathcal{A}(R)$	1926, 6184
T6189	$z \in \mathcal{A}(R)$	6129, 6187
T6190	$(x,z) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$	1982, 6188, 6189, 6187
T6191	$|z^\bullet_R| = 1$	6185, 6187
T6192	$y \in z^\bullet_R$	6133, 6187
T6193	$z^\bullet_R = \{y\}$	6191, 6192
VT6194	$y' \in z^\bullet_R \bullet (x,y') \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$	6138, 6166, 6167, 6190
T6195	$y' = y$	6193, 6194
T6196	$(x,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$	6195, 6194
T6197	$\mathbb{F}$	1992, 6196, 6184

Alle diese Regeln lassen sich an der zyklischen Ordnung in Beispiel 6124 nachvollziehen. Man betrachte hierzu die Abb. 7.25, in der sowohl die zyklische Ordnung R als auch die unmittelbare Nachfolgerrelation $\prec_R$ und die Unabhängigkeitsrelation (co R) dargestellt sind.

Ausbreitungssätze dieser Gestalt gelten nicht nur bei zyklischen Ordnungen. Die gleichen Aussagen (allerdings mit der azyklischen, unmittelbaren Nachfolgerrelation) sind auch für azyklische Ordnungen ableitbar. Ferner wurden ähnliche Regeln schon im Rahmen der Concurrency-Theorie (siehe *Stehr 1993*) bewiesen. Dort wurde auch der offensichtliche Zusammenhang zum Markenspiel in Netzsystemen erläutert. Insgesamt ist dies ein Indiz dafür, daß diese lokalen Regeln ein wichtiges Merkmal von Ordnungsstrukturen verkörpern.

Abschließend ist noch zu erwähnen, daß unsere Annahme der Endlichkeit aller Kens sehr stark ist und sicherlich noch abgeschwächt werden kann. Man könnte dies z.B. nur für die durch y laufenden Kens fordern oder gar noch schwächere lokale Anforderungen stellen. Diese Möglichkeiten werden wir hier jedoch nicht weiter verfolgen.

Eine andere Form von Ausbreitungsregeln, die ohne Rückgriff auf die unmittelbare Nachfolgerrelation formulierbar ist und damit keinerlei Endlichkeitsannahmen benötigt, hatten wir schon in Theorem 5811 (für (li R)) und in Theorem 5851 (für (co R)) kennengelernt.

7.13 Einschränkung der Wortlänge

Azyklische Ordnungen sind nach Theorem 3568 schon durch Wörter bis zur Länge zwei eindeutig bestimmt. Entsprechendes gilt für totale, zyklische Ordnungen nach 4760, wobei wir allerdings Wörter bis zur Länge drei benötigen. Den Beweis für diese Tatsache haben wir noch nicht ausgeführt. Dieser Abschnitt wird diese wichtige Feststellung auf zyklische Ordnungen ausdehnen und gleichzeitig einen detaillierten Beweis liefern.

Um zu diesem Resultat zu gelangen, benötigen wir eine Reihe von technischen Lemmata für zyklische Ordnungen.

S6198

VA6199∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

A6200 R ist eine zyklische Ordnung

Wir wählen ein mindestens dreistelliges Wort u aus der Relation sowie ein Element x aus dem Alphabet, das in dem Wort nicht vorkommt. Bildet das Wort u zusammen mit dem Element x eine Abhängigkeitsklique, und ist das dreistellige Wort aus dem ersten und letzten Element von u und dem Element x in der Relation, so können wir u um x verlängern und erhalten wieder ein Wort der Relation. Diese Lemma gestattet es uns, von dreielementigen Wörtern ausgehend sukzessive auf die Existenz von längeren Wörtern zu schließen.

T6201 $\forall\, \mathrm{u} \in \mathbb{A}^*, \mathrm{x} \in \mathbb{A} \bullet \mathrm{u} \in \mathrm{R} \wedge 3 \leq \mathcal{L}(\mathrm{u}) \wedge \mathrm{x} \notin \mathcal{A}(\mathrm{u}) \wedge \mathcal{A}(\mathrm{u}) \cup \{\mathrm{x}\} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen $\wedge$ $[\mathrm{u}_0, \mathrm{u}_{\mathcal{L}(\mathrm{u})-1}, \mathrm{x}] \in \mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{u} * [\mathrm{x}] \in \mathrm{R}$

VA6202∗ $\mathrm{u} \in \mathbb{A}^*, \mathrm{x} \in \mathbb{A}$
A6203 $\mathrm{u} \in \mathrm{R}$
A6204 $3 \leq \mathcal{L}(\mathrm{u})$
A6205 $\mathrm{x} \notin \mathcal{A}(\mathrm{u})$
A6206 $\mathcal{A}(\mathrm{u}) \cup \{\mathrm{x}\} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen
A6207 $[\mathrm{u}_0, \mathrm{u}_{\mathcal{L}(\mathrm{u})-1}, \mathrm{x}] \in \mathrm{R}$
G6208 $\mathrm{u} * [\mathrm{x}] \in \mathrm{R}$
VT6209 $\mathrm{v}' \in \mathrm{R}, \mathrm{u}' \in \mathbb{A}^*, \mathrm{u}'' \in \mathbb{A}^* \bullet \mathrm{v}' = \mathrm{u}' * [\mathrm{x}] * \mathrm{u}'' \wedge \mathrm{u} = \mathrm{u}' * \mathrm{u}'' \wedge 0 < \mathcal{L}(\mathrm{u}')$
VT6210 $\mathrm{v} \in \mathrm{R} \bullet \mathcal{A}(\mathrm{v}) = \mathcal{A}(\mathrm{u}) \cup \{\mathrm{x}\}$
T6211 R ist vollständig . . . 5480, 6200
T6212 $\mathcal{A}(\mathrm{u}) \cup \{\mathrm{x}\}$ ist endlich
G6213 $\mathbb{T}$ . . . 2209, 6211, 6206, 6212
T6214 $\mathcal{A}(\mathrm{u}) \subset \mathcal{A}(\mathrm{v})$ . . . 6210, 6205
T6215 $\mathrm{u} \overset{\mathrm{rot}}{\approx} \mathrm{v}$
T6216 R ist konsistent modulo ($\overset{\mathrm{rot}}{\equiv}$) . . . 5482, 6200
G6217 $\mathbb{T}$ . . . 1547, 6216, 6203, 6210
T6218 $\mathrm{u} \overset{\mathrm{rot}}{\sqsubseteq} \mathrm{v}$ . . . 1189, 6214, 6215
VT6219 $\mathrm{v}' \bullet \mathrm{u} \sqsubseteq \mathrm{v}' \wedge \mathrm{v}' \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} \mathrm{v}$ . . . 0696, 6218
T6220∗ $\mathrm{v}' \in \mathbb{A}^*$ . . . 6219
T6221 $3 \leq \mathcal{L}(\mathrm{v}')$
T6222 $\mathcal{L}(\mathrm{u}) \leq \mathcal{L}(\mathrm{v}')$ . . . 0570, 6219
G6223 $\mathbb{T}$ . . . 6204, 6222

T6224	R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	5480, 6200
T6225	$\mathrm{v} \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} \mathrm{v}'$	0513, 6219
T6226	$\mathcal{A}(\mathrm{v}) = \mathcal{A}(\mathrm{v}')$	0519, 6225
T6227	$\mathrm{v}' \in \mathrm{R}$	1343, 6224, 6210, 6225
VT6228	$\mathrm{u}' \in \mathbb{A}^*, \mathrm{u}'' \in \mathbb{A}^* \bullet \mathrm{v}' = \mathrm{u}' * [\mathrm{x}] * \mathrm{u}'' \wedge \mathrm{u} = \mathrm{u}' * \mathrm{u}''$	
T6229	R ist einfach	5480, 6200
T6230	u ist einfach	1279, 6229, 6203
T6231	v' ist einfach	1279, 6229, 6227
T6232	$\mathcal{A}(\mathrm{v}') = \mathcal{A}(\mathrm{u}) \cup \{\mathrm{x}\}$	6226, 6210
G6233	$\mathbb{T}$	0592, 6230, 6231, 6219, 6205, 6232
T6234$*$	$\mathrm{u}' \in \mathbb{A}^* \wedge \mathrm{u}'' \in \mathbb{A}^*$	6228
A6235	$0 < \mathcal{L}(\mathrm{u}')$	
G6236	$\mathrm{v}' \in \mathrm{R} \wedge \mathrm{v}' = \mathrm{u}' * [\mathrm{x}] * \mathrm{u}'' \wedge \mathrm{u} = \mathrm{u}' * \mathrm{u}'' \wedge 0 < \mathcal{L}(\mathrm{u}')$	
G6237	$\mathbb{T}$	6227, 6228, 6235
A6238	$\mathcal{L}(\mathrm{u}') = 0$	
T6239	$\mathrm{u}' = []$	0258, 6238
T6240	$\mathrm{v}' = [] * [\mathrm{x}] * \mathrm{u}''$	6228, 6239
T6241	$\mathrm{v}' = [\mathrm{x}] * \mathrm{u}''$	6240, 0405
T6242	$\mathrm{u} = [] * \mathrm{u}''$	6228, 6239
T6243	$\mathrm{u} = \mathrm{u}''$	6242, 0405
D6244	$\mathrm{v}'' := (\mathrm{v}' \gg (-\,1))$	
T6245$*$	$\mathrm{v}'' \in \mathbb{A}^*$	6244
T6246	$\mathrm{v}'' \in \mathrm{R}$	
T6247	$\mathrm{v}'' \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} \mathrm{v}'$	6244, 0491
T6248	$\mathrm{v}' \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} \mathrm{v}''$	0513, 6247
G6249	$\mathbb{T}$	6224, 1343, 6227, 6248
T6250	$\mathrm{v}'' = \mathrm{ROL}\ \mathrm{v}'$	6244, 0475, 0218
T6251	$\mathrm{v}'' = \mathrm{u}'' * [\mathrm{x}]$	6250, 6241, 0470
T6252	$\mathrm{v}'' = \mathrm{u}'' * [\mathrm{x}] * []$	6251, 0411
T6253	$0 < \mathcal{L}(\mathrm{u}'')$	
T6254	$\mathcal{L}(\mathrm{u}) = \mathcal{L}(\mathrm{u}'')$	6243
G6255	$\mathbb{T}$	6254, 6204
G6256	$\mathrm{v}'' \in \mathrm{R} \wedge \mathrm{v}'' = \mathrm{u}'' * [\mathrm{x}] * [] \wedge \mathrm{u} = [] * \mathrm{u}'' \wedge 0 < \mathcal{L}(\mathrm{u}'')$	
G6257	$\mathbb{T}$	6246, 6252, 6242, 6253
T6258$*$	$\mathrm{v}' \in \mathbb{A}^* \wedge \mathrm{u}' \in \mathbb{A}^* \wedge \mathrm{u}'' \in \mathbb{A}^*$	6209
T6259	$\mathrm{v}' = \mathrm{u}' * [\mathrm{x}] * \mathrm{u}''$	6209
T6260	$\mathrm{u} = \mathrm{u}' * \mathrm{u}''$	6209
T6261	$0 < \mathcal{L}(\mathrm{u}')$	6209
D6262	$\mathrm{i} := \mathcal{L}(\mathrm{u}')$	
T6263$*$	$\mathrm{i} \in \mathbb{N}$	6262
T6264	$\mathcal{L}(\mathrm{v}') = \mathcal{L}(\mathrm{u}') + \mathcal{L}(\mathrm{u}'') + 1$	6259, 0413, 0307
T6265	$\mathcal{L}(\mathrm{u}) = \mathcal{L}(\mathrm{u}') + \mathcal{L}(\mathrm{u}'')$	6260, 0413
T6266	$\mathrm{i} < \mathcal{L}(\mathrm{v}')$	6262, 6264
T6267	$\mathrm{i} \in \mathcal{I}(\mathrm{v}')$	0298, 6266
T6268	$\mathrm{v}'_{\mathrm{i}} = \mathrm{x}$	
G6269	$(\mathrm{u}' * [\mathrm{x}] * \mathrm{u}'')_{\mathcal{L}(\mathrm{u}')} = \mathrm{x}$	6259, 6262
T6270	$\mathcal{L}(\mathrm{u}') \in \mathcal{I}(\mathrm{u}' * [\mathrm{x}] * \mathrm{u}'')$	6259, 0215, 6267
G6271	$([\mathrm{x}] * \mathrm{u}'')_0 = \mathrm{x}$	0416, 6270
G6272	$\mathbb{T}$	0417
A6273	$0 < \mathrm{i} \wedge \mathrm{i} < \mathcal{L}(\mathrm{v}') - 1$	
T6274	$0 < \mathcal{L}(\mathrm{u}')$	6262, 6273
T6275	$0 < \mathcal{L}(\mathrm{u}'')$	
T6276	$\mathcal{L}(\mathrm{u}') < \mathcal{L}(\mathrm{u}') + \mathcal{L}(\mathrm{u}'')$	6273, 6262, 6264
G6277	$\mathbb{T}$	6276
T6278	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	5480, 6200
T6279	$[\mathrm{v}'_0, \mathrm{v}'_{\mathrm{i}}, \mathrm{v}'_{\mathcal{L}(\mathrm{v}') - 1}] \sqsubseteq \mathrm{v}'$	

T6280	$0 \in \mathcal{I}(\mathrm{v}')$	0298, 6221
T6281	$\mathcal{L}(\mathrm{v}') - 1 \in \mathcal{I}(\mathrm{v}')$	0298, 6221
G6282	$\mathbb{T}$	0585, 6280, 6267, 6281, 6273
T6283	$[\mathrm{v}'_0, \mathrm{v}'_\mathrm{i}, \mathrm{v}'_{\mathcal{L}(\mathrm{v}') - 1}] \in \mathrm{R}$	1315, 6278, 6227, 6279
T6284	$[\mathrm{v}'_0, \mathrm{x}, \mathrm{v}'_{\mathcal{L}(\mathrm{v}') - 1}] \in \mathrm{R}$	6268, 6283
T6285	$\mathrm{v}'_0 = \mathrm{u}_0$	
G6286	$(\mathrm{u}' * [\mathrm{x}] * \mathrm{u}'')_0 = (\mathrm{u}' * \mathrm{u}'')_0$	6228
T6287	$(\mathrm{u}' * [\mathrm{x}] * \mathrm{u}'')_0 = \mathrm{u}'_0$	0415, 6274
T6288	$(\mathrm{u}' * \mathrm{u}'')_0 = \mathrm{u}'_0$	0415, 6274
G6289	$\mathbb{T}$	6287, 6288
T6290	$\mathrm{v}'_{\mathcal{L}(\mathrm{v}') - 1} = \mathrm{u}_{\mathcal{L}(\mathrm{u}) - 1}$	
G6291	$(\mathrm{u}' * [\mathrm{x}] * \mathrm{u}'')_{\mathcal{L}(\mathrm{v}') - 1} = (\mathrm{u}' * \mathrm{u}'')_{\mathcal{L}(\mathrm{u}) - 1}$	6228
T6292	$\mathcal{L}(\mathrm{v}') - 1 \in \mathcal{I}(\mathrm{u}' * [\mathrm{x}] * \mathrm{u}'')$	
T6293	$0 \leq \mathcal{L}(\mathrm{v}') - 1$	6264
T6294	$\mathcal{L}(\mathrm{v}') - 1 < \mathcal{L}([\mathrm{u}' * [\mathrm{x}] * \mathrm{u}''])$	6259
G6295	$\mathbb{T}$	0298, 6293, 6294
T6296	$\mathcal{L}(\mathrm{u}' * [\mathrm{x}]) \leq \mathcal{L}(\mathrm{v}') - 1$	
G6297	$\mathcal{L}(\mathrm{u}') + \mathcal{L}([\mathrm{x}]) \leq \mathcal{L}(\mathrm{v}') - 1$	0413
G6298	$\mathcal{L}(\mathrm{u}') + 1 \leq \mathcal{L}(\mathrm{u}') + \mathcal{L}(\mathrm{u}'')$	0301, 6264
G6299	$1 \leq \mathcal{L}(\mathrm{u}'')$	
G6300	$\mathbb{T}$	6275
T6301	$\mathcal{L}(\mathrm{u}) - 1 \in \mathcal{I}(\mathrm{u}' * \mathrm{u}'')$	
T6302	$0 \leq \mathcal{L}(\mathrm{u}) - 1$	6265, 6261
T6303	$\mathcal{L}(\mathrm{u}) - 1 < \mathcal{L}(\mathrm{u}' * \mathrm{u}'')$	6260
G6304	$\mathbb{T}$	0298, 6302, 6303
T6305	$\mathcal{L}(\mathrm{u}') \leq \mathcal{L}(\mathrm{u}) - 1$	
G6306	$\mathcal{L}(\mathrm{u}') \leq \mathcal{L}(\mathrm{u}') + \mathcal{L}(\mathrm{u}'') - 1$	6228, 0413
G6307	$0 \leq \mathcal{L}(\mathrm{u}'') - 1$	
G6308	$\mathbb{T}$	6275
G6309	$\mathrm{u}''_{\mathcal{L}(\mathrm{v}') - 1 - \mathcal{L}(\mathrm{u}' * [\mathrm{x}])} = \mathrm{u}''_{\mathcal{L}(\mathrm{u}) - 1 - \mathcal{L}(\mathrm{u}')}$	0416, 6292, 6296, 0416, 6301, 6305
G6310	$\mathrm{u}''_{\mathcal{L}(\mathrm{v}') - \mathcal{L}(\mathrm{u}') - 2} = \mathrm{u}''_{\mathcal{L}(\mathrm{u}) - \mathcal{L}(\mathrm{u}') - 1}$	0413, 0307
G6311	$\mathrm{u}''_{\mathcal{L}(\mathrm{u}'') - 1} = \mathrm{u}''_{\mathcal{L}(\mathrm{u}'') - 1}$	6264, 6265
G6312	$\mathcal{L}(\mathrm{u}'') - 1 \in \mathcal{I}(\mathrm{u}'')$	
T6313	$0 \leq \mathcal{L}(\mathrm{u}'') - 1$	6275
T6314	$\mathcal{L}(\mathrm{u}'') - 1 < \mathcal{L}(\mathrm{u}'')$	
G6315	$\mathbb{T}$	0298, 6313, 6314
T6316	$[\mathrm{v}'_0, \mathrm{v}'_{\mathcal{L}(\mathrm{v}') - 1}, \mathrm{x}] \in \mathrm{R}$	6207, 6285, 6290
T6317	R ist konsistent modulo $(\stackrel{\mathrm{rot}}{\equiv})$	5482, 6200
T6318	$[\mathrm{v}'_0, \mathrm{x}, \mathrm{v}'_{\mathcal{L}(\mathrm{v}') - 1}] \stackrel{\mathrm{rot}}{\sim} [\mathrm{v}'_0, \mathrm{v}'_{\mathcal{L}(\mathrm{v}') - 1}, \mathrm{x}]$	1547, 6317, 6284, 6316
T6319	$\mathbb{F}$	6318, 1223
A6320	$\mathrm{i} = \mathcal{L}(\mathrm{v}') - 1$	
G6321	$\mathrm{v}' = \mathrm{u} * [\mathrm{x}]$	6209
T6322	$\mathrm{u}'' = []$	
G6323	$\mathcal{L}(\mathrm{u}'') = 0$	0258
T6324	$\mathcal{L}(\mathrm{v}') = \mathcal{L}(\mathrm{u}') + 1$	6320, 6262
T6325	$\mathcal{L}(\mathrm{u}') + 1 = \mathcal{L}(\mathrm{u}') + \mathcal{L}(\mathrm{u}'') + 1$	6264, 6324
G6326	$\mathbb{T}$	6325
T6327	$\mathrm{v}' = \mathrm{u}' * [\mathrm{x}]$	6259, 6322, 0411
T6328	$\mathrm{u}' = \mathrm{u}$	6260, 6322, 0411
G6329	$\mathbb{T}$	6327, 6328
A6330	$\mathrm{i} = 0$	
T6331	$\mathbb{F}$	6330, 6262, 6261

Sind alle zweistelligen Teilwörter eines Wortes in der Relation und damit einfach, so ist das Wort selbst einfach.

T6332 $\forall\, u \in \mathbb{A}^* \bullet (\forall\, u' \in \mathbb{A}^* \bullet \mathcal{L}(u') \leq 2 \wedge u' \sqsubseteq u \Rightarrow u' \in R) \Rightarrow$ u ist einfach . . . 0577, 1279, 5480, 6166

Ähnliches gilt für die Eigenschaft eines Wortes Abhängigkeitsklique zu sein: Sind alle zweistelligen Teilwörter in der Relation, so ist das Alphabet eines Wortes eine Abhängigkeitsklique, da die Abhängigkeitsrelation schon durch die zweistelligen Wörter gegeben ist.

T6333 $\forall\, u \in \mathbb{A}^* \bullet (\forall\, u' \in \mathbb{A}^* \bullet \mathcal{L}(u') \leq 2 \wedge u' \sqsubseteq u \Rightarrow u' \in R) \Rightarrow \mathcal{A}(u) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen

VA6334∗ $u \in \mathbb{A}^*$
A6335 $\forall\, u' \in \mathbb{A}^* \bullet \mathcal{L}(u') \leq 2 \wedge u' \sqsubseteq u \Rightarrow u' \in R$
G6336 $\mathcal{A}(u) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen
G6337 $\forall\, x \in \mathcal{A}(u), y \in \mathcal{A}(u) \bullet (x,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ . . . 0106
VA6338 $x \in \mathcal{A}(u), y \in \mathcal{A}(u)$
G6339 $(x,y) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$
G6340 $\exists\, w \in R \bullet x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$ . . . 1834
VT6341 $i \in \mathcal{I}(u) \bullet u_i = x$ . . . 0356, 6338
VT6342 $j \in \mathcal{I}(u) \bullet u_j = y$ . . . 0356, 6338
D6343 $u' := (u \lhd \{i,j\})$
T6344∗ $u' \in \mathbb{A}^*$ . . . 6343
T6345 $u' \sqsubseteq u$ . . . 6343, 0624
T6346 $\{i,j\} \subseteq \mathcal{I}(u)$ . . . 6341, 6342
T6347 $\mathcal{L}(u') = |\{i,j\}|$ . . . 6343, 0621, 6346
T6348 $|\{i,j\}| \leq 2$
T6349 $\mathcal{L}(u') \leq 2$ . . . 6347, 6348
T6350 $u' \in R$ . . . 6335, 6349, 6345
T6351 $x \in \mathcal{A}(u')$ . . . 6343, 6341, 0620, 6341
T6352 $y \in \mathcal{A}(u')$ . . . 6343, 6342, 0620, 6342
G6353 $\mathbb{T}$ . . . 6350, 6351, 6352

Nun folgt ein letztes Lemma, das sich im wesentlichen durch Induktion aus Lemma 6201 ergibt. Wir schließen von dreistelligen Wörtern der Relation auf die Existenz längerer Wörter. Wir wählen ein beliebiges Wort, von dem wir nur annehmen, daß alle höchstens dreistelligen Teilwörter schon in der Relation sind. Dann ist auch das gewählte Wort in der Relation enthalten.

T6354 $\forall\, u \in \mathbb{A}^* \bullet (\ \forall\, u' \in \mathbb{A}^* \bullet \mathcal{L}(u') \leq 3 \wedge u' \sqsubseteq u \Rightarrow u' \in R\ ) \Rightarrow u \in R$

VA6355∗ $u \in \mathbb{A}^*$
A6356 $\forall\, u' \in \mathbb{A}^* \bullet \mathcal{L}(u') \leq 3 \wedge u' \sqsubseteq u \Rightarrow u' \in R$
G6357 $u \in R$
A6358 $\mathcal{L}(u) \leq 3$
  T6359 $u \sqsubseteq u$ . . . 0561
  T6360 $u \in R$ . . . 6356, 6358, 6359
  G6361 $\mathbb{T}$ . . . 6360
A6362 $3 < \mathcal{L}(u)$
  T6363 u ist einfach . . . 6332, 6356
  T6364 $\mathcal{A}(u) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen . . . 6333, 6356
  T6365 $\forall\, n \in \mathbb{N} \bullet 3 \leq n \wedge n \leq \mathcal{L}(u) \Rightarrow u \lhd [0 \ldots n) \in R$
    T6366 $3 \leq 0 \wedge 0 \leq \mathcal{L}(u) \Rightarrow u \lhd [0 \ldots n) \in R$
      G6367 $\mathbb{T}$
    T6368 $\forall\, n \in \mathbb{N} \bullet$
    $(\ 3 \leq n \wedge n \leq \mathcal{L}(u) \Rightarrow u \lhd [0 \ldots n) \in R\ ) \Rightarrow$
    $(\ 3 \leq n+1 \wedge n+1 \leq \mathcal{L}(u) \Rightarrow u \lhd [0 \ldots n+1) \in R\ )$
      VA6369∗ $n \in \mathbb{N}$
      D6370 $u' := u \lhd [0 \ldots n)$
      T6371∗ $u' \in \mathbb{A}^*$ . . . 6370
      A6372 $3 \leq n \wedge n \leq \mathcal{L}(u) \Rightarrow u' \in R$

A6373	$3 \leq \mathrm{n} + 1 \wedge \mathrm{n} + 1 \leq \mathcal{L}(\mathrm{u})$	
D6374	$\mathrm{u}'' := \mathrm{u} \triangleleft [0 \ldots \mathrm{n} + 1)$	
T6375$*$	$\mathrm{u}'' \in \mathbb{A}^*$	6374
G6376	$\mathrm{u}'' \in \mathrm{R}$	
T6377	$\mathrm{u}'' \sqsubseteq \mathrm{u}$	6374, 0624
A6378	$\mathrm{n} = 2$	
T6379	$\mathrm{u}'' = \mathrm{u} \triangleleft \{0,1,2\}$	6374, 6378
T6380	$\{0,1,2\} \subseteq \mathcal{I}(\mathrm{u})$	0299, 6358
T6381	$\mathcal{L}(\mathrm{u}'') = 3$	6379, 0621, 6380
G6382	$\mathbb{T}$	6356, 6381, 6377
A6383	$\mathrm{n} \neq 2$	
T6384	$3 \leq \mathrm{n}$	6373, 6383
T6385	$\mathrm{n} + 1 \leq \mathcal{L}(\mathrm{u})$	6373
T6386	$\mathrm{n} \leq \mathcal{L}(\mathrm{u}) - 1$	6385
T6387	$\mathrm{u}' \in \mathrm{R}$	6372, 6384, 6386
T6388	$4 \leq \mathcal{L}(\mathrm{u})$	6384, 6385
T6389	$\mathcal{I}(\mathrm{u}) = [0 \ldots \mathcal{L}(\mathrm{u}))$	0299
T6390	$[0 \ldots \mathrm{n} + 1) \subseteq \mathcal{I}(\mathrm{u})$	6389, 6385
T6391	$[0 \ldots \mathrm{n}) \subset [0 \ldots \mathrm{n} + 1)$	
T6392	$[0 \ldots \mathrm{n}) \subseteq \mathcal{I}(\mathrm{u})$	6391, 6390
T6393	$[0 \ldots 4) \subseteq \mathcal{I}(\mathrm{u})$	6389, 6388
T6394	$\mathcal{A}(\mathrm{u}') \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{u})$	6370, 0625
T6395	$\mathcal{L}(\mathrm{u}') = \mathrm{n}$	6370, 0621, 6392
T6396	$3 \leq \mathcal{L}(\mathrm{u}')$	6395, 6384
T6397	$\mathcal{I}(\mathrm{u}') = [0 \ldots \mathcal{L}(\mathrm{u}'))$	0299
T6398	$\mathcal{I}(\mathrm{u}') = [0 \ldots \mathrm{n})$	6397, 6395
T6399	$[0 \ldots 3) \subseteq \mathcal{I}(\mathrm{u}')$	6397, 6396
T6400	$\mathcal{L}(\mathrm{u}') - 1 \in \mathcal{I}(\mathrm{u}')$	0298, ?3255
T6401	$\mathcal{A}(\mathrm{u}'') \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{u})$	6374, 0625
T6402	$\mathcal{L}(\mathrm{u}'') = \mathrm{n} + 1$	6374, 0621, 6390
T6403	$4 \leq \mathcal{L}(\mathrm{u}'')$	6402, 6384
T6404	$\mathcal{I}(\mathrm{u}'') = [0 \ldots \mathcal{L}(\mathrm{u}''))$	0299
T6405	$\mathcal{I}(\mathrm{u}'') = [0 \ldots \mathrm{n} + 1)$	6404, 6402
T6406	$\mathcal{I}(\mathrm{u}') \subset \mathcal{I}(\mathrm{u}'')$	6398, 6405, 6391
T6407	$[0 \ldots 4) \subseteq \mathcal{I}(\mathrm{u}'')$	6404, 6403
T6408	$0 \in \mathcal{I}(\mathrm{u}'')$	6407
T6409	$\mathcal{L}(\mathrm{u}') + 1 = \mathcal{L}(\mathrm{u}'')$	6395, 6402
T6410	$\mathcal{L}(\mathrm{u}') < \mathcal{L}(\mathrm{u}'')$	6409
T6411	$\mathcal{L}(\mathrm{u}'') - 1 \in \mathcal{I}(\mathrm{u}'')$	0298, 6403
T6412	$\mathcal{L}(\mathrm{u}') - 1 \in \mathcal{I}(\mathrm{u}'')$	6400, 6406
D6413	$\mathrm{x} := \mathrm{u}''_{\mathcal{L}(\mathrm{u}'') - 1}$	
T6414$*$	$\mathrm{x} \in \mathbb{A}$	6413, 6411
T6415	$[\mathrm{x}] = \mathrm{u}'' \triangleleft [\mathcal{L}(\mathrm{u}'') - 1 \ldots \mathcal{L}(\mathrm{u}''))$	6413, 0631, 6411
T6416	$\mathrm{u}' = \mathrm{u}'' \triangleleft [0 \ldots \mathrm{n})$	6370, 6374, 0632
T6417	$[\mathrm{x}] = \mathrm{u}'' \triangleleft [\mathrm{n} \ldots \mathcal{L}(\mathrm{u}''))$	6415, 6402
T6418	$\mathrm{u}'' = \mathrm{u}' * [\mathrm{x}]$	0630, 6416, 6417
T6419	$\mathrm{x} \notin \mathcal{A}(\mathrm{u}')$	
T6420	u'' ist einfach	0576, 6363, 6377
T6421	$\forall\, \mathrm{j} \in \mathcal{I}(\mathrm{u}'') \bullet \mathrm{j} \neq \mathcal{L}(\mathrm{u}'') - 1 \Rightarrow \mathrm{u}''_{\mathrm{j}} \neq \mathrm{x}$	0372, 6420, 6411
T6422	$\forall\, \mathrm{j} \in \mathcal{I}(\mathrm{u}'') \bullet \mathrm{j} < \mathcal{L}(\mathrm{u}'') - 1 \Rightarrow \mathrm{u}''_{\mathrm{j}} \neq \mathrm{x}$	6421, 0298
T6423	$\forall\, \mathrm{j} \in [0 \ldots \mathrm{n} + 1) \bullet \mathrm{j} < \mathrm{n} \Rightarrow \mathrm{u}''_{\mathrm{j}} \neq \mathrm{x}$	6405, 6402, 6422
T6424	$\forall\, \mathrm{j} \in [0 \ldots \mathrm{n}) \bullet \mathrm{u}''_{\mathrm{j}} \neq \mathrm{x}$	6423
T6425	$\forall\, \mathrm{j} \in \mathcal{I}(\mathrm{u}'') \bullet \mathrm{j} < \mathrm{n} \Rightarrow \mathrm{u}'_{\mathrm{j}} = \mathrm{u}''_{\mathrm{j}}$	6416, 0629
T6426	$\forall\, \mathrm{j} \in [0 \ldots \mathrm{n} + 1) \bullet \mathrm{j} < \mathrm{n} \Rightarrow \mathrm{u}'_{\mathrm{j}} = \mathrm{u}''_{\mathrm{j}}$	6405, 6425
T6427	$\forall\, \mathrm{j} \in [0 \ldots \mathrm{n}) \bullet \mathrm{u}'_{\mathrm{j}} = \mathrm{u}''_{\mathrm{j}}$	6426
T6428	$\forall\, \mathrm{j} \in [0 \ldots \mathrm{n}) \bullet \mathrm{u}'_{\mathrm{j}} \neq \mathrm{x}$	6424, 6427

T6429 $\forall\, j \in \mathcal{I}(u') \bullet u'_j \neq x$ 6428, 6398
G6430 $\mathbb{T}$ 6429, 0356
T6431 $\mathcal{A}(u') \cup \{x\} \in (\underline{li}\ R)$ -Kliquen
T6432 $u''_{\mathcal{L}(u'')\,-\,1} \in \mathcal{A}(u'')$ 0350, 6411
T6433 $x \in \mathcal{A}(u)$ 6413, 6432, 6401
T6434 $\mathcal{A}(u') \cup \{x\} \subseteq \mathcal{A}(u)$ 6394, 6433
G6435 $\mathbb{T}$ 0117, 6364, 6434
T6436 $0 \in \mathcal{I}(u')$ 6399
D6437 $w := [u'_0, u'_{\mathcal{L}(u')\,-\,1}, x]$
T6438∗ $w \in \mathbb{A}^*$ 6437, 0269, 6436, 6400
T6439 $\mathcal{L}(w) = 3$ 6437, 0309, 6436, 6400
T6440 $w = [u''_0, u''_{\mathcal{L}(u')\,-\,1}, u''_{\mathcal{L}(u'')\,-\,1}]$
T6441 $0 < n$ 6384
T6442 $u''_0 = u'_0$ 6416, 0629, 6408, 6441
T6443 $\mathcal{L}(u') - 1 < n$ 6395
T6444 $u''_{\mathcal{L}(u')\,-\,1} = u'_{\mathcal{L}(u')\,-\,1}$ 6416, 0629, 6412, 6443
G6445 $\mathbb{T}$ 6437, 6442, 6444, 6413
T6446 $w \sqsubseteq u''$
T6447 $0 < \mathcal{L}(u') - 1$ 6396
T6448 $\mathcal{L}(u') - 1 < \mathcal{L}(u'') - 1$ 6410
G6449 $\mathbb{T}$ 0585, 6440, 6408, 6412, 6411, 6447, 6448
T6450 $u'' \sqsubseteq u$ 6374, 0624
T6451 $w \sqsubseteq u$ 0564, 6446, 6450
T6452 $w \in R$ 6356, 6439, 6451
T6453 $u' * [x] \in R$ 6201, 6387, 6396, 6419, 6431, 6437, 6452
G6454 $\mathbb{T}$ 6453, 6418
G6455 $\mathbb{T}$ 6366, 6368
T6456 $u \lhd [0 \ldots \mathcal{L}(u)) \in R$ 6365, 6362
T6457 $u \in R$ 6456, 0617
G6458 $\mathbb{T}$ 6457

Sind für zwei beliebige zyklische Ordnungen die Einschränkungen auf höchstens dreistellige Wörter durch Inklusion geordnet, so überträgt sich diese Ordnung monoton auf die Relationen selbst. Diese ist eine unmittelbare Folgerung aus dem vorigen Lemma.

T6459 $\forall\, R, R' \bullet R$ ist eine zyklische Ordnung $\wedge\ R'$ ist eine zyklische Ordnung $\wedge$
$(R|3) \subseteq (R'|3) \Rightarrow R \subseteq R'$

VA6460∗ $R \bullet R$ ist eine zyklische Ordnung
VA6461∗ $R' \bullet R'$ ist eine zyklische Ordnung
A6462 $(R|3) \subseteq (R'|3)$
G6463 $R \subseteq R'$
G6464 $\forall\, u \in R \bullet u \in R'$
VA6465 $u \in R$
G6466 $u \in R'$
A6467 $\mathcal{L}(u) \leq 3$
T6468 $u \in (R|3)$ 1265, 6465
T6469 $u \in (R'|3)$ 6468, 6462
T6470 $u \in R'$ 1267, 6469
G6471 $\mathbb{T}$ 6470
A6472 $3 < \mathcal{L}(u)$
T6473 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen 6460, 5480
T6474 $\forall\, u' \bullet u' \sqsubseteq u \Rightarrow u' \in R$ 1315, 6473, 6465
T6475 $\forall\, u' \bullet u' \sqsubseteq u \wedge \mathcal{L}(u') \leq 3 \Rightarrow u' \in (R|3)$ 6474, 1265
T6476 $\forall\, u' \bullet u' \sqsubseteq u \wedge \mathcal{L}(u') \leq 3 \Rightarrow u' \in (R'|3)$ 6475, 6462
T6477 $\forall\, u' \bullet u' \sqsubseteq u \wedge \mathcal{L}(u') \leq 3 \Rightarrow u' \in R'$ 6476, 1267
T6478 $u \in R'$ 6354, 6461, 6477

G6479 $\mathbb{T}$ 6478

Hieraus folgt das eingangs erwähnte Resultat direkt: Zwei zyklische Ordnungen, die sich nicht in ihren Wörtern bis zur Länge drei, unterscheiden, sind identisch.

T6480 $\forall$ R, R$'$ $\bullet$ R ist eine zyklische Ordnung $\wedge$ R$'$ ist eine zyklische Ordnung $\wedge$
$(\mathrm{R}|3) = (\mathrm{R}'|3) \Rightarrow \mathrm{R} = \mathrm{R}'$ 6459

Eine zyklische Ordnung R ist also schon durch (R|3) eindeutig bestimmt. Wie wir R aus (R|3) konstruieren, ist damit allerdings noch nicht klar. Auf diesen Punkt werden wir eingehen, wenn wir die konsistente Vervollständigung der im folgenden Abschnitt einzuführenden Basen diskutieren. Man vergleiche diese Vorgehensweise immer wieder mit den vorigen Kapiteln über azyklische Ordnungen und totale, zyklische Ordnungen.

7.14 Zyklische Ordnungsbasen

Die im vorigen Abschnitt festgestellte Redundanz können wir beseitigen, wenn wir anstatt einer zyklischen Ordnung R nur die Relation (R|3) betrachten. Wir werden in diesem Abschnitt die Eigenschaften dieser Relation axiomatisieren und die Axiome zu dem Begriff der zyklischen Ordnungsbasis zusammenfassen.

Die meisten Axiome übertragen sich von zyklischen Ordnungen direkt auf die Basen. Dies sind Einfachheit, Teilwort- und Rotationsabgeschlossenheit sowie zyklische Transitivität, die allein über dreistellige Wörter formuliert wurde. Als zusätzliche Forderung haben wir $\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq 3$ zur Begrenzung der Redundanz. Da Vollständigkeit durch die Einschränkung der Wortlänge nun nicht mehr erreichbar ist, versuchen wir mit der schwächeren 3 -Vollständigkeit auszukommen. Damit ergibt sich die folgende Definition, die ganz analog zur Definition 3571 für azyklische Ordnungsbasen ist.

S6481

VA6482$*$ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

D6483 R ist eine zyklische Ordnungsbasis :$\Leftrightarrow$
$\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq 3 \wedge$
R ist einfach $\wedge$
R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist 3 -vollständig $\wedge$
R ist zyklisch transitiv

B6484

Wir definieren $\mathrm{R} = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[3,4,5], [1,2,3], [1,2,4], [1,3,4], [2,3,4]\}]$. R ist einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen. Es gilt $\mathcal{L}(\mathrm{R}) = 3$, $\mathcal{A}(\mathrm{R}) = \{1,2,3,4,5\}$ und ($\underline{\mathrm{li}}$ R) -Kens $= \{\{3,4,5\}, \{1,2,3,4\}\}$. R ist 3 -vollständig (Theorem 2300) und zyklisch transitiv. Damit ist R eine zyklische Ordnungsbasis.

Die Axiome von zyklischen Ordnungsbasen nach Definition 6483 sind wie bei totalen, zyklischen Ordnungsbasen nicht voneinander unabhängig. Die $(\sqsupseteq)$ -Abgeschlossenheit ist mit Theorem 2500 aus den anderen Axiomen ableitbar. Damit erhalten wir die folgende Charakterisierung.

S6485

VA6486$*$ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T6487 R ist eine zyklische Ordnungsbasis :$\Leftrightarrow$
$\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq 3 \wedge$

R ist einfach $\wedge$
R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist 3 -vollständig $\wedge$
R ist zyklisch transitiv 6483, 2500

Die Bedingungen in Theorem 6487 sind nun voneinander unabhängig. Dies folgt direkt aus der Unabhängigkeit der Bedingungen in der entsprechenden Charakterisierung von totalen, zyklischen Ordnungsbasen (Theorem 4770).

Im folgenden wird gezeigt, daß die Einschränkung (R|3) einer zyklischen Ordnung R tatsächlich diesen Axiomen unterliegt. Zusätzlich stellen wir noch fest, daß weder Alphabet noch Abhängigkeitsstruktur durch eine solche Einschränkung tangiert werden.

S6488

VA6489∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A6490 R ist eine zyklische Ordnung
T6491 $\mathcal{A}(R|3) = \mathcal{A}(R)$ 3592, 5480, 6490
T6492 (li (R|3)) = (li R) 3605, 5480, 6490
T6493 ($\underline{\text{li}}$ (R|3)) = ($\underline{\text{li}}$ R) 3621, 5480, 6490
T6494 (R|3) ist eine zyklische Ordnungsbasis

T6495 $\mathcal{L}(R|3) \leq 3$ 1268
T6496 R ist einfach 5480, 6490
T6497 (R|3) ist einfach 3577, 6496
T6498 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen 5480, 6490
T6499 (R|3) ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen 3578, 6498
T6500 R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$-abgeschlossen 5480, 6490
T6501 (R|3) ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen 4779, 6500
T6502 R ist vollständig 5480, 6490
T6503 R ist 3 -vollständig 2215, 6502
T6504 (R|3) ist 3 -vollständig 4794, 6496, 6498, 6503
T6505 R ist zyklisch transitiv 5480, 6490
T6506 (R|3) ist zyklisch transitiv 4813, 6505
G6507 $\mathbb{T}$ 6483, 6495, 6497, 6499, 6501, 6504, 6506

B6508

Die zyklische Ordnungsbasis $R = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[3,4,5], [1,2,3], [1,2,4], [1,3,4], [2,3,4]\}]$ des vorigen Beispiels 6484 erhalten wir aus der zyklischen Ordnung $R' = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[3,4,5], [1,2,3,4]\}]$ in Beispiel 5491 indem wir $R = (R'|3)$ bilden. Mann erkennt auch, daß in der Schreibweise als $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$ -Abschluß einer endlichen Wortmenge eine zyklische Ordnung R′ mit weniger Wörtern als die entsprechende zyklische Ordnungsbasis R auskommt, sofern $3 < \mathcal{L}(R)$ gilt. Andererseits gilt $R \subseteq R'$, die Ordnungsbasis ist also eine Teilmenge der Ordnung.

Hier folgt noch eine Reihe von Theoremen, die die Verbindung zu totalen, zyklischen Ordnungenbasen klären. Ferner übertragen sich viele Eigenschaften, wie z.B. die Konsistenz modulo Rotation, von zyklischen Ordnungen auf die Basen, sofern von der (starken) Vollständigkeit kein Gebrauch gemacht wurde.

S6509

VA6510∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A6511 R ist eine zyklische Ordnungsbasis
T6512 $(R|3) = R$ 1269, 6483, 6511

Vergleichen wir die Axiome, so erkennen wir Basen zyklischer Ordnungen als Verallgemeinerung der im vorigen Kapitel eingeführten Basen totaler, zyklischer Ordnungen. Viele der dort aufgestellten Theoreme waren allgemein gehalten und nutzten insbesondere die Totalität nicht aus, so daß wir sie ohne weiteres übertragen können.

T6513 $\forall$ R $\bullet$ R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis $\Rightarrow$
R ist eine zyklische Ordnungsbasis 4763, 6483

T6514 R ist total $\Rightarrow$ R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis 6483, 6511, 4763

Wie auch schon bei zyklischen Ordnungen bleiben die Axiome invariant unter Projektion.

T6515 $\forall$ X $\in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \bullet$ (R $\triangleright$ X) ist eine zyklische Ordnungsbasis 6483, 6511, 1714, 2850, 2860, 3823, 2879, 3867

Eine Projektion auf eine Abhängigkeitsklique erfüllt die Totalität und ist somit sogar eine totale Basis.

T6516 $\forall$ C $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen $\bullet$ (R $\triangleright$ C) ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis 6515, 2195, 6514

Die Konsistenz ist wieder mit Hilfe der zyklischen Transitivität ableitbar und überträgt sich somit auch auf die Basen.

T6517 R ist konsistent modulo ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) 4016, 6483, 6511

Es stellt sich nun die Frage, ob die Axiome nicht vielleicht zu schwach gewählt sind, um umgekehrt jede zyklische Ordnungsbasis zu einer zyklischen Ordnung zu erweitern. Daß dies nicht der Fall ist, wird in dem nachfolgenden Abschnitt gezeigt.

7.15 Konsistente Vervollständigung

Die Axiome für Basen haben wir aus den Eigenschaften der einer zyklischen Ordnung R zugeordneten natürlichen Basis (R|3) gewonnen. Damit ist keineswegs klar, ob die Axiome hinreichend sind, um sicherzustellen, daß jede dieser Basen R von einer zyklischen Ordnung R′ stammt, so daß R = (R′|3) sowie $\mathcal{A}$(R′) = $\mathcal{A}$(R) und (li R′) = (li R) gilt. Diese Nebenbedingungen fordern, daß mindestens zwei wesentliche Eigenschaften der Ordnung R′ durch die Basis R verkörpert werden, das Alphabet und die Abhängigkeitsrelation.

Ein mit diese Fragestellung eng verknüpftes Problem ist die Berechnung einer zyklischen Ordnung bei gegebener endlicher Basis. Wir wünschen uns einen expliziten Ausdruck, der uns die gesuchte Relation als Menge von Wörtern angibt.

Wir beginnen hier mit dem zuletzt genannten Problem: Wir definieren eine einfache Operation, die sogenannte konsistente Vervollständigung, die uns zu jeder Basis eine zyklische Ordnung liefert, die die oben genannten Anforderungen erfüllt und somit auch das erste Problem löst.

S6518
VA6519∗ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A6520 R ist eine zyklische Ordnungsbasis

Wie der Name schon sagt, wird eine Basis durch die folgende Operation um mit allen Wörtern der Basis konsistente (modulo Rotation) Wörter ergänzt. Um Alphabet und Abhängigkeitsrelation dabei nicht zu verändern, kommen nur solche Wörter als Kandidaten in betracht, die schon Abhängigkeitskliquen der Basis sind.

D6521	$\mathrm{KV\ R} := \{\mathrm{w} \in \mathbb{A}^* \bullet \mathcal{A}(\mathrm{w}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})\text{ -Kliquen} \wedge \forall\ \mathrm{v} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{v} \overset{\mathrm{rot}}{\approx} \mathrm{w}\}$	
T6522∗	$(\mathrm{KV\ R}) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	6521

Weil die Basis selbst konsistent (modulo Rotation) ist, handelt es sich um eine Operation, die die Basis höchstens erweitern kann.

T6523	$\mathrm{R} \subseteq (\mathrm{KV\ R})$	
G6524	$\forall\ \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{w} \in (\mathrm{KV\ R})$	
VA6525	$\mathrm{w} \in \mathrm{R}$	
G6526	$\mathrm{w} \in (\mathrm{KV\ R})$	
T6527∗	$\mathrm{w} \in \mathbb{A}^*$	6525
G6528	$\mathcal{A}(\mathrm{w}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})\text{ -Kliquen} \wedge \forall\ \mathrm{v} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{v} \overset{\mathrm{rot}}{\approx} \mathrm{w}$	6521
G6529	$\forall\ \mathrm{v} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{v} \overset{\mathrm{rot}}{\approx} \mathrm{w}$	2006, 6525
T6530	R ist konsistent modulo $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$	6517, 6520
G6531	$\mathbb{T}$	1547, 6530, 6525

Wie gewünscht bleibt das Alphabet erhalten, da Abhängigkeitskliquen Teilmengen des Alphabets sind.

T6532	$\mathcal{A}(\mathrm{R}) = \mathcal{A}(\mathrm{KV\ R})$	
T6533	$\mathcal{A}(\mathrm{R}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{KV\ R})$	1246, 6523
T6534	$\mathcal{A}(\mathrm{KV\ R}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	
G6535	$\forall\ \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{KV\ R}) \bullet \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$	
VA6536	$\mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{KV\ R})$	
G6537	$\mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$	
T6538	$\mathrm{x} \in \mathcal{A}(\{\mathrm{w} \in \mathbb{A}^* \bullet \mathcal{A}(\mathrm{w}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})\text{ -Kliquen} \wedge \forall\ \mathrm{v} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{v} \overset{\mathrm{rot}}{\approx} \mathrm{w}\})$	6536, 6521
VT6539	$\mathrm{w} \in \mathbb{A}^* \bullet \mathcal{A}(\mathrm{w}) \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})\text{ -Kliquen} \wedge (\ \forall\ \mathrm{v} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{v} \overset{\mathrm{rot}}{\approx} \mathrm{w}\ ) \wedge \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{w})$	6538, 1243
T6540	$\mathcal{A}(\mathrm{w}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	2014, 6539
G6541	$\mathbb{T}$	6539, 6540
G6542	$\mathbb{T}$	6533, 6534

Die Eigenschaft der Einfachheit vererbt sich von der Basis auf die Vervollständigung.

T6543	(KV R) ist einfach	
G6544	$\forall\ \mathrm{w} \in (\mathrm{KV\ R}) \bullet$ w ist einfach	1279
VA6545	$\mathrm{w} \in (\mathrm{KV\ R})$	
G6546	w ist einfach	
T6547∗	$\mathrm{w} \in \mathbb{A}^*$	6545
T6548	$\forall\ \mathrm{v} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{v} \overset{\mathrm{rot}}{\approx} \mathrm{w}$	6545, 6521
T6549	R ist einfach	6520, 6483
G6550	$\forall\ \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{w}) \bullet (\mathrm{OCC\ x\ w}) = 1$	0386
VA6551	$\mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{w})$	
G6552	$(\mathrm{OCC\ x\ w}) = 1$	
T6553	$\mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{KV\ R})$	1245, 6545, 6551
T6554	$\mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$	6532, 6553
VT6555	$\mathrm{w}' \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{w}')$	1243, 6554
T6556∗	$\mathrm{w}' \in \mathbb{A}^*$	6555
T6557	w' ist einfach	1279, 6549, 6555
T6558	$\forall\ \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{w}') \bullet (\mathrm{OCC\ x\ w}') = 1$	0386, 6557
T6559	$(\mathrm{OCC\ x\ w}') = 1$	6558, 6555
T6560	$\mathrm{w}' \overset{\mathrm{rot}}{\approx} \mathrm{w}$	6548, 6555
T6561	$\forall\ \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{w}) \cap \mathcal{A}(\mathrm{w}) \bullet (\mathrm{OCC\ x\ w}') = (\mathrm{OCC\ x\ w})$	1216, 6560
T6562	$\mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{w}) \cap \mathcal{A}(\mathrm{w}')$	6551, 6555
T6563	$(\mathrm{OCC\ x\ w}') = (\mathrm{OCC\ x\ w})$	6561, 6562

G6564 $\mathbb{T}$ . . . 6563, 6559

Auch die Menge der Abhängigkeitskliquen bleibt erhalten, da nur Wörter hinzugefügt werden, die vorher schon Abhängigkeitskliquen bildeten.

T6565 $(\text{li R}) = (\text{li (KV R)})$

- **T6566** $(\text{li R}) \subseteq (\text{li (KV R)})$ . . . 1810, 6523
- **T6567** $(\text{li (KV R)}) \subseteq (\text{li R})$
  - **G6568** $\forall$ x,y $\bullet$ $(x,y) \in (\text{li (KV R)}) \Rightarrow (x,y) \in (\text{li R})$
  - **VA6569** x,y $\bullet$ $(x,y) \in (\text{li (KV R)})$
  - **G6570** $(x,y) \in (\text{li R})$
  - **T6571** $x \neq y \wedge (x,y) \in (\underline{\text{li}}\ \text{(KV R)})$ . . . 1916, 6543, 6569
  - **VT6572** $w \in (\text{KV R}) \bullet x \in \mathcal{A}(w) \wedge y \in \mathcal{A}(w)$ . . . 1803, 6571
  - **T6573**$*$ $w \in \mathbb{A}^*$ . . . 6572
  - **T6574** R ist einfach . . . 6483, 6520
  - **T6575** $\mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ \text{R})$ -Kliquen . . . 6572, 6521
  - **T6576** $(x,y) \in (\underline{\text{li}}\ \text{R})$ . . . 0106, 6575, 6572
  - **G6577** $\mathbb{T}$ . . . 1916, 6574, 6571, 6576
- **G6578** $\mathbb{T}$ . . . 6566, 6567

Angewandt auf Basen von totalen, zyklischen Ordnungen entspricht unsere Operation der totalen, konsistenten Vervollständigung. Es handelt sich also um eine Verallgemeinerung. Die nachfolgende Beziehung zwischen konsistenter Vervollständigung und totaler, konsistenter Vervollständigung benötigen wir, um Theoreme aus dem vorigen Kapitel wiederzuverwenden.

T6579 $\forall$ R $\bullet$ R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis $\Rightarrow$ (KV R) = (KTV R)

- **VA6580** R $\bullet$ R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis
- **G6581** KV R = KTV R
- **T6582**$*$ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ . . . 4763, 6580
- **G6583** $\{w \in \mathbb{A}^* \bullet \mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ \text{R}) \text{ -Kliquen} \wedge \forall v \in R \bullet v \overset{\text{rot}}{\sim} w\} =$
  $\{w \in \mathcal{A}(R)^* \bullet \forall v \in R \bullet v \overset{\text{rot}}{\sim} w\}$ . . . 6521, 5274
- **G6584** $\forall w \bullet (\ w \in \mathbb{A}^* \wedge \mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ \text{R}) \text{ -Kliquen} \wedge \forall v \in R \bullet v \overset{\text{rot}}{\sim} w\ ) \Leftrightarrow$
  $(\ w \in \mathcal{A}(R)^* \wedge \forall v \in R \bullet v \overset{\text{rot}}{\sim} w\ )$
- **G6585** $\forall w \bullet (\ w \in \mathbb{A}^* \wedge \mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ \text{R}) \text{ -Kliquen}\ ) \Leftrightarrow w \in \mathcal{A}(R)^*$
- **T6586** $\forall w \bullet w \in \mathbb{A}^* \wedge \mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ \text{R}) \text{ -Kliquen} \Rightarrow w \in \mathcal{A}(R)^*$
  - **VA6587**$*$ $w \in \mathbb{A}^*$
  - **A6588** $\mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ \text{R})$ -Kliquen
  - **G6589** $w \in \mathcal{A}(R)^*$
  - **T6590** $w \in \mathcal{A}(w)^*$ . . . 0318
  - **T6591** $\mathcal{A}(w) \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 2014, 6588
  - **T6592** $\mathcal{A}(w)^* \subseteq \mathcal{A}(R)^*$ . . . 0233, 6591
  - **G6593** $\mathbb{T}$ . . . 6590, 6592
- **T6594** $\forall w \bullet w \in \mathcal{A}(R)^* \Rightarrow w \in \mathbb{A}^* \wedge \mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ \text{R})$ -Kliquen
  - **VA6595** $w \in \mathcal{A}(R)^*$
  - **G6596** $w \in \mathbb{A}^* \wedge \mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ \text{R})$ -Kliquen
  - **T6597**$*$ $w \in \mathbb{A}^*$
    - **T6598** $\mathcal{A}(R) \subseteq \mathbb{A}$
    - **T6599** $\mathcal{A}(R)^* \subseteq \mathbb{A}^*$ . . . 0233, 6598
    - **G6600** $\mathbb{T}$ . . . 6599, 6595
  - **G6601** $\mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ \text{R})$ -Kliquen
  - **T6602** R ist total . . . 4763, 6580
  - **T6603** $\mathcal{A}(w) \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 0319, 6595
  - **T6604** $\mathcal{A}(R) \in (\underline{\text{li}}\ \text{R})$ -Kliquen . . . 2017, 6602
  - **G6605** $\mathbb{T}$ . . . 0117, 6604, 6603

G6606 $\mathbb{T}$ . . . 6586, 6594

Projektion auf eine Menge X läßt sich mit konsistenter Vervollständigung vertauschen, wie das folgende Lemma zeigt. Die Reihenfolge der Anwendung dieser beiden Operationen ist also nicht wesentlich. Ist X eine Abhängigkeitsklique, so können wir mit Hilfe des vorigen Lemmas, konsistente Vervollständigung auf totale, konsistente Vervollständigung zurückführen.

T6607 $\forall\, X \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \bullet ((\text{KV R}) \triangleright X) = (\text{KV } (R \triangleright X))$

VA6608∗ $X \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$
T6609 $\forall\, w \bullet w \in ((\text{KV R}) \triangleright X) \Rightarrow w \in (\text{KV } (R \triangleright X))$
VA6610 $w \in ((\text{KV R}) \triangleright X)$
G6611 $w \in (\text{KV } (R \triangleright X))$
T6612∗ $w \in \mathbb{A}^*$ . . . 6610
VT6613 $u \in (\text{KV R}) \bullet w = (u \triangleright X)$ . . . 1703, 6610
T6614∗ $u \in \mathbb{A}^*$ . . . 6613
T6615 $\mathcal{A}(u) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen . . . 6613, 6521
T6616 $\forall\, v \in R \bullet v \overset{\text{rot}}{\approx} u$ . . . 6613, 6521
G6617 $\mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ (R \triangleright X))$ -Kliquen $\wedge\ \forall\, v \in (R \triangleright X) \bullet v \overset{\text{rot}}{\approx} w$ . . . 6521
T6618 $\mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ (R \triangleright X))$ -Kliquen
G6619 $(\mathcal{A}(u) \cap X) \in (\underline{\text{li}}\ (R \triangleright X))$ -Kliquen . . . 6613, 0657
G6620 $\mathbb{T}$ . . . 2192, 6615
T6621 $\forall\, v \in (R \triangleright X) \bullet v \overset{\text{rot}}{\approx} w$
VA6622 $v \in (R \triangleright X)$
G6623 $v \overset{\text{rot}}{\approx} w$
T6624∗ $v \in \mathbb{A}^*$ . . . 6622
T6625 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen . . . 6483, 6520
T6626 $(R \triangleright X) \subseteq R$ . . . 2839, 6625
T6627 $v \in R$ . . . 6626, 6622
T6628 $v \overset{\text{rot}}{\approx} u$ . . . 6616, 6627
T6629 $v \overset{\text{rot}}{\approx} (u \triangleright X)$ . . . 1014, 6628
G6630 $\mathbb{T}$ . . . 6613, 6629
G6631 $\mathbb{T}$ . . . 6618, 6621
T6632 $\forall\, w \bullet w \in (\text{KV } (R \triangleright X)) \Rightarrow w \in ((\text{KV R}) \triangleright X)$
VA6633 $w \in (\text{KV } (R \triangleright X))$
G6634 $w \in ((\text{KV R}) \triangleright X)$
T6635∗ $w \in \mathbb{A}^*$ . . . 6633
T6636 $(R \triangleright X)$ ist eine zyklische Ordnungsbasis . . . 6515, 6520
T6637 $\mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ (R \triangleright X))$ -Kliquen . . . 6633, 6521
T6638 $\forall\, v \in (R \triangleright X) \bullet v \overset{\text{rot}}{\approx} w$ . . . 6633, 6521
G6639 $\exists\, u \in (\text{KV R}) \bullet w = (u \triangleright X)$ . . . 1703
G6640 $\exists\, u \in \mathbb{A}^* \bullet \mathcal{A}(u) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen $\wedge\ (\ \forall\, v \in R \bullet v \overset{\text{rot}}{\approx} u\ ) \wedge w = (u \triangleright X)$ . . . 6521
T6641 $\mathcal{A}(w) \subseteq X$
T6642 $\mathcal{A}(w) \subseteq \mathcal{A}(R \triangleright X)$ . . . 2014, 6637
T6643 $\mathcal{A}(R \triangleright X) \subseteq X$ . . . 1709
G6644 $\mathbb{T}$ . . . 6642, 6643
T6645 $\mathcal{A}(w) \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kliquen . . . 2117, 6637
T6646 $\forall\, v \in R \bullet (v \triangleright X) \overset{\text{rot}}{\approx} w$ . . . 6638, 1703
T6647 $\forall\, v \in R \bullet v \overset{\text{rot}}{\approx} (w \triangleright X)$ . . . 6646, 1013
T6648 $w = (w \triangleright X)$ . . . 0647, 6641
T6649 $\forall\, v \in R \bullet v \overset{\text{rot}}{\approx} w$ . . . 6647, 6648
G6650 $\mathbb{T}$ . . . 6645, 6649, 6648
G6651 $\mathbb{T}$ . . . 6609, 6632

Einfachheit der Vervollständigung haben wir schon gezeigt. Es folgen nun weitere Eigenschaften der zyklischen Ordnungen.

Die Teilwortabgeschlossenheit ergibt sich aus der entsprechenden Eigenschaft 1015 der Konsistenzrelation.

T6652 (KV R) ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen

G6653	$\forall$ u,w $\bullet$ w $\in$ (KV R) $\wedge$ u $\sqsubseteq$ w $\Rightarrow$ u $\in$ (KV R)	1315
VA6654	u,w $\bullet$ w $\in$ (KV R)	
A6655	u $\sqsubseteq$ w	
G6656	u $\in$ (KV R)	
T6657$*$	u $\in \mathbb{A}^*$ $\wedge$ v $\in \mathbb{A}^*$	6655
T6658	$\mathcal{A}$(w) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	6654, 6521
T6659	$\forall$ v $\in$ R $\bullet$ v $\overset{\text{rot}}{\sim}$ w	6654, 6521
G6660	$\mathcal{A}$(u) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen $\wedge$ $\forall$ v $\in$ R $\bullet$ v $\overset{\text{rot}}{\sim}$ u	6521
T6661	$\mathcal{A}$(u) $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	
T6662	$\mathcal{A}$(u) $\subseteq$ $\mathcal{A}$(w)	0569, 6655
G6663	$\mathbb{T}$	0117, 6658, 6662
T6664	$\forall$ v $\in$ R $\bullet$ v $\overset{\text{rot}}{\sim}$ u	
VA6665	v $\in$ R	
G6666	v $\overset{\text{rot}}{\sim}$ u	
T6667$*$	v $\in \mathbb{A}^*$	6665
T6668	v $\overset{\text{rot}}{\sim}$ w	6659, 6665
T6669	w ist einfach	1279, 6543, 6654
G6670	$\mathbb{T}$	1015, 6669, 6668, 6655
G6671	$\mathbb{T}$	6661, 6664

Rotationsabgeschlossenheit überträgt sich nach 5505 von allen Kens auf die Relation. Zum Beweis der Rotationsabgeschlossenheit kann deshalb mit Hilfe von 6607 das entsprechende Theorem 5351 für totale, zyklische Ordnungsbasen wiederverwendet werden.

T6672 (KV R) ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen

G6673	$\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ ((KV R) $\triangleright$ L) ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen	5505, 6652
VA6674	L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens	
G6675	((KV R) $\triangleright$ L) ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen	
T6676$*$	L $\in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	0124, 6674
G6677	(KV (R $\triangleright$ L)) ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen	6607
T6678	L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	0125, 6674
T6679	(R $\triangleright$ L) ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis	6516, 6520, 6678
G6680	(KTV (R $\triangleright$ L)) ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen	6579, 6679
G6681	$\mathbb{T}$	5351, 6679

Ein Beweis der Konsistenz modulo Rotation ist auf ganz analoge Weise möglich.

T6682 (KV R) ist konsistent modulo ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$)

G6683	$\forall$ C $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen $\bullet$ ((KV R) $\triangleright$ C) ist konsistent modulo ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$)	5533
VA6684	C $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen	
G6685	((KV R) $\triangleright$ C) ist konsistent modulo ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$)	
T6686$*$	C $\in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	0105, 6684
G6687	(KV (R $\triangleright$ C)) ist konsistent modulo ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$)	6607
T6688	(R $\triangleright$ C) ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis	6516, 6520, 6684
G6689	(KTV (R $\triangleright$ C)) ist konsistent modulo ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$)	6579, 6688
G6690	$\mathbb{T}$	5407, 6688

Auch der Beweis der Vollständigkeit verwendet das entsprechende Resultat für totale, zyklische Ordnungsbasen.

T6691 (KV R) ist vollständig

G6692 $\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ ((KV R) $\triangleright$ L) ist vollständig . . . 2982
VA6693 L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens
G6694 ((KV R) $\triangleright$ L) ist vollständig
T6695∗ L $\in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ . . . 0124, 6693
G6696 (KV (R $\triangleright$ L)) ist vollständig . . . 6607
T6697 L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kliquen . . . 0125, 6693
T6698 (R $\triangleright$ L) ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis . . . 6516, 6520, 6697
G6699 (KTV (R $\triangleright$ L)) ist vollständig . . . 6579, 6698
G6700 $\mathbb{T}$ . . . 5371, 6698

Nun folgt ein wichtiges Lemma, das unabhängig von der konsistenten, Vervollständigung zu beweisen ist. Wir benötigen nur die Einfachheit und die Konsistenz (modulo Rotation) einer Relation R′, die eine Erweiterung der Basis R darstellt, wobei die besprochenen Nebenbedingungen noch erfüllt sind, d.h. Erhaltung von Alphabet und Abhängigkeitsstruktur. Schränken wir die Erweiterung R′ dann wieder auf (R′|3) ein, dann erhalten wir die ursprüngliche Relation, nämlich die Basis R.

T6701 $\forall$ R′ $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ $\bullet$ R′ ist einfach $\wedge$ R′ ist konsistent modulo ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) $\wedge$ $\mathcal{A}$(R) = $\mathcal{A}$(R′) $\wedge$ (li R) = (li R′) $\wedge$ R $\subseteq$ R′ $\Rightarrow$ (R′|3) = R

VA6702∗ R′ $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A6703 R′ ist einfach
A6704 R′ ist konsistent modulo ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$)
A6705 $\mathcal{A}$(R) = $\mathcal{A}$(R′)
A6706 (li R) = (li R′)
A6707 R $\subseteq$ R′
G6708 (R′|3) = R
T6709 R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen . . . 6520, 6483
T6710 R ist ($\overset{\text{rot}}{\equiv}$) -abgeschlossen . . . 6520, 6483
T6711 R $\subseteq$ (R′|3)
  G6712 (R|3) $\subseteq$ (R′|3) . . . 6512, 6520
  G6713 $\mathbb{T}$ . . . 1271, 6707
T6714 (R′|3) $\subseteq$ R
  G6715 $\forall$ w $\in$ (R′|3) $\bullet$ w $\in$ R
  VA6716 w $\in$ (R′|3)
  G6717 w $\in$ R
  T6718∗ w $\in \mathbb{A}^*$ . . . 6716
  T6719 w $\in$ R′ . . . 1267, 6716
  T6720 $\mathcal{L}$(w) $\leq$ 3 . . . 6716, 1265
  A6721 $\mathcal{L}$(w) = 0
    T6722 w = [] . . . 0362, 6721
    G6723 [] $\in$ R . . . 6722
    G6724 $\mathbb{T}$ . . . 2219, 6483, 6520
  A6725 $\mathcal{L}$(w) = 1
    VT6726 x $\in \mathbb{A}$ $\bullet$ w = [x] . . . 0366, 6725
    T6727 x $\in \mathcal{A}$(R′)
      T6728 x $\in \mathcal{A}$(w) . . . 6726, 0327
      G6729 $\mathbb{T}$ . . . 1243, 6719, 6728
    T6730 x $\in \mathcal{A}$(R) . . . 6705
    T6731 [x] $\in$ R . . . 1325, 6709, 6730
    G6732 $\mathbb{T}$ . . . 6731, 6726
  A6733 $\mathcal{L}$(w) = 2
    VT6734 x $\in \mathbb{A}$, y $\in \mathbb{A}$ $\bullet$ w = [x,y] . . . 0367
    T6735 [x,y] $\in$ R′ . . . 6734, 6719
    T6736 (x,y) $\in$ (li R′) . . . 1761, 6735

T6737	$(x,y) \in (\mathrm{li}\ R)$	6706, 6736
T6738	$[x,y] \in R$	1767, 6709, 6710, 6737
G6739	$\mathbb{T}$	6738, 6734
A6740	$\mathcal{L}(w) = 3$	
VT6741	$x \in \mathbb{A},\ y \in \mathbb{A},\ z \in \mathbb{A} \bullet w = [x,y,z]$	0368
T6742∗	$x \in \mathbb{A} \wedge y \in \mathbb{A} \wedge z \in \mathbb{A}$	6741
T6743	$\mathcal{A}(w) = \{x,y,z\}$	6741, 0329
T6744	$\mathcal{A}(w) \in (\underline{\mathrm{li}}\ R')$ -Kliquen	2006, 6719
T6745	$(\underline{\mathrm{li}}\ R) = (\underline{\mathrm{li}}\ R')$	1819, 6705, 6706
T6746	$\{x,y,z\} \in (\underline{\mathrm{li}}\ R)$ -Kliquen	6744, 6743, 6745
T6747	$\lvert\{x,y,z\}\rvert = 3$	
T6748	$\mathcal{L}(w) = 3$	6741, 0309
T6749	w ist einfach	1279, 6703, 6719
T6750	$\lvert\mathcal{A}(w)\rvert = 3$	6748, 0373, 6749
G6751	$\mathbb{T}$	6750, 6743
T6752	R ist einfach	6520, 6483
T6753	R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	6520, 6483
T6754	R ist 3 -vollständig	6520, 6483
T6755	$[x,y,z] \in R \vee [z,y,x] \in R$	2346, 6752, 6753, 6754, 6746, 6747
A6756	$[x,y,z] \in R$	
G6757	$\mathbb{T}$	6756, 6741
A6758	$[z,y,x] \in R$	
T6759	$[z,y,x] \in R'$	6707, 6758
T6760	$[x,y,z] \in R'$	6741, 6719
T6761	$[x,y,z] \overset{\text{rot}}{\approx} [z,y,x]$	1547, 6704, 6760, 6759
T6762	$\mathbb{F}$	6761, 1222, 6747
G6763	$\mathbb{T}$	6711, 6714

Aus der Tatsache, daß es sich bei der Vervollständigung um eine Erweiterung im Sinne des vorigen Lemmas handelt, folgt nun unser gewünschtes Resultat: Wir gehen von einer beliebigen Basis R aus. Die Einschränkung $((\mathrm{KV}\ R)|3)$ der konsistenten Vervollständigung von R ist dann wieder die ursprüngliche Basis R. Damit ist zusätzlich zur Erhaltung von Alphabet und Abhängigkeitsstruktur eine weitere Bedingung der zu Beginn dieses Abschnitts gestellten Anforderungen erfüllt. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß die Vervollständigung wirklich eine zyklische Ordnung ist.

T6764 $((\mathrm{KV}\ R)|3) = R$ . . . 6701, 6543, 6682, 6532, 6565, 6523

Hierzu fehlt nur noch die zyklische Transitivität, die wie alle anderen Axiome unter Vervollständigung erhalten bleibt.

T6765 (KV R) ist zyklisch transitiv

G6766	$\forall\, a,b,c,d \bullet [a,b,c] \in (\mathrm{KV}\ R) \wedge [a,c,d] \in (\mathrm{KV}\ R) \Rightarrow [a,b,d] \in (\mathrm{KV}\ R)$	3841
VA6767	$a,b,c,d \bullet [a,b,c] \in (\mathrm{KV}\ R)$	
A6768	$[a,c,d] \in (\mathrm{KV}\ R)$	
G6769	$[a,b,d] \in (\mathrm{KV}\ R)$	
T6770∗	$a \in \mathbb{A} \wedge b \in \mathbb{A} \wedge c \in \mathbb{A} \wedge d \in \mathbb{A}$	6767, 6768
T6771	$\mathcal{L}([a,b,c]) = 3$	0309
T6772	$\mathcal{L}([a,c,d]) = 3$	0309
T6773	$[a,b,c] \in ((\mathrm{KV}\ R)|3)$	1265, 6767, 6771
T6774	$[a,c,d] \in ((\mathrm{KV}\ R)|3)$	1265, 6768, 6772
T6775	$[a,b,c] \in R$	6773, 6764
T6776	$[a,c,d] \in R$	6774, 6764
G6777	$[a,b,d] \in R$	6523
T6778	R ist zyklisch transitiv	6483, 6520

G6779 $\mathbb{T}$ 3841, 6778, 6775, 6776

Fassen wir die Teilergebnisse für die einzelnen Axiome zusammen, dann stellen wir fest: Die Vervollständigung jeder beliebigen Basis ist eine zyklische Ordnung.

T6780 (KV R) ist eine zyklische Ordnung 5480, 6543, 6652, 6672, 6691, 6765

Zusätzlich zu Alphabet und Abhängigkeitsrelation wird auch die unmittelbare Nachfolgerrelation durch die konsistente Vervollständigung nicht verändert.

T6781 $(\prec_{(\mathrm{KV\ R})}) = (\prec_{\mathrm{R}})$

G6782 $(\prec_{(\mathrm{KV\ R})}) = (\prec_{((\mathrm{KV\ R})|3)})$ 6764

G6783 $\mathbb{T}$ 4822, 6652

Die konsistente Vervollständigung (KV R) ist also gerade ein Beweis für die Existenz der zu Beginn dieses Abschnitts geforderten zyklischen Ordnung R bei gegebener Basis R′ . Dies folgt aus 6780, 6764, 6532 und 6565

Es ist leicht einzusehen, daß sich die Definition 6521 der konsistenten Vervollständigung sofort als Algorithmus implementieren läßt. Die Eingabe ist eine endliche Basis R. Damit ist auch das Alphabet endlich. Aus 6543 folgt, daß in (KV R) nur einfache Wörter vorkommen. Aus 6532 folgt, daß das Alphabet sind nicht verändert. Die Menge der einfachen Wörtern über dem endlichen Alphabet ist nach 1300 endlich. Aus dieser Menge werden alle Wörter in die Relation aufgenommen, die die Kliquenbedingung und die Konsistenzbedingung aus Definition 6521 erfüllen. Dieser Algorithmus ist natürlich nicht besonders effizient.

7.16 Eindeutigkeit

Der vorige Abschnitt behandelte die Existenz einer zyklischen Ordnung als Erweiterung einer beliebigen Basis. Die konsistente Vervollständigung lieferte gerade eine solche. Uns beschäftigt nun die Frage, ob diese zyklische Ordnung bei beliebig gewählter Basis eindeutig ist und damit die konsistente Vervollständigung genau diese zyklische Ordnung liefert.

Für den Fall, daß die Basis R aus einer zyklischen Ordnung R′ durch Einschränkung R = (R′|3) gewonnen wurde, können wir wie folgt argumentieren: (KV R) liefert eine zyklische Ordnung mit ((KV R)|3) = R. Die zyklischen Ordnungen R′ und (KV R) stimmen also auf Wörtern bis zur Länge drei überein und sind daher identisch nach Theorem 6480. Jede zyklische Ordnung, aus der R gewonnen wurde, ist also mit (KV R) identisch. Damit ist die Eindeutigkeit für diesen Fall gezeigt. Da wir im vorigen Abschnitt zeigten, daß jede Basis aus einer zyklischen Ordnung gewonnen werden kann, gilt die Eindeutigkeit ganz allgemein.

Dieser Sachverhalt wird durch das folgende Theorem genauer beschrieben: Gegeben ist eine beliebige, zyklische Ordnungsbasis R. Dann existiert eine eindeutige zyklische Ordnung (nämlich genau (KV R)) mit gleichem Alphabet und gleicher Abhängigkeitsstruktur, die eine Erweiterung der Basis darstellt.

S6784

VA6785∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

A6786 R ist eine zyklische Ordnungsbasis

T6787 $\exists!\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathcal{A}(\mathrm{R}) = \mathcal{A}(\mathrm{R}') \wedge (\mathrm{li\ R}) = (\mathrm{li\ R}') \wedge$ $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}' \wedge \mathrm{R}'$ ist eine zyklische Ordnung

T6788 $\exists\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathcal{A}(\mathrm{R}) = \mathcal{A}(\mathrm{R}') \wedge (\mathrm{li\ R}) = (\mathrm{li\ R}') \wedge$ $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}' \wedge \mathrm{R}'$ ist eine zyklische Ordnung

G6789	$\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(KV\ R) \wedge (li\ R) = (li\ (KV\ R)) \wedge$ $R \subseteq (KV\ R) \wedge (KV\ R)$ ist eine zyklische Ordnung	
G6790	$\mathbb{T}$	6786, 6532, 6565, 6523, 6780
T6791	$\forall R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}), R'' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet$ $\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(R') \wedge (li\ R) = (li\ R') \wedge R \subseteq R' \wedge R'$ ist eine zyklische Ordnung $\wedge$ $\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(R'') \wedge (li\ R) = (li\ R'') \wedge R \subseteq R'' \wedge R''$ ist eine zyklische Ordnung $\Rightarrow R' = R''$	
VA6792∗	$R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}), R'' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	
A6793	$\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(R') \wedge (li\ R) = (li\ R') \wedge R \subseteq R' \wedge R'$ ist eine zyklische Ordnung	
A6794	$\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(R'') \wedge (li\ R) = (li\ R'') \wedge R \subseteq R'' \wedge R''$ ist eine zyklische Ordnung	
G6795	$R' = R''$	
T6796	R' ist einfach $\wedge$ R' ist konsistent modulo $(\overset{rot}{\equiv})$	5480, 6793, 5482, 6793
T6797	$(R'\|3) = R$	6701, 6786, 6796, 6793
T6798	R'' ist einfach $\wedge$ R'' ist konsistent modulo $(\overset{rot}{\equiv})$	5480, 6794, 5482, 6794
T6799	$(R''\|3) = R$	6701, 6786, 6798, 6794
T6800	$(R'\|3) = (R''\|3)$	6797, 6799
G6801	$\mathbb{T}$	6480, 6793, 6794, 6800
G6802	$\mathbb{T}$	6788, 6791

Zusammenfassend haben wir somit zwei gleichwertige Repräsentationen für zyklische Ordnungen: Die intuitive Darstellung als Menge aller charakteristischen Beobachtungen sowie die kompaktere Darstellung als Basis mit beschränkter Wortlänge. Durch die Operationen der Einschränkung $(R|3)$ sowie der konsistenten Vervollständigung $(KV\ R)$ können wir zwischen diesen Darstellungen wechseln und je nach Intention und Anwendung die eine oder andere bevorzugen.

Die erste Darstellung hat beispielsweise den Vorteil, daß sich eine endliche, zyklische Ordnung durch den $(\overset{rot}{\sqsupseteq})$ -Abschluß einer Menge von Wörtern bilden läßt, die jeweils einem Ken entsprechen. Wir müssen also für jeden Ken nur ein Wort angeben. Endliche, totale, zyklische Ordnungen werden durch nur ein Wort generiert. Bei zyklischen Ordnungen haben wir es allerdings meist mit sehr vielen Kens zu tun.

Der Vorteil der Darstellung als Basis ist die auf drei beschränkte Wortlänge sowie eine geringere Kardinalität der Relation. Dies kann z.B. die Implementation von Algorithmen erleichtern. Auch hier kann die in der $(\overset{rot}{\sqsupseteq})$ -Abgeschlossenheit steckende Redundanz noch ausgenutzt werden. Falls wir uns nur für zyklische Ordnungen interessieren, in denen jeder Ken mindestens drei Elemente besitzt (also vollständig gerichtete, zyklische Ordnungen), so können wir die Axiome leicht so modifizieren, daß nur noch die dreistelligen Wörter in der Relation enthalten sind. Hierzu fordern wir ausgehend von den Axiomen für zyklische Ordnungsbasen (exakt) dreistellige Relationen, verzichten auf das Axiom der Teilwortabgeschlossenheit und schwächen die 3 -Vollständigkeit geeignet ab. Die letzte Form der Darstellung wurde beispielsweise verwendet, um einige unserer Modelle zyklischer Ordnungen mit Rechnerhilfe zu überprüfen.

Da die zuletzt genannte Axiomatisierung so einfach ist und alle wesentlichen Merkmale zyklischer Ordnungen enthält, wollen wir sie genauer betrachten. Für $R \in \mathcal{R}^3(\mathbb{A})$ haben wir also folgende Axiome: $[a,b,c] \in R \Rightarrow |\{a,b,c\}| = 3$ (Einfachheit), $[a,b,c] \in R \Rightarrow [b,c,a] \in R$ (Rotationsabgeschlossenheit), $\{(a,b),(b,c),(a,c)\} \subseteq (li\ R) \Rightarrow \exists\, w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = \{a,b,c\}$ (abgeschwächte 3 -Vollständigkeit) und $[a,b,c] \in R \wedge [a,c,d] \in R \Rightarrow [a,b,d] \in R$ (zyklische Transitivität). Aus Einfachheit und zyklischer Transitivität ergibt sich die Konsistenz modulo Rotation: $[a,b,c] \in R \Rightarrow [c,b,a] \notin R$. Für totale, zyklische Ordnungen ersetzen wir das Axiom der 3 -Vollständigkeit durch das stärkere Axiom $\{a,b,c\} \subseteq \mathcal{A}(R) \wedge |\{a,b,c\}| = 3 \Rightarrow [a,b,c] \in R \vee [c,b,a] \in R$ (Totalität und abgeschwächte 3 -Vollständigkeit). Vergleichen wir dies mit den in der Einleitung diskutierten Tripelstrukturen, so bemerken wir: Identifizieren wir das Alphabet mit der Grundmenge und beschränken wir uns auf die Tripel aus verschiedenen Elementen (nur diese Tripel hatten eine Bedeutung), dann sind die beiden Axiomsysteme äquivalent.

Ein weiteres Nebenprodukt der Darstellung von zyklischen Ordnungen durch Basen ist die einfache Abschätzung der Zahl der zyklischen Ordnungen R mit maximal n Elementen aus einer endlichen Menge X. Sei n := |X|. Die Zahl der k -stelligen Relationen auf X ist $|\mathcal{R}^k(X)| = n^k$. Fordern wir Einfachheit, so bleiben davon $|\{R \in \mathcal{R}^k(X) \bullet R$ ist einfach$\}| = n! \;/\; (n - k)!$ übrig, falls $k \leq n$ gilt. Nutzen wir Rotationsabgeschlossenheit aus, so können wir dies weiter verringern zu $|\{R \in \mathcal{R}^*(X)k \bullet R$ ist einfach $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen$\}| = n! \;/\; (\; (n - k)!\; k\;)$. Beschränken wir uns nun auf die oben genannten durch Tripel darstellbaren zyklischen Ordnungen, so erhalten wir die grobe Abschätzung $|\{R \in \mathcal{R}^*(X) \bullet R$ ist eine zyklische Ordnung $\wedge \forall L \in (\underline{\text{li}}\ R)$ -Kens $\bullet\ 3 \leq |L|\}| \leq (n\ (n - 1)\ (n - 2)) \;/\; 3$ für $3 \leq n$. Für die Zahl aller zyklischen Ordnungen auf X erhalten wir $|\{R \in \mathcal{R}^*(X) \bullet R$ ist eine zyklische Ordnung$\}| \leq (n\ (n - 2)\ (n - 1)) \;/\; 3 + (n\ (n - 1)) \;/\; 2 + n + 1$. Weitere Verbesserungen sind durch Ausnutzung der Teilwortabgeschlossenheit und der anderen Axiome möglich. Ferner wäre es auch von Interesse, die Größe bestimmter Teilklassen zyklischer Ordnungen abzuschätzen. Für totale, zyklische Ordnungen ist dies aufgrund der Theoreme 3783 und 3819 leicht durchführbar. Problematischer scheint dies dagegen für die im folgenden Abschnitt definierte Klasse der global orientierten zyklischen Ordnungen zu sein.

7.17 Globale Orientiertheit

Globale Orientiertheit hatten wir schon in der Einleitung als wünschenswerte Eigenschaft zyklischer Ordnungen angesprochen. Grundsätzlich wollen wir darunter die Möglichkeit verstehen, eine (zyklische) Ordnung zu einer totalen (zyklischen) Ordnung zu erweitern.

S6803

VA6804∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

D6805 R ist zyklisch global orientiert :⇔
$\exists R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet R \subseteq R' \wedge R'$ ist eine totale, zyklische Ordnung

Die globale Orientiertheit ist eine Eigenschaft, die sich von einer Relation auf alle ihre Teilrelationen vererbt.

T6806 R ist zyklisch global orientiert ⇒
$\forall R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet R' \subseteq R \Rightarrow R'$ ist zyklisch global orientiert 6805

Für die in der vorigen Definition genannte Erweiterung R′ können wir natürlich fordern, daß sie das Alphabet erhält.

T6807 R ist zyklisch global orientiert ⇔
$\exists R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet R \subseteq R' \wedge \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(R') \wedge R'$ ist eine totale, zyklische Ordnung

G6808 R ist zyklisch global orientiert ⇒
$\exists R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet R \subseteq R' \wedge \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(R') \wedge R'$ ist eine totale, zyklische Ordnung 6805

A6809 R ist zyklisch global orientiert

G6810 $\exists R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet R \subseteq R' \wedge \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(R') \wedge R'$ ist eine totale, zyklische Ordnung

VT6811 $R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet R \subseteq R' \wedge R'$ ist eine totale, zyklische Ordnung 6805, 6809

T6812∗ $R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ 6811

T6813 $R \subseteq (R' \triangleright \mathcal{A}(R))$

G6814 $\forall w \in R \bullet w \in (R' \triangleright \mathcal{A}(R))$

VA6815 $w \in R$

G6816 $w \in (R' \triangleright \mathcal{A}(R))$

T6817∗ $w \in \mathbb{A}^*$ 6815

G6818 $\exists w' \in R' \bullet w = (w' \triangleright \mathcal{A}(R))$ 1703

T6819 $w \in R'$ 6811, 6815

G6820 $w = (w \triangleright \mathcal{A}(R))$ 6819

T6821	$\mathcal{A}(\mathrm{w}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	1245, 6815
G6822	$\mathbb{T}$	0647, 6821
T6823	$\mathcal{A}(\mathrm{R}) = \mathcal{A}(\mathrm{R}' \triangleright \mathcal{A}(\mathrm{R}))$	
T6824	$\mathcal{A}(\mathrm{R}' \triangleright \mathcal{A}(\mathrm{R})) = \mathcal{A}(\mathrm{R}') \cap \mathcal{A}(\mathrm{R})$	1710
T6825	$\mathcal{A}(\mathrm{R}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R}')$	1246, 6811
G6826	$\mathbb{T}$	6824, 6825
T6827	$(\mathrm{R}' \triangleright \mathcal{A}(\mathrm{R}))$ ist eine totale, zyklische Ordnung	3838, 6811
G6828	$\mathbb{T}$	6813, 6823, 6827

Eine zyklisch global orientierte, zyklische Ordnung R läßt sich als Vereinigung von Komponenten schreiben, die alle Projektionen einer totalen, zyklischen Ordnung R′ (die durch das vorige Theorem geliefert wurde) sind. Die Projektion erfolgt dabei auf alle Kens der zyklischen Ordnung R.

S6829

VA6830∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

A6831 R ist eine zyklische Ordnung

T6832 R ist zyklisch global orientiert $\Leftrightarrow$
$\exists\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}' \wedge \mathcal{A}(\mathrm{R}) = \mathcal{A}(\mathrm{R}') \wedge \mathrm{R}'$ ist eine totale, zyklische Ordnung $\wedge$
$\mathrm{R} = \bigcup \{(\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L}) \bullet \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens$\}$

G6833	R ist zyklisch global orientiert $\Rightarrow$ $\exists\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}' \wedge \mathcal{A}(\mathrm{R}) = \mathcal{A}(\mathrm{R}') \wedge \mathrm{R}'$ ist eine totale, zyklische Ordnung $\wedge$ $\mathrm{R} = \bigcup \{(\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L}) \bullet \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens$\}$	6805
A6834	R ist zyklisch global orientiert	
G6835	$\exists\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}' \wedge \mathcal{A}(\mathrm{R}) = \mathcal{A}(\mathrm{R}') \wedge \mathrm{R}'$ ist eine totale, zyklische Ordnung $\wedge$ $\mathrm{R} = \bigcup \{(\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L}) \bullet \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens$\}$	
VT6836	$\mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}' \wedge \mathcal{A}(\mathrm{R}) = \mathcal{A}(\mathrm{R}') \wedge \mathrm{R}'$ ist eine totale, zyklische Ordnung	6807, 6834
G6837	$\mathrm{R} = \bigcup \{(\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L}) \bullet \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens$\}$	6836
T6838	R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen	5480, 6831
T6839	$\mathrm{R} = \bigcup \{\mathrm{R}' \bullet \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens $\bullet\ \mathrm{R}' = (\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})\}$	2066, 6838
G6840	$\forall\, \mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens $\bullet\ (\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L}) = (\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L})$	6839
VA6841	$\mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens	
G6842	$(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L}) = (\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L})$	
T6843∗	$\mathrm{L} \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	0124, 6841
T6844	$\mathrm{L} \in (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})$ -Kliquen	0125, 6841
T6845	$(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L})$ ist eine totale, zyklische Ordnung	5496, 6831, 6844
T6846	$(\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L})$ ist eine totale, zyklische Ordnung	3838, 6836
T6847	$(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L}) \subseteq (\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L})$	1713, 6836
T6848	$\mathcal{A}(\mathrm{R} \triangleright \mathrm{L}) = \mathcal{A}(\mathrm{R}' \triangleright \mathrm{L})$	
G6849	$\mathcal{A}(\mathrm{R}) \cap \mathrm{L} = \mathcal{A}(\mathrm{R}') \cap \mathrm{L}$	1710
G6850	$\mathbb{T}$	6836
G6851	$\mathbb{T}$	3757, 6848, 3681, 6845, 6846, 6847

Die Definition der globalen Orientiertheit wird sehr anschaulich, wenn wir noch den (hier) informalen Begriff der Uhrzyklendarstellung einführen. In einer Uhrzyklendarstellung sind alle Kreise im Uhrzeigersinn um ein gemeinsames Zentrum orientiert. Beispiele für Uhrzyklendarstellungen sind Abb. 6.1, 6.2, 6.3 aber auch Abb. 1.2, 7.6, 7.25. Die Darstellungen in Abb. 7.7, 7.15, 7.10 sind dagegen keine Uhrzyklendarstellungen.

Die Bedingung der zyklischen globalen Orientiertheit ist offenbar äquivalent zur (und damit eine geeignete Formalisierung der) Existenz einer Uhrzyklendarstellung der Relation. Eine totale, zyklische Ordnung ist trivialerweise zyklisch global orientiert und besitzt eine Uhrzyklendarstellung.

- Haben wir eine zyklisch global orientierte Relation R, so können wir nach Theorem 6807 eine Uhrzyklendarstellung einer totalen, zyklischen Ordnung R′ mit Alphabet $\mathcal{A}(\mathrm{R}') = \mathcal{A}(\mathrm{R})$ finden. Die Elemente aus $\mathcal{A}(\mathrm{R})$ liegen also alle auf einem im Uhrzeigersinn orientierten Kreis. Diese Darstellung können wir nun modifizieren, indem wir den Kreis löschen, ohne die Lage der Elemente zu verändern. Die Relation R läßt sich nach Theorem 6832 als Vereinigung von totalen, zyklischen Ordnungen auffassen, die alle Projektionen von R′ sind. Wir zeichnen jede dieser totalen, zyklischen Ordnungen als orientierten Kreis ein. Da es sich um Projektionen von R′ handelt, können wir sie alle im Uhrzeigersinn um das ursprüngliche Zentrum orientieren.
- Haben wir eine Uhrzyklendarstellung eine Relation R, so können wir einen Strahl einzeichnen, der vom Zentrum ausgeht. Wenn wir den Strahl um 360° im Uhrzeigersinn drehen, während wir ihn im Zentrum festhalten, überstreicht er alle Elemente der zyklischen Ordnung. Die (sequentialisierte) Reihenfolge in der die Elemente vom Strahl erfaßt werden, können wir z.B. nach Theorem 3819 als totale, zyklische Ordnung auffassen. Offenbar ist diese totale, zyklische Ordnung eine Erweiterung von R. Damit ist R global orientiert.

Für eine genauere Untersuchung der Zusammenhänge wäre eine aufwendige Formalisierung des Darstellungsbegriffs und insbesondere der Uhrzyklendarstellung nötig. Wir belassen es jedoch bei diesem intuitiven Zusammenhang, da der Begriff der globalen Orientiertheit nach Definition 6805 für formale Betrachtungen wesentlich besser geeignet erscheint. Dies gilt erst recht in Hinblick auf unendliche Strukturen.

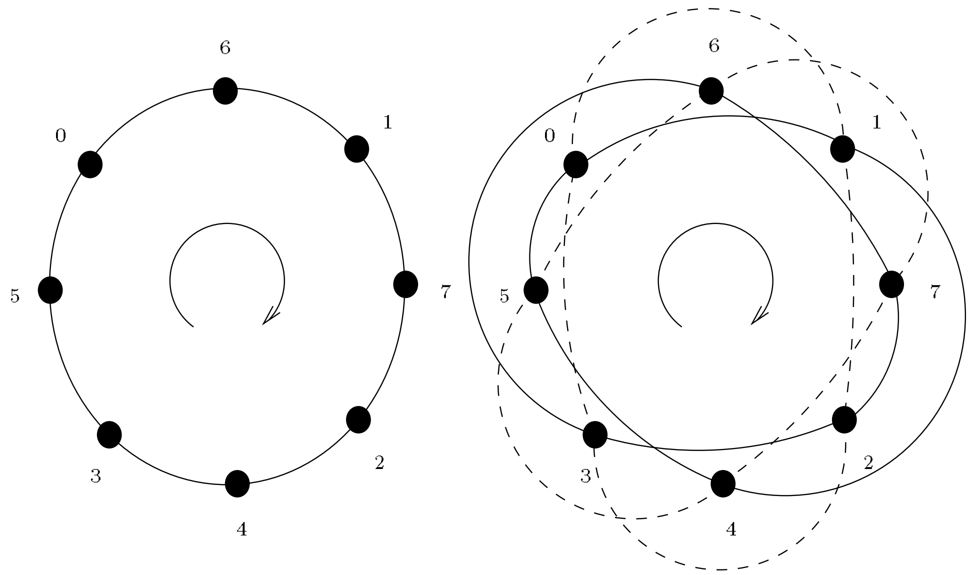


Abbildung 7.30: Uhrzyklendarstellungen

B6852

Wir wählen die nichttotale, zyklische Ordnung $\mathrm{R} = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2,3], [0,1,4,5], [2,3,6,7], [4,5,6,7]\}]$ aus Beispiel 5561 in Abb. 7.10. Zunächst stellen wir fest, daß es eine totale, zyklische Ordnung $\mathrm{R}' = (\overset{\text{rot}}{\equiv})\ [\{[0,6,1,7,2,4,3,5]\}]$ gibt, mit $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}'$ und $\mathcal{A}(\mathrm{R}') = \mathcal{A}(\mathrm{R})$. R ist also zyklisch global orientiert. Wir haben $(\underline{\text{li}}\ \mathrm{R})$ -Kens $= \{\{0,1,2,3\}, \{0,1,4,5\}, \{2,3,6,7\}, \{4,5,6,7\}\ \}$. Die Projektionen $\mathrm{R}_1 = (\mathrm{R}' \triangleright \{0,1,2,3\})$, $\mathrm{R}_2 = (\mathrm{R}' \triangleright \{0,1,4,5\})$, $\mathrm{R}_3 = (\mathrm{R}' \triangleright \{2,3,6,7\})$ und $\mathrm{R}_4 = (\mathrm{R}' \triangleright \{4,5,6,7\})$ sind totale, zyklische Ordnungen deren Vereinigung wieder $\mathrm{R} = \mathrm{R}_1 \cup \mathrm{R}_2 \cup \mathrm{R}_3 \cup \mathrm{R}_4$ liefert. Aus der Uhrzyklendarstellung von R′ in (siehe Abb. 7.30 links) erhalten wir durch die oben besprochene Modifikation eine Uhrzyklendarstellung von R (siehe Abb. 7.30 rechts). Umgekehrt läßt sich aus der Uhrzyklendarstellung von R auch die totale, zyklische Ordnung R$'$ auf die oben erklärte Weise gewinnen.

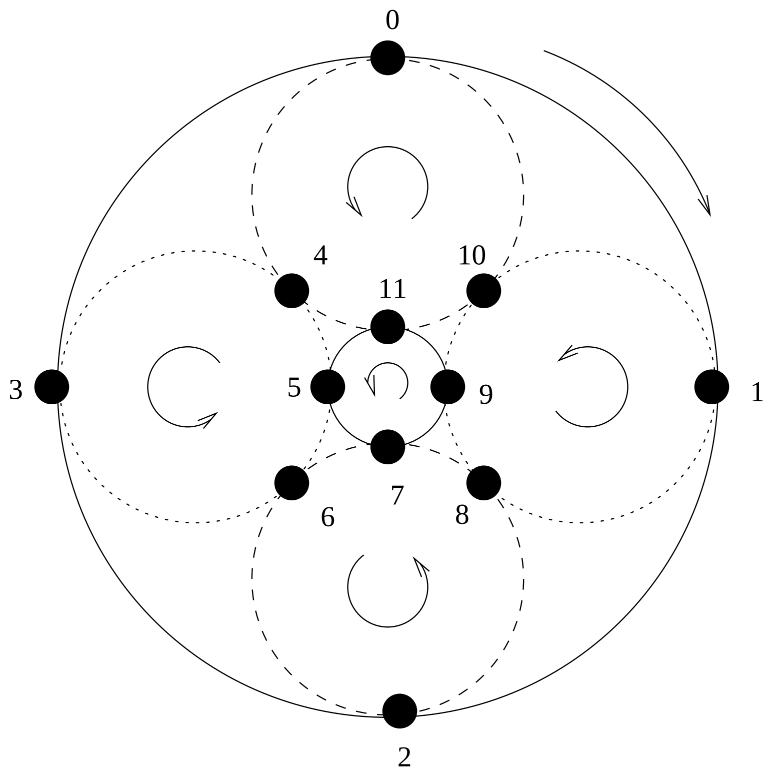


Abbildung 7.31: Verletzung der Vollständigkeit und der globalen Orientiertheit

Das folgende Beispiel für eine nicht global orientierte zyklische Ordnung basiert auf einer Struktur die Genrich schon in *Genrich 1971* angegeben hat.

B6853

Wir betrachten das Beispiel in Abb. 7.31 und lesen die Relation R $= (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2,3], [3,6,5,4], [2,8,7,6], [1,10,9,8], [0,4,11,10], [5,7,9,11]}]. R ist einfach, teilwort- und rotationsabgeschlossen, konsistent modulo Rotation und zyklisch transitiv. R ist nicht total und nicht vollständig, da z.B. die Klique $\{4,11,5\} \in (\underline{\text{li}}\ \text{R})$ -Kliquen nicht als Wort in R vorkommt. Außerdem ist R nicht global orientiert. Der formale Nachweis mit Hilfe von Definition 6805 ist selbst unter Ausnutzung der Symmetrie sehr mühsam. Anschaulich läßt sich die Nichtorientiertheit durch die Nichtexistenz einer Uhrzyklendarstellung begründen: Wir können die sechs Kreise nicht im Uhrzeigersinn um ein gemeinsames Zentrum orientieren.

Durch Umkehrung der Orientierung der vier gestrichelten und gepunkteten Kreise erhalten wir die Relation R$' = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2,3], [4,5,6,3], [6,7,8,2], [8,9,10,1], [10,11,4,0], [5,7,9,11]}]. Diese Relation ist ebenfalls nicht vollständig. R$'$ ist jedoch zyklisch global orientiert, da es beispielsweise zu der totalen, zyklischen Ordnung R$'' = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,9,10,1,8,11,2,6,3,4,5,7]}] erweitert werden kann. Der Grund für die Nichtorientierbarkeit von R ist also die unterschiedliche, relative Orientierung der Kreise.

Das vorige Beispiel können wir durch natürliche Vervollständigung zu einer zyklische Ordnung erweitern, die auch nicht zyklisch global orientiert ist.

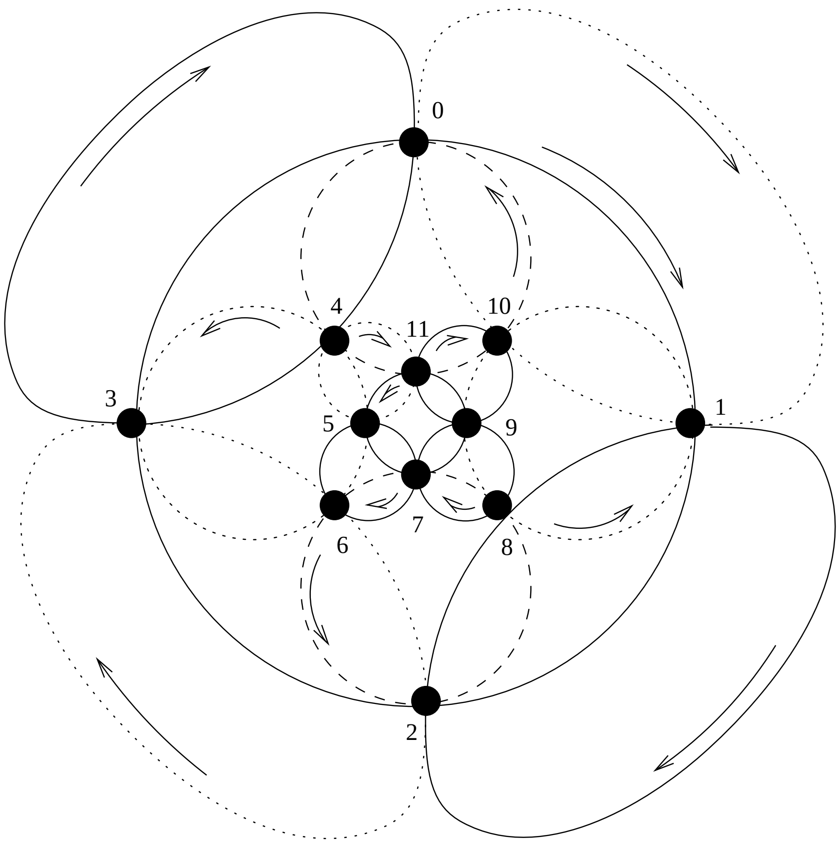


Abbildung 7.32: Eine nicht globale orientierte, zyklische Ordnung

B6854

Wir erweitern das vorige Beispiel um acht dreielementige Kreise und erhalten $\mathrm{R} = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2,3], [3,6,5,4], [2,8,7,6], [1,10,9,8], [0,4,11,10], [5,7,9,11], [4,3,0], [10,0,1], [8,1,2], [6,2,3], [4,11,5], [10,9,11], [8,7,9], [6,5,7]\}]$, wie in Abb. 7.32 dargestellt. Die Vollständigkeit ist jetzt zusätzlich erfüllt. Zyklische Transitivität bleibt gültig. Es handelt sich also um eine zyklische Ordnung, die als Erweiterung einer nicht global orientierten Relation ebenfalls nicht zyklisch global orientiert ist (Theorem 6806).

Durch eine andere, leichte Modifikation erhalten wir aus dem Beispiel 6853 eine zyklisch global orientierte, zyklische Ordnung.

B6855

Wir modifizieren die Relation R aus dem vorigen Beispiel, indem wir auf die Elemente $\{4,6,8,10\}$ verzichten. Wir erhalten die Relation $\mathrm{R}' = (\mathrm{R} \triangleright \{0,1,2,3,5,7,9,11\}) = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2,3], [3,5], [2,7], [1,9], [0,11], [5,7,9,11]\}]$ in Abb. 7.33. R' ist eine zyklische Ordnung und es gilt $\mathrm{R}' \subseteq \mathrm{R}'$. R' ist auch zyklisch global orientiert, denn es gilt $\mathrm{R}' \subseteq \mathrm{R}''$ mit $\mathrm{R}'' = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1,2,3,5,7,9,11]\}]$, einer totalen, zyklischen Ordnung. Damit können wir auch ohne Mühe eine Uhrzyklendarstellung finden.

Die Definition der globalen Orientiertheit ist recht intuitiv. Ein Nachteil der Definition ist jedoch die direkte Bezugnahme auf totale, zyklische Ordnungen. Deshalb ist es oft günstiger, den folgenden allgemeineren Begriff der globalen Konsistenz zu verwenden, der sowohl für zyklische wie auch azyklische Ordnungen sinnvoll ist.

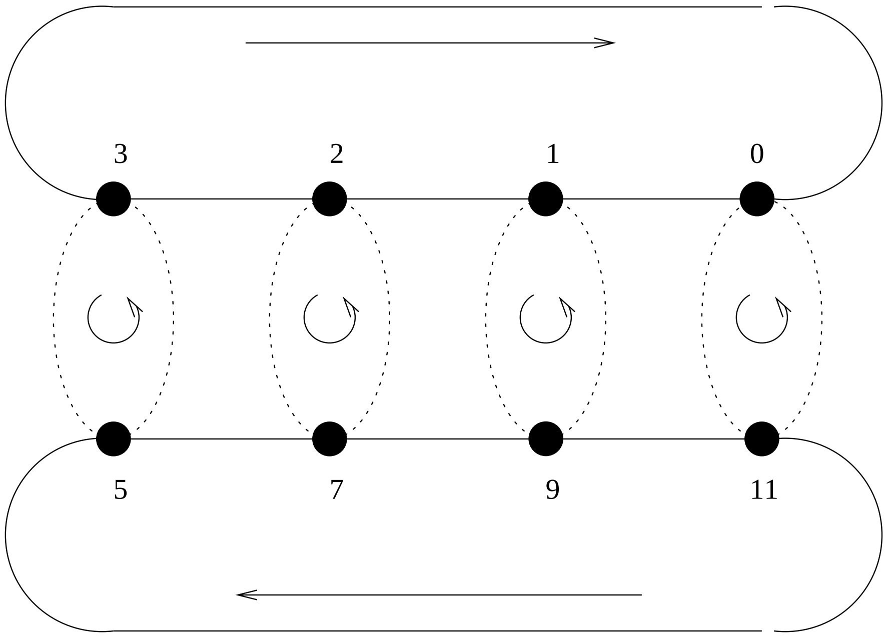


Abbildung 7.33: Eine zyklisch global orientierte, zyklische Ordnung

S6856

VA6857$*$ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

D6858 R ist global konsistent modulo E $:\Leftrightarrow \exists$ R$' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet$ R $\subseteq$ R$' \wedge$ R$'$ ist einfach $\wedge$ R$'$ ist total $\wedge$ R$'$ ist konsistent modulo E $\wedge$ R$'$ ist vollständig

D6859$*$ R ist global konsistent $:\Leftrightarrow$ R ist global konsistent modulo $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*)$

Wählen wir für die binäre Relation E die Rotationsäquivalenz, so erhalten wir gerade den Begriff der globalen Orientiertheit, wie die folgenden beiden Implikationen zeigen.

T6860 R ist zyklisch global orientiert $\Rightarrow$ R ist global konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$. 6805, 3681

T6861 R ist global konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv}) \Rightarrow$ R ist zyklisch global orientiert

A6862 R ist global konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$

G6863 R ist zyklisch global orientiert

VT6864 R$' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet$ R $\subseteq$ R$' \wedge$ R$'$ ist einfach $\wedge$ R$'$ ist total $\wedge$ R$'$ ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv}) \wedge$ R$'$ ist vollständig 6858, 6862

T6865$*$ R$' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ 6864

G6866 $\exists$ R$' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet$ R $\subseteq$ R$' \wedge$ R$'$ ist eine totale, zyklische Ordnung 6805

T6867 R$' \subseteq (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[R$'$] 1414

T6868 R $\subseteq (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[R$'$] 6864, 6867

T6869 $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[R$'$] ist einfach 1524, 6864

T6870 $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[R$'$] ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen 1446

T6871 $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[R$'$] ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen 1445

T6872 $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[R$'$] ist total 1538, 6864

T6873 $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[R$'$] ist vollständig 2542, 6864

T6874 $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[R$'$] ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ 1627, 6864

T6875 $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[R$'$] ist eine totale, zyklische Ordnung . 3681, 6869, 6870, 6871, 6872, 6873, 6874

G6876 $\mathbb{T}$ . . . 6868, 6875

Zusammenfassend erhalten wir die Äquivalenz der Begriffe der globalen Konsistenz modulo Rotation und der (zyklischen) globalen Orientiertheit.

T6877 R ist global konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ $\Leftrightarrow$ R ist zyklisch global orientiert . 6860, 6861

Setzen wir in Definition 6858 für E die Identität $\mathcal{ID}(\mathbb{A}^*)$ ein, so erhalten wir ein entsprechendes Theorem für die (azyklische) globale Orientiertheit, die wir bei azyklischen Ordnungen kennenlernten. Der Beweis erfolgt analog.

T6878 R ist global konsistent $\Leftrightarrow$ R ist global orientiert

7.18 Rotationsabschluß von azyklischen Ordnungen

Zyklische Ordnungen stellen eine Abstraktion azyklischer Ordnungen dar. Abstrahiert wird vom Anfang und Ende der azyklischen Ordnung. Genauer gesagt: Wir abstrahieren vom Anfang und Ende der einzelnen Wörter, indem wir die Rotationsabgeschlossenheit als ein Axiom zyklischer Ordnungen fordern. Da mit jedem Wort alle seine Rotationen in der Relation stehen, ist kein Anfang oder Ende mehr feststellbar.

Im folgenden wollen wir diesem Abstraktionsprozeß explizit durchführen, indem wir die Operation das Rotationsabschlusses auf azyklische Ordnungen anwenden. Wie nicht anders zu erwarten, ergibt sich in jedem Fall eine zyklische Ordnung.

S6879

VA6880$*$ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Wir betrachten die einzelnen Axiome zyklischer Ordnungen nach Definition 5480. Einfachheit, Teilwortabgeschlossenheit bleiben unter Rotationsabschluß erhalten. Rotationsabgeschlossenheit wird natürlich durch diese Operation hergestellt. Vollständigkeit bleibt ebenfalls erhalten. Die noch fehlende Eigenschaft ist die zyklische Transitivität. Wir werden sie im folgenden ableiten.

Dazu ist das folgende einfache Lemma nützlich.

T6881 $[x,y,z] \in (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R] \Leftrightarrow [x,y,z] \in R \vee [y,z,x] \in R \vee [z,x,y] \in R$

A6882 $[x,y,z] \in (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R]$

VT6883 $w \in R \bullet w \overset{\text{rot}}{\equiv} [x,y,z]$ . . . 6882

T6884$*$ $w \in \mathbb{A}^*$ . . . 6883

T6885 $w = [x,y,z] \vee w = [y,z,x] \vee w = [z,x,y]$ . . . 0538, 6883

T6886 $[x,y,z] \in R \vee [y,z,x] \in R \vee [z,x,y] \in R$ . . . 6883, 6885

A6887 $[x,y,z] \in R \vee [y,z,x] \in R \vee [z,x,y] \in R$

T6888 $[x,y,z] \overset{\text{rot}}{\equiv} [x,y,z]$ . . . 0509

T6889 $[y,z,x] \overset{\text{rot}}{\equiv} [x,y,z]$ . . . 0501

T6890 $[z,x,y] \overset{\text{rot}}{\equiv} [x,y,z]$ . . . 0500

T6891 $[x,y,z] \in (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R]$ . . . 6887, 6888, 6889, 6890

G6892 $\mathbb{T}$ . . . 6886, 6891

Die zyklische Transitivität des Rotationsabschlusses einer Relation R folgt aus der Transitivität von R, sofern wir als Nebenbedingungen noch Einfachheit, Teilwortabgeschlossenheit und 3 - Vollständigkeit von R voraussetzen.

T6893 R ist einfach $\land$ R ist $(\sqsupseteq)$-abgeschlossen $\land$ R ist 3 -vollständig $\land$
R ist transitiv $\Rightarrow$ $(\overset{\text{rot}}{\equiv})[R]$ ist zyklisch transitiv

A6894 R ist einfach
A6895 R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen
A6896 R ist 3 -vollständig
A6897 R ist transitiv
G6898 $(\overset{\text{rot}}{\equiv})[R]$ ist zyklisch transitiv
G6899 $\forall$ a,b,c,d $\bullet$ $[a,b,c] \in (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R] \land [a,c,d] \in (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R] \Rightarrow [a,b,d] \in (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R]$ . . . 3841
VA6900 a,b,c,d $\bullet$ $[a,b,c] \in (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R]$
A6901 $[a,c,d] \in (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R]$
G6902 $[a,b,d] \in (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R]$
T6903$*$ $a \in \mathbb{A} \land b \in \mathbb{A} \land c \in \mathbb{A} \land d \in \mathbb{A}$ . . . 6900, 6901
T6904 $[a,b,c] \in R \lor [b,c,a] \in R \lor [c,a,b] \in R$ . . . 6881, 6900
T6905 $[a,c,d] \in R \lor [c,d,a] \in R \lor [d,a,c] \in R$ . . . 6881, 6901
G6906 $[a,b,d] \in R \lor [b,d,a] \in R \lor [d,a,b] \in R$ . . . 6881
T6907 $(<_R)$ ist eine strenge Ordnung . . . 3398, 6894, 6895, 6897
T6908 $(<_R)$ ist transitiv . . . 0093, 6907
T6909 $(<_R)$ ist asymmetrisch . . . 0093, 6907
T6910 $\forall$ x,y,z $\bullet$ $x <_R y \land y <_R z \Rightarrow [x,y,z] \in R$ . . . 3357, 6894, 6895, 6896, 6897
A6911 $[a,b,c] \in R$
  T6912 $a <_R b$ . . . 3350, 6911
  T6913 $b <_R c$ . . . 3350, 6911
  T6914 $a <_R c$ . . . 3350, 6911
  A6915 $[a,c,d] \in R$
    T6916 $c <_R d$ . . . 3350, 6915
    T6917 $b <_R d$ . . . 0084, 6908, 6913, 6916
    T6918 $[a,b,d] \in R$ . . . 6910, 6912, 6917
  A6919 $[c,d,a] \in R$
    T6920 $c <_R a$ . . . 3350, 6919
    T6921 $\mathbb{F}$ . . . 0082, 6909, 6914, 6920
  A6922 $[d,a,c] \in R$
    T6923 $d <_R a$ . . . 3350, 6922
    T6924 $[d,a,b] \in R$ . . . 6910, 6923, 6912
A6925 $[b,c,a] \in R$
  T6926 $b <_R c$ . . . 3350, 6925
  T6927 $c <_R a$ . . . 3350, 6925
  A6928 $[a,c,d] \in R$
    T6929 $a <_R c$ . . . 3350, 6928
    T6930 $\mathbb{F}$ . . . 0082, 6909, 6929, 6927
  A6931 $[c,d,a] \in R$
    T6932 $c <_R d$ . . . 3350, 6931
    T6933 $b <_R d$ . . . 0085, 6908, 6926, 6932
    T6934 $d <_R a$ . . . 3350, 6931
    T6935 $[b,d,a] \in R$ . . . 6910, 6933, 6934
  A6936 $[d,a,c] \in R$
    T6937 $a <_R c$ . . . 3350, 6936
    T6938 $\mathbb{F}$ . . . 0082, 6909, 6937, 6927
A6939 $[c,a,b] \in R$
  T6940 $c <_R a$ . . . 3350, 6939
  T6941 $a <_R b$ . . . 3350, 6939
  A6942 $[a,c,d] \in R$
    T6943 $a <_R c$ . . . 3350, 6942
    T6944 $\mathbb{F}$ . . . 0082, 6909, 6943, 6940
  A6945 $[c,d,a] \in R$
    T6946 $d <_R a$ . . . 3350, 6945

T6947 [d,a,b] $\in$ R 6910, 6946, 6941
A6948 [d,a,c] $\in$ R
T6949 a $<_R$ c 3350, 6948
T6950 $\mathbb{F}$ 0082, 6909, 6949, 6940
G6951 $\mathbb{T}$ 6904, 6905, 6918, 6921, 6924, 6930, 6935, 6938, 6944, 6947, 6950

Die Bedingungen des vorigen Theorems sind für azyklische Ordnungen erfüllt. Als Zusammenfassung erhalten wir das gewünschte Resultat.

T6952 R ist eine azyklische Ordnung $\Rightarrow$ $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$[R] ist eine zyklische Ordnung 2726, 5480, 1535, 1457, 1443, 2540, 6893, 2215

Da auch die Totalität eine Eigenschaft ist, die unter Rotationsabschluß bestehen bleibt, stellt insbesondere der Rotationsabschluß einer totalen, azyklischen Ordnung eine totale, zyklische Ordnung dar.

T6953 R ist eine totale, azyklische Ordnung $\Rightarrow$ $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$[R] ist eine totale, zyklische Ordnung 2727, 5483, 6952, 1536

Nach Theorem 1491 und 1882 werden Alphabet und Abhängigkeitsrelation durch Rotationsabschluß nicht verändert. Die Kliquen und Kens der resultierenden zyklischen Ordnung sind also genau die der azyklischen Ordnung.

Mit Hilfe des Rotationsabschlusses können wir eine Äquivalenzrelation auf azyklischen Ordnungen definieren: Zwei azyklische Ordnungen sind äquivalent gdw. ihre Rotationsabschlüsse gleich sind. Der oben angesprochene Abstraktionsprozeß identifiziert äquivalente azyklische Ordnungen. Die Äquivalenzklassen werden durch zyklische Ordnungen repräsentiert. Dies ist nur deshalb möglich, weil die Äquivalenz auf der Ebene der Relationen auf Rotationsäquivalenz von Wörtern zurückgeführt wurde.

Wir haben einen sehr einfachen Zusammenhang zwischen azyklischen Ordnungen und zyklischen Ordnungen hergestellt: Jede azyklische Ordnung läßt sich durch Rotationsabschluß zu einer zyklischen Ordnung schließen. Umgekehrt enthalten also bestimmte zyklische Ordnungen eine azyklische Ordnung als Teilrelation und werden durch diese als Rotationsabschluß generiert. Bei diesen zyklischen Ordnungen handelt sich also um Erweiterungen von azyklischen Ordnungen.

Insgesamt lassen sich Theoreme 6952 und 6953 als weitere Motivation der Axiome von (totalen) zyklischen Ordnungen interpretieren. Ferner zeigt sich, wie die Axiome von azyklischen Ordnungen mit denen von zyklischen Ordnungen zusammenspielen.

B6954

Die totale, azyklische Ordnung R = $(\sqsupseteq)$[{[0,1,2]}] generiert die totale, zyklische Ordnung $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$[R] = $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,1,2]}].

B6955

Die nichttotale, azyklische Ordnung R = $(\sqsupseteq)$[{[0,2,3], [1,2,3]}] liefert die nichttotale, zyklische Ordnung $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$[R] = $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$[{[0,2,3], [1,2,3]}].

B6956

R = {[0], [1], []} ist sowohl eine azyklische wie auch eine zyklische Ordnung. Die Relation ist nicht total. Es gilt R = $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$[R].

B6957

Die zyklische Ordnung $R = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,2,3], [1,2,4], [0,2,4], [1,2,3]\}]$ wird durch die azyklische Ordnung $R' = (\sqsupseteq)[\{[0,2,3], [1,2,4], [0,2,4], [1,2,3]\}]$ generiert, d.h. $R = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[R']$. Wir können jedoch auch die azyklische Ordnung $R'' = (\sqsupseteq)[\{[2,3,0], [2,4,1], [2,4,0], [2,3,1]\}]$ verwenden, denn $R = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R'']$. R ist eine Erweiterung von beiden azyklischen Ordnungen, d.h. $R' \subseteq R$ und $R'' \subseteq R$.

Die zyklische Ordnung R wird auch von der Relation $R''' = (\sqsupseteq)[\{[0,2,3], [1,2,4], [0,2,4], [3,2,1]\}]$ generiert, also $R = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R''']$. Allerdings ist R''' nicht konsistent also auch nicht transitiv und damit keine azyklische Ordnung.

B6958

Die zyklische Ordnung $R = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,2,3], [1,2,4]\}]$ ist eine Teilrelation der zyklischen Ordnung aus dem vorigen Beispiel. Sie wird beispielsweise durch die Relationen $R' = (\sqsupseteq)[\{[0,2,3], [1,2,4]\}]$ und $R'' = (\sqsupseteq)[\{[2,3,0], [2,4,1]\}]$ generiert, also $R = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R'] = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R'']$. R' ist nicht transitiv, also keine azyklische Ordnung. R'' ist eine azyklische Ordnung.

B6959

Die zyklische Ordnung $R = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1], [1,2], [2,3]\}]$ aus Beispiel 5487, Abb. 7.8 wird durch die azyklische Ordnung $R' = (\sqsupseteq)[\{[0,1], [2,1], [2,3]\}]$ generiert, also $R = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R']$.

Intuitiv erhalten wir aus bestimmten zyklischen Ordnungen azyklische Ordnungen, indem wir sie an geeigneter Stelle aufscheiden. Diese azyklischen Ordnungen lassen sich durch Rotationsabschluß wieder zur ursprünglichen zyklischen Ordnung schließen. Besonders deutlich wird dieser Sachverhalt, wenn wir die Uhrzyklendarstellung verwenden. Allerdings eignet sich nicht jede Stelle zum Aufschneiden, wie die Beispiele zeigen. Bei Wahl einer ungeeigneten Stelle erhalten wir eine Relation, die keine azyklische Ordnung ist.

Sofort stellt sich die Frage, ob alle zyklischen Ordnungen als Rotationsabschluß von azyklischen Ordnungen darstellbar sind. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt. Zyklische Ordnungen sind also nicht nur zyklisch geschlossene, azyklische Ordnungen. Dies ist auch der Grund für die höhere Komplexität und Interessantheit .... der Theorie zyklischer Ordnungen.

B6960

Wir wählen die zyklische Ordnung $R = (\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})[\{[0,1], [1,4,2,5], [2,3]\}]$ (siehe Abb. 7.34). Diese Relation erhalten wir aus der zyklischen Ordnung im vorigen Beispiel durch Hinzufügen der Elemente 4 und 5. Wir wollen nun versuchen, R als Rotationsabschluß einer azyklischen Ordnung R', also $R = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R']$, zu schreiben. Wir führen die Annahme, es gäbe eine solche azyklische Ordnung R', zum Widerspruch.

Jedes der drei oben genannten Wörter muß offenbar in Form einer rotationsäquivalenten Version in R' präsent sein: $([1,4,2,5] \in R' \vee [4,2,5,1] \in R' \vee [2,5,1,4] \in R' \vee [5,1,4,2] \in R') \wedge ([0,1] \in R' \vee [1,0] \in R') \wedge ([2,3] \in R' \vee [3,2] \in R')$.

Damit können wir zwei Fälle unterscheiden:

- $[1,4,2,5] \in R' \vee [4,2,5,1] \in R'$. Aus der Teilwortabgeschlossenheit von R' folgt $[4,2] \in R'$ und $[2,5] \in R'$. Wir führen eine weitere Fallunterscheidung anhand von $[2,3] \in R \vee [3,2] \in R$ durch: In beiden Fällen nutzen wir die Transitivität von R' aus. $[2,3] \in R'$ liefert $[4,3] \in R'$, also $(4,3) \in (\text{li } R')$. $[3,2] \in R'$ liefert $[3,5] \in R'$, also $(3,5) \in (\text{li } R')$.
- $[2,5,1,4] \in R' \vee [5,1,4,2] \in R'$. Aus der Teilwortabgeschlossenheit von R' folgt $[5,1] \in R'$ und $[1,4] \in R'$. Wir führen eine weitere Fallunterscheidung anhand von $[0,1] \in R' \vee [1,0]$

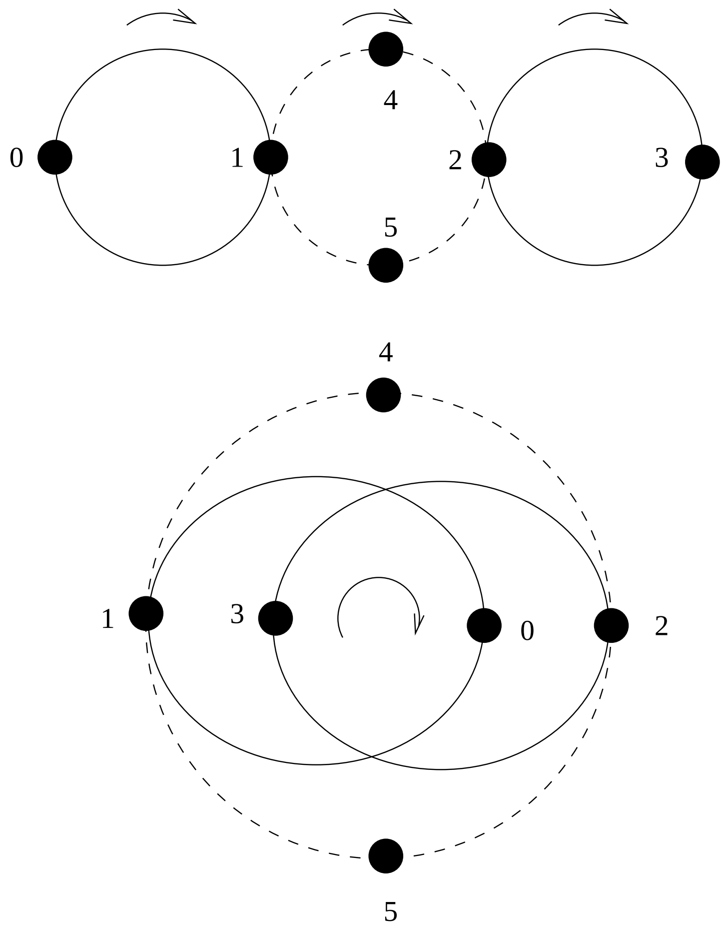


Abbildung 7.34: Verschiedene Darstellungen einer zyklischen Ordnung, die nicht aus einer azyklischen Ordnung gewonnen werden kann.

$\in$ R′ durch: In beiden Fällen nutzen wir die Transitivität von R′ aus. [0,1] $\in$ R′ liefert [0,4] $\in$ R′, also (0,4) $\in$ (li R′). [1,0] $\in$ R′ liefert [5,0] $\in$ R′, also (5,0) $\in$ (li R′).

Da (li R′) = (li R) gilt, erhalten wir in allen Fällen einen Widerspruch zur der Abhängigkeitsrelation der zyklischen Ordnung R. Die zyklische Ordnung R ist also nicht als Rotationsabschluß einer azyklischen Ordnung darstellbar.

Das letzte Beispiel zeigt, daß es zyklische Ordnungen gibt, bei denen keine Stelle (z.B. in der Uhrzyklendarstellung) zum Aufschneiden geeignet ist, eine azyklische Ordnung zu liefern. Tatsächlich ist dies für die meisten interessanten zyklischen Ordnungen der Fall.

Im folgenden wird gezeigt: Alle totalen, zyklischen Ordnungen können an einem beliebigem Element aufgeschnitten werden und sind als Rotationsabschluß der resultierenden totalen, azyklischen Ordnung darstellbar.

S6961

VA6962$*$ R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

Die folgende Operation, die wir später nur auf totale, zyklische Ordnungen und damit auf rotations- und teilwortabgeschlossene Relationen anwenden werden, erlaubt es uns eine Relation R in einem Element x aufzuschneiden: Die resultierende Relation (R||x) enthält alle Wörter von R mit x als erstem Element und deren Teilwörter. Wir bezeichnen $(R\|x)$ auch als Schnitt von R in x.

D6963 $R\|x := (\sqsupseteq)[\{w \in R \bullet w_0 = x\}]$
T6964* $(R\|x) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ . . . 6963

Der Schnitt von R in x ist im Teilwortabschluß von R enthalten und für teilwortabgeschlossene Relationen somit eine Teilmenge von R.

T6965 $(R\|x) \subseteq (\sqsupseteq)[R]$

- **T6966** $\{w \in R \bullet w_0 = x\} \subseteq R$
- **T6967** $(\sqsupseteq)[\ \{w \in R \bullet w_0 = x\}\ ] \subseteq (\sqsupseteq)[R]$ . . . 1403, 6966
- **G6968** $\mathbb{T}$ . . . 6963, 6967

Jedes Element des Schnittes $(R\|x)$ stammt aus R.

T6969 $\mathcal{A}(R\|x) \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 1246, 6965, 1496

Einfachheit überträgt sich von R auf alle Schnitte $(R\|x)$.

T6970 R ist einfach $\Rightarrow$ $(R\|x)$ ist einfach

- **A6971** R ist einfach
- **G6972** $(R\|x)$ ist einfach
- **T6973** $(\sqsupseteq)[R]$ ist einfach . . . 1534, 6971
- **G6974** $\mathbb{T}$ . . . 1280, 6973, 6965

Teilwortabgeschlossenheit der Schnitte gilt per Definition.

T6975 $(R\|x)$ ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen . . . 6963, 1444

Unter der Nebenbedingung der Rotationsabgeschlossenheit überträgt sich Totalität und Vollständigkeit von R auf alle Schnitte.

T6976 $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist total $\wedge$ R ist vollständig $\Rightarrow$
$\forall\ x \in \mathcal{A}(R) \bullet (R\|x)$ ist total $\wedge$ $(R\|x)$ ist vollständig

- **A6977** R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen
- **A6978** R ist total $\wedge$ R ist vollständig
- **VA6979** $x \in \mathcal{A}(R)$
- **G6980** $(R\|x)$ ist total $\wedge$ $(R\|x)$ ist vollständig
- **G6981** $\forall\ C \bullet C \subseteq \mathcal{A}(R\|x) \wedge C$ ist endlich $\Rightarrow \exists\ w \in (R\|x) \bullet \mathcal{A}(w) = C$ . . . 2290
- **VA6982** $C \bullet C \subseteq \mathcal{A}(R\|x)$
- **A6983** C ist endlich
- **G6984** $\exists\ w \in (R\|x) \bullet \mathcal{A}(w) = C$
- **T6985*** $C \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ . . . 6982
- **T6986** $C \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 6982, 6969
- **T6987** $C \cup \{x\} \subseteq \mathcal{A}(R)$ . . . 6986, 6979
- **T6988** $(C \cup \{x\})$ ist endlich . . . 6983
- **VT6989** $w \in R \bullet \mathcal{A}(w) = C \cup \{x\}$ . . . 2281, 6978, 6987, 6988
- **T6990*** $w \in \mathbb{A}^*$ . . . 6989
- **D6991** $R' := \{w \in R \bullet w_0 = x\}$
- **T6992*** $R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ . . . 6991
- **G6993** $\exists\ w \in (\sqsupseteq)[R']) \bullet \mathcal{A}(w) = C$ . . . 6963, 6991
- **T6994** $x \in \mathcal{A}(w)$ . . . 6989
- **VT6995** $i \in \mathcal{I}(w) \bullet w_i = x$ . . . 0356, 6994
- **T6996** $w \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} (w \gg - i)$ . . . 0512
- **T6997** $(w \gg - i) \in R$ . . . 1343, 6977, 6989, 6996
- **T6998** $w \gg - i_0 = x$ . . . 0483, 6995

T6999	$(w \gg -i) \in R'$	6991, 6997, 6998
T7000	$\mathcal{A}(w \gg -i) = \mathcal{A}(w)$	0486
A7001	$x \in C$	
T7002	$(w \gg -i) \in (\sqsupseteq)[R']$	1413, 6999
T7003	$\mathcal{A}(w) = C$	6989, 7001
T7004	$\mathcal{A}(w \gg -i) = C$	7000, 7003
G7005	$\mathbb{T}$	7002, 7004
A7006	$x \notin C$	
T7007	$((w \gg -i) \triangleright C) \sqsubseteq (w \gg -i)$	0655
T7008	$((w \gg -i) \triangleright C) \in (\sqsupseteq)[R']$	6999, 7007
T7009	$\mathcal{A}((w \gg -i) \triangleright C) = \mathcal{A}(w \gg \text{-}i) \cap C$	0657
T7010	$\mathcal{A}((w \gg -i) \triangleright C) = \mathcal{A}(w) \cap C$	7000, 7009
T7011	$C \subseteq \mathcal{A}(w)$	6989
T7012	$\mathcal{A}((w \gg -i) \triangleright C) = C$	7010, 7011
G7013	$\mathbb{T}$	7008, 7012

Für eine einfache Relation R verstärkt sich die Konsistenz modulo Rotation zur Konsistenz (modulo Identität) der Schnitte.

T7014 R ist einfach $\wedge$ R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv}) \Rightarrow (R\|x)$ ist konsistent

A7015	R ist einfach	
A7016	R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$	
G7017	$(R\|x)$ ist konsistent	
D7018	$R' := \{w \in R \bullet w_0 = x\}$	
T7019*	$R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	7018
G7020	$(\sqsupseteq)[R']$ ist konsistent	7018, 6963
T7021	$R' \subseteq R$	7018
T7022	R' ist einfach	1280, 7015, 7021
G7023	R' ist konsistent	1645, 7022
T7024	R' ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$	1553, 7016, 7021
G7025	$\forall\, u \in R', v \in R' \bullet u \sim v$	1544
VA7026	$u \in R', v \in R'$	
G7027	$u \sim v$	
T7028*	$u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^*$	7026
D7029	$D := \mathcal{A}(u) \cap \mathcal{A}(v)$	
T7030*	$D \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$	7029
G7031	$(u \triangleright D) = (v \triangleright D)$	0878, 7029
T7032	$u \overset{\text{rot}}{\sim} v$	1547, 7024, 7026
T7033	$(u \triangleright D) \overset{\text{rot}}{\equiv} (v \triangleright D)$	0992, 7029, 7032
T7034	$u_0 = x \wedge v_0 = x$	7018, 7026
T7035	$x \in \mathcal{A}(u) \wedge x \in \mathcal{A}(v)$	0349, 7034
T7036	$x \in D$	7029, 7035
T7037	$u_0 \in D \wedge v_0 \in D$	7035, 7034
T7038	$u \triangleright D_0 = u_0 \wedge v \triangleright D_0 = v_0$	0675, 7037
T7039	$u \triangleright D_0 = v \triangleright D_0$	7038, 7034
T7040	u ist einfach $\wedge$ v ist einfach	1279, 7022, 7026
T7041	$(u \triangleright D)$ ist einfach $\wedge$ $(v \triangleright D)$ ist einfach	0656, 7040
G7042	$\mathbb{T}$	0533, 7041, 7033, 7039

Ist R rotations- und teilwortabgeschlossen, dann ist der Rotationsabschluß jedes Schnittes $(R\|x)$ in R enthalten.

T7043 R ist $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$ -abgeschlossen $\Rightarrow (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R\|x] \subseteq R$

A7044	R ist $(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$ -abgeschlossen
G7045	$(\overset{\text{rot}}{\equiv})[R\|x] \subseteq R$

D7046	$\mathrm{R}' := \{\mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{w}_0 = \mathrm{x}\}$	
T7047$*$	$\mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	7046
G7048	$(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[(\sqsupseteq)[\mathrm{R}']] \subseteq \mathrm{R}$	7046, 6963
G7049	$(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}'] \subseteq \mathrm{R}$	1382
T7050	$\mathrm{R} = (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}]$	1417, 7044
G7051	$(\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}'] \subseteq (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}]$	7050
T7052	$\mathrm{R}' \subseteq \mathrm{R}$	7046
G7053	$\mathbb{T}$	1403, 7052

Die Umkehrung des vorigen Theorems gilt unter zusätzlicher Annahme von Totalität, Vollständigkeit und Konsistenz modulo Rotation.

T7054 R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist total $\wedge$ R ist vollständig $\wedge$ R ist konsistent modulo $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv}) \Rightarrow \forall\, \mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{R}) \bullet \mathrm{R} \subseteq (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}\|\mathrm{x}]$

A7055	R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen	
A7056	R ist total $\wedge$ R ist vollständig	
A7057	R ist konsistent modulo $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$	
VA7058	$\mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{R})$	
G7059	$\mathrm{R} \subseteq (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}\|\mathrm{x}]$	
D7060	$\mathrm{R}' := \{\mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{w}_0 = \mathrm{x}\}$	
T7061$*$	$\mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$	7060
G7062	$\mathrm{R} \subseteq (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[(\sqsupseteq)[\mathrm{R}']]$	7060, 6963
G7063	$\forall\, \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{w} \in (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[(\sqsupseteq)[\mathrm{R}']]$	
VA7064	$\mathrm{w} \in \mathrm{R}$	
G7065	$\mathrm{w} \in (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[(\sqsupseteq)[\mathrm{R}']]$	
T7066$*$	$\mathrm{w} \in \mathbb{A}^*$	7064
T7067	$\mathcal{A}(\mathrm{w}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	1245, 7064
T7068	$\mathcal{A}(\mathrm{w}) \cup \{\mathrm{x}\} \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{R})$	7067, 7058
T7069	$(\mathcal{A}(\mathrm{w}) \cup \{\mathrm{x}\})$ ist endlich	0240
VT7070	$\mathrm{w}' \in \mathrm{R} \bullet \mathcal{A}(\mathrm{w}') = \mathcal{A}(\mathrm{w}) \cup \{\mathrm{x}\}$	2281, 7056, 7068, 7069
T7071$*$	$\mathrm{w}' \in \mathbb{A}^*$	7070
T7072	$\mathrm{w} \overset{\mathrm{rot}}{\sim} \mathrm{w}'$	1547, 7057, 7064, 7070
T7073	$\mathcal{A}(\mathrm{w}) \subseteq \mathcal{A}(\mathrm{w}')$	7070
T7074	$\mathrm{w} \overset{\mathrm{rot}}{\sqsubseteq} \mathrm{w}'$	1189, 7073, 7072
T7075	$\mathrm{x} \in \mathcal{A}(\mathrm{w}')$	7070
VT7076	$\mathrm{i} \in \mathcal{I}(\mathrm{w}') \bullet \mathrm{w}'_{\mathrm{i}} = \mathrm{x}$	0356, 7075
T7077	$\mathrm{w}' \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} (\mathrm{w}' \gg -\, \mathrm{i})$	0512
T7078	$(\mathrm{w}' \gg -\, \mathrm{i}) \in \mathrm{R}$	1343, 7055, 7070, 7077
T7079	$\mathrm{w}' \gg -\, \mathrm{i}_0 = \mathrm{x}$	0483, 7076
T7080	$(\mathrm{w}' \gg -\, \mathrm{i}) \in \mathrm{R}'$	7060, 7078, 7079
T7081	$\mathrm{w}' \overset{\mathrm{rot}}{\sqsubseteq} (\mathrm{w}' \gg -\, \mathrm{i})$	0695, 7077
T7082	$\mathrm{w} \overset{\mathrm{rot}}{\sqsubseteq} (\mathrm{w}' \gg -\, \mathrm{i})$	0084, 0704, 7074, 7081
T7083	$\mathrm{w} \in (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\mathrm{R}']$	7080, 7082
G7084	$\mathbb{T}$	1382, 7083

Als Zusammenfassung dieser Eigenschaften von Schnitten erhalten wir im folgenden das angekündigte Resultat.

S7085

VA7086$*$	$\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A7087	R ist eine totale, zyklische Ordnung

Eine totale, zyklische Ordnung, läßt sich als Rotationsabschluß jedes ihrer Schnitte darstellen, sofern sie mindestens ein Element enthält.

T7088 $\forall\, x \in \mathcal{A}(R) \bullet R = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R\|x]$ . . . 3681, 7087, 7043, 7054

Dabei sind die Schnitte immer totale, azyklische Ordnungen.

T7089 $\forall\, x \in \mathcal{A}(R) \bullet (R\|x)$ ist eine totale, azyklische Ordnung . . . 3681, 7087, 2836, 6970, 6975, 6976, 7014

Insgesamt ist jede (auch die leere) totale, zyklische Ordnung als Rotationsabschluß einer totalen, azyklischen Ordnung darstellbar.

T7090 $\exists\, R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet R = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R'] \wedge R'$ ist eine totale, azyklische Ordnung

- **A7091** $\mathcal{A}(R) = \emptyset$
  - **T7092** R ist vollständig . . . 3681, 7087
  - **T7093** $R = \{[]\}$ . . . 2242, 7092, 7091
  - **T7094** $R = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[\{[]\}]$ . . . 7093, 1541
  - **T7095** $\{[]\}$ ist eine totale, azyklische Ordnung . . . 2732
  - **G7096** $\mathbb{T}$ . . . 7094, 7095
- **A7097** $\mathcal{A}(R) \neq \emptyset$
  - **VT7098** $x \in \mathcal{A}(R)$ . . . 7097
  - **T7099** $R = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R\|x]$ . . . 7088, 7098
  - **T7100** $(R\|x)$ ist eine totale, azyklische Ordnung . . . 7089, 7098
  - **G7101** $\mathbb{T}$ . . . 7098, 7099, 7100

Den Begriff des Schnittes, den wir hier nur in sehr spezieller Weise für totale, zyklische Ordnungen definiert haben, werden wir im nächsten Abschnitt auf (allgemeine) zyklische Ordnungen verallgemeinern. Dabei werden wir inbesondere auf die restriktive Forderung nach der Existenz gewisser zum Aufschneiden geeigneter Elemente verzichten. Nichtsdestotrotz wird das vorige, recht intuitive Theorem dort eine Schlüsselrolle spielen.

Abschließend kommen wir noch einmal auf den im vorigen Abschnitt eingeführten Begriff der zyklischen, globalen Orientiertheit zurück. Alle zyklischen Ordnungen, die als Rotationsabschluß aus azyklischen Ordnungen generiert werden können, besitzen nämlich diese Eigenschaft. Die globale Orientiertheit der azyklischen Ordnungen verwandelt sich erwartungsgemäß unter Rotationsabschluß zur zyklischen, globalen Orientiertheit, wie die folgenden Überlegungen zeigen.

S7102

VA7103∗ $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

T7104 R ist global konsistent $\Rightarrow (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R]$ ist global konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$

- **A7105** R ist global konsistent
- **G7106** $(\overset{\text{rot}}{\equiv})[R]$ ist global konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$
- **VT7107** $R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet R \subseteq R' \wedge R'$ ist einfach $\wedge\ R'$ ist total $\wedge$ R' ist konsistent $\wedge\ R'$ ist vollständig . . . 6858, 7105, 1546
- **T7108∗** $R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ . . . 7107
- **G7109** $\exists\, R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R] \subseteq R' \wedge R'$ ist einfach $\wedge\ R'$ ist total $\wedge$ R' ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv}) \wedge R'$ ist vollständig . . . 6858
- **T7110** $(\overset{\text{rot}}{\equiv})[R] \subseteq (\overset{\text{rot}}{\equiv})[R']$ . . . 1403, 7107
- **T7111** $(\overset{\text{rot}}{\equiv})[R']$ ist einfach . . . 1535, 7107
- **T7112** $(\overset{\text{rot}}{\equiv})[R']$ ist total . . . 1536, 7107
- **T7113** $(\overset{\text{rot}}{\equiv})[R']$ ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ . . . 1700, 7107
- **T7114** $(\overset{\text{rot}}{\equiv})[R']$ ist vollständig . . . 2540, 7107

G7115 T 7110, 7111, 7112, 7113, 7114

T7116 R ist eine azyklische Ordnung $\Rightarrow$ $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$[R] ist global konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ 3672, 6878, 7104

T7117 R ist eine azyklische Ordnung $\Rightarrow$ $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$[R] ist zyklisch global orientiert . . 7116, 6877

Das vorige Theorem zeigt die globale Orientiertheit für eine Teilklasse zyklischer Ordnungen. Ein wichtiger Punkt für zukünftige Untersuchungen wäre, diese Teilklasse zu vergrößern, bzw. andere Teilklassen oder einfache, hinreichende Bedingungen zu finden, die zur globalen Orientiertheit führen. Ein weiterer Schritt könnte dann die Angabe von notwendigen Bedingungen sein, um insgesamt zu einer einfacheren Charakterisierung der globalen Orientiertheit zu gelangen. Eine sehr intuitive jedoch nicht besonders einfache Charakterisierung der globalen Orientiertheit wird sich im folgenden Abschnitt auf natürliche Weise aus der Definition von Schnitten ergeben.

Wünschenswert wäre natürlich auch ein Algorithmus zur effizienten Prüfung der globalen Orientiertheit, der sich eventuell auf bestimmte Teilklassen zyklischer Ordnungen beschränkt. Hierbei könnten möglicherweise Zusammenhänge zwischen endlichen, global orientierten, zyklischen Ordnungen und sicheren und lebendigen Synchronisationsgraphen bzw. Netzsystemen hilfreich sein, die wir in dieser Arbeit nicht genauer untersucht haben.

7.19 Schnitte

Von einem Schnitt einer zyklischen Ordnung erwarten wir intuitiv, das er eine Stelle definiert, an der sich die zyklische Ordnung so aufschneiden läßt, daß die Zyklizität verschwindet. Formal können wir einen Schnitt als Teilrelation R′ der zyklischen Ordnung R auffassen, der sich durch Rotationsabschluß $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$[R′] wieder zur zyklischen Ordnung R schließt. Es stellt sich nur noch die Frage, wie wir die Nichtzyklizität des Schnittes R′ beschreiben.

Im vorigen Abschnitt haben wir versucht, zyklische Ordnungen R so aufzuschneiden, daß der Schnitt R′ eine azyklische Ordnung darstellt. Für eine Teilklasse von zyklischen Ordnungen war dies tatsächlich möglich. Es gab jedoch auch zyklische Ordnungen (sogar global-orientierte) bei denen ein Schnitt dieser Art nicht möglich war, wie durch Beispiel 6960 demonstriert wurde.

Wir wollen deshalb den folgenden Weg beschreiten: Statt direkt zu fordern, daß es sich bei einem Schnitt um eine azyklische Ordnung handelt, verwenden wir die schwächere Bedingung, daß ein Schnitt zu einer azyklischen Ordnung erweiterbar sein soll. Offensichtlich ist dies ebenfalls hinreichend für die Formalisierung der Nichtzyklizität, auf die es uns bei der Schnittdefinition ankommt.

Damit erhalten wir die folgende Definition. Da sich jede azyklische Ordnung zu einer totalen, azyklischen Ordnunge erweitern läßt, ist es unwesentlich, ob wir hier azyklische oder totale, azyklische Ordnungen verwenden.

S7118

VA7119∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

D7120 R′ ist ein Schnitt von R $:\Leftrightarrow$ $\mathrm{R} = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}'] \wedge$
$\exists\, \mathrm{R}'' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R}' \subseteq \mathrm{R}'' \wedge$ R″ ist eine azyklische Ordnung

T7121 R′ ist ein Schnitt von R $:\Leftrightarrow$ $\mathrm{R} = (\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}'] \wedge$
$\exists\, \mathrm{R}'' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R}' \subseteq \mathrm{R}'' \wedge$ R″ ist eine totale, azyklische Ordnung 7120, 3671, 3672, 2727

Intuitiv erwarten wir, daß eine global orientierte, zyklische Ordnung (man denke an die Uhrzyklendarstellung) an einem so definierten Schnitt aufschneidbar ist. Daß dies tatsächlich der Fall ist, wird durch das folgende Theorem bestätigt. Nebenbei zeigt dies auch, daß die Schnittdefinition im Gegensatz zur vorher genannten Alternative für alle global orientierten, zyklischen Ordnungen geeignet ist.

S7122

VA7123∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A7124 R ist eine zyklische Ordnung

Jede global orientierte, zyklische Ordnung besitzt mindestens einen Schnitt. Zum Beweis greifen wir auf die durch die globale Orientiertheit postulierte totale, zyklische Ordnung zurück und schneiden diese mit Hilfe von Theorem 7090 auf.

T7125 R ist zyklisch global orientiert $\Rightarrow \exists\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R}'$ ist ein Schnitt von R

A7126 R ist zyklisch global orientiert
G7127 $\exists\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R}'$ ist ein Schnitt von R
VT7128 $\mathrm{R}'' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}'' \wedge \mathrm{R}''$ ist eine totale, zyklische Ordnung 6805, 7126
T7129∗ $\mathrm{R}'' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ 7128
VT7130 $\mathrm{R}''' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R}'' = (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}'''] \wedge \mathrm{R}'''$ ist eine totale, azyklische Ordnung . 7090, 7128
T7131∗ $\mathrm{R}''' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ 7130
T7132 R ist $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen 5480, 7124
T7133 $\mathrm{R} = (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]$ 1448, 7132
T7134 $\mathrm{R} \subseteq (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{R} \cap \mathrm{R}''']$
G7135 $\forall\, \mathrm{w} \in \mathrm{R} \bullet \mathrm{w} \in (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{R} \cap \mathrm{R}''']$
VA7136 $\mathrm{w} \in \mathrm{R}$
G7137 $\mathrm{w} \in (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{R} \cap \mathrm{R}''']$
T7138 $\mathrm{R} \subseteq (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}''']$ 7128, 7130
T7139 $\mathrm{w} \in (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}''']$ 7138, 7136
VT7140 $\mathrm{u} \in \mathrm{R}''' \bullet \mathrm{u} \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} \mathrm{w}$ 7139
T7141 $\mathrm{w} \overset{\mathrm{rot}}{\equiv} \mathrm{u}$ 0513, 7140
T7142 $\mathrm{u} \in (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]$ 7136, 7141
T7143 $\mathrm{u} \in \mathrm{R}$ 7133, 7142
T7144 $\mathrm{u} \in \mathrm{R} \cap \mathrm{R}'''$ 7143, 7140
G7145 $\mathbb{T}$ 7144, 7140
T7146 $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{R} \cap \mathrm{R}'''] \subseteq \mathrm{R}$
T7147 $\mathrm{R} \cap \mathrm{R}''' \subseteq \mathrm{R}$
T7148 $(\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{R} \cap \mathrm{R}'''] \subseteq (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}]$ 1403, 7147
G7149 $\mathbb{T}$ 7133, 7148
T7150 $\mathrm{R} = (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{R} \cap \mathrm{R}''']$ 7134, 7146
T7151 $\mathrm{R} \cap \mathrm{R}''' \subseteq \mathrm{R}'''$
T7152 $(\mathrm{R} \cap \mathrm{R}''')$ ist ein Schnitt von R 7121, 7150, 7151, 7130
G7153 $\mathbb{T}$ 7152

Interessanterweise gilt auch die Umkehrung des vorigen Theorems: Besitzt eine zyklische Ordnung mindestens einen Schnitt, so ist sie global orientiert. Die zyklische globale Orientiertheit wird in diesem Fall aus der globalen Orientiertheit des Schnittes, bzw. seiner Erweiterung zu einer azyklischen Ordnung, abgeleitet.

T7154 $\exists\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R}'$ ist ein Schnitt von R $\Rightarrow$ R ist zyklisch global orientiert

VA7155∗ $\mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A7156 R' ist ein Schnitt von R
G7157 R ist zyklisch global orientiert
T7158 $\mathrm{R} = (\overset{\mathrm{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}']$ 7121, 7156
VT7159 $\mathrm{R}'' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R}' \subseteq \mathrm{R}'' \wedge \mathrm{R}''$ ist eine totale, azyklische Ordnung 7121, 7156
T7160∗ $\mathrm{R}'' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$ 7159
G7161 $\exists\, \mathrm{R}''' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}''' \wedge \mathrm{R}'''$ ist eine totale, zyklische Ordnung 6805

T7162	$(\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}'']$ ist eine totale, zyklische Ordnung	6953, 7159
T7163	$(\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}'] \subseteq (\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}'']$	1403, 7159
T7164	$\mathrm{R} \subseteq (\overset{\text{rot}}{\equiv})[\mathrm{R}'']$	7163, 7158
G7165	$\mathbb{T}$	7164, 7162

Zusammenfassend ist also die Aufschneidbarkeit (bzgl. der genannten Schnittdefinition) sogar äquivalent zur globalen Orientiertheit.

T7166 R ist zyklisch global orientiert $\Leftrightarrow \exists\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R}'$ ist ein Schnitt von R 7125, 7154

Die hier gewählte Schnittdefinition (Schnitte als Teilrelationen) unterscheidet sich erheblich von der aus der Concurrency-Theorie bekannten Definition, in der Schnitte als Kens der Relation co aufgefaßt werden. Unsere Definition ist zwar komplizierter, fordert dafür aber nicht, daß die die Stelle des Schnittes definierenden Elemente existieren, d.h. zur zyklischen Ordnung gehören müssen. In dieser Hinsicht erinnert die Definition also eher an Dedekind-Schnitte. Inwieweit eine Vervollständigung von zyklischen Ordnungen entsprechend der Dedekindschen Methode zu Definition der reellen Zahlen möglich ist, wollen wir hier allerdings nicht untersuchen.

Kapitel 8

Ausblick

Diese Arbeit erhebt in keiner Weise den Anspruch die Theorie der zyklischen Ordnungen erschöpfend zu behandeln. Vielmehr werden nur elementare Eigenschaften von zyklischen Ordnungen aufgezeigt. Sie bildet also eher einen ersten Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen und bietet einen formalen Rahmen dafür an. Deshalb werden wir abschließend noch einige ungeklärte Punkte diskutieren, aus denen sich mögliche Richtungen für zukünftige Studien ergeben könnten. Wir wollen diese Punkte in Form einer Liste von provisorischen (!) Definitionen festhalten, wobei Querbeziehungen teilweise angedeutet, jedoch keinesfalls formal ausgearbeitet werden sollen. Insbesondere bleiben die Bezüge zur Netztheorie informal, da formale Vorbereitungen den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden.

Es werden zunächst für einzelne, zyklische Ordnungen eine Reihe spezieller Eigenschaften benannt, die zum Teil rein mathematisch und zum Teil durch mit zyklischen Ordnungen verwandte Gebiete wie Netztheorie und Concurrency-Theorie motiviert sind. Jeder dieser Eigenschaften sowie deren Kombination führt zu einer besonderen Klasse von zyklischen Ordnungen. Weiterhin werden einige einfache Beziehungen zwischen zyklischen Ordnungen eingeführt. Abschließend wird noch angedeutet, wie man die schon in der Einleitung angesprochenen Trennungsstrukturen im Rahmen von verallgemeinerten Relationen axiomatisieren könnte.

Vermutungen sind im folgenden mit **C** markiert, während offene Fragen mit **Q** gekennzeichnet werden.

8.1 Zusammenhang

Eine zyklische Ordnung kann in mehr oder weniger strengem Sinne zusammenhängend sein. Wichtig erscheint dabei insbesondere der Zusammenhang bzgl. der Relationen (li R) und (im R). Noch strenger ist die Forderung nach Zusammenhang auf Kens, die in ähnlicher Form in *Stehr 1993* bzgl. (im R) als Axiom für die Concurrency-Theorie gefordert wird. Diese und noch stärkere Zusammenhangsforderungen werden in *Kummer 1995* untersucht.

S7167

VA7168	$\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}), \mathrm{S} \in \mathcal{BR}(\mathbb{A})$
A7169	R ist eine zyklische Ordnung
D7170	R ist S -zusammenhängend $:\Leftrightarrow \mathrm{S}^*_{\mathcal{A}(\mathrm{R})} = \mathcal{A}(\mathrm{R})^2$
D7171	im R $:= (\prec_\mathrm{R}) \cup (\prec_\mathrm{R})^{-1}$
T7172	R ist $(\prec_\mathrm{R})$ -zusammenhängend $\Rightarrow$ R ist (im R) -zusammenhängend
T7173	R ist (im R) -zusammenhängend $\Rightarrow$ R ist (li R) -zusammenhängend

T7174 R ist Ken-endlich $\Rightarrow$
(R ist (li R) -zusammenhängend $\Leftrightarrow$ R ist (im R) -zusammenhängend)

S7175

VA7176 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $\mathrm{S} \in \mathcal{BR}(\mathbb{A})$

A7177 R ist eine zyklische Ordnung

T7178 R ist S -zusammenhängend auf Kens :$\Leftrightarrow$ $\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ $(\mathrm{S}|\mathrm{L})^*_{\mathrm{L}} = \mathrm{L}^2$

T7179 R ist (li R) -zusammenhängend auf Kens

T7180 R ist ($\prec_{\mathrm{R}}$) -zusammenhängend auf Kens $\Rightarrow$
R ist (im R) -zusammenhängend auf Kens

T7181 R ist Ken-endlich $\Leftrightarrow$ R ist ($\prec_{\mathrm{R}}$) -zusammenhängend auf Kens

8.2 Endlichkeit

Abgesehen von den bereits verwendeten Formen der Endlichkeit zyklischer Ordnungen ist insbesondere die Endlichkeit des Verzweigungsgrades bestimmter abgeleiteter, binärer Relationen wie (im R) und (co R) interessant. Die Querbeziehungen zwischen diesen und weiteren Endlichkeitsbegriffen werden in *Kummer 1995* eingehend untersucht.

S7182

VA7183 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $\mathrm{S} \in \mathcal{BR}(\mathbb{A})$

A7184 R ist eine zyklische Ordnung

D7185 R ist S -endlich :$\Leftrightarrow$ $\forall$ x $\in \mathcal{A}(\mathrm{R})$ $\bullet$ S[{x}] ist endlich

T7186 R ist (li R) -endlich $\Rightarrow$ R ist Ken-endlich

T7187 R ist (li R) -endlich $\Rightarrow$ R ist (im R) -endlich

T7188 R ist Ken-endlich $\wedge$ (($\underline{\text{li}}$ R) -Kens) ist endlich $\Leftrightarrow$ R ist endlich

T7189 R ist (co R) -endlich $\Rightarrow$ $\forall$ C $\in$ ($\underline{\text{co}}$ R)-Kens $\bullet$ C ist endlich

8.3 Dichte

Entsprechend der üblichen Dichte für (azyklischen) Ordnungen definieren wir die Dichte zyklischer Ordnungen. Die Forderung lautet: Zwischen zwei Elementen liegt immer ein weiteres Element. Diese Eigenschaft impliziert natürlich die Unendlichkeit des Alphabets also auch der zyklischen Ordnung.

S7190

VA7191 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

A7192 R ist eine zyklische Ordnung

D7193 R ist dicht :$\Leftrightarrow$ $(\prec_{\mathrm{R}}) = \emptyset$

T7194 R ist dicht $\Rightarrow$ $\neg$ R ist endlich

Natürlich sind auch zyklische Ordnungen denkbar, die nur partiell dicht sind. Beispielsweise könnten bestimmte Kenprojektionen dicht sein, während andere endlich sind.

Abgesehen von den verschiedenen Begriffen der Dichte und Endlichkeit gibt es für (azyklische) Ordnungen eine Reihe weiterer Diskretheitseigenschaften, insbesondere solche, die im Rahmen der Theorie nichtsequentieller Prozesse von Bedeutung sind (siehe hierzu *Best und Fernández 1988*). Eine Übertragung dieser Begriffe auf zyklische Ordnungen wurde bisher nicht durchgeführt.

Im Gegensatz zur (konventionellen) Dichte definieren wir im folgenden einige aus der Concurrency-Theorie stammende Formen der Dichte, die nicht zwangläufig die Unendlichkeit der zyklischen Ordnung implizieren.

Die Elemente von Kens von ($\underline{\text{li}}$ R) nennen wir auch Linien. Die Elemente der Kens von ($\underline{\text{co}}$ R) werden (wie in der Concurrency-Theorie) als Schnitte bezeichnet. Dieser etwas mißverständliche Begriff ist klar von unserer Schnittdefinition (Schnitte als Teilrelationen) im vorigen Kapitel zu unterscheiden.

S7195

VA7196 $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

A7197 R ist eine zyklische Ordnung

Eine zyklische Ordnung nennen wir K-dicht gdw. jede Linie und jeder Schnitt sich in mindestens (und folglich auch in genau) einem Element schneiden.

D7198 R ist K-dicht $:\Leftrightarrow \forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens, C $\in$ ($\underline{\text{co}}$ R) -Kens $\bullet$ $L \cap C \neq \emptyset$

T7199 R ist K-dicht $:\Leftrightarrow \forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens, C $\in$ ($\underline{\text{co}}$ R) -Kens $\bullet$ $|L \cap C| = 1$

Eine Linie bezeichnen wir als Referenzlinie gdw. sie jeden Schnitt schneidet. Analog definieren wir einen Referenzschnitt, der alle Linien schneidet.

D7200 L ist eine Referenzlinie von R $:\Leftrightarrow$
L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\wedge\ \forall$ C $\in$ ($\underline{\text{co}}$ R) -Kens $\bullet$ $L \cap C \neq \emptyset$

D7201 C ist ein Referenzschnitt von R $:\Leftrightarrow$
C $\in$ ($\underline{\text{co}}$ R) -Kens $\wedge\ \forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ $L \cap C \neq \emptyset$

K-Dichte bedeutet also, daß alle Linien Referenzlinien und/oder alle Schnitte Referenzschnitte sind.

T7202 R ist K-dicht $\Leftrightarrow$
($\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ L ist eine Referenzlinie von R) $\vee$
($\forall$ C $\in$ ($\underline{\text{co}}$ R) -Kens $\bullet$ C ist ein Referenzschnitt von R)

T7203 R ist K-dicht $\Leftrightarrow$
($\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ L ist eine Referenzlinie von R) $\wedge$
($\forall$ C $\in$ ($\underline{\text{co}}$ R) -Kens $\bullet$ C ist ein Referenzschnitt von R)

T7204 R ist K-dicht $\Rightarrow$
($\exists$ C $\bullet$ C ist ein Referenzschnitt von R) $\wedge$ ($\exists$ L $\bullet$ L ist eine Referenzlinie von R)

Die Existenz eines Referenzschnittes reicht nicht aus, die zyklische, globale Orientiertheit zu garantieren. Die Umkehrung ist jedoch noch unklar:

Q7205 R ist zyklisch global orientiert $\Rightarrow \exists$ C $\bullet$ C ist ein Referenzschnitt von R

Daß selbst die K-Dichte nicht hinreichend für die globale Orientiertheit ist, wird durch die folgenden Überlegungen nahegelegt. Die K-Dichte läßt sich nämlich in vielen Fällen durch Einführung sogenannter Eigenelemente sicherstellen, die eine zyklische Ordnung nicht wesentlich (insbesondere in Hinblick auf globale Orientiertheit) verändern.

S7206

VA7207 $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $S \in \mathcal{BR}(\mathbb{A})$

A7208 R ist eine zyklische Ordnung

D7209 x ist ein S -Eigenelement $:\Leftrightarrow \exists!$ K $\in$ S -Kens $\bullet$ x $\in$ K

T7210 $\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ ($\exists$ x $\in$ L $\bullet$ x ist ein ($\underline{\text{li}}$ R) -Eigenelement) $\Rightarrow$
L ist eine Referenzlinie von R

T7211 ($\forall$ L $\in$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens $\bullet$ $\exists$ x $\in$ L $\bullet$ x ist ein ($\underline{\text{li}}$ R) -Eigenelement) $\Rightarrow$ R ist K-dicht

Vervollständigen wir das Beispiel 6853 einer nicht global orientierten, zyklischen Ordnung um Eigenelemente auf allen Linien, so erhalten wie eine K-dichte, zyklische Ordnung, die nicht global orientiert ist. K-Dichte ist also (selbst im endlichen Fall) nicht stark genug, um globale Orientiertheit sicherzustellen.

Für die Klasse den zyklischen Ordnungen mit endlichen Linien können wir statt der K-Dichte die stärkere F-Dichte fordern, die schon in *Stehr 1993* für Concurrency-Strukturen eingeführt wurde.

S7212

VA7213 R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A7214 R ist eine zyklische Ordnung
A7215 R ist Ken-endlich

Statt Linien verwenden wir nun Zyklen der unmittelbaren Nachfolgerrelation. Ansonsten ist die Definition analog zur K-Dichte.

D7216 R ist F-dicht $:\Leftrightarrow$
$\forall$ C $\in$ ($\underline{\text{co}}$ R) -Kens $\bullet$ $\forall$ w $\in \mathbb{A}^*$ $\bullet$ w ist ein ($\prec_{\text{R}}$) -Zyklus $\Rightarrow \mathcal{A}(\text{w}) \cap \text{C} \neq \emptyset$
T7217 R ist F-dicht $\Rightarrow$ R ist K-dicht

Für die Definition der schwachen F-Dichte reicht es aus, daß es einen Schnitt gibt, der alle Zyklen (und somit auch alle Linien) schneidet.

D7218 R ist schwach F-dicht $:\Leftrightarrow$
$\exists$ C $\in$ ($\underline{\text{co}}$ R) -Kens $\bullet$ $\forall$ w $\in \mathbb{A}^*$ $\bullet$ w ist ein ($\prec_{\text{R}}$) -Zyklus $\Rightarrow \mathcal{A}(\text{w}) \cap \text{C} \neq \emptyset$

Es bleibt noch zu überprüfen, ob die schwache F-Dichte zur Ableitung der globalen Orientiertheit ausreicht.

Q7219 R ist schwach F-dicht $\Rightarrow$ R ist zyklisch global orientiert

8.4 Abschnürungen

Eine zyklische Ordnung R, in der sich alle Kens mindestens in einem gemeinsamen Element x schneiden, heißt eine in x abgeschnürte zyklische Ordnung. Die Bedingung, daß {x} ein Ken von ($\underline{\text{co}}$ R) oder ($\underline{\text{co}}$ R)[{x}] leer ist, ist natürlich dazu äquivalent.

S7220

VA7221 R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A7222 R ist ein zyklische Ordnung
D7223 R ist abgeschnürt in x $:\Leftrightarrow$ x $\in$ ($\bigcap$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens)
D7224 R ist abgeschnürt $:\Leftrightarrow$ ($\bigcap$ ($\underline{\text{li}}$ R) -Kens) $\neq \emptyset$
T7225 R ist abgeschnürt in x $\Leftrightarrow$ {x} $\in$ ($\underline{\text{co}}$ R) -Kens
T7226 R ist abgeschnürt in x $\Leftrightarrow$ ($\underline{\text{co}}$ R)[{x}] $= \emptyset$

Mit Hilfe dieser Definition ergibt sich noch eine besondere Sichtweise auf azyklische Ordnungen: Jede azyklische Ordnung läßt sich unter Hinzufügen eines Abschnürelements ∞ als eine in ∞ abgeschnürte, zyklische Ordnung (genauer: als Paar (R,∞)) darstellen. Intuitiv wird die azyklische Ordnung durch ein Element ∞ im Unendlichen geschlossen. Somit lassen sich zyklische Ordnungen auf natürliche Weise als Verallgemeinerungen azyklischer Ordnungen auffassen. Diese Darstellung ist von der alleinigen Bildung des Rotationsabschlusses azyklischer Ordnungen (einem Abstraktionsprozeß) zu unterscheiden. Die zusätzliche Angabe des Elements ∞ ist wesentlich, da es gerade die Information erhält, die durch die Abstraktion verloren geht.

S7227

VA7228 R $\in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, x $\in \mathbb{A}$
A7229 R ist ein azyklische Ordnung
D7230 [x : R] := {[x : w] $\bullet$ w $\in$ R}

D7231 $\mathrm{R}\bigcirc \mathrm{x} := (\overset{\mathrm{rot}}{\sqsupseteq})[\,[\mathrm{x} : \mathrm{R}]\,]$
T7232 $\mathrm{R} \subseteq (\mathrm{R}\bigcirc \mathrm{x})$
A7233 $\mathrm{x} \notin \mathcal{A}(\mathrm{R})$
C7234 $(\mathrm{R}\bigcirc \mathrm{x})$ ist eine zyklische Ordnung
C7235 $(\mathrm{R}\bigcirc \mathrm{x})$ ist abgeschnürt
C7236 R ist total $\Rightarrow$ $(\mathrm{R}\bigcirc \mathrm{x})$ ist total

8.5 Kombinatorische, zyklische Ordnungen

Eine Ordnung ist kombinatorisch gdw. sie mit dem transitiven Abschluß ihrer unmittelbaren Nachfolgerrelation identisch ist. Das wesentliche Merkmal kombinatorischer Ordnungen ist, daß sie durch Angabe ihrer unmittelbaren Nachfolgerrelation eindeutig bestimmt sind. Eine mögliche Definition von kombinatorischen, zyklischen Ordnungen wäre daher die folgende.

S7237
VA7238 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A7239 R ist eine zyklische Ordnung
D7242 R ist kombinatorisch $:\Leftrightarrow$
$\{\mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R}'$ ist eine zyklische Ordnung $\wedge (\prec_{\mathrm{R}'}) = (\prec_{\mathrm{R}})\} = \{\mathrm{R}\}$
D7240 R ist schwach kombinatorisch $:\Leftrightarrow$
$\{\mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R}'$ ist eine zyklische Ordnung $\wedge (\prec_{\mathrm{R}'}) = (\prec_{\mathrm{R}}) \wedge (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R}') = (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})\} = \{\mathrm{R}\}$
T7243 R ist kombinatorisch $\Rightarrow$ R ist schwach kombinatorisch
T7241 R ist Ken-endlich $\Rightarrow$ R ist schwach kombinatorisch
T7244 R ist total $\wedge$ R ist endlich $\Rightarrow$ R ist kombinatorisch
Q7245 R ist endlich $\wedge$ R ist abgeschnürt $\Rightarrow$
R ist kombinatorisch

Natürlich wäre es wünschenswert, nicht nur über hinreichende Kriterien (wie die Ken-Endlichkeit) für diese interessante Eigenschaft zu verfügen, sondern auch über notwendigende und äquivalente Kriterien, die (innerhalb von Beweisen) leicht zu überprüfen sind.

Eine mit der letzten Definition von schwach kombinatorischen, zyklischen Ordnungen, eng verknüpftes Problem wäre die Frage, wieviele endliche zyklische Ordnungen es bei gegebener Nachfolgerrelation überhaupt gibt.

8.6 Eindeutige Ergänzbarkeit

Der transitive Abschluß einer binären Relation S ist die kleinste transitive Erweiterung von S. Sie ist aufgrund der Abgeschlossenheit der binären Relationen unter Schnittbildung immer eindeutig definiert. Der Begriff des transitiven Abschlusses soll im folgenden in Form der eindeutigen Ergänzung auf verallgemeinerte Relationen übertragen werden.

Sei R eine (verallgemeinerte) Relation. Die eindeutige Ergänzung von R zu einer azyklischen Ordnung ist die kleinste Erweiterung von R, die eine azyklische Ordnung darstellt. Diese Ergänzung existiert nicht immer. Wenn sie existiert, ist sie jedoch eindeutig.

Die eindeutige Ergänzung von R zu einer zyklischen Ordnung ist die kleinste Erweiterung von R, die eine zyklische Ordnung ist. Die eindeutige Ergänzung von wird in der folgenden Definition als R^+ bezeichnet. Diese Erweiterung existiert natürlich nicht immer und wenn sie existiert, muß sie nicht eindeutig sein. R^+ wäre in diesem Fall undefiniert. Man beachte diesen fundamentalen Unterschied gegenüber der oben genannten Ergänzung zu einer azyklischen Ordnung, die immer eindeutig ist. Eine Ursache für diesen Unterschied ist offensichtlich die Nichtabgeschlossenheit zyklischer Ordnungen unter Schnittbildung.

S7246

VA7247 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
D7248 $\mathrm{R}^+ := \iota\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}' \wedge \mathrm{R}'$ ist eine zyklische Ordnung $\wedge$
$\forall\, \mathrm{R}'' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}'' \wedge \mathrm{R}''$ ist eine zyklische Ordnung $\Rightarrow \mathrm{R}' \subseteq \mathrm{R}''$
T7249 R ist eine zyklische Ordnung $\Rightarrow \mathrm{R}^+ = \mathrm{R}$
C7250 R ist eine zyklische Ordnungsbasis $\Rightarrow \mathrm{R}^+ = (\mathrm{KV\ R})$
C7251 R ist eine zyklische Ordnung $\Rightarrow (\mathrm{R}|3)^+ = \mathrm{R}$

8.7 Zyklische Kausalordnungen

Ähnlich wie spezielle Ordnungen als Kausalordnungen bezeichnet werden (siehe *Best und Fernández 1988*), können wir zyklische Kausalordungen einführen. Das wesentliche Merkmal ist eine Partitionierung des Alphabets $\mathcal{A}(\mathrm{R})$ in zwei Mengen S und T, die wir als Stellen und Transitionen bezeichnen wollen. Insgesamt soll das Tripel $(\mathrm{S,T,}\prec_{\mathrm{R}})$ ein stellenunverzweigtes Netz bilden, da sich die Theorie zyklischer Ordnungen in der Systeminterpretation nur mit (bestimmten) Synchronisationsaspekten, nicht jedoch mit Entscheidungen (an verzweigten Stellen) und der damit verbundenen Informationflüsse beschäftigt.

S7252

VA7253 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A7254 R ist eine zyklische Ordnung
A7255 R ist zyklisch global orientiert
A7256 R ist Ken-endlich
D7257 R ist bipartit $:\Leftrightarrow \exists\, \mathrm{S,T} \bullet$
$\mathrm{S} \cup \mathrm{T} = \mathcal{A}(\mathrm{R}) \wedge \mathrm{S} \cap \mathrm{T} = \emptyset \wedge \prec_{\mathrm{R}} \subseteq (\mathrm{S} \times \mathrm{T}) \cup (\mathrm{T} \times \mathrm{S})$
D7258 R ist eine zyklische Kausalordnung $:\Leftrightarrow \exists\, \mathrm{S,T} \bullet$
$\mathrm{S} \cup \mathrm{T} = \mathcal{A}(\mathrm{R}) \wedge \mathrm{S} \cap \mathrm{T} = \emptyset \wedge \prec_{\mathrm{R}} \subseteq (\mathrm{S} \times \mathrm{T}) \cup (\mathrm{T} \times \mathrm{S}) \wedge$
$(\ \forall\, \mathrm{s} \in \mathrm{S} \bullet |{}^{\bullet}\mathrm{s}_{\mathrm{R}}| = 1 \wedge |\mathrm{s}^{\bullet}_{\mathrm{R}}| = 1\ )$

8.8 Kausal fundierte, zyklische Ordnungen

In der Concurrency-Theorie wird eine Nachbarschaftsrelation $\mathrm{P} \cup \mathrm{P}^{-1}$ aus der binären Relation li abgeleitet. Nachbarschaft wird in zyklischen Ordnungen mit Hilfe der unmittelbaren Nachfolgerrelation durch $(\prec_{\mathrm{R}}) \cup (\prec_{\mathrm{R}})^{-1}$ ausgedrückt. Fallen diese beiden Nachbarschaftsbegriffe zusammen, so sprechen wir von kausal fundierten zyklischen Ordnungen. Ein Beispiel für eine solche Ordnung ist in Beispiel 6124 angegeben.

S7259

VA7260 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A7261 R ist eine zyklische Ordnung
D7262 $\mathrm{P(R)} := \{(\mathrm{x,y}) \in \mathcal{A}(\mathrm{R})^2 \bullet (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})[\mathrm{x}] \subset (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})[\mathrm{y}]\}$
D7263 R ist kausal fundiert $:\Leftrightarrow (\prec_{\mathrm{R}}) \cup (\prec_{\mathrm{R}})^{-1} = \mathrm{P(R)} \cup \mathrm{P(R)}^{-1}$

Die Beziehungen zwischen Kausalordnungen, kausal fundierten zyklischen Ordnungen sowie die Anwendbarkeit der lokalen Richtungsfortpflanzungsregel aus der Concurrency-Theorie sind noch zu klären.

8.9 Natürliche, zyklische Ordnungen

Natürliche (azyklische) Ordnungen sind aus *Petri 1980* bekannt und in *Plünnecke 1986* Gegenstand ausführlicher Untersuchungen. Ihr charakteristisches Merkmal ist, daß sie genau zwei mögliche Orientierungen besitzen (sich selbst und ihre Spiegelung), die die gleiche reflexive Abhängigkeitsrelation ($\underline{\mathrm{li}}$ R) liefern. Sie wurden von Petri als Grundlage für die azyklische Concurrency-Theorie verwendet, um sicherzustellen, daß eine Concurrency-Struktur genau zwei mögliche Ablaufrichtungen besitzt.

Die Definition von natürlichen, zyklischen Ordnungen geschieht völlig analog. Im Gegensatz zu allgemeinen, zyklischen Ordnungen, die durch Wörter bis zur Länge drei eindeutig bestimmt sind (siehe Theorem 6480) gilt für die Klasse der natürlichen, zyklischen Ordnungen: Schon die Wörter bis zur Länge zwei sind ausreichend, die Relation eindeutig bis auf Spiegelung festzulegen.

S7264

VA7265 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

D7266 R ist eine natürliche, zyklische Ordnung $:\Leftrightarrow$
$|\{\mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R}' \text{ ist eine zyklische Ordnung} \wedge (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R}') = (\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})\}| = 2$

T7267 R ist eine natürliche, zyklische Ordnung $\wedge$
R$'$ ist eine natürliche, zyklische Ordnung $\wedge$
$(\mathrm{R}|2) = (\mathrm{R}'|2) \Rightarrow \mathrm{R} = \mathrm{R}' \vee \mathrm{R} = (\mathrm{REV}\ \mathrm{R}')$

Bezüglich unserer Interpretation als Systeme bedeutet dies, daß die natürlichen, zyklischen Ordnung der Ereignisse eines Systems schon durch charakteristische Beobachtungen bis zur Länge zwei (d.h. Stattfinden und Alternieren von Ereignissen) bis auf seine Orientierung eindeutig bestimmt ist.

Natürliche, kausal fundierte zyklische Ordnungen könnten eine geeignete Basis für die Concurrency-Theorie zyklischer Strukturen darstellen. Dabei ist natürlich ein passendes Axiomsystem (z.B. aus *Kummer 1995*) der Concurrency-Theorie zu verwenden. Damit stellt sich die Concurrency-Theorie in natürlicher Weise als Theorie zweistelliger charakteristischer Beobachtungen an Systemen dar. Die bisher in der Concurrency-Theorie nicht betrachtete Eigenschaft der globalen Orientiertheit (die nicht mit konsistenter Orientierbarkeit zu verwechseln ist) scheint ebenfalls ein notwendiges Axiom zu sein, um die Darstellbarkeit durch Netzsysteme sicherzustellen, die im folgenden Abschnitt definiert wird. In *Stehr 1993* wird statt der globalen Orientiertheit die Eigenschaft der F-Dichte gefordert.

8.10 Netzsysteme und zyklische Systemordnungen

Wie schon durch unsere Systeminterpretation nahegelegt wurde, können wir bestimmte zyklische Ordnungen als Netzsysteme darstellen. Wir wollen hier nur endliche, stellenunverzweigte, sichere und lebendige Netzsysteme zulassen. Wir können mit einem solchen Netzsystem eine zyklische Ordnung R assoziieren: Transitionen bilden das Alphabet $\mathcal{A}(\mathrm{R})$. Die Wörter der Relation R werden aufgrund der zyklischen Reihenfolge gebildet, in der Transitionen schalten können. Wollen wir auch die Stellen des Netzes in das Alphabet mit aufnehmen, dann können wir dies erreichen, indem wir uns im Netz jede Stelle mit Hilfe einer inneren Transition verfeinert denken. Ob wir nur Transitionen oder aber Transitionen und Stellen berücksichtigen ist also nur eine Frage der Detailliertheit: Durch Projektion der zyklischen Ordnung können wir wieder von den Stellen abstrahieren.

Eine zyklische Ordnung, die auf die oben genannte Weise mit einem Netzsystem assoziiert ist und als Alphabet sowohl die Stellen als auch die Transitionen des Netzsystems enthält, wollen wir als zyklische Systemordnung bezeichnen. Beispielsweise handelt es sich in Beispiel 6124 um eine zyklische Systemordnung.

Zwischen dem Netzsystem und der assoziierten zyklischen Systemordnung R bestehen Zusammenhänge, die in dieser Arbeit nicht untersucht wurden (dafür jedoch in teilweise in *Stehr 1993* im Rahmen der Concurrency-Theorie). Beispielsweise lassen sich die binären Relationen (li R) und (co R) direkt aus dem Netzsystem als Kausalität und Nebenläufigkeit gewinnen. Die Flußrelation entspricht der unmittelbaren Nachfolgerrelation der zyklischen Ordnung. Ferner bildet jede erreichbare Markierung einen Schnitt (d.h. einen Ken von ($\underline{\text{co}}$ R)). Umgekehrt ist aber (aus verschiedenen Gründen) im allgemeinen nicht jeder Schnitt aus Stellen eine erreichbare Markierung. Die Zahl der Marken auf Zyklen der Flußrelation bleibt erhalten. Jede Linie (d.h. Ken von ($\underline{\text{li}}$ R)) ist ein Zyklus der Flußrelation und enthält genau eine Marke. Jeder Zyklus mit genau einer Marke bildet eine Linie.

Schließlich ist zu vermuten, daß eine zyklische Systemordnung immer global orientiert ist, womit diese Ordnungen von besonderem Interesse sind. Umgekehrt stellt sich die Frage, ob es endliche, global orientierte Kausalordnungen gibt, die nicht mit einem Netzsystem assoziiert werden können, d.h. keine Systemordnungen sind. Endliche, nicht global orientierte zyklische Ordnungen, lassen sich möglicherweise mit Hilfe von verallgemeinerten Netzsystemen (mit mehreren disjunkten Fallklassen) kompakt repräsentieren. Letzteres würde in vielen Fällen zu einer knapperen Darstellung führen. Auch dieser Punkt wurde bisher nicht untersucht.

Da verschiedene, zyklische Systemordnungen existieren, die die gleiche, unmittelbare Nachfolgerrelation (also auch das gleiche Netz) besitzen, sind zyklische Ordnungen detaillierter als Netze (ohne Markierung). Netzsysteme dagegen können wiederum detaillierter sein als zyklische Systemordnungen (verschiedene Netzsysteme können die gleiche zyklische Ordnung darstellen). Zyklische Ordnungen sind also genauer als die Netzdarstellung, abstrahieren jedoch von Eigenschaften der Netzsysteme, die nicht die zyklische Reihenfolge von Ereignissen betreffen. Zyklische Systemordnungen liegen also bzgl. der Abstraktionsebene zwischen Netzen und Netzsystemen.

Es gibt jedoch viele zyklische Ordnungen, die nicht als Netzsysteme darstellbar sind. Es ist beispielsweise möglich, daß die (co R) -Relation nicht durch eine Fallklasse allein generiert werden kann. Ferner können (partiell) dichte zyklische Ordnungen nicht durch Netzsysteme dargestellt werden. Insofern sind zyklische Ordnungen insgesamt allgemeiner als Netzsysteme. Auf jeden Fall bilden die zyklischen Systemordnungen eine praktisch interessante Teilklasse, die weiterer Untersuchung bedarf, insbesondere in Hinblick auf die Übertragung von bekannten Resultaten aus der Theorie der Synchronisationsgraphen (siehe hierzu *Genrich und Lautenbach 1973*). Eng mit Synchronisationsgraphen verbunden sind auch die von Genrich definierten zyklischen Halbordnungen in *Genrich 1971.* Eine Klärung der genauen Beziehungen zu dem hier vorgeschlagenen Ansatz steht noch aus.

Aus dem Zusammenhang zwischen Systemordnungen und Netzsystemen ergibt sich auch eine Möglichkeit zu (partiellen) Spezifikation von Systemen mit Hilfe von (gewichteten und ungewichteten) Synchronieabständen, die hier nur kurz angedeutet werden soll. Synchronieabstände werden beispielsweise in *Reisig 1982* und *Petri 1996* definiert. Mit Hilfe von Synchronieabständen ist es möglich die zykliche Reihenfolge zu spezifizieren (bzw. zu messen) in der Ereignisse stattfinden. Dies ist in Abb. 8.1 für zwei, drei und vier Ereignisse dargestellt. Im Fall von zwei und vier Ereignissen ist ein ungewichteter Synchronieabständ ausreichend. Um die zykliche Reihenfolge zwischen drei Ereignissen festzulegen benötigen wir dagegen eine Kombination von drei gewichteten Synchonieabständen. Wir betrachten mit Netzsystemen assoziierte zyklische Systemordnungen. Natürliche, zyklische Ordnungen erlauben eine bis auf Spiegelung eindeutige Spezifikation mit Hilfe von ungewichteten Synchronieabständen zwischen Paaren von Ereignissen. Zyklische Ordnungen können aus (geeignet) gewichteten Synchronieabständen zwischen Tripeln von Ereignissen gewonnen werden. Für die zyklischen Trennungsstrukturen, die im folgenden eingeführt werden, sind ungewichtete Synchronieabstände zwischen Quadrupeln von Ereignissen relevant. Damit ermöglichen zyklische Ordnungen und zyklische Trennungsrelationen insgesamt die Darstellung der synchronischen Struktur von Systemen auf verschiedenen Abstraktionsebenen. Zur Abkürzung der für zyklische Ordnungen relevanten Synchronieabstände ließe sich eine Form von zyklischen Synchronieabständen einführen.

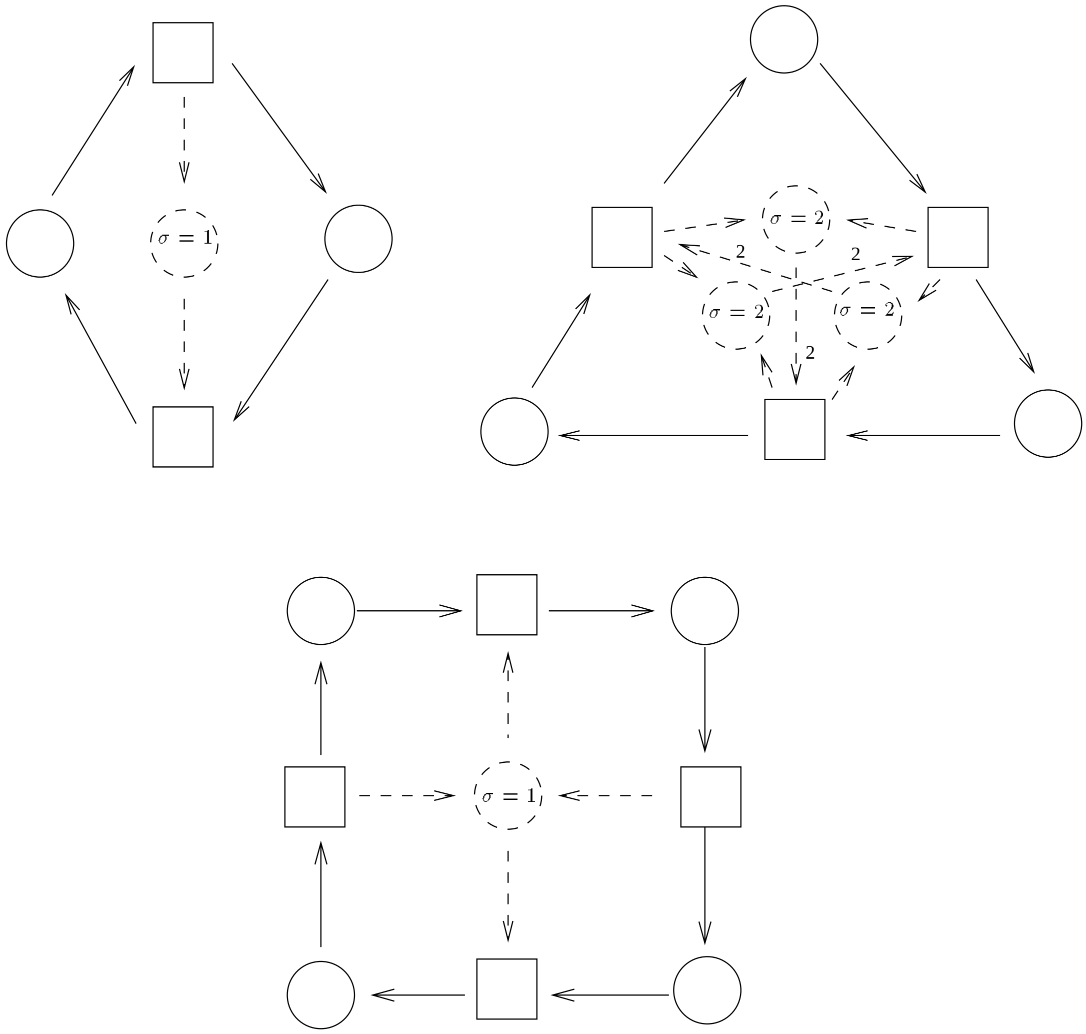


Abbildung 8.1: Synchronieabstände zwischen Paaren, Tripeln und Quadrupeln

8.11 Homomorphismen und Isomorphismen

In Anlehnung an die Vorgehensweise bei anderen mathematischen Strukturen können wir für zwei zyklische Ordnungen zueinander in Beziehung setzen. Von besonderen Interesse sind dabei Homomorphismen (d.h. in diesem Fall ordnungserhaltende Abbildungen) sowie, darauf aufbauend, Isomorphismen.

Wir erweitern eine Abbildung f zwischen den Alphabeten zweier Relationen zu einem Homomorphismus auf Wörtern. Dieser wird auf die Ebene der Relationen übertragen, wobei resultierende, nichteinfache Wörter nicht berücksichtigt werden.

S7268

VA7269	$R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $R' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $R'' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$, $f \in (\mathcal{A}(R) \to \mathcal{A}(R'))$, $f' \in (\mathcal{A}(R') \to \mathcal{A}(R''))$, $w \in \mathbb{A}^*$
A7270	R ist einfach $\wedge$ R' ist einfach $\wedge$ R'' ist einfach
D7271	$F := \lambda\, w \in R \bullet$ FALLS $(f \circ w)$ ist einfach DANN $(f \circ w)$
D7272	f ist ein Homomorphismus von R nach R' $:\Leftrightarrow F[R] \subseteq R'$
C7273	f ist ein Homomorphismus von R nach R' $\wedge$ f' ist ein Homomorphismus von R' nach R'' $\Rightarrow$ $(f' \circ f)$ ist ein Homomorphismus von R nach R''
D7274	f ist ein Isomorphismus von R nach R' $:\Leftrightarrow$ f ist bijektiv von $\mathcal{A}(R)$ auf $\mathcal{A}(R')$ $\wedge$ f ist ein Homomorphismus von R nach R' $\wedge$ f^{-1} ist ein Homomorphismus von R' nach R
T7275	f ist ein Isomorphismus von R nach R' $\Rightarrow$ f^{-1} ist ein Isomorphismus von R' nach R
D7276	f ist ein Automorphismus von R $:\Leftrightarrow$ f ist ein Isomorphismus von R nach R
D7277	f ist eine Einbettung von R in R' $:\Leftrightarrow$ f ist injektiv $\wedge$ f ist ein Homomorphismus von R nach R'
D7278	f ist eine Vergröberung von R nach R' $:\Leftrightarrow$ f ist surjektiv auf $\mathcal{A}(R')$ $\wedge$ f ist ein Homomorphismus von R nach R'

Vergröberungen sind geeignet eine Quasiordnung auf der Klasse alle zyklischer Ordnungen zu definieren. Vergröberungen, die auch Einbettungen sind, d.h. bijektive Homomorphismen, sind nicht notwendigerweise Isomorphismen.

8.12 Quotienten

Eng mit den eben eingeführten Begriffen verknüpft ist der Quotient einer zyklischen Ordnung bzgl. einer Äquivalenzrelation, die Elemente des Alphabets miteinander identifiziert. Wollen wir bestimmte Elemente aus $\mathcal{A}(R)$ einer zyklischen Ordnung R nicht mehr unterscheiden, führen wir eine Abstraktion durch, die wir durch Quotientienbildung bzgl. dieser Äquivalenzrelation auf Elementen formalisieren können. Man beachte, daß diese Abstraktion im Gegensatz zur Abstraktion bzgl. einer Äquivalenzrelation auf Wörtern (z.B. $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$) auf der Elementebene stattfindet.

S7279

VA7280	$A \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \bullet \mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$
VA7281	$R \in \mathcal{R}^*(A)$, $S \in \mathcal{BR}(A)$, $w \in A^*$
A7282	R ist eine zyklische Ordnung
A7283	S ist eine Äquivalenzrelation
D7284	$w/S := \lambda\, i \in \mathbb{N} \bullet [w\ i]_S$
T7285	$w/S \in \mathcal{P}(A)^*$
D7286	$R/S := \{w/S \bullet w \in R \bullet (w/S) \text{ ist einfach}\}^+$
T7287	$\downarrow(R/S) \Rightarrow R/S \in \mathcal{R}^*(\mathcal{P}(A))$
T7288	$\downarrow(R/S) \Rightarrow (R/S)$ ist eine zyklische Ordnung
C7289	$\downarrow(R/S) \Rightarrow \exists\, f \bullet$ f ist eine Vergröberung von R nach (R/S)

Eine interessante Frage in diesem Zusammenhang ist, unter welchen Bedingungen der Quotient einer zyklischen Ordnung definiert ist und damit wieder eine zyklische Ordnung darstellt. Man beachte, daß bei der Quotientendefinition die eindeutige Ergänzung R'^+ einer verallgemeinerten Relation R' verwendet wird, da sich sonst in vielen interessanten Fällen keine zyklische Ordnung ergeben würde.

Jede Vergröberung induziert eine Äquivalenzrelation, bzgl. der wir den Quotienten bilden können.

S7290

VA7291 $A \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \bullet \mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$
VA7292 $R \in \mathcal{R}^*(A)$, $R' \in \mathcal{R}^*(A)$, $f \in (\mathcal{A}(R) \to \mathcal{A}(R'))$
A7293 R ist eine zyklische Ordnung
A7294 R' ist eine zyklische Ordnung
A7295 f ist eine Vergröberung von R nach R'
D7296 $(\overset{f}{\equiv}) := \{(x,y) \in \mathcal{A}(R)^2 \bullet (f\ x) = (f\ y)\}$
T7297 $(\overset{f}{\equiv}) \in \mathcal{BR}(\mathcal{A}(R))$
T7298 $(\overset{f}{\equiv})$ ist ein Äquivalenzrelation
C7299 $\downarrow(R/(\overset{f}{\equiv})) \Rightarrow \exists\, f \bullet$ f ist ein Einbettung von $(R/(\overset{f}{\equiv}))$ in R'

8.13 Extensionalität und Irreduzibilität

Eine für viele mathematische Strukturen wichtige, spezielle Äquivalenzrelation ist die Ununterscheidbarkeit von Elementen aufgrund der Information, die allein durch die Struktur selbst gegeben ist.

Um diese Äquivalenzrelation zu definieren, verwenden wir die folgende Operation ($w[x\leftrightarrow y]$) auf Wörtern, die alle Vorkommen von x und y in w miteinander vertauscht.

S7300

M7301∗ $w[x\leftrightarrow y] := (\Box\,[\Box \leftrightarrow \Box])\ (w,x,y)$
D7302 $F := \lambda\ (\Box\,[\Box \leftrightarrow \Box]) \in \mathbb{A}^* \times \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightsquigarrow \mathbb{A}^* \bullet$
$\lambda\ (w,x,y) \in \mathbb{A}^* \times \mathcal{P}(\mathbb{A}) \bullet$
FALLS $w = [] \bullet []$;
FÜR $w = [z : u] \bullet$
FALLS $z = x$ DANN $[y : u[x\leftrightarrow y]]$;
FALLS $z = y$ DANN $[x : u[x\leftrightarrow y]]$;
SONST $[z : u[x\leftrightarrow y]]$
D7303 $(\Box\,[\Box \leftrightarrow \Box]) :=$ der kleinste Fixpunkt von F
T7304 $(\Box\,[\Box \leftrightarrow \Box]) \in \mathbb{A}^* \times \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}^*$

Zwei Elemente sind ununterscheidbar in einer einfachen Relation R gdw. es nicht möglich ist, sie allein anhand der Wörter in R zu unterscheiden: Vertauschen wir in einem Wort der Relation x und y, so erhalten wir wieder ein Wort der Relation.

S7305

VA7306 $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
A7307 R ist einfach
D7308 $(\overset{ext}{\equiv}_R) := \{(x,y) \in \mathcal{A}(R)^2 \bullet \forall\, w \in R \bullet$
$w[x\leftrightarrow y] \in R \wedge w[y\leftrightarrow x] \in R\}$
C7309 $(\overset{ext}{\equiv}_R)$ ist eine Äquivalenzrelation

R nennen wir extensional gdw. die Identität der Elemente allein durch ihre Lage in der Relation R bestimmt wird.

D7310 R ist extensional $:\Leftrightarrow (\overset{ext}{\equiv}_R) = \mathcal{ID}(\mathcal{A}(R))$

Schließlich sind noch zwei aus der Concurrency-Theorie bekannte gröbere und interessantere Äquivalenzrelationen zu nennen. Es handelt sich dabei um den transitiven Kern von ($\underline{\text{li}}$ R) bzw. von ($\underline{\text{co}}$ R).

Eine Relation R bezeichnen wir als irreduzibel gdw. sich zwei verschiedene Elemente durch ihre ($\underline{\mathrm{li}}$ R) oder ($\underline{\mathrm{co}}$ R) -Relationen zu anderen Elementen unterscheiden.

S7311

VA7312	$\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}),\ \mathrm{S} \in \mathcal{BR}(\mathbb{A})$
A7313	R ist einfach
D7314	$\widetilde{\mathrm{S}} := \{(\mathrm{x,y}) \in \mathcal{F}(\mathrm{S})^2 \bullet \mathrm{S[x]} = \mathrm{S[y]}\}$
T7315	$(\widetilde{\mathrm{S}})$ ist eine Äquivalenzrelation
C7316	$\mathrm{x} \overset{\mathrm{ext}}{\equiv}_{\mathrm{R}} \mathrm{y} \Rightarrow (\mathrm{x,y}) \in \widetilde{(\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})} \wedge (\mathrm{x,y}) \in \widetilde{(\underline{\mathrm{co}}\ \mathrm{R})}$
D7317	R ist irreduzibel $:\Leftrightarrow \widetilde{(\underline{\mathrm{li}}\ \mathrm{R})} = \mathcal{ID}(\mathcal{A}(\mathrm{R})) \wedge \widetilde{(\underline{\mathrm{co}}\ \mathrm{R})} = \mathcal{ID}(\mathcal{A}(\mathrm{R}))$
C7318	R ist irreduzibel $\Rightarrow$ R ist extensional

Die Abstraktion, d.h. Quotientienbildung, bzgl. dieser Äquivalenzrelationen nennen wir ($\underline{\mathrm{co}}$ R)– bzw. ($\underline{\mathrm{li}}$ R)– Reduktion (sofern der Quotient definiert ist). Diese Operationen könnten hilfreich sein, wenn wir eine gegebene (möglicherweise unendliche, partiell dichte) zyklische Ordnung auf den wesentlichen (möglicherweise endlichen) Kern reduzieren wollen.

8.14 Azyklische Trennungsrelationen

Azyklische Ordnungen definieren auf bestimmten Teilmengen des Alphabets eine Reihenfolge. Wollen wir von dieser Reihenfolge der Elemente abstrahieren und interessieren wir uns nur noch für die Tatsache, daß ein Element zwischen zwei anderen Elementen liegt und sie damit trennt, so gelangen wir zu azyklischen Trennungsstrukturen.

Unser Ziel ist es, die Axiome so zu wählen, daß möglichst viele Eigenschaften des Spiegelungsabschlusses azyklischer Ordnungen für azyklische Trennungsrelationen gelten, ohne von azyklischen Ordnungen selbst Gebrauch zu machen.

Wir versuchen zunächst die Axiomatisierung von totalen, azyklischen Trennungsrelationen, wobei wir uns an der Charakterisierung von totalen, azyklischen Ordnungen 2836 orientieren. Um von der Reihenfolge zu abstrahieren, ohne die Trennungsinformation zu verlieren, fordern wir die Spiegelungsabgeschlossenheit. Damit ist es unmöglich ein Wort der Relation von seinem Spiegelbild zu trennen und damit zu unterscheiden. Da die Spiegelungsabgeschlossenheit in nichttrivialen Fällen im Widerspruch zu Konsistenz (modulo Identität) steht, müssen wir diese gleichzeitig zur Konsistenz modulo Spiegelung abschwächen.

S7319

VA7320	$\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
D7321	R ist eine totale, azyklische Trennungsrelation $:\Leftrightarrow$
	R ist einfach $\wedge$
	R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen $\wedge$
	R ist ($\overset{\mathrm{rev}}{\equiv}$) -abgeschlossen $\wedge$
	R ist total $\wedge$
	R ist vollständig $\wedge$
	R ist konsistent modulo ($\overset{\mathrm{rev}}{\equiv}$)

Um (allgemeine) azyklische Trennungsstrukturen zu definieren gehen wir von azyklischen Ordnungen nach Definition 2726 aus. Wir fordern wieder die Spiegelungsabgeschlossenheit und müssen das Transitivitätsaxiom geeignet ersetzen. Wir ersetzen hierzu die 2 -Transitivität durch die 3 -Transitivität, die uns schon als zyklische Transitivität bekannt ist.

S7322

VA7323 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

D7324 R ist 2 -transitiv :$\Leftrightarrow$
$\forall\, a \in \mathbb{A},\, b \in \mathbb{A},\, c \in \mathbb{A} \bullet [b,c] \in R \wedge [c,d] \in R \Rightarrow [b,d] \in R$

D7325 R ist 3 -transitiv :$\Leftrightarrow$
$\forall\, a \in \mathbb{A},\, b \in \mathbb{A},\, c \in \mathbb{A},\, d \in \mathbb{A} \bullet [a,b,c] \in R \wedge [a,c,d] \in R \Rightarrow [a,b,d] \in R$

Damit gelangen wir zu der folgenden Definition, die weiterer Analyse bedarf. Offenbar können wir ähnlich wie bei azyklischen und zyklischen Ordnungen die Konsistenz modulo Spiegelung ableiten.

S7326

VA7327 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

D7328 R ist eine azyklische Trennungsrelation :$\Leftrightarrow$
R ist einfach $\wedge$
R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist $(\overset{\text{rev}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist vollständig $\wedge$
R ist 3 -transitiv

C7329 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rev}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist 3 -transitiv $\Rightarrow$
R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rev}}{\equiv})$

C7330 R ist eine azyklische Trennungsrelation $\Rightarrow$ R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rev}}{\equiv})$

Ferner können wir von einer azyklischen Ordnung durch Spiegelungsabschluß zu einer azyklischen Trennungsrelation gelangen. Man beachte jedoch, daß die Umkehrung im allgemeinen nicht gilt.

S7331

VA7332 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

C7333 R ist eine azyklische Ordnung $\Rightarrow$ $(\overset{\text{rev}}{\equiv})[\mathrm{R}]$ ist eine azyklische Trennungsrelation

C7334 R ist eine totale, azyklische Trennungsrelation $\Leftrightarrow$
$\exists\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R} = (\overset{\text{rev}}{\equiv})[\mathrm{R}'] \wedge \mathrm{R}'$ ist eine totale, azyklische Ordnung

8.15 Zyklische Trennungsrelationen

Der Schritt von Ordnungen zu Trennungsstrukturen ist auch im zyklischen Fall denkbar. Er soll im folgenden wieder nur angedeutet werden. Wir abstrahieren dabei nicht nur von einem Anfang und Ende durch den Rotationsabschluß, sondern auch von der Orientierung, indem wir Spiegelungsabgeschlossenheit fordern.

Insgesamt sollten die Axiome zyklischer Trennungsrelationen wieder so gewählt werden, daß sich möglichst viele Eigenschaften des Spiegelungsabschlusses zyklischer Ordnungen ableiten lassen, ohne auf zyklische Ordnungen selbst zurückzugreifen.

Es ist dabei günstig, die beiden Äquivalenzrelationen $(\overset{\text{rev}}{\equiv})$ und $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ auf Wörtern zu einer Relation $(\overset{\text{rr}}{\equiv})$ zusammenzufassen, bei der es sich wie schon bei $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ und $(\overset{\text{rev}}{\equiv})$ wieder um eine konservative, projektive Äquivalenzrelation handelt. Im Gegensatz zur Identität und zur Rotationsäquivalenz mit charakteristischen Zahlen zwei bzw. drei haben wir es mit einer Relation zu tun, die gleichlange Wörter mit gleichem Alphabet mit geringerer Länge als vier nicht unterscheidet, also die charakteristische Zahl vier besitzt.

S7335

D7336 $(\overset{\text{rr}}{\equiv}) := ((\overset{\text{rev}}{\equiv}) \cup (\overset{\text{rot}}{\equiv}))^*_{\mathbb{A}^*}$

T7337 $(\overset{\text{rr}}{\equiv}) \in \mathcal{BR}(\mathbb{A}^*)$

T7338 $(\overset{\text{rr}}{\equiv})$ ist eine Äquivalenzrelation
T7339 $(\overset{\text{rr}}{\equiv})$ ist konservativ
T7340 $(\overset{\text{rr}}{\equiv})$ ist projektiv
T7341 $(\overset{\text{rr}}{\equiv})$ ist spiegelinvariant

Die Definition für totale, zyklische Trennungrelationen ergibt sich damit fast zwangsläufig aus der Definition 3681 von totalen, zyklischen Ordnungen. Statt $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -Abgeschlossenheit fordern wir $(\overset{\text{rr}}{\equiv})$ -Abgeschlossenheit und die Konsistenz modulo Rotation wird entsprechend abgeschwächt.

S7342
VA7343 $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
D7344 R ist eine totale, zyklische Trennungsrelation $:\Leftrightarrow$
R ist einfach $\wedge$
R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist $(\overset{\text{rr}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist total $\wedge$
R ist vollständig $\wedge$
R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rr}}{\equiv})$

Bei der Definition zyklischer Trennungsrelationen orientieren wir uns an der Definition 5480 zyklischer Ordnungen. Entsprechend der 2- und 3-Transitivität definieren und fordern wir die 4-Transitivität. Um eine zu Theorem 5811 ähnliche (ungerichtete) Eigenschaft zyklischer Ordnungen auch für Trennungsrelationen ableiten zu können, ist ein Axiom geeignet, daß wir als Zweiseitigkeit bezeichnen.

S7345
VA7346 $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
D7347 R ist 4 -transitiv $:\Leftrightarrow \forall\, a \in \mathbb{A},\, b \in \mathbb{A},\, c \in \mathbb{A},\, d \in \mathbb{A},\, e \in \mathbb{A} \bullet$
$[a,b,c,d] \in R \wedge [a,b,d,e] \in R \Rightarrow [a,b,c,e] \in R$
D7348 R ist zweiseitig $:\Leftrightarrow \forall\, a \in \mathbb{A},\, b \in \mathbb{A},\, c \in \mathbb{A},\, d \in \mathbb{A},\, e \in \mathbb{A} \bullet$
$[a,b,c,d] \in R \wedge [a,e,c] \in R \Rightarrow [a,e,c,d] \in R \vee [a,b,c,e] \in R$

Damit erhalten wir die folgende (provisorische) Definition azyklischer Trennungsrelationen, die wiederum genauerer Untersuchung bedarf. Eine solche Untersuchung könnte beispielsweise analog zu der Vorgehensweise bei zyklischen Ordnungen durchgeführt werden, auch im Hinblick auf eine Beschreibbarkeit durch Trennungsbasen, die nur Wörter bis zu Länge vier enthalten.

S7349
VA7350 $R \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$
D7351 R ist eine zyklische Trennungsrelation $:\Leftrightarrow$
R ist einfach $\wedge$
R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist $(\overset{\text{rr}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist vollständig $\wedge$
R ist 4 -transitiv $\wedge$
R ist zweiseitig
C7352 R ist einfach $\wedge$ R ist $(\overset{\text{rr}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$ R ist 4 -transitiv $\Rightarrow$
R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rr}}{\equiv})$
C7353 R ist eine zyklische Trennungsrelation $\Rightarrow$ R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rr}}{\equiv})$

Die erwünschte Eigenschaft, daß der Spiegelungsabschluß jeder zyklischen Ordnung eine zyklische Trennungsrelation ergibt, ist noch zu überprüfen. Sicherlich ist jedoch nicht jede zyklische Trennungsrelation als Spiegelungsabschluß einer zyklischen Ordnung generierbar. Dies ist beispielsweise anhand des Spiegelungsabschlusses der Relation aus Beispiel 5565 erkennbar.

S7354

VA7355 $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

C7356 R ist eine zyklische Ordnung $\Rightarrow (\overset{\mathrm{rev}}{\equiv})[\mathrm{R}]$ ist eine zyklische Trennungsrelation

C7357 R ist eine totale, zyklische Trennungsrelation $\Leftrightarrow$
$\exists\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R} = (\overset{\mathrm{rev}}{\equiv})[\mathrm{R}'] \wedge \mathrm{R}'$ ist eine totale, zyklische Ordnung

Bei allen in dieser Arbeit vorgeschlagenen Axiomatisierungen haben wir immer darauf geachtet, möglichst mit lokalen Axiomen auszukommen. Wir haben es absichtlich vermieden, globale Axiome zu verwenden, die beispielsweise die Einbettbarkeit in eine größere Relation forderten. Bei azyklischen Ordnungen war dies ohne weiteres möglich. Bei zyklischen Ordnungen konnten wir die wünschenswerte Eigenschaft der globalen Orientiertheit nicht lokal sicherstellen. Bei Trennungsrelationen können wir nicht einmal die Eigenschaft der konsistenten Orientierbarkeit, die im folgenden Abschnitt erklärt wird, garantieren. Tatsächlich ist dies auf den (lokalen) Informationsverlust zurückzuführen, der sich durch den schrittweisen Abstraktionsprozeß ergibt.

8.16 Konsistente und globale Orientierbarkeit

Analog zu Definition 6805 der globalen Orientiertheit zyklischer Ordnungen nennen wir eine zyklische Trennungsrelation global getrennt gdw. wir sie zu einer totalen, zyklischen Trennungsrelation erweitern können.

S7358

VA7359∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

D7360 R ist zyklisch global getrennt :$\Leftrightarrow$
$\exists\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}' \wedge \mathrm{R}'$ ist eine totale, zyklische Trennungsrelation

C7361 R ist zyklisch global getrennt $\Leftrightarrow$
$\exists\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R} \subseteq (\overset{\mathrm{rev}}{\equiv})[\mathrm{R}'] \wedge \mathrm{R}'$ ist eine totale, zyklische Ordnung

Da wir bei Trennungsrelationen von der Orientierung abstrahierten können wir nicht mehr von Orientiertheit (wie bei zyklischen Ordnungen) sondern höchstens noch von Orientierbarkeit sprechen. Mit diesem Begriff meinen wir die oben schon angesprochene Möglichkeit eine zyklische Trennungsstruktur als Spiegelungsabschluß einer zyklischen Ordnung darzustellen. Dabei unterscheiden wir zwischen konsistenter Orientierbarkeit und globaler Orientierbarkeit, bei der wir zusätzlich noch die globale Orientiertheit der generierenden, zyklischen Ordnung fordern. Beide Eigenschaften sind für zyklische Trennungsrelationen nicht im allgemeinen erfüllt.

S7362

VA7363∗ $\mathrm{R} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A})$

D7364 R ist zyklisch konsistent orientierbar :$\Leftrightarrow$
$\exists\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R} = (\overset{\mathrm{rev}}{\equiv})[\mathrm{R}'] \wedge \mathrm{R}'$ ist eine zyklische Ordnung

D7365 R ist zyklisch global orientierbar :$\Leftrightarrow$
$\exists\, \mathrm{R}' \in \mathcal{R}^*(\mathbb{A}) \bullet \mathrm{R} = (\overset{\mathrm{rev}}{\equiv})[\mathrm{R}'] \wedge \mathrm{R}'$ ist eine zyklische Ordnung $\wedge$
R' ist zyklisch global orientiert

C7366 R ist zyklisch global orientierbar $\Rightarrow$ R ist global getrennt

Kapitel 9

Zusammenfassung

Ausgehend von existierenden Ansätzen zur Behandlung zyklischer Strukturen wie Concurrency-Strukturen, Synchronisationsgraphen, Netzsysteme, projektive Geometrien, Trennungsstrukturen sowie den Tripelstrukturen wurde ein Formalismus vorgestellt, der verschiedene Aspekte dieser Ansätze vereinheitlicht und damit einen Rahmen zur Untersuchung unterschiedlicher Axiomensysteme zur Verfügung stellt. Die verschiedenen Repräsentationen der einzelnen Ansätze wie binäre Relationen, Mengen von Tripeln, geordnete Quadrupel, Trennungsquadrupel werden durch den Begriff der verallgemeinerten Relation als Menge von Wörtern abgedeckt.

Für diese Relationen wurden zunächst unabhängig voneinander eine Reihe von Eigenschaften eingeführt, die zu verschiedenen Axiomensystemen zur Beschreibung von Ordnungsstrukturen kombiniert wurden. Noch bevor dies geschah, haben wir als Vorbereitung diese Eigenschaften separat sowie deren Querbeziehungen analysiert.

Konkret haben wir sechs Axiomsysteme vorgestellt und miteinander in Beziehung gesetzt: Azyklische Ordnungen, totale, zyklische Ordnungen und (allgemeine) zyklische Ordnungen sowie jeweils die entsprechenden Basen. Die bekannten azyklischen Ordnungen wurden zur Einführung in den Formalismus und die Vorgehensweise behandelt, spielten jedoch auch bei der Klassifizierung zyklischer Ordnungen eine wichtige Rolle. Die totalen, zyklischen Ordnungen sind besonders anschaulich und leicht zu axiomatisieren. Sie verkörpern viele Eigenschaften, die auch für (allgemeine) zyklische Ordnungen von Bedeutung sind. Ferner lieferten sie uns den Schlüssel zur Axiomatisierung der zyklischen Ordnungen, nämlich gerade eine Form der zyklischen Transitivität.

Es wurden zahlreiche einfache aber interessante Eigenschaften von zyklischen Ordnungen und Operationen auf ihnen bewiesen. Insbesondere wurde die unmittelbare Nachfolgerrelation definiert und untersucht. Es zeigte sich, daß sie selbst in endlichen Fällen nicht genügend Information lieferte, um eine zyklische Ordnung eindeutig zu bestimmen. Von besonderem Interesse war auch die Beziehung zwischen Zyklen dieser Relationen und den Kens. Jeder endliche Ken bildet einen Zyklus, während die Umkehrung nicht im allgemeinen gilt.

Um eine weniger redundante Repräsentation mit beschränkter Wortlänge zu erhalten, führten wir Basen ein und zeigten, daß sie eine gleichwertige Axiomatisierung von zyklischen Ordnungen darstellen, jedoch nur die Wörter bis zur Länge drei enthalten. Der Nachweis dieser Gleichwertigkeit bildet einen Hauptteil dieser Arbeit, der ohne den Begriff der globalen Orientiertheit auskommt.

Globale Orientiertheit einer zyklischen Ordnung ist die Erweiterbarkeit zu einer totalen, zyklischen Ordnung. Obwohl eine entsprechende Eigenschaft für azyklische Ordnungen gilt, muß sie für zyklische Ordnungen explizit gefordert werden, wie ein endliches Beispiel demonstrierte. Schließlich lernten wir noch eine Schnittdefinition für zyklische Ordnungen kennen, aus der wir ableiten konnten, daß Aufschneidbarkeit und globale Orientiertheit vollständig äquivalent sind.

Den Abschluß der Arbeit bildete ein Kapitel, das Anlaß zu weiteren Studien bzgl. zyklischer Ordnungen geben könnte, sowie anhand der Definition von Trennungsrelationen die Möglichkeiten des formalen Ansatzes der verallgemeinerten Relationen illustrierte.

Literaturverzeichnis

Best und Fernández 1988: EIKE BEST UND CESAR FERNÁNDEZ. „Nonsequential Processes. A Petri Net View“, Band 13 aus „ETACS Series Monographs in Computer Sience“. Springer-Verlag, Berlin (1988).

Farmer et al. 1993: WILLIAM M. FARMER, JOSHUA D. GUTTMAN UND F. JAVIER THAYER. IMPS: An Interactive Mathematical Proof System. *Journal of Automated Reasoning* **11**(2), 213–248 (Oktober 1993).

Genrich und Lautenbach 1973: HARTMANN JOCHEN GENRICH UND K. LAUTENBACH. Synchronisationsgraphen. *Acta Informatica* **2**(2), 143–161 (1973).

Genrich 1971: HARTMANN JOCHEN GENRICH. Einfache nicht-sequentielle Prozesse. Bericht 37, Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung mbH (1971).

H.S.M.Coxeter 1964: H.S.M.COXETER. „Projective Geometry“. Pure and Applied Sciences. Blaisdell Publishing Company (1964).

Huntington 1919: E. V. HUNTINGTON. A Set of Independent Postulates for Cyclic Order. Band 2 aus „ Proc. Nat. Ac. Sc. “, (1919).

Knuth 1992: DONALD E. KNUTH. „Axioms and Hulls“. Nummer 606 in Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag (1992).

Kummer 1995: OLAF KUMMER. Axiomensysteme für die Theorie der Nebenläufigkeit. Diplomarbeit, Universität Hamburg, Fachbereich Informatik (1995).

Müller 1993: HARTMUT MÜLLER. Geschichte und Entwicklung der Concurrency Theorie. Diplomarbeit, Universität Hamburg, Fachbereich Informatik (1993).

Petri 1980: CARL ADAM PETRI. Concurrency. In W. BRAUER (Herausgeber), „Net Theory and Applications“, Band 84 aus „Lecture Notes in Computer Science“, Seiten 251–276. Springer-Verlag (1980).

Petri 1982: CARL ADAM PETRI. State-Transition Structures in Physics and Computation. *International Journal of Theoretical Physics* **21**(12), 979–992 (1982).

Petri 1987: CARL ADAM PETRI. Concurrency Theory. In W. BRAUER UND G. ROZENBERG (Herausgeber), „Petri Nets: Central Models and Their Properties. Advances in Petri Nets 1986, Part I“, Band 254 aus „Lecture Notes in Computer Science“, Seiten 4–24, Berlin (1987). Springer-Verlag.

Petri 1991: CARL ADAM PETRI. Zyklische Ordnungen. Unveröffentlichtes Arbeitspapier, Entwurf vom 14.6. (1991).

Petri 1996: C.A. PETRI. Nets, Time and Space. *Theoretical Computer Science* **153**(1–2), 3–48 (1996).

Plünnecke 1986: H. Plünnecke. Determination of a poset by it co-relation. In G.Rozenberg (Herausgeber), „Advances in Petri Nets 1985“, Band 222 aus „Lecture Notes in Computer Science“, Seiten 362–379. Springer-Verlag (1986).

Reisig 1982: Wolfgang Reisig. „Petrinetze – Eine Einführung“. Springer-Verlag, Berlin (1982).

Rozenberg und Ehrenfeucht 1994: G. Rozenberg und A. Ehrenfeucht. Square Systems. *Fundamenta Informaticae* **20**(1-3) (1994).

Stehr 1993: Mark-Oliver Stehr. Physically Motivated Axiomatic Concurrency Theory – A Posetless Approach. Studienarbeit, Universität Hamburg, Fachbereich Informatik (1993).

Szpilrajn 1990: E. Szpilrajn. Sur l'extension de l'ordre partial. *Fundamenta Mathematicae* (16), 386–389 (1990).

Thiagarajan 1987: P.S. Thiagarajan. Elementary Net Systems. In W. Brauer, W. Reisig und G. Rozenberg (Herausgeber), „Petri Nets: Central Models and Their Properties, Advanced Cource, Bad Honnef, September 1986“, Band 254 aus „Lecture Notes in Computer Science“, Seiten 26–59, Berlin (1987). Springer-Verlag.

Troelstra und van Dalen 1988: Anne Troelstra und Dirk van Dalen. „Constructivism in Mathematics, an Introduction“, Band 121 aus „Studies in Logic and the Foundations of Mathematics“. North Holland (1988).

Anhang A

Hauptdefinitionen und Charakterisierungen

D2726 R ist eine azyklische Ordnung :$\Leftrightarrow$
R ist einfach $\wedge$ R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen $\wedge$
R ist vollständig $\wedge$
R ist transitiv

D2727 R ist eine totale, azyklische Ordnung :$\Leftrightarrow$
R ist eine azyklische Ordnung $\wedge$ R ist total

T2836 R ist eine totale, azyklische Ordnung $\Leftrightarrow$
R ist einfach $\wedge$ R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen $\wedge$
R ist total $\wedge$
R ist vollständig $\wedge$
R ist konsistent

D3571 R ist eine azyklische Ordnungsbasis :$\Leftrightarrow$
$\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq 2$ $\wedge$
R ist einfach $\wedge$
R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen $\wedge$
R ist 2 -vollständig $\wedge$
R ist transitiv

T3572 R ist eine azyklische Ordnungsbasis $\Leftrightarrow$
$\mathrm{R} \neq \emptyset$ $\wedge$
$\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq 2$ $\wedge$
R ist einfach $\wedge$
R ist ($\sqsupseteq$) -abgeschlossen $\wedge$
R ist transitiv

T3573 R ist eine azyklische Ordnungsbasis :$\Leftrightarrow$
$\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq 2$ $\wedge$
R ist einfach $\wedge$
R ist 1 -vollständig $\wedge$
R ist transitiv

D3681 R ist eine totale, zyklische Ordnung :$\Leftrightarrow$
R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist total $\wedge$
R ist vollständig $\wedge$
R ist konsistent modulo $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$

T4063 R ist eine totale, zyklische Ordnung $\Leftrightarrow$
R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist total $\wedge$
R ist vollständig $\wedge$
R ist zyklisch transitiv

D4763 R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis :$\Leftrightarrow$
$\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq 3$ $\wedge$
R ist einfach $\wedge$
R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist total $\wedge$
R ist 3 -vollständig $\wedge$
R ist zyklisch transitiv

D5480 R ist eine zyklische Ordnung :$\Leftrightarrow$
R ist einfach $\wedge$ R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist vollständig $\wedge$
R ist zyklisch transitiv

D6483 R ist eine zyklische Ordnungsbasis :$\Leftrightarrow$
$\mathcal{L}(\mathrm{R}) \leq 3$ $\wedge$
R ist einfach $\wedge$
R ist $(\sqsupseteq)$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist $(\overset{\text{rot}}{\equiv})$ -abgeschlossen $\wedge$
R ist 3 -vollständig $\wedge$
R ist zyklisch transitiv

Anhang B

Definitionsverzeichnis

Mengen

M0001∗	$\mathrm{A} \notin \mathrm{B}$
D0002∗	$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$
M0004∗	$\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$
D0005∗	$\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$
M0006∗	$\exists!\ \nu_1,\ldots,\nu_n \bullet \phi\ (\nu_1,\ldots,\nu_n)$
M0007∗	$\exists\ \nu_1 \in \chi_1,\ldots,\nu_n \in \chi_n \bullet \phi\ (\nu_1,\ldots,\nu_n)$
M0008∗	$\forall\ \nu_1 \in \chi_1,\ldots,\nu_n \in \chi_n \bullet \phi\ (\nu_1,\ldots,\nu_n)$
M0009∗	$\exists!\ \nu_1 \in \chi_1,\ldots,\nu_n \in \chi_n \bullet \phi\ (\nu_1,\ldots,\nu_n)$
M0010∗	$\iota\ \psi\ (\nu_1,\ldots,\nu_n) \bullet \nu_1,\ldots,\nu_n \bullet \phi\ (\nu_1,\ldots,\nu_n)$
M0013∗	$\iota\ \psi\ (\nu_1,\ldots,\nu_n) \bullet \phi\ (\nu_1,\ldots,\nu_n)$
M0016∗	SEI $\nu = \psi\ (\nu_1,\ldots,\nu_n) \bullet \chi\ (\nu,\nu_1,\ldots,\nu_n)$
M0017∗	FALLS ϕ DANN ψ_1 SONST ψ_2
M0018∗	FALLS ϕ DANN ψ
M0019∗	$\psi_1\ ;\ \psi_2$
M0022∗	FÜR $\psi = \psi_1\ (\nu_1,\ldots,\nu_n) \bullet \psi_2\ (\nu_1,\ldots,\nu_n)$
D0024∗	$\emptyset$
D0026∗	$\bigcup \mathrm{A}$
D0028∗	$\mathcal{P}(\mathrm{A})$
M0031∗	$\{\nu_2 \bullet \nu_1 \in \chi \bullet \phi\ (\nu_1,\nu_2)\}$
M0034∗	$\{\psi_2\ (\nu_1,\ldots,\nu_n) \bullet \psi_1\ (\nu_1,\ldots,\nu_n) \in \chi\}$
M0035∗	$\{\psi_2 \bullet \psi_1 \in \chi\}$
M0036∗	$\{\psi_1 \in \chi \bullet \phi\}$
D0037∗	$0\ ;\ 1\ ;\ \mathbb{B}$
D0038∗	$\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$
D0039∗	$\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$
D0040∗	$\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$
D0041∗	$\bigcap \mathrm{A}$
D0042∗	$\mathrm{A} - \mathrm{B}$
M0043∗	$\{\mathrm{x}\}$
M0044∗	$\{\mathrm{x},\mathrm{y}, \ldots\}$

Grundmengen

VA0207 $\mathbb{A}$, $\mathbb{X}$

Binäre Relationen

D0045∗	(a,b)
M0046∗	$(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}\ \ldots)$
D0047∗	$\mathrm{A} \times \mathrm{B}$
D0048∗	R ist eine binäre Relation
D0049∗	A^2
D0050∗	$\mathcal{BR}(\mathrm{A})$
D0051∗	$\mathcal{ID}(\mathrm{A})$
D0054∗	R^{-1}
D0055∗	$\mathcal{F}(\mathrm{R})$
D0056∗	$\mathcal{D}(\mathrm{R})$
D0057∗	$\mathcal{R}(\mathrm{R})$
D0058∗	$\mathrm{R}[\mathrm{A}]$
D0060∗	$\mathrm{R}\vert\mathrm{X}$
D0063∗	$\mathrm{R} \odot \mathrm{S}$
D0064∗	$\mathrm{R} \circ \mathrm{S}$
D0065	$\underline{\mathrm{R}}_{\mathrm{X}}$
D0066	$\widehat{\mathrm{R}}_{\mathrm{X}}$
D0067	$\updownarrow\mathrm{R}$

D0070	R ist reflexiv
D0073	R ist irreflexiv
D0076	R ist symmetrisch
D0082	R ist asymmetrisch
D0083	R ist antisymmetrisch
D0084	R ist transitiv
D0086	R ist schwach total
D0087	R ist total
D0088	R ist eine Ähnlichkeitsrelation
D0089	R ist eine Äquivalenzrelation
D0090	R ist eine Quasiordnung
D0091	R ist eine Ordnung
D0092	R ist eine strenge Ordnung
D0094	R ist eine totale Ordnung
D0095	R ist eine strenge, totale Ordnung
D0098	y ist maximal bzgl. $(\leq)$
D0099	y ist minimal bzgl. $(\leq)$
D0100	y ist ein größtes Element bzgl. $(\leq)$
D0101	y ist ein kleinstes Element bzgl. $(\leq)$
D0104	R -Kliquen
D0122	$(\subseteq \mid X)$
D0123	R -Kens
D0137	$[x]_E$
D0138	Y/E
D0139	S/E
M0221∗	R^n
D0223	$(\square^{\square})$
D0228	R^+
D0229	R^*_A

Funktionen

D0142∗	F ist eine Funktion
D0143∗	F x
D0150∗	F ist total auf A
D0151∗	F ist surjektiv auf B
D0152∗	F ist injektiv
D0155∗	F ist bijektiv von A auf B
D0156∗	$A \leadsto B$
D0157∗	$A \to B$
D0159∗	F ist eine Auswahlfunktion für S
D0162∗	$\lambda\, \nu \in \chi \bullet \psi\, (\nu)$
D0165	$\mathcal{FIX}(F)$
D0166	F ist monoton
D0169	kleinster Fixpunkt von F
M0213∗	f^n
D0215	$(\square^{\square})$

Natürliche Zahlen

D0171∗	succ x
D0174∗	2 ; 3 ...
D0177∗	$(\leq)$
D0178∗	$n \leq m$
D0179∗	$(<)$
D0180∗	$n < m$
D0181∗	$\mathbb{N}^+$
D0184	y ist minimal in Y
D0185	y ist maximal in Y
D0190∗	$[a \ldots b]$
D0191∗	$(a \ldots b)$
D0192∗	$(a \ldots b]$
D0193∗	$[a \ldots b)$
M0198∗	$x + y$
D0200∗	$(+)$
D0201∗	$x - y$
D0202∗	$A \mid\leq\mid B$
D0203∗	$A \mid=\mid B$
D0204∗	$A \mid<\mid B$
D0205∗	$\mid A \mid$
D0206∗	A ist abzählbar

Wörter

D0232	X^*
D0236	$\mathcal{I}(w)$
D0238	$\mathcal{A}(w)$
D0241	$[x : w]$
D0242	$\mathcal{L}(w)$
D0246	X^n
D0248∗	[]
D0249∗	[a]

D0250$*$	[a,b]
D0251$*$	[a,b,c]
D0252$*$	[a,b,c,d]
M0332$*$	$\mathrm{w_n}$
D0334	$(\Box_{\Box})$
D0372	u ist einfach
D0383	OCC x u
D0390	E ist konservativ
D0401	$(*)$
D0422	REV
D0443	E ist spiegelinvariant
D0447	$(\overset{\text{rev}}{\equiv})$
D0449$*$	u $\overset{\text{rev}}{\equiv}$ v
D0463	ROL
D0465	ROR
D0475	$(\gg)$
M0477$*$	w $\gg$ i
D0491	$(\overset{\text{rot}}{\equiv})$
M0493$*$	u $\overset{\text{rot}}{\equiv}$ v
D0542	$(\sqsubseteq)$
D0544$*$	$(\sqsupseteq)$
D0602	DEC I
M0603$*$	u $\triangleleft$ I
D0605	$(\triangleleft)$
M0634$*$	u $\triangleright$ A
D0636	$(\triangleright)$
D0678	E ist projektiv
D0684	$(\overset{\text{rot}}{\sqsubseteq})$
M0686$*$	u $\overset{\text{rot}}{\sqsubseteq}$ v
D0687$*$	$(\overset{\text{rot}}{\sqsupseteq})$
M0717$*$	u $\sim$ v
D0718	$(\sim)$
M0720$*$	u $\overset{\mathrm{E}}{\sim}$ v
D0721	$(\overset{\mathrm{E}}{\sim})$
D0984$*$	$(\overset{\text{rot}}{\approx})$
D1226	w ist eine S -Kette
D1231	w ist ein S -Zyklus

Verallgemeinerte Relationen

D1238$*$	$\mathcal{R}^*(\mathrm{X})$
D1239$*$	$\mathcal{R}^{\mathrm{n}}(\mathrm{X})$
D1243	$\mathcal{A}(\mathrm{R})$
D1251	R|X
D1258	$\mathcal{L}(\mathrm{R})$
D1265	R|n
D1279	R ist einfach
D1283	R ist total
D1312	R ist E -abgeschlossen
D1544	R ist konsistent
D1545	R ist konsistent modulo E
D1548	R und R$'$ sind miteinander konsistent modulo E
D1703	R $\triangleright$ X
D1717	li R
D1819	$\underline{\mathrm{li}}$ R
D1925	co R
D1942	$\underline{\mathrm{co}}$ R
D2054	R ist Ken-endlich
D2209	R ist vollständig
D2210	R ist n -vollständig
D2545	REV R

Azyklische Ordnungen

D2725	R ist transitiv
D2726	R ist eine azyklische Ordnung
D2727	R ist eine totale, azyklische Ordnung
D3324	$(<_{\mathrm{R}})$
M3326$*$	x $<_{\mathrm{R}}$ y
D3402	$(x \cdots y)_{\mathrm{R}}$
D3521	$(\lessdot_{\mathrm{R}})$
M3524$*$	x $\lessdot_{\mathrm{R}}$ y
D3571	R ist eine azyklische Ordnungsbasis
D3671	R ist global orientiert

Totale, zyklische Ordnungen

D3681	R ist eine totale, zyklische Ordnung
D3841	R ist zyklisch transitiv
D4066	R ist zyklisch transitiv auf Kens
D4140	$(\prec_{\mathrm{R}})$
D4141$*$	$\mathrm{x} \prec_{\mathrm{R}} \mathrm{y}$
D4763	R ist eine totale, zyklische Ordnungsbasis
D5274	KTV R

Zyklische Ordnungen

D5480	R ist eine zyklische Ordnung
D6127	$^{\bullet}\mathrm{x}_{\mathrm{R}}$
D6128	$\mathrm{x}^{\bullet}_{\mathrm{R}}$
D6483	R ist eine zyklische Ordnungsbasis
D6521	KV R
D6805	R ist zyklisch global orientiert
D6858	R ist global konsistent modulo E
D7120	R′ ist ein Schnitt von R

Ausblick

D7170	R ist S -zusammenhängend
D7171	im R
D7185	R ist S -endlich
D7193	R ist dicht
D7198	R ist K-dicht
D7200	L ist eine Referenzlinie von R
D7201	C ist ein Referenzschnitt von R
D7209	x ist ein S -Eigenelement
D7216	R ist F-dicht
D7218	R ist schwach F-dicht
D7223	R ist abgeschnürt in x
D7224	R ist abgeschnürt
D7230	[x : R]
D7231	$\mathrm{R}\bigcirc\mathrm{x}$
D7242	R ist kombinatorisch
D7240	R ist schwach kombinatorisch
D7248	R^{+}
D7257	R ist bipartit
D7258	R ist eine zyklische Kausalordnung
D7262	P(R)
D7263	R ist kausal fundiert
D7266	R ist eine natürliche, zyklische Ordnung
D7272	f ist ein Homomorphismus von R nach R′
D7274	f ist ein Isomorphismus von R nach R′
D7276	f ist ein Automorphismus von R
D7277	f ist eine Einbettung von R in R′
D7278	f ist eine Vergröberung von R nach R′
D7284	w/S
D7286	R/S
D7296	$(\overset{\mathrm{f}}{\equiv})$
M7301$*$	$\mathrm{w}[\mathrm{x}\leftrightarrow\mathrm{y}]$
D7303	$(\square\,[\square \leftrightarrow \square])$
D7308	$(\overset{\mathrm{ext}}{\equiv}_{\mathrm{R}})$
D7310	R ist extensional
D7314	$\tilde{\mathrm{S}}$
D7317	R ist irreduzibel
D7321	R ist eine totale, azyklische Trennungsrelation
D7324	R ist 2 -transitiv
D7325	R ist 3 -transitiv
D7328	R ist eine azyklische Trennungsrelation
D7336	$(\overset{\mathrm{rr}}{\equiv})$
D7344	R ist eine totale, zyklische Trennungsrelation
D7347	R ist 4 -transitiv
D7348	R ist zweiseitig
D7351	R ist eine zyklische Trennungsrelation
D7360	R ist zyklisch global getrennt
D7364	R ist zyklisch konsistent orientierbar
D7365	R ist zyklisch global orientierbar