Axiomensysteme für die Theorie der Nebenläufigkeit

Diplomarbeit
Universität Hamburg
Fachbereich Informatik
Arbeitsbereich Theoretische Grundlagen der Informatik

19. Februar 1996

Olaf Kummer
Rotdornstieg 24
25469 Halstenbek
kummer@informatik.uni-hamburg.de

Betreuer: Prof. Dr. Rüdiger Valk
Zweitbetreuer: Dr. Dirk Hauschildt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Drei Brüder wohnen in einem Haus,
die sehen wahrhaftig verschieden aus,
doch willst du sie unterscheiden,
gleicht jeder den anderen beiden.
Der erste ist nicht *da, er kommt erst nach Haus.*
Der zweite ist nicht *da, er ging schon hinaus.*
Nur der dritte ist da, der Kleinste der drei,
denn ohne ihn gäb's nicht die anderen zwei.
Und doch gibt's den dritten, um den es sich handelt,
nur weil sich der erst' in den zweiten verwandelt.

Michael Ende, in „*Momo*"

Vergangenheit

Um zu erklären, was Raum und Zeit sei, wurden mehrere verschiedene Wege eingeschlagen. Einer davon, und nur er soll uns jetzt interessieren, besteht darin, in einem axiomatischen System die zahllosen Begriffe, die es zum Thema „Zeit" gibt, genauer zu definieren und mathematisch zu beschreiben.

Prof. Carl Adam Petri beschäftigte sich mit dem Thema, eine physikalisch begründbare Theorie über Systeme, Signale, Prozesse, Raum und Zeit zu entwerfen, weil er hoffte, dadurch ein Fundament für die Netztheorie zu legen. Der Bezug zur Physik – insbesondere zur Relativitätstheorie – sollte dabei helfen, einen Bezug von der Netztheorie zur realen Welt und damit letztlich zur Anwendung in der Praxis zu finden.

Den Grundstein zu seiner Theorie der Nebenläufigkeit, auf Englisch als *concurrency theory* bezeichnet, legte Petri in seiner Arbeit [Pet76], wo er für B/E-Systeme die Relation *co* als Relation der Nebenläufigkeit einführte. Während der Fortentwicklung der Theorie trat diese neue Relation zusammen mit ihrem Komplement, der Relation *li*, immer mehr in den Vordergrund und wurde zum eigentlichen Kern der Theorie.

Es wurden nach und nach von Petri selbst und auch von seinen Mitarbeitern mehrere Axiomensysteme zur Theorie der Nebenläufigkeit analysiert und veröffentlicht. Auch wenn sich die einzelnen Systeme zum Teil deutlich voneinander unterschieden, so enthielten sie doch einen gemeinsamen Kern, der schließlich in [Mül93] herausgearbeitet wurde.

In der letzten Zeit wurden neue Ergebnisse zur Theorie der Relationen *co* und *li* rar, es gab jedoch mit [Ste93] eine umfassende Darstellung, in der ein enger Bezug zwischen der Theorie der Nebenläufigkeit und der Theorie der Petrinetze geschaffen wurde. Der Weg dorthin führte jedoch über fünf zusätzliche Annahmen, die zunächst nicht bewiesen werden konnten und bis zu ihrem erhofften Beweis den Status zusätzlicher Axiome erhalten mußten.

Gegenwart

In Anbetracht der historischen Entwicklung und des aktuellen Standes der Theorie der Nebenläufigkeit bieten sich zwei Bereiche besonders für weitere Forschungen an.

Da wären zum einen der philosophisch-physikalische Ansatz, für den man sich fragen müßte, welche der bisher aufgestellten Axiome wirklich durch die Physik gerechtfertigt werden und welche der physikalischen Prinzipien sich noch durch Axiome in der Theorie der Nebenläufigkeit wiedergeben lassen. Des weiteren sollten Vorgänge der realen Welt mit den Begriffen der Theorie beschrieben werden, um so die Übereinstimmung mit der Realität zu testen.

Zum anderen könnte man versuchen, die formal-theoretische Seite der Axiome der Nebenläufigkeit genauer zu beleuchten, indem in der Theorie neue Sätze bewiesen, neue Zusammenhänge aufgedeckt und alte Vermutungen überprüft werden. Auch hier würden Beispielstrukturen entwickelt werden, allerdings aus einem anderen Grund, nämlich um Vermutungen zu widerlegen, die Mächtigkeit der verschiedenen Axiomensysteme gegeneinander abzuwägen und Unabhängigkeiten zwischen den Axiome zu beweisen.

Wir werden in der vorliegenden Arbeit den zweiten Weg wählen, und dies hat mehrere Gründe. Zunächst sind die naturwissenschaftlichen Grundlagen der Theorie der Nebenläufigkeit nach wie vor unklar, es besteht bei den wenigsten Axiomen Einigkeit über ihre Bedeutung für die Praxis. Der Versuch, eine Sammlung guter Axiome herzustellen würde unweigerlich wieder in ein neues und zu allen vorigen inkompatibles Axiomensystem führen, denn ein Argument, das das neue System gegenüber allen anderen herausheben würde, ist weder bekannt noch in Sicht.

Die rein formale Analyse von Abhängigkeiten und Unabhängigkeiten von Axiomen kann uns jedoch helfen, zwischen den vielen Systemen zu vermitteln und sie technisch in einen einheitlichen Rahmen zu stellen. Es wird ermöglicht, die Systeme zu minimieren und vielleicht hier und da eine Äquivalenz zu beweisen und so die Zahl der möglichen Systeme zu beschränken.

Indem neue Sätze bewiesen werden und alte Vermutungen bestätigt oder umgestoßen werden, wird es um so einfacher, die physikalische Bedeutung der Theorie zu verstehen, da wir versuchen können, die Sätze und nicht mehr nur die Axiome zu interpretieren.

Letztlich ist die Theorie auch ein guter Ansatz, um Schwachstellen in den Axiomen zu finden. Wenn sich zeigt, daß einige Axiome zu streng oder gar inkonsistent sind, dann müssen wir sie fallenlassen. Es ist auch zu erwarten, daß formal konstruierte Gegenbeispiele, die die Grenzen der Theorie ausloten sollen, viel eher die Probleme in der Theorie aufdecken als Beispiele aus der Praxis, die vielleicht gezielt auf gute Eigenschaften hin konstruiert sind.

Zukunft

Damit ist der Inhalt der folgenden Kapitel schon fast klar. Im nächsten Kapitel finden sich die grundlegenden Axiome und Definitionen, wie Petri sie eingeführt hat. Es wird, wie oben schon angedeutet, nicht versucht, die Motivation der Axiome eingehend zu kritisieren. Es werden jedoch soviel Anregungen zum physikalischen Hintergrund gegeben, wie es nötig ist, um eine gewisse Intuition für die Theorie zu entwickeln.

Nachdem die Theorie auf praktische Anwendung hin ausgelegt ist, muß es verwundern, daß bis jetzt nur wenige verschiedene Modelle der Theorie untersucht wurden. Daher wurden neue Strukturen entwickelt und auf ihre Tauglichkeit als Modelle überprüft. In Kapitel 3 sind sie zusammen mit den bereits bekannten Modellen dargestellt. Die bei der Entwicklung verwendeten Konstruktionen werden angegeben und erlauben es so, leicht weitere Modelle zu entwickeln.

Die Strukturen sind jedoch nicht immer so gestaltet, wie man dies auf Grund der bisherigen Modelle erwartet hätte. In einigen Fällen ergeben sich sogar sehr ungünstige Eigenschaften, so daß sich jetzt die Frage stellt, ob die neuen Strukturen als Modelle der Theorie weiter zugelassen werden sollen oder ob sie durch Axiome ausgeschlossen werden müssen.

Kapitel 4 enthält Ansätze, wie solche Axiome aussehen könnten. Mit den neuen Axiomen werden dann Aussagen bewiesen, die bisher nur vermutet werden konnten. Der Schwerpunkt der Analyse liegt dabei auf den formalen Bezügen zwischen den Axiomen und nicht auch den philosophischen Grundlagen. Diese werden nur für den in dieser Arbeit erstmals eingeführten Begriff einer *Episode* genannt, der mit Hilfe der Relativitätstheorie motiviert wird. Oft werden die neuen Axiome auch nur als technische Hilfsmittel angesehen, die helfen, einen Beweis zu führen. Ob sich hinter diesen Axiomen eine physikalische Bedeutung verbirgt, ist weitgehend unklar.

In Kapitel 5 werden schließlich einige alte und neue Axiomensysteme auf ihre Mächtigkeit hin analysiert. Dabei werden diverse, bereits in Kapitel 4 eingeführte Sätze benutzt, um für jedes System herauszufinden, welche Axiome zusätzlich zu den explizit angenommenen noch erfüllt sind, weil sie durch die Kombination mehrerer anderer Axiome erzwungen werden. Durch Anwendung dieser Technik sollte es möglich sein, fast alle Beziehungen zwischen den bisherigen Systemen zu klären, auch für Systeme, die hier nicht explizit untersucht werden.

Im letzten Kapitel erfolgt eine Auswertung der Ergebnisse, und es werden Ansätze für zukünftige Untersuchungen genannt.

Der Leser, dem die Theorie der Nebenläufigkeit bereits bekannt ist, kann nach der Erläuterung der Notation in Abschnitt 2.1 den Rest dieses Kapitels überspringen und stattdessen den Anhang E konsultieren, um sich über die exakte Formulierung der einzelnen Axiome zu informieren.

Die Beispiele und Gegenbeispiele in Kapitel 3 sind auch für das weitere Verständnis des Textes nicht unbedingt erforderlich, ich möchte sie aber dennoch jedem ans Herz legen, da sie helfen, die Probleme zu nachzuvollziehen, die zu der Einführung neuer Axiome in Kapitel 4 geführt haben.

Die letzten Kapitel 4 und 5 sollten auf jeden Fall gelesen werden, obwohl die Beweise nicht obligatorisch sind und zumindest beim ersten Lesen übersprungen werden können.

Kapitel 2

Grundlagen der Theorie der Nebenläufigkeit

„Ich werd dir alles erklären, aber wir brauchen dazu etwas Zeit.“
„Zeit“, sagte Arthur schwach, „gehört im Augenblick nicht zu meinen Problemen.“
Douglas Adams, in *„Per Anhalter durch die Galaxis“*

Für eine Einführung in die Theorie der Nebenläufigkeit gibt es viele mögliche Quellen, allen voran die Originalartikel von Petri, als da sind [Pet76], [Pet82] etc. In [Mül93] werden diese Artikel gegenübergestellt, und es wird ein essentieller Kern von Axiomen herausgearbeitet, die in allen Arbeiten Petris vorkommen, des weiteren wird ein Vergleich mit früheren Arbeiten Carnaps und Reichenbachs vorgenommen. Eine ausführliche theoretische Grundlage schafft [Ste93], wobei explizit auf die Verwendung von Halbordnungen zu Fundierung der Theorie verzichtet wird.

Warum dann noch eine Einführung? Zunächst sind die meisten der Artikel Petris nicht ohne weiteres verfügbar, insbesondere die neuesten Ideen wurden nur in Seminaren vorgestellt, zu denen keine Veröffentlichungen existieren. Durch die kontinuierliche Entwicklung der Theorie entsprechen dagegen die verfügbaren älteren Artikel nicht mehr dem aktuellen Stand, auch im Formalismus. Der zweite Grund für eine Einführung ist, dem Leser das Verfolgen der Argumentationsketten zu vereinfachen, indem er nicht ständig auf andere Bücher verwiesen werden muß.

Bei der Darstellung des älteren Materials werden nur kurze Beweise direkt angegeben, bei längeren Argumentationsketten wird auf die Literatur verwiesen. Es zeigt sich jedoch, daß viele Sätze dieses Kapitels in der Tat einen kurzen Beweis haben.

2.1 Vereinbarungen

Zunächst werden wir die mathematische Notation und die grobe Strukturierung der Axiome und Sätze festlegen.

2.1.1 Typographie

Es wird versucht, einige Regeln im mathematischen Schriftsatz einzuhalten, jedoch verbleiben in der Notation auf Grund der historischen Gewohnheiten einige Inkonsistenzen. Diese müssen jedoch akzeptiert werden, um eine Vergleichbarkeit mit anderen Arbeiten zu ermöglichen. Aus dem gleichen Grund verwende ich für die mathematischen Bezeichnungen gelegentlich englische Worte: Sie wurden von Petri so vorgeschlagen, und eine Änderung ist nicht praktikabel.

- Elemente einer Menge werden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet, zum Beispiel a oder x.
- Ganze Zahlen werden ebenfalls durch kleine Buchstaben angegeben, jedoch werden bevorzugt die Buchstaben i, j bis n genommen.
- Mengen von Elementen kennzeichnen wir durch große lateinische Buchstaben, also A bis Z.
- Mengen von Mengen verstecken sich hinter großgeschriebenen mehrbuchstabigen Worten, die nicht kursiv gesetzt sind. $x \in C \in \mathrm{Cuts}$.
- Relationen werden bevorzugt als kleingeschriebene mehrbuchstabige Worte gekennzeichnet, also *co*, *li* oder *im*. Ausnahmen bilden beispielsweise die Relationen P und F.
- Prädikaten werden großgeschriebene mehrbuchstabige Worte zugeordnet, wie zum Beispiel $Forward(x)$.
- Ketten erhalten griechische Kleinbuchstaben als Identifikationsmerkmal. Elemente von Ketten werden als Kleinbuchstaben mit Index geschrieben, etwa $\alpha = (a_0, \ldots, a_n)$.

Objekte, die unter keine diese Kategorien fallen, werden sinnvoll – aber ohne spezielle Regeln – eingeordnet.

2.1.2 Formale Gliederung

Die Numerierung von Definitionen und Sätzen erfolgt gemeinsam, nach Kapiteln gegliedert. *Definition 2.1* bezeichnet also die erste Definition im zweiten Kapitel.

Da Axiome wesentlich häufiger referenziert werden und eine Nummer als Identifikationsmerkmal wenig aussagekräftig ist, habe ich ein dreibuchstabiges Kürzel für jedes Axiom gewählt, so daß das Axiom der Disjunktheit beispielsweise mit *Axiom DIS* bezeichnet wird.

Die Kürzel sind leider auch nicht einfacher als eine Nummer, wenn man gerade erst beginnt, sich mit der Theorie der Nebenläufigkeit zu beschäftigen. Nach einer gewissen Eingewöhnungszeit helfen sie jedoch, schnell Bezüge herzustellen.

Um die Arbeit mit den Axiomen zu vereinfachen, sind alle Kürzel mit der dazugehörigen Langbezeichnung für jedes Axiom in Anhang A ab Seite 133 in alphabetischer Reihenfolge zusammengestellt.

2.1.3 Abhängigkeiten von Sätzen und Axiomen

Eines der Ziele dieser Arbeit ist es, die Abhängigkeiten zwischen den Axiomen klar heraustreten zu lassen. Dazu ist es notwendig, bei jedem Beweis Buch zu führen, welche Axiome zur Ableitung des Satzes notwendig waren. Geschieht dies nicht, dann können später bei der Zusammenstellung der Axiomensysteme solche Sätze nicht verwendet werden, da nicht gewährleistet ist, daß alle nötigen Axiome im aktuellen System auch wirklich gelten.

In den Sätzen benutze ich daher eine spezielle Notation, die die direkt oder indirekt verwendeten Axiome auflistet. Dazu ein Beispiel, bei dem mehr auf die Form als auf den Inhalt geachtet werden sollte.

Satz 2.0 $\boxed{\text{DIS}}$ $co^{-1} \cap \mathrm{id}_X = \varnothing$.
Beweis ... $\square$

Intuitiv sollte man sich dabei den Kasten $\boxed{\text{DIS}}$ als einen Baustein vorstellen, der als Fundament für den Satz dient: Ohne das Axiom DIS als Baustein würde der Beweis zusammenbrechen. Wenn mehrere Bausteine, sprich Axiome, angegeben sind, dann müssen alle erfüllt sein, um den Beweis nutzen zu können. Formal kann man den Ausdruck als eine Implikation lesen. Wir ersetzen dazu grundsätzlich

$\boxed{\text{DIS}}$ $\quad Aussage$

durch

$(co \cap li = li \cap \mathrm{id}_X = co \cap \mathrm{id}_X = \varnothing) \Rightarrow (Aussage)$

wobei die Prämisse der Implikation der Text des entsprechenden Axioms ist. Mehrere Bausteine für einen Satz werden genauso gehandhabt, so wird zum Beispiel

$\boxed{\text{DIS}}\boxed{\text{SYM}}$ $\quad Aussage$

zu

$(co \cap \mathrm{id}_X = \varnothing) \Rightarrow ((co^{-1} = co) \Rightarrow (Aussage))$

Obwohl ich versucht habe, jeden Beweis mit einer möglichst geringen Anzahl an Axiomen zu führen, darf diese Schreibweise nicht zu der Vermutung verleiten, daß immer alle angegebenen Axiome für einen Satz notwendig sind. Stets wird nur eine hinreichende Kombination angegeben, die in manchen Fällen durchaus noch verkleinert werden kann.

2.1.4 Mathematische Notation

Während der gesamten Arbeit werden logische Ausdrücke und Quantoren im Sinne der konventionellen zweiwertigen Logik benutzt. Die Theorie der Mengen wird ebenfalls ohne weitere Kritik angenommen, insbesondere kommt das Auswahlaxiom zur Anwendung, obwohl konstruktive Beweise bevorzugt werden.

Die meisten Mengenoperatoren und -ausdrücke werden vorausgesetzt, es sollen jedoch die Symbole definiert werden, deren Bedeutung uneinheitlich ist.

Definition 2.1 [Teilmenge]
$M_1 \subseteq M_2 :\Leftrightarrow \forall x \in M_1 : x \in M_2$. $\Diamond$

Definition 2.2 [Echte Teilmenge]
$M_1 \subsetneq M_2 :\Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \wedge M_1 \neq M_2$. $\Diamond$

Definition 2.3 [Kartesisches Produkt]
$M_1 \times M_2 := \{(x, y) \mid x \in M_1 \wedge y \in M_2\}$ $\Diamond$

Definition 2.4 [Mengendifferenz]
$M_1 - M_2 := \{x \in M_1 \mid x \notin M_2\}$. $\Diamond$

Weiterhin werden die natürlichen und ganzen Zahlen verwendet. Die üblichen Operationen wie $+$ und $-$ werden hier vorausgesetzt, ebenso die Ordnung $<$. Nur die Modulodivision wird wegen ihrer seltenen Verwendung neu definiert.

Definition 2.5 [Natürliche Zahlen]
$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. $\Diamond$

Definition 2.6 [Ganze Zahlen]
$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. $\Diamond$

Definition 2.7 [Modulodivision]
$a \bmod m := \min\{i \in \mathbb{N} \mid \exists j \in \mathbb{Z} : a = i + jm\}$. $\Diamond$

Definition 2.8 [Endlichkeit]
$Fin(M) :\Leftrightarrow |M| \in \mathbb{N}$. $\Diamond$

Intensiv greift diese Arbeit auf die binären Relationen zurück, die als Menge von Paaren dargestellt werden.

Definition 2.9 [Infixnotation]
$x\ rel\ y :\Leftrightarrow (x, y) \in rel$. $\Diamond$

Definition 2.10 [Vor- und Nachbereich]
$\mathrm{dom}\,(rel) := \{x \mid \exists y : x\ rel\ y\}$.
$\mathrm{ran}\,(rel) := \{y \mid \exists x : x\ rel\ y\}$. $\Diamond$

Definition 2.11 [Inverse Relation]
$rel^{-1} := \{(y, x) \mid x\ rel\ y\}$. $\Diamond$

Definition 2.12 [Reflexive Ergänzung]
$\underline{rel}_M := rel \cup \mathrm{id}_M$. $\Diamond$

Definition 2.13 [Symmetrische Ergänzung]
$rel^{\leftrightarrow} := rel \cup rel^{-1}$. $\Diamond$

Definition 2.14 [Relationenprodukt]
$rel_1 \odot rel_2 := \{(x, z) \mid \exists y : x\ rel_1\ y \wedge y\ rel_2\ z\}$. $\Diamond$

Definition 2.15 [Transitive Hülle]
$rel^1 = rel$.
$rel^i = rel^{i-1} \odot rel$ für $i > 1$.
$rel^+ = \bigcup_{i \geq 1} rel^i$.
$rel^*_M = rel^+ \cup \mathrm{id}_M$. $\Diamond$

Definition 2.16 [Restriktion]
$rel|_M := rel \cap M \times M$. $\Diamond$

Definition 2.17 [Abbildung]
$rel[x] := \{y \mid x\ rel\ y\}$.
$rel[M] := \{y \mid \exists x \in M : x\ rel\ y\}$. $\Diamond$

Definition 2.18 [Kongruenz]
$\widetilde{rel} := \{(x, y) \mid rel[x] = rel[y]\}$. $\Diamond$

Wir treffen nun noch Vereinbarungen für eine spezielle Klasse von Relationen: die Ordnungen.

Definition 2.19 [Notation zu Ordnungen]
Sei $<$ eine Halbordnung, dann legen wir $> := (<)^{-1}$, $\lessdot := (<) - (< \odot <)$, $\gtrdot := (>) - (> \odot >)$, $x\bullet = \{y \mid x \lessdot y\}$ und $\bullet x = \{y \mid y \lessdot x\}$ als Kurznotation fest.
Derselbe Zusammenhang gilt für die Symbole $\prec$, $\succ$, $\prec\!\!\cdot$, $\cdot\!\!\succ$ und $\bullet$ entsprechend. $\Diamond$

Kliquen sind Mengen, deren sämtliche Elemente paarweise in einer gegebenen Relation stehen.

Definition 2.20 [Kliquen]
Sei $rel \subseteq X \times X$, dann ist $\mathrm{Kliquen}(rel) := \{M \subseteq X \mid \forall x, y \in M : x\ rel\ y\}$. $\Diamond$

Definition 2.21 [Kens]
Sei $rel \subseteq X \times X$, dann ist $\mathrm{Kens}(rel) := \{M \in \mathrm{Kliquen}(rel) \mid \neg\exists M' \in \mathrm{Kliquen}(rel) : M \subsetneq M'\}$. $\Diamond$

Für die Zwecke dieser Arbeit ist der Begriff einer Kette sinnvoll. Wir verstehen unter einer rel-Kette eine Folge von Elemente, wobei jedes Element in der Relation rel zu seinem

Nachfolger steht. Dieser Begriff wird während der gesamten Arbeit informal verwendet, da eine exaktere Darstellung nicht zu einem besseren Verständnis geführt hätte.

Definition 2.22 [Ketten]
Sei $rel \subseteq X \times X$, dann ist Ketten$(rel) := \{(a_0, a_1, \ldots, a_n) \mid \forall i \in \{0, \ldots, n-1\} : a_i \; rel \; a_{i+1}\}$. $\Diamond$

Definition 2.23 [Unendliche Ketten]
Sei $rel \subseteq X \times X$, dann ist ω-Ketten$(rel) := \{(a_0, a_1, \ldots) \mid \forall i \in \mathbb{N} : a_i \; rel \; a_{i+1}\}$. $\Diamond$

Definition 2.24 [Beidseitig unendliche Ketten]
Sei $rel \subseteq X \times X$, dann ist $\omega\omega$-Ketten$(rel) := \{(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots) \mid \forall i \in \mathbb{Z} : a_i \; rel \; a_{i+1}\}$. $\Diamond$

Definition 2.25 [Zyklen]
Sei $rel \subseteq X \times X$, dann ist Zyklen$(rel) := \{(a_0, a_1, \ldots, a_n) \mid a_0 = a_n \wedge \forall i \in \{0, \ldots, n-1\} : a_i \; rel \; a_{i+1}\}$. $\Diamond$

Definition 2.26 [Menge der Kettenelemente]
Sei $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, dann ist Set$(\alpha) := \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. $\Diamond$

Für unendliche Ketten ist die Funktion Set entsprechend anzuwenden. Besonders interessieren wir uns für einfache Ketten, das sind solche, die keine Wiederholungen enthalten.

Definition 2.27 [Einfachheit]
Sei $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ eine Kette, dann ist $Einf(\alpha) :\Leftrightarrow \forall i, j \in \{0, \ldots, n\} : i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$. $\Diamond$

Der Fall unendlicher Ketten ist klar. Bei Zyklen ist zwangsweise das erste und das letzte Element gleich, also ist obige Definition nicht sinnvoll.

Definition 2.28 [Einfachheit von Zyklen]
Sei $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ ein Zyklus, dann ist $ZykEinf(\alpha) :\Leftrightarrow \forall i, j \in \{0, \ldots, n-1\} : i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$. $\Diamond$

2.2 Grundideen der Theorie der Nebenläufigkeit

Es gibt mindestens zwei Wege, sich der Theorie der Nebenläufigkeit zu nähern. Man kann versuchen, ihr eine Interpretation in der Wirklichkeit zu geben und so verschiedene Axiome zu motivieren. Andererseits kann man die – von Petri beabsichtigte – Verwandtschaft der Theorie der Nebenläufigkeit zur Theorie der Netze ausnutzen und so manche Beziehungen erläutern.

2.2.1 Die Hauptrelationen *co* und *li*

Worum geht es in Petris Theorie der Nebenläufigkeit? Petri will das Verhalten von Systemen beschreiben und dazu die zeitlichen und räumlichen Aspekte der Signalausbreitung und der Verknüpfung von Signalen modellieren.

Hier bietet sich zunächst die Temporallogik als Ausdrucksmittel an. Es zeigt sich jedoch, daß einige der zu fordernden Bedingungen – besonders die später vorzustellenden Kohärenzaxiome – nur äußerst schwer in die Sprache der Logik zu übersetzen sind.

Ein anderer gängiger Ansatz zu diesem Problem ist es, die Zustände und Ereignisse des Systems in eine Halbordnung einzubetten, die über ihre zeitliche Reihenfolge Auskunft gibt.

Diese Möglichkeit wird zum Beispiel von Best und Fernández in [BF88] genauer ausgeführt. Es stellt sich jedoch die Frage, ob eine Ordnung wirklich notwendig ist oder ob nicht schon eine schwächere Beschreibung des Systems alle notwendigen Zusammenhänge wiedergeben kann.

An dieser Stelle war Petris Grundgedanke, Zustände und Ereignisse eines Systems dadurch zu kennzeichnen, daß sie entweder

- kausal unabhängig oder
- kausal abhängig

sind, dies entspricht den Fällen

- (zeitlich) ungeordnet beziehungsweise
- (zeitlich) geordnet

in der Halbordnung. Wir ignorieren also die tatsächliche Ordnung zweier Elemente, sondern merken uns nur noch, ob die beiden Elemente geordnet waren.

Da ein Ereignis meist an einem bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit stattfindet, können wir ihm in Anlehnung an die Relativitätstheorie einen Punkt in der Raumzeit zuordnen. Aus der Relativitätstheorie wissen wir, daß sich die Wirkung eines Ereignisses nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten kann. Ereignisse, die im Raum weit genug von einander entfernt geschehen, können sich nicht gegenseitig beeinflussen. Man spricht auch davon, daß zwei Ereignisse

- in raumartiger Beziehung oder
- in zeitartiger Beziehung

zueinander stehen. Wir könnten auch sagen, sie sind

- gleichzeitig beziehungsweise
- ungleichzeitig, also zeitlich geordnet.

Ist es sinnvoll, auch Zustände in diese Kategorien einzuteilen? Es wäre zumindest um der Einfachheit des Formalismus willen sinnvoll, nicht allzu unterschiedliche Beschreibungsmethoden zu wählen. Um diese Ähnlichkeit festzuschreiben, vereinigen wir zunächst alle Zustände und Ereignisse in einer Menge, wir nennen diese Menge X. Welche der Elemente von X Ereignisse und welche Zustände sind, müssen wir später wieder festlegen, es soll uns jedoch zunächst nicht beeinflussen.

Nun müssen wir angeben, welche der Elemente aus X kausal unabhängig sind. Dies läßt sich formal durch eine zweistellige Relation in X bewerkstelligen, die Petri in Anlehnung an das englische Wort *concurrent*, zu deutsch nebenläufig, mit *co* bezeichnet hat. Um die Symmetrie herauszustellen, führen wir außerdem eine weitere Relation *li* ein, deren Name vom Englischen *in line* abgeleitet ist, was wörtlich heißt „auf einer Linie“, speziell „auf einer Weltlinie“, also kausal abhängig.

Um die Relation *co* zu veranschaulichen, betrachten wir folgendes Beispiel: In Hamburg schalten sich die Straßenlaternen an, und in Kapstadt schalten sich ebenfalls die Straßenlaternen an. Die beiden Ereignisse beeinflussen einander nicht und können sich insbesondere nicht gegenseitig hervorrufen, also sind sie kausal unabhängig und sollten in der Relation *co* stehen. Dies heißt nicht, daß beide Ereignisse nicht eine gemeinsame Ursache haben können, etwa das Untergehen der Sonne kurz zuvor. Dennoch geschehen beide Ereignisse gleichzeitig, eine Wirkung ist durch den räumlichen Abstand ausgeschlossen.

Eindeutig kausal abhängig von Anschalten der Laternen ist ihr Erlöschen. Bevor die Lampen nicht leuchten, können sie nicht abgeschaltet werden. In diesem Sinne liegt hier also eine strenge zeitliche Ordnung von, diese beiden Ereignisse sind also in *li*. Die Theorie der Nebenläufigkeit erlaubt an dieser Stelle jedoch eine Verallgemeinerung: Wir müssen von den beiden Ereignissen nicht unbedingt die zeitliche Ordnung kennen, solch eine Ordnung muß noch nicht einmal existieren.

Dies kommt insbesondere dann vor, wenn wir einen zyklischen, sich immer wiederholenden Vorgang beschreiben. Plausiblerweise schalten sich Laternen nicht nur einmal an und aus, sondern jeden Tag wieder. Auch in diesem Fall könnten die Schaltvorgänge nicht gleichzeitig erfolgen, sondern immer nur nacheinander. Es wäre dann nicht nur das Einschalten Voraussetzung für das Ausschalten, sondern auch das Ausschalten Voraussetzung für das Einschalten. Folglich wären die Ereignisse auch in einem zyklischen Ablauf durch die Relation li verbunden.

Wenn wir versuchen, für ein reales System darzulegen, welche seiner Zustände und Ereignisse kausal abhängig beziehungsweise unabhängig sind, werden wir Eigenschaften der resultierenden Relationen finden, die wegen der zugrundeliegenden physikalischen Gesetze notwendigerweise erfüllt sind. Möglicherweise lassen sich auch Eigenschaften finden, die auf Grund unserer Vorstellung über Zustände und Ereignisse gelten müssen und folglich immer gelten, wenn wir Systeme in dieser Terminologie beschreiben.

Das Ziel ist es jetzt, solche Eigenschaften zu finden, als Axiome zu formulieren und mit ihrer Hilfe Aussagen zu machen, die für alle Systeme gelten müssen.

2.2.2 Nebenläufigkeit und Netze

Einige der folgenden Axiome lassen sich leichter begründen, wenn wir von Anfang an eine Beziehung zu Petrinetzen annehmen. Diese Beziehung liegt nahe, denn schon im letzten Unterabschnitt haben wir von Zuständen und Ereignissen gesprochen, die offensichtlich mit den Stellen und Transitionen eines Netzes korrespondieren.

Eine gute Einführung über Petrinetze ist der Text [Rei86], hiervon benötigen wir insbesondere Kapitel 2 und 3. In Anlehnung an die dort verwendete Terminologie seien hier einige Begriffe zu Netzen definiert.

Definition 2.29 [Netze und Netzsysteme]
$N = (B, E; F)$ heißt Netz, wenn $B \cap E = \varnothing$ und $F \subseteq (B \times E) \cup (E \times B)$. B ist die Menge der Bedingungen, E ist die Menge der Ereignisse, und F ist die Flußrelation.
Eine Teilmenge $M \subseteq B$ heißt Markierung. Eine Teilmenge $G \subseteq E$ heißt Schritt.
$\Sigma = (B, E; F, M_0)$ heißt Netzsystem, wenn $N = (B, E; F)$ ein Netz und M_0 eine Markierung von N ist. $\Diamond$

Wir verwenden außerdem folgende Notationen, die in [Rei86] genauer erläutert werden. Wir haben es in dieser Arbeit stets mit B/E-Netzen zu tun und verwenden daher immer die zu diesem Netztyp gehörigen Begriffe.

Definition 2.30 [Aktivierung und Schaltregel]
$M \xrightarrow{e} :\Leftrightarrow (F[e] \cap M = \varnothing) \wedge (F^{-1}[e] \subseteq M)$ bedeutet, daß ein Ereignis e in einer Markierung M aktiviert ist.
Wenn $M_1 \xrightarrow{e}$ gilt, dann kann das Ereignis e eintreten, wir sagen auch schalten. Dabei überführt das Ereignis die Markierung M_1 in die Markierung $M_2 = (M_1 - F^{-1}[e]) \cup F[e]$. Wir schreiben $M_1 \xrightarrow{e} M_2$.
$M \xrightarrow{G} :\Leftrightarrow (\forall e \in G : M \xrightarrow{e}) \wedge (\forall e_1, e_2 \in G : e_1 \neq e_2 \Rightarrow F[e_1] \cap F[e_2] = \varnothing) \wedge (\forall e_1, e_2 \in G : e_1 \neq e_2 \Rightarrow F^{-1}[e_1] \cap F^{-1}[e_2] = \varnothing)$ bedeutet, daß ein Schritt G in einer Markierung M aktiviert ist.

Überführt ein aktivierter Schritt G eine Markierung M_1 in eine Markierung $M_2 = (M_1 - F^{-1}[E]) \cup F[E]$, dann schreiben wir $M_1 \stackrel{G}{\to} M_2$. $\Diamond$

Definition 2.31 [Erreichbarkeitsrelation]

r ist die einschrittige Erreichbarkeitsrelation, also $M_1\ r\ M_2 :\Leftrightarrow \exists G \subseteq T : M_1 \stackrel{G}{\to} M_2$.
$R := (r \cup r^{-1})^*$ ist die volle Erreichbarkeitsrelation. $\Diamond$

Im vorigen Unterabschnitt haben wir die Relation co unter anderem als Relation der Gleichzeitigkeit interpretiert. Diese Interpretation läßt sich leicht auf Netze übertragen.

Wir können von zwei Bedingungen b_1 und b_2 sagen, daß sie gleichzeitig auftreten, wenn es eine Markierung gibt, in der beide markiert sind. Analog dazu können wir $e_1\ co\ e_2$ behaupten, wenn die beiden Ereignisse in einem Schritt simultan stattfinden können. Wann ist nun ein Ereignis e gleichzeitig mit einer Bedingung b? Nun, genau dann, wenn das Ereignis eintreten kann, während die Bedingung gilt.

Mit dieser Vereinbarung benötigen wir unbedingt ein Netzsystem, um die co-Relation eindeutig festlegen zu können. Ein anderen Ansatz wäre es, den Begriff „kausal abhängig“ auf Netze zu übertragen. Dazu überlegen wir uns, daß ein Netzelement sicher auf die Netzelemente wirkt, die in F-Relation mit ihm stehen. In der Folge wirkt es dann auch über mehrere F-Schritte auf weitere Elemente, so daß alle Elemente, die durch eine F-Kette miteinander verbunden sind, kausal abhängig genannt werden können.

In zyklischen Systemen bringt diese Sichtweise aber einige Probleme, insbesondere, wenn letztlich jedes Element von jedem anderen kausal abhängig ist und die li- und co-Relationen damit bedeutungslos werden. Wir werden daher bevorzugt den zuerst vorgestellten Zusammenhang zwischen den Relationen co und li und den Netzen verwenden.

2.3 Axiome

Jetzt werden die Axiome eingeführt, die die von co und li geforderten oder wenigstens erwünschten Eigenschaften beschreiben.

2.3.1 Basisaxiome

Da sich die Menge X und die Relationen co und li kaum unabhängig voneinander betrachten lassen, fassen wir sie in

$$CS = (X, li, co)$$

zu einem Tripel zusammen. Dieses wird dann als Nebenläufigkeitsstruktur, englisch *concurrency structure*, bezeichnet.

Wir werden nun durch Axiome für die Relationen co und li die gewünschten Eigenschaften garantieren, wobei wir die Überlegungen aus Abschnitt 2.2 berücksichtigen wollen, um die zugrundeliegende Begriffswelt „kausal unabhängig“ und „kausal abhängig“ so genau wie möglich zu formalisieren.

Wir müssen dazu eine Entscheidung treffen: Ist ein Element zu sich selbst nebenläufig? Ist es von sich selbst kausal abhängig? Weder noch? Wir entscheiden uns für die letzte Möglichkeit und verlangen, daß ein Element von X weder in co noch in li mit sich selbst steht. Diese Entscheidung ist jedoch willkürlich und nur für die formale Betrachtung wichtig.

Eine weitere entscheidende Eigenschaft ist, daß zwei Elemente nie gleichzeitig in co und in li stehen. Fassen wir alles in einem ersten Axiom zusammen.

Axiom DIS [Disjunktheit]
$co \cap li = li \cap \mathrm{id}_X = co \cap \mathrm{id}_X = \varnothing$. $\Diamond$

Die folgenden Lemmata ergeben sich schnell aus Axiom DIS, werden jedoch sehr oft in Beweisen verwendet.

Lemma 2.32 $\boxed{\text{DIS}}$ $co \cap \underline{li}_X = \varnothing$.
Beweis $co \cap \underline{li}_X = co \cap (li \cup \mathrm{id}_X) = (co \cap li) \cup (co \cap \mathrm{id}_X) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$ unter Verwendung von Axiom DIS. $\square$

Lemma 2.33 $\boxed{\text{DIS}}$ $\underline{co}_X \cap li = \varnothing$.
Beweis Analog zu Lemma 2.32. $\square$

Lemma 2.34 $\boxed{\text{DIS}}$ $\underline{co}_X \cap \underline{li}_X = \mathrm{id}_X$.
Beweis $\underline{co}_X \cap \underline{li}_X = (co \cap li) \cup (co \cap \mathrm{id}_X) \cup (\mathrm{id}_X \cap li) \cup (\mathrm{id}_X \cap \mathrm{id}_X) = \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_X$ wegen Axiom DIS. $\square$

Zur leichteren Lesbarkeit wollen wir in Zukunft eine abkürzende Schreibweise vereinbaren. Wir verzichten, wenn die Bedeutung klar ist, auf den Index X, so daß beispielsweise der letzte Satz als $\underline{co} \cap \underline{li} = \mathrm{id}_X$ erscheint.

Definition 2.35 [Notation zu li und co]
Wir legen $\underline{li} := \underline{li}_X$ und $\underline{co} := \underline{co}_X$ als Kurznotation fest. Weiterhin wird, wo es keine Mißverständnisse geben kann, $li^* := li^*_X$ und $co^* := co^*_X$ vereinbart. $\Diamond$

Petri hat, dies ist in [Pet89] beschrieben, die Möglichkeit angedacht, daß es mehr als die zwei Relationen co und li geben kann, und zwar kommt als dritte Möglichkeit die *Alternative* in Form der Relation al hinzu. Zwei Elemente stehen in al, wenn sie sich gegenseitig ausschließen, ohne zeitlich aufeinander zu folgen. Beispielsweise wäre beim Würfelspiel das Ereignis „Der Würfel fällt auf die 1“ alternativ zum Ereignis „Der Würfel fällt auf die 2“.

Wir wollen uns hier mit der Relation al aber aus gutem Grund nicht beschäftigen, denn die entstehende Theorie wäre um ein Vielfaches komplizierter als die vorliegende Theorie. Da selbst die Theorie der Nebenläufigkeit ohne die Relation al noch etliche ungelöste Fragen aufwirft, sollte man zunächst diese klären, bevor man die erweiterte Theorie untersucht.

Mit dieser Einschränkung müssen zwei verschiedene Elemente also notwendigerweise kausal abhängig oder kausal unabhängig sein, eine weitere Möglichkeit wollen wir für den Moment ausschließen.

Axiom VST [Vollständigkeit]
$co \cup li \cup \mathrm{id}_X = X \times X$. $\Diamond$

Neben der Vollständigkeit der Relationen co und li bestätigt dieses Axiom, daß die beiden Relationen auf die Menge X beschränkt sind und nicht zusätzlich für andere Objekte gelten können.

Bemerkung 2.36 $\boxed{\text{VST}}$ $co \subseteq X \times X$. $\square$

Bemerkung 2.37 $\boxed{\text{VST}}$ $li \subseteq X \times X$. $\square$

Wenn zwei Elemente immer in co oder li stehen müssen, aber nicht gleichzeitig beide Relationen gelten können, ist klar, daß co und li dual zueinander sind. Man kann leicht die eine Relation aus der anderen gewinnen.

Satz 2.38 $\boxed{\text{DIS}}\boxed{\text{VST}}$ $li = X \times X - \underline{co}$.
Beweis $li = (li - \underline{co}) \cup (li \cap \underline{co}) = ((li \cup \underline{co}) - \underline{co}) \cup \varnothing = (co \cup li \cup \mathrm{id}_X) - \underline{co} = X \times X - \underline{co}$ wegen Lemma 2.33 und Axiom VST. $\square$

Satz 2.39 $\boxed{\text{DIS}}\boxed{\text{VST}}$ $co = X \times X - \underline{li}$.
Beweis Analog zu Satz 2.38. $\square$

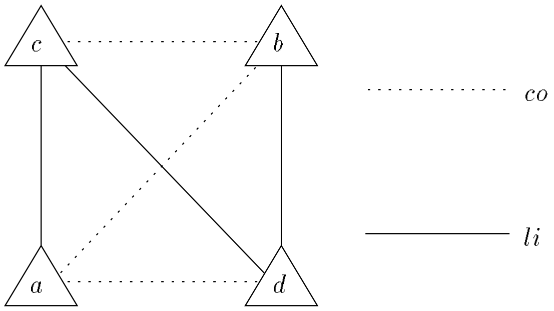


Abbildung 2.1: Darstellung der Relationen co und li

Wenn ein Element $x \in X$ kausal unabhängig von einem Element $y \in X$ ist, also $x\ co\ y$, dann gilt dies sicher auch umgekehrt, nämlich $y\ co\ x$.

Axiom SYM [Symmetrie]
$co^{-1} = co.$ ◊

Warum fordern wir dasselbe nicht auch für li? Auch die kausale Abhängigkeit ist eine symmetrische Relation, aber dies läßt sich jetzt bereits ableiten, ohne es in einem Axiom fordern zu müssen.

Satz 2.40 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{SYM}}$ $li^{-1} = li$.
Beweis Mit Axiom SYM und Satz 2.38 erhalten wir $li^{-1} = (X \times X - co - \mathrm{id}_X)^{-1} = (X \times X)^{-1} - co^{-1} - \mathrm{id}_X^{-1} = X \times X - co - \mathrm{id}_X = li.$ □

In der Tat war der Übergang von einer Halbordnung, die ein System beschreibt, zu einer Beschreibung durch eine symmetrische Beschreibung eine der Hauptmotivationen Petris bei der Entwicklung der Theorie. Es ist leicht erkennbar, daß es auch genauso möglich gewesen wäre, Axiom SYM mit Hilfe von li zu formulieren und die Symmetrie von co als abgeleitetes Prinzip zu betrachten. Formal gibt es dabei keinen Unterschied, jedoch ist die Symmetrie der Gleichzeitigkeit etwas leichter einzusehen, da man in diesem Fall nicht die Vorstellung einer zeitlichen Ordnung überwinden muß.

Wir sehen jetzt, daß es nicht unbedingt notwendig gewesen wäre, sowohl co als auch li als primäre Objekte in die Theorie der Nebenläufigkeit aufzunehmen. Genausogut hätten wir uns auf co beschränken können und analog zu Satz 2.38 $li := X \times X - \underline{co}$ definieren können. Dagegen spricht nur die offensichtliche Symmetrie zwischen co und li, die es unnatürlich erscheinen läßt, li auf diese Weise zu einer abgeleiteten Relation zu degradieren.

Jetzt, wo wir co und li als symmetrische und irreflexive Relationen etabliert haben, können wir anfangen, Nebenläufigkeitsstrukturen zu visualisieren. Dies geschieht am einfachsten mit Hilfe eines Graphen, wie er in Abbildung 2.1 dargestellt ist. In dem Graphen erscheinen die Elemente aus X zunächst als Dreiecke, diese werden mit zwei verschiedenen Arten von Kanten verbunden.

Gepunktete Kanten zeigen, daß zwischen den verbundenen Elementen die Relation co gilt. Durchgezogene Kanten stehen für eine li-Beziehung. Da beide Relationen symmetrisch sind, können wir ungerichtete Kanten verwenden.

Da es Strukturen mit einer sehr großen Menge X geben kann, können auch die entstehenden Bilder sehr umfangreich werden. In diesem Fall besteht eine Möglichkeit der Vereinfachung darin, nur die co-Relation oder, seltener, nur die li-Relation aufzuzeichnen, da sich die andere Relation einfach als das irreflexive Komplement ergibt.

Es ist aber auch manchmal sinnvoll, eine Kante dort wegzulassen, wo über die Beziehung zweier Elemente nichts bekannt ist. Dies wird insbesondere dann notwendig, wenn während eines Beweises nur ein kleiner Teil einer größeren Struktur betrachtet wird.

2.3.2 Triviale Strukturen

Bisher wurde ohne weitere Erläuterung von *den* Elementen gesprochen, obwohl wir nicht sicher sein konnten, daß X nicht einelementig oder gar leer ist. Wenn $|X| \leq 1$, dann muß $co = \varnothing$ und $li = \varnothing$ gelten, weil in diesem Fall nur die leere Relation die Forderung nach Irreflexivität von co und li erfüllt.

Nun wollen wir mit einer Nebenläufigkeitsstruktur reale Systeme beschreiben. Die Tatsache $|X| = 0$ müßten wir in diesem Fall als „Es gibt kein System“ interpretieren, ganz im Widerspruch dazu, daß wir gerade eben etwas beschreiben wollten.

$|X| = 1$ ist denkbar, wenn die Nebenläufigkeitsstruktur als äußerste Vergröberung eines anderen Systems gesehen wird, wenn wir statt der Zustände dieses Systems nur noch den Zustand „Das System existiert“ betrachten. Auf dieser Beschreibungsebene ist das System jedoch absolut statisch, es gibt keine Wechselwirkungen innerhalb des Systems.

Beide betrachteten Fälle erscheinen nicht wünschenswert, deshalb sollen sie durch ein weiteres Axiom ausgeschlossen werden. Ein weiterer Grund ist, daß triviale Strukturen sonst in Beweisen ständig als Spezialfälle getrennt behandelt werden müßten; eventuell würden sogar einige Sätze nicht mehr gelten, wenn triviale Strukturen erlaubt würden.

Axiom NTR [Nichttrivialität]
$|X| \geq 2$. $\Diamond$

Zu jedem Element aus X gibt es also noch eins, das sich von ihm unterscheidet, dies muß dann zwangsläufig in co oder li mit dem ersten stehen.

Bemerkung 2.41 $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\forall x \in X : \exists y \in X : x \; co \; y \vee x \; li \; y$. $\square$

Wichtige Folgerungen ergeben sich jetzt aus dem neu eingeführten Axiom noch nicht, es wird erst in den folgenden Abschnitten nach und nach einfließen.

2.3.3 Kohärenz

Wenn zwei Elemente von X nicht durch eine endliche Anzahl von li-Schritte miteinander verbunden sind, dann kann bedeutet dies, das die Elemente in zwei völlig unabhängigen Systemen liegen, weil sie nicht aufeinander wirken können. Es ist in diesem Fall nicht sinnvoll, beide Systeme mit einer einzigen Nebenläufigkeitsstruktur erfassen wollen. Wir können also getrost diesen Fall ausschließen.

Axiom LIK [li-Kohärenz]
$li^* = X \times X$. $\Diamond$

Was ist, wenn zwei Elemente sich nicht durch eine co-Kette verbinden lassen? Dies ist nicht genauso leicht auszuschließen, wir wollen ein entsprechendes Axiom jedoch aus Symmetriegründen fordern.

Axiom COK [co-Kohärenz]
$co^* = X \times X$. $\Diamond$

Wir können jetzt Bemerkung 2.41 verschärfen und erhalten, daß es zu jedem Element zumindest je ein anderes in co und in li steht.

Satz 2.42 $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{LIK}}$ $\forall x \in X : \exists y \in X : x \; li \; y$.

Beweis Sei $x \in X$ beliebig, aber fest. Nach Axiom NTR gibt es ein $z \in X$ mit $x \neq z$. Axiom LIK führt zu $x\ li^*\ z$, daraus wird $x\ li^+\ z$. Also gibt es ein y mit $x\ li\ y\ li^*\ z$. □

Satz 2.43 $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{COK}}$ $\forall x \in X : \exists y \in X : x\ co\ y$.
Beweis Analog zum vorigen Satz. □

Wir können die reflexive und transitive Hülle, die wir in Axiom LIK und Axiom COK verwendet haben, durch die transitive Hülle ersetzen, wie die folgenden beiden Sätze zeigen.

Korollar 2.44 $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{LIK}}$ $li^+ = X \times X$.
Beweis Sei $x \in X$. Satz 2.42 zeigt, das es ein $y \in X$ mit $x\ li\ y$ gibt. Axiom LIK ergibt $y\ li^*\ z$ für alle $z \in X$. Also $\forall x, z \in X : x\ li^+\ z$. □

Korollar 2.45 $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{COK}}$ $co^+ = X \times X$.
Beweis Analog zum vorigen Korollar. □

Satz 2.42 zeigt, daß es zu jedem Element ein anderes Element gibt, mit dem es in li steht. Die beiden Elemente sind aber nach Axiom COK auch mit einer co-Kette verbunden. Das heißt aber, daß $\underline{co}$ nicht transitiv sein kann, wir müssen uns also von der Alltagsvorstellung entfernen, daß, wenn A und B gleichzeitig sind und B und C gleichzeitig sind, dann auch A und C gleichzeitig sein müssen.

Zwei Elemente, die in der Relation co stehen, geschehen in diesem Sinne eben nicht gleichzeitig, sondern nur nebeneinander, sich nicht beeinflussend, ohne feste Ordnung. In diesem Punkt ist die Theorie der Nebenläufigkeit stark von der Relativitätstheorie beeinflußt, in der auch eine exakte Gleichzeitigkeit nicht definiert ist. Da die Nichttransitivität von co erst mit der Kombination von li- und co-Kohärenz herzuleiten ist, stellt sie eine weitere Motivation dafür dar, sich nicht auf Axiom LIK allein zu beschränken.

Weiterhin ist zu bemerken, daß es, weil es keine Elemente gibt, die mit allen anderen in li-Beziehung stehen, auch keine globalen Synchronisationspunkte gibt. Damit muß auch das Fortschreiten der Zeit stets lokal geschehen, denn die stets vorhandenen co-Nachbarn eines Ereignisses sind am Fortgang der Zeit durch das Ereignis unbeteiligt.

Das Beispiel aus Abbildung 2.1 ist die kleinste Struktur, die alle bisher aufgestellten Axiome erfüllt. Es ist hilfreich, sich diese Tatsache selbst mit einem Blatt Papier und einem Bleistift klarzumachen, um eine gewisse Geläufigkeit mit den Relationen co und li und mit der graphischen Darstellung zu erhalten.

2.3.4 Irreduzibilität

Angenommen, zwei Elemente $x, y \in X$ stehen mit exakt derselben Menge von Zuständen und Ereignissen in kausaler Abhängigkeit, dann ist es plausibel anzunehmen, daß die beiden Elemente gleich sind, denn innerhalb der Struktur verhalten sie sich schließlich gleich. Wir fassen diesen Zusammenhang in zwei Axiome.

Axiom LII [li-Irreduzibilität]
$\widetilde{li} = \mathrm{id}_X$. ◊

Axiom COI [co-Irreduzibilität]
$\widetilde{co} = \mathrm{id}_X$. ◊

Es klingt unnötig, für beide Relationen die Irreduzibilität zu fordern, da scheinbar die Axiome auseinander herleitbar sind. Dies ist aber nicht der Fall. Wenn zwei Elemente x und y in co zueinander stehen, dann sind sie zwangsläufig co-irreduzibel, weil sie zwar mit dem jeweils anderen Element in co stehen, mit sich selbst jedoch nicht. Entsprechend sind zwei Elemente in li stets li-irreduzibel.

Damit sich zwei Elemente wirklich immer durch ein drittes, vom beiden verschiedenes Element unterscheiden, müssen wir beide Axiome zusammen verwenden.

Bemerkung 2.46 $\boxed{\text{LII}}$ $\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow li[x] \neq li[y]$. □

Bemerkung 2.47 $\boxed{\text{COI}}$ $\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow co[x] \neq co[y]$. □

Bemerkung 2.48 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{LII}}$ $\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow \underline{co}[x] \neq \underline{co}[y]$.
Beweis Mit Satz 2.38 und Bemerkung 2.46. □

Bemerkung 2.49 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{COI}}$ $\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow \underline{li}[x] \neq \underline{li}[y]$.
Beweis Mit Satz 2.39 und Bemerkung 2.47. □

Satz 2.50 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{LII}}$ $\boxed{\text{COI}}$ $\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow \exists z \in X : (x \; co \; z \wedge y \; li \; z) \vee (x \; li \; z \wedge y \; co \; z)$.
Beweis Seien $x, y \in X$ beliebig mit $x \neq y$.

Fall 1: $x \; co \; y$. $y \notin li[x]$, also $li[x] \cap \mathrm{id}_X[y] = \emptyset$. Nach Axiom LII ist $li[x] \neq li[y]$ und daher $li[x] - li[y] \neq \emptyset \vee li[y] - li[x] \neq \emptyset$.
Wenn $li[x] - li[y] \neq \emptyset$, dann ist $li[x] \cap \underline{co}[y] \neq \emptyset$ wegen Satz 2.38, also $li[x] \cap co[y] = (li[x] \cap co[y]) \cup (li[x] \cap \mathrm{id}_X[y]) = li[x] \cap \underline{co}[y] \neq \emptyset$.
Wenn andererseits $li[y] - li[x] \neq \emptyset$, dann ergibt sich $li[y] \cap co[x] \neq \emptyset$.

Fall 2: $\neg x \; co \; y$. Es folgt $x \; li \; y$ wegen $x \neq y$. $y \notin co[x]$, also $co[x] \cap \mathrm{id}_X[y] = \emptyset$. Jetzt wenden wir Axiom COI an, um $co[x] \neq co[y]$ abzuleiten.
Der Rest des Beweises verläuft analog zu Fall 1.

Also gilt der Satz für alle $x, y \in X$. □

Die Axiome der Irreduzibilität verkörpern in der Theorie das Prinzip der Extensionalität: Zwei Objekte sind genau dann gleich, wenn sie sich gleich verhalten, das heißt, wenn sie dieselben Beziehungen zu anderen Elementen haben.

2.3.5 Änderungs- und Nachbarschaftsrelation

Bislang existieren die Elemente von X weitgehend unabhängig voneinander. Es gibt keine Möglichkeit festzustellen, welche der Elemente nahe beieinander liegen und welche weit entfernt voneinander sind. In einem Netz ist die Umgebung eines Elements natürlicherweise als die Vereinigung von Vor- und Nachbereich zu definieren. Wir wollen von diesem Zusammenhang ausgehend eine Definition für Nachbarschaft in Nebenläufigkeitsstrukturen entwickeln.

Betrachten wir dazu ein Ereignis e und eine Bedingung $b \; F \; e$ im Vorbereich des Ereignisses. Sei nun x ein beliebiges Element, für das $x \; co \; e$ gilt. Nach der Interpretation von co in Netzen heißt dies, daß das Element x während des Schalten von e aktiv sein kann.

Wenn x ein Ereignis ist, dann können x und e in einem gemeinsamen Schritt schalten. Damit könnte aber auch x alleine schalten und wäre damit aktiv, während b, die Vorbedingung von e, weiterhin gelten würde. Dies ist aber gerade die Bedingung für $b \; co \; x$.

Wenn andererseits x eine Bedingung ist, dann müssen vor dem Schalten von e die Bedingungen b und x gleichzeitig gegolten haben. Wieder erhalten wir $b \; co \; x$. Da wir diese Argumentation für alle x durchführen können, erwarten wir die Beziehung $co[e] \subseteq co[b]$. Äquivalent dazu kann dies als $\underline{li}[b] \subseteq \underline{li}[e]$ formuliert werden, was wir aus historischen Gründen bevorzugen.

Wegen Axiom COI ergibt sich $\underline{li}[b] \neq \underline{li}[e]$. Also haben wir $\underline{li}[b] \subsetneq \underline{li}[e]$ als notwendige Bedingung für $b \; F \; e$. Bei der obigen Argumentation hätten wir ebenso von $e \; F \; b$ ausgehen können, womit wir gezeigt hätten, daß $\underline{li}[b] \subsetneq \underline{li}[e]$ allgemein für $b \; F^{\leftrightarrow} \; e$ notwendig ist.

Dies bedeutet, daß zwei benachbarte Elemente stets ein vergleichbares $\underline{li}$-Bild besitzen. Damit bilden wir folgende Analogie: Zwei identische Elemente haben auch das gleiche $\underline{li}$-Bild. Zwei verschiedene, aber benachbarte Elemente haben nicht das gleiche, aber immer noch ein vergleichbares $\underline{li}$-Bild.

Nun ist es plausibel, zu fordern, daß zwei nicht benachbarte Elemente ein unvergleichbares $\underline{li}$-Bild haben. Damit gelangen wir zu einer Definition für eine gerichtete Nachbarschaftsrelation, die immer von einer Bedingung zur einem benachbarten Ereignis weist.

Definition 2.51 [Änderungsrelation]
$P := \{(x, y) \mid \underline{li}[x] \subsetneq \underline{li}[y]\}$. ◊

Wir sagen, wenn $x\ P\ y$ gilt, daß x von y geändert wird, weil x eine Bedingung in der Umgebung von y ist und damit durch das Schalten von y entweder gültig oder ungültig wird, abhängig davon, ob x aus dem Vor- oder dem Nachbereich von y stammt.

Man bemerkt, daß wir nicht gezeigt haben, daß die Bedingung $\underline{li}[b] \subsetneq \underline{li}[e]$ hinreichend dafür ist, daß b und e benachbart sind. Dennoch erscheint die gewählte Definition von P plausibel und auf jeden Fall mathematisch interessant.

Es sollen nun einige Eigenschaften von P gesammelt werden. P erbt von der Relation $\subsetneq$ die Antisymmetrie und die Irreflexivität.

Satz 2.52 $P \cap P^{-1} = \varnothing$.
Beweis $P \cap P^{-1} = \{(x, y) \mid \underline{li}[x] \subsetneq \underline{li}[y] \wedge \underline{li}[y] \subsetneq \underline{li}[x]\} \subseteq \{(x, y) \mid \underline{li}[x] \subsetneq \underline{li}[x]\} = \varnothing$. □

Korollar 2.53 $P \cap \mathrm{id}_X = \varnothing$. □

Wenn ein Element ein anderes ändert, sind die beiden Elemente kausal abhängig.

Lemma 2.54 $P \subseteq li^{-1}$.
Beweis Seien $x, y \in X$ mit $x\ P\ y$, dann $x \in \underline{li}[x] \subsetneq \underline{li}[y]$ und $y\ \underline{li}\ x$. Wegen $x \neq y$, folgt $x\ li^{-1}\ y$. □

Satz 2.55 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{SYM}}$ $P \subseteq li$.
Beweis Unter Verwendung von Satz 2.40 und Lemma 2.54. □

Die beiden nächsten Sätze werden auch als *co*- und li-Fortpflanzungsregel bezeichnet, weil man mit ihrer Hilfe eine bekannte *co*- oder li-Beziehung auf die andere Seite eine P-Paares hinüberschieben kann.

Satz 2.56 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $P \odot co \subseteq co$.
Beweis Sei $x\ P\ y\ co\ z$, dann $\neg z \in \underline{li}[y]$ wegen Satz 2.39 und nach Definition von P auch $\neg z \in \underline{li}[x]$. Also $x\ co\ z$. □

Satz 2.57 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{SYM}}$ $\underline{li} \odot P \subseteq \underline{li}$.
Beweis Sei $x\ \underline{li}\ y\ P\ z$, dann $x \in \underline{li}[y]$ wegen Satz 2.40 und nach Definition von P auch $x \in \underline{li}[z]$. □

Die folgenden Sätze bereiten Satz 2.62 vor, der eine Beschreibung der P-Relation durch einen einfachen Relationenausdruck liefert.

Satz 2.58 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{SYM}}$ $P \subseteq co \odot li$.
Beweis Sei $x, y \in X$ mit $x\ P\ y$, dann $\underline{li}[x] \subsetneq \underline{li}[y]$. Also gibt es ein $z \in X$ mit $y\ \underline{li}\ z$ und $\neg x\ \underline{li}\ z$, entsprechend $x\ co\ z$ wegen Satz 2.39. Wegen $x\ li\ y$ und Axiom DIS ergibt sich damit $y \neq z$, also $y\ li\ z$. Mit Axiom SYM folgt $x\ co \odot li\ y$. □

Satz 2.59 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{SYM}}$ $P \cap li \odot co = \varnothing$.
Beweis Wir nehmen das Gegenteil an, dann gibt es $x, y, z \in X$ mit $x\ P\ y$ und $x\ li\ z\ co\ y$, also $x\ \underline{li}\ z$. Aber $\underline{li}[x] \subseteq \underline{li}[y]$ erfordert $y\ \underline{li}\ z$. Dies ergibt mit Satz 2.39 $\neg y\ co\ z$ im Widerspruch zu $z\ co\ y$ und Axiom SYM. □

Lemma 2.60 $\boxed{\text{DIS}}\,\boxed{\text{VST}}\,\boxed{\text{SYM}}$ $P \subseteq li - li \odot co$.
Beweis $P = (P - li \odot co) \cup (P \cap li \odot co) = P - li \odot co \subseteq li - li \odot co$, denn es gilt Satz 2.59. □

Lemma 2.61 $\boxed{\text{DIS}}\,\boxed{\text{VST}}\,\boxed{\text{SYM}}\,\boxed{\text{COI}}$ $li - li \odot co \subseteq P$.
Beweis Seien $x, y \in X$ beliebig mit $x\ li\ y$ und $\neg x\ li \odot co\ y$. Also $\forall z \in X : (\neg x\ li\ z) \vee z\ \underline{li}\ y$ wegen Satz 2.38 und Satz 2.39. Äquivalent dazu ist $\forall z \in X : x\ li\ z \Rightarrow y\ \underline{li}\ z$ wegen Satz 2.40. Weil $x\ li\ y$ gilt, läßt sich die Aussage verschärfen zu $\forall z \in X : x\ \underline{li}\ z \Rightarrow y\ \underline{li}\ z$. Daher $\underline{li}[x] \subseteq \underline{li}[y]$.
Nun ist $x \neq y$ wegen $x\ li\ y$ und daher $\underline{li}[x] \neq \underline{li}[y]$ gemäß Axiom COI, also $\underline{li}[x] \subsetneq \underline{li}[y]$ und $x\ P\ y$. □

Satz 2.62 $\boxed{\text{DIS}}\,\boxed{\text{VST}}\,\boxed{\text{SYM}}\,\boxed{\text{COI}}$ $P = li - li \odot co$.
Beweis Nach Lemma 2.60 und Lemma 2.61. □

Der Ausgangspunkt für die Definition von P war der Wunsch nach einer Definition für Nähe in einer Nebenläufigkeitsstruktur. Da Nähe eine symmetrische Eigenschaft ist, entspricht P als asymmetrische Relation noch nicht voll unseren Wünschen. Wir definieren daher die symmetrische Ergänzung von P als Nachbarschaftsrelation und geben ihr wegen ihrer besonderen Bedeutung eine eigene Bezeichnung.

Definition 2.63 [Nachbarschaft]
$im := P \cup P^{-1}$. ◊

Der Name im hat seine Wurzel in der englischen Bezeichnung *immediate neighborhood*, hier übersetzt als unmittelbare Nachbarschaft. Wir betrachten einige elementare Eigenschaften der Relation.

Bemerkung 2.64 $im = im^{-1}$. □

Satz 2.65 $im \cap \mathrm{id}_X = \varnothing$.
Beweis $P \cap \mathrm{id}_X = \varnothing$ gemäß Korollar 2.53, also auch $P^{-1} \cap \mathrm{id}_X = \varnothing$. □

Satz 2.66 $\boxed{\text{DIS}}\,\boxed{\text{VST}}\,\boxed{\text{SYM}}$ $im \subseteq li$.
Beweis $im = P \cup P^{-1} \subseteq li \cup li = li$ wegen Satz 2.55 und Lemma 2.54 □

Nach der Definition von im ist klar, daß mit Nachbarschaft die zeitliche Nachbarschaft gemeint ist. Es ist auch möglich, für Elemente, die zueinander in co liegen die räumlichen Nachbarschaftsrelationen D und dn zu definieren, dies soll uns jedoch in dieser Arbeit nicht beschäftigen, da sich bis jetzt außer der mathematischen Symmetrie kein stichhaltiges Argument für diese Definitionen ergeben hat.

2.3.6 Stellen und Transitionen

Da die P-Relation stets von Bedingungen zu Ereignissen gerichtet ist, ergibt sich damit eine einfache Möglichkeit, aus den Relationen co und li zu rekonstruieren, welche der Elemente von X zu welcher der beiden Klassen gehören.

Definition 2.67 [Stellen]
$S := \mathrm{dom}\,(P)$. ◊

Definition 2.68 [Transitionen]
$T := \mathrm{ran}\,(P)$. ◊

Mit dieser Definition entsprechen die Stellen den Bedingungen und die Transitionen den Ereignissen. Es wurden explizit nicht die Bezeichnungen B und E verwendet, um die ursprüngliche Aufteilung der Elemente in B und E von der aus $\underline{li}$ abgeleiteten Aufteilung in S und T zu trennen.

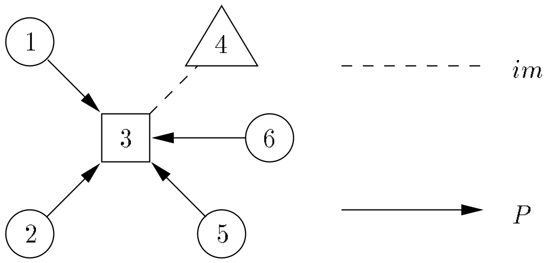


Abbildung 2.2: Darstellung der Relationen P und im

Von Netzen ist gefordert, daß $B \cap E = \varnothing$. Wir führen nun ein Axiom ein, daß eine entsprechende Eigenschaft für Stellen und Transitionen garantiert.

Axiom KAA [Keine Änderung einer Änderung]
$P^2 = \varnothing$. $\Diamond$

Die folgenden drei Sätze folgen nicht nur aus Axiom KAA, sondern sind ihm sogar äquivalent, wie man leicht zeigen könnte. Insbesondere $S \cap T = \varnothing$ würde sich als eine alternative Formulierung des Axioms anbieten.

Satz 2.69 $\boxed{\text{KAA}}$ $\forall t \in T : P[t] = \varnothing$.

Beweis $\forall t \in T : \exists x \in X : x\ P\ t$, also $\forall t \in T : \exists x \in X : \{t\} \subseteq P[x]$ und $\forall t \in T : \exists x \in X : P[t] \subseteq P[P[x]] = \varnothing$ nach Axiom KAA. $\square$

Satz 2.70 $\boxed{\text{KAA}}$ $\forall s \in S : P^{-1}[s] = \varnothing$.

Beweis $\forall s \in S : \exists x \in X : x\ P^{-1}\ s$, also $\forall s \in S : \exists x \in X : \{s\} \subseteq P^{-1}[x]$ und $\forall s \in S : \exists x \in X : P^{-1}[s] \subseteq P^{-1}[P^{-1}[x]] = \varnothing$ nach Axiom KAA. $\square$

Satz 2.71 $\boxed{\text{KAA}}$ $S \cap T = \varnothing$.

Beweis Sei $t \in T$, dann $P[t] = \varnothing$ wegen Satz 2.69, also $\neg t \in \mathrm{dom}\,(P)$ und $\neg t \in S$. $\square$

Die Technik zur Visualisierung von Nebenläufigkeitsstrukturen kann jetzt verfeinert werden, indem wir P, im, S und T sichtbar machen. Elemente von S, also Stellen, werden genau wie in Petrinetzen als Kreise dargestellt, Transitionen aus T werden dagegen als Quadrate gezeichnet. Nur wenn wir nicht wissen, ob ein Element eine Stelle oder eine Transition ist, werden wir im folgenden weiter Dreiecke für die Elemente von X verwenden.

Da P eine gerichtete Relation ist, notieren wir eine P-Beziehung als einen Pfeil von der Stelle zur Transition. im ist wiederum ungerichtet und findet sich als gestrichelte Linie im Diagramm wieder. In Abbildung 2.2 sind alle neuen Möglichkeiten verwendet, li-Kanten sind weggelassen. Wir sehen hier eine Transition 3, vier Stellen 1, 2, 5 und 6, sowie ein Element 4, von dem wir zunächst nur wissen, daß es mit Element 3 in im-Beziehung steht.

Jetzt werden einige Lemmata bewiesen, die es uns erlauben, vom Vorhandensein einer im-Relation auf die zugrundeliegende P-Relation zurückzuschließen.

Lemma 2.72 $\boxed{\text{KAA}}$ $\forall x, y, z \in X : x\ P\ y \wedge z\ im\ y \Rightarrow z\ P\ y$.

Beweis Für $x, y, z \in X$ mit $x\ P\ y \wedge y\ im\ z$ ergibt $y\ P\ z$ einen Widerspruch mit Axiom KAA. Wegen $im = P \cup P^{-1}$ muß daher $z\ P\ y$ gelten. $\square$

Lemma 2.73 $\boxed{\text{KAA}}$ $\forall x, y, z \in X : y\ P\ x \wedge y\ im\ z \Rightarrow y\ P\ z$. $\square$

Lemma 2.74 $\boxed{\text{KAA}}$ $\forall x \in S : \forall y \in X : x\ im\ y \Rightarrow x\ P\ y$. $\square$

Lemma 2.75 $\boxed{\text{KAA}}$ $\forall x \in T : \forall y \in X : x\ im\ y \Rightarrow y\ P\ x$. $\square$

Damit ist klar, daß in Abbildung 2.2 das Element 4 eine Stelle sein muß und daß die P-Relation von Element 4 nach Element 3 gerichtet ist.

Welche Bedeutung hat es, wenn zwei Elemente von einer im-Kette verbunden sind? In diesem Fall kann eine Wirkung über eine endliche Reihe von lokalen Wechselwirkungen erfolgen. Wenn wir davon ausgehen, daß eine Wirkung überhaupt nur durch lokale Effekte vermittelt werden kann, dann sollte dies immer der Fall sein. Wir formulieren daher ein neues Axiom.

Axiom IMK [im-Kohärenz]
$im_X^* = X \times X$. $\Diamond$

Der folgende Satz ergibt sich analog zu Satz 2.42.

Satz 2.76 $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\forall x \in X : \exists y \in X : x\ im\ y$. $\Box$

Damit können wir uns in der Formulierung der im-Kohärenz auf die transitive Hülle beschränken, der Beweis verläuft analog zu Korollar 2.44.

Korollar 2.77 $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $im^+ = X \times X$. $\Box$

Eine der wichtigsten Folgerungen aus Axiom IMK ist, daß jedes Element aus X entweder Stelle oder Transition ist.

Satz 2.78 $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $S \cup T = X$.

Beweis Sei $x \in X$ beliebig. Nach Satz 2.76 gibt es ein $y \in X$ mit $x\ im\ y$. Per Definition von im gilt $x \in \mathrm{dom}\,(im) = \mathrm{dom}\,(P) \cup \mathrm{ran}\,(P) = S \cup T$. $\Box$

Offensichtlich wäre es für den letzten Beweis ausreichend gewesen, eine zu Satz 2.76 äquivalente Formulierung als Axiom anzunehmen, doch wir werden später noch die volle Mächtigkeit von Axiom IMK ausnutzen.

2.3.7 Lokale Axiome

Da wir für jedes Element x seine Umgebung durch $im[x]$ kennzeichnen können, soll untersucht werden, ob die Relationen co und li innerhalb dieser Umgebung besondere Eigenschaften aufweisen.

Betrachten wir zunächst ein Ereignis, dann liegen in dessen Umgebung Bedingungen, die durch das Ereignis geändert werden. Es gibt in diesem Fall zwei mögliche Arten von Bedingungen: Vorbedingungen und Nachbedingungen.

Wir ignorieren an dieser Stelle absichtlich die Möglichkeit, daß es Bedingungen geben könnte, die während des Ereignisses kurzfristig geändert werden, aber bis zum Ende der Ereignisses wieder ihren ursprünglichen Zustand annehmen. In diesem Fall müßte das Ereignis in mehrere Teilereignisse aufgespalten werden, um es mit einer Nebenläufigkeitsstruktur beschreiben zu können.

Gehen wir nun davon aus, daß das Ereignis auch irgendwann einmal eintritt. Würde es nie eintreten, müßte es nicht in die Nebenläufigkeitsstruktur aufgenommen werden. Damit das Ereignis aber eintreten kann, müssen vorher alle Vorbedingungen gleichzeitig erfüllt sein. Gegeben zwei Vorbedingungen eines Ereignisses, müssen beide also kausal unabhängig sein, da sie sonst nicht gleichzeitig beobachtbar sein könnten. Je zwei Vorbedingungen stehen nach dieser Überlegung in co-Relation.

Unmittelbar nachdem ein Ereignis eingetreten ist, sind alle Nachbedingungen erfüllt, und wir können mit derselben Argumentation wie im letzten Absatz folgern, daß zwischen je zwei verschiedenen Nachbedingungen eine co-Beziehung besteht.

Wir betrachten nun eine sogenannte Kontaktsituation, in der alle Vorbedingungen und eine Nachbedingung eines Ereignisses erfüllt sind. Damit würde das Ereignis nur noch deshalb vom Schalten abgehalten werden, weil sein Nachbereich nicht frei ist. Ein Ereignis

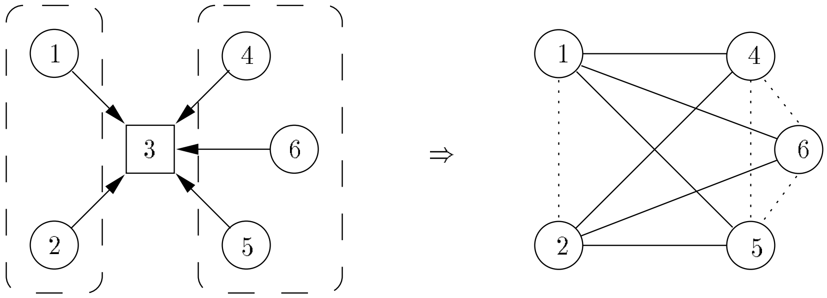


Abbildung 2.3: Motivation der Axiome LCT, LOR und LFO

sollte in seinem Eintreten nur von der Gültigkeit seiner Vorbedingungen abhängen. Folglich ist eine Kontaktsituation nicht wünschenswert.

Wir verbieten daher eine Kontaktsituation und gehen sogar noch einen Schritt weiter. Wir verbieten, daß gleichzeitig Bedingungen im Vorbereich und Bedingungen im Nachbereich eines Ereignisses gelten können. Damit besteht zwischen einer Vor- und einer Nachbedingung stets eine li-Beziehung.

Um die neuen Axiome zu motivieren, wird in Abbildung 2.3 eine Struktur vorgestellt, die an Abbildung 2.2 erinnert. Die unmittelbare Nachbarschaft der Transition 3 ist jedoch willkürlich in zwei Bereiche aufgeteilt; wir legen dazu fest, daß die Stellen 1 und 2 die Vorbedingungen der Transition sein sollen und entsprechen die Stellen 4, 5 und 6 den Nachbedingungen zuzuordnen sind. Mit dem Überlegungen, die wir angestellt haben, können dann beide Relationen, co und li, hergeleitet werden.

Es fällt auf, daß durch die Symmetrie der li-Relation Vor- und Nachbedingungen ohne weitere Informationen nicht mehr aus co und li rekonstruiert werden können. Wir werden uns später mit diesem Problem beschäftigen müssen, zunächst reicht es uns, daß wir die Partition der Umgebung in zwei Teile leicht erkennen können.

Könnte es sein, daß es zu einem Ereignis keine Vorbedingungen oder keine Nachbedingungen gibt? Im Prinzip schon, allerdings sind in vielen technischen Systemen alle Ereignisse so gestaltet, daß sie in irgendeiner Form ein Ergebnis produzieren, also eine Nachbedingung besitzen. Andererseits werden in solchen Systemen Ereignisse stets durch einen Befehl, ein Signal oder das Eintreten einer spezifischen Bedingung ausgelöst, so daß auch eine Vorbedingung vorhanden sein sollte.

Ein Ereignis ohne Vorbedingungen würde bei der Betrachtung als Netz auch unweigerlich wieder eine Kontaktsituation hervorrufen. Ebenso ergäbe ein Ereignis ohne Nachbedingungen eine Situation, die man als inversen Kontakt bezeichnen könnte. Beide Fälle sollen, wie schon gesagt, vermieden werden.

Auch in physikalisch beschreibbaren Systemen gibt es zu jedem Ereignis andere Ereignisse, die früher stattfanden, und solche, die später stattfinden werden. In diesem Sinne bedeutet die Existenz von Vor- und Nachbedingungen, daß der Ablauf der Zeit keinen Anfang und kein Ende hat. Gäbe es Anfang oder Ende, dann wäre dies ein Sonderfall, der grundsätzlich anders zu behandeln ist. Wenn wir eine Sonderbehandlung nicht wünschen, sollten wir ein diesbezügliches Axiom zumindest benennen, auch wenn wir es nicht in jedem Axiomensystem verwenden wollen.

Auch die im-Umgebung einer Bedingung, also einer Stelle, kann ähnlich strukturiert werden. Hier haben wir eine Aufteilung der benachbarten Ereignisse in solche, nach deren Eintreten die Bedingung gilt, und solche, durch die die Bedingung ungültig wird.

Würden wir zulassen, daß mehr als ein Ereignis eine Bedingung ungültig macht, dann würden diese Ereignisse miteinander in Konflikt stehen, da nur eines von ihnen eintreten kann. Dies ist der typische Fall einer Alternative, wie er in der Motivation von Axiom VST angedeutet wurde. Da wir aber Alternativen ignorieren wollen, müssen wir festlegen, daß eine Bedingung nur durch genau ein Ereignis ungültig gemacht werden kann. Aus Symmetriegründen wollen wir auch fordern, daß nur genau ein Ereignis eine Bedingung wahr machen kann.

Damit sieht die im-Umgebung einer Bedingung sehr einfach aus. Sie enthält genau zwei Ereignisse, von denen eines vor der Gültigkeit der Bedingung eintritt und eines hinterher. Die beiden Ereignisse sind also kausal abhängig, es besteht eine li-Beziehung.

Es folgen drei Axiome, die die aufgestellten Forderungen garantieren.

Axiom LCT [Lokale *co*-Transitivität]
$\forall x \in X : (co|_{im[x]})^2 \subseteq \underline{co}|_{im[x]}$. $\Diamond$

Axiom LOR [Lokale Orientierbarkeit]
$\forall x \in X : (li|_{im[x]})^2 \subseteq \underline{co}|_{im[x]}$. $\Diamond$

Axiom LFO [Lokale Fortsetzbarkeit]
$\forall x \in X : \mathrm{id}_{im[x]} \subseteq (li|_{im[x]})^2$. $\Diamond$

Es wäre möglich, die drei Axiome zusammenzufassen, aber dies dient nicht der Klarheit der Formulierung und wird deshalb hier nicht ausgeführt. Wir beweisen zunächst eine Variante von Axiom LCT.

Satz 2.79 $\boxed{\text{LCT}}$ $\forall x \in X : (\underline{co}|_{im[x]})^2 = \underline{co}|_{im[x]}$.
Beweis $(\underline{co}|_{im[x]})^2 = (co|_{im[x]} \cup \mathrm{id}_{im[x]})^2 = (co|_{im[x]})^2 \cup (co|_{im[x]} \odot \mathrm{id}_{im[x]}) \cup (\mathrm{id}_{im[x]} \odot co|_{im[x]}) \cup (\mathrm{id}_{im[x]} \odot \mathrm{id}_{im[x]}) \subseteq \underline{co}|_{im[x]} \cup co|_{im[x]} \cup co|_{im[x]} \cup \mathrm{id}_{im[x]} = \underline{co}|_{im[x]}$ wegen Axiom LCT. Andererseits ist $(\underline{co}|_{im[x]})^2 \supseteq \underline{co}|_{im[x]} \odot \mathrm{id}_X|_{im[x]} = \underline{co}|_{im[x]}$ offensichtlich. $\square$

Dieser Satz besagt, daß $\underline{co}$ innerhalb der im-Umgebung eines Elements transitiv ist. Da $\underline{co}$ auch symmetrisch und reflexiv ist, stellt $\underline{co}$ lokal eine Äquivalenzrelation dar. Eine Äquivalenzrelation teilt ihre Basismenge, in diesem Fall die unmittelbare Umgebung eines Elements, in eine oder mehrere Äquivalenzklassen ein.

Wir erwarten bereits, daß diese Äquivalenzklassen dem Vor- und dem Nachbereich des Elements entsprechen, und müssen jetzt überprüfen, ob diese Erwartung durch die aufgestellten Axiome erfüllt wird. Doch bevor wir dies tun können, brauchen wir einige Hilfssätze.

Lemma 2.80 $\boxed{\text{LFO}}$ $\forall x \in X : \forall y \in im[x] : im[x] \cap li[y] \neq \emptyset$.
Beweis Seien $x, y \in X$ mit $x\ im\ y$. Da $y\ \mathrm{id}_{im[x]}\ y$, gilt nach Axiom LFO $y\ (li|_{im[x]})^2\ y$. Also gibt es ein $z \in im[x]$ mit $y\ li\ z\ li\ y$ und daher $z \in li[y]$. $\square$

Lemma 2.81 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\forall x \in X : \exists y \in im[x] : \exists z \in im[x] : \neg y\ \underline{co}\ z$.
Beweis Sei $x \in X$ beliebig. Nach Satz 2.76 gibt es ein y mit $x\ im\ y$. Wegen Lemma 2.80 haben wir ein $z \in im[x]$ mit $y\ li\ z$. Das heißt wegen Axiom DIS $\neg y\ \underline{co}\ z$. $\square$

Satz 2.82 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\forall x \in X : |im[x]| \geq 2$.
Beweis Mit Lemma 2.81. $\square$

Lemma 2.81 zeigt, daß es mindestens zwei $\underline{co}$-Äquivalenzklassen in der im-Umgebung eines Elements geben muß. Jetzt zeigen wir, daß es höchstens zwei geben kann.

Satz 2.83 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\forall x \in X : \forall u, v, w \in im[x] : \neg u\ \underline{co}\ v \Rightarrow (v\ \underline{co}\ w \vee u\ \underline{co}\ w)$.
Beweis Sei $x \in X$ beliebig. Sei $u, v, w \in im[x]$ mit $\neg u\ \underline{co}\ v$, also $u\ li\ v$ wegen Satz 2.38.

Fall 1: $v\ \underline{co}\ w$. Der Satz gilt offensichtlich.

Fall 2: $\neg v\ \underline{co}\ w$. $v\ li\ w$ und daher $u\ \underline{co}\ w$ wegen $u\ li\ v$ und Axiom LOR.

Also $v\ \underline{co}\ w \vee u\ \underline{co}\ w$. □

Wenn es mehr als zwei $\underline{co}$-Äquivalenzklassen in der Umgebung eines Elements x gibt, dann gäbe es drei Elemente, die paarweise nicht in $\underline{co}$ stehen, im Widerspruch zum letzten Satz. Welche der beiden Äquivalenzklassen allerdings dem Vorbereich und welche dem Nachbereich entspricht, können wir, wie schon angedeutet, nicht feststellen.

Gibt es wirklich nur zwei Transitionen in der im-Umgebung einer Stelle?

Lemma 2.84 $\boxed{\text{DIS}}\ \boxed{\text{VST}}\ \boxed{\text{SYM}}\ \boxed{\text{KAA}}$ $\forall s \in S : co|_{im[s]} = \emptyset$.

Beweis Angenommen, dies wäre nicht der Fall, dann gäbe es $y, z \in im[s]$ mit $y\ co\ z$. Aber $s\ P\ y$ nach Lemma 2.74 und wir haben $s\ P\ y\ co\ z$. Mit Satz 2.56 führt dies zu $s\ co\ z$. Satz 2.66 und $s\ im\ z$ erfordern aber $s\ li\ z$, Widerspruch mit Axiom DIS. □

Lemma 2.85 $\boxed{\text{DIS}}\ \boxed{\text{VST}}\ \boxed{\text{SYM}}\ \boxed{\text{KAA}}\ \boxed{\text{LOR}}$ $\forall s \in S : |im[s]| \leq 2$.

Beweis Sei $s \in S$ und nehmen wir an, $\{x, y, z\} \subseteq im[s]$ und $x \neq y \neq z \neq x$. Wegen Lemma 2.84 gilt außerdem $\neg x\ co\ y$, $\neg y\ co\ z$ und $\neg z\ co\ x$. Daher läßt Satz 2.39 nur $x\ li\ y\ li\ z\ li\ x$ als Möglichkeit. Aber dann $x\ (li|_{im[s]})^2\ z$, und nach Axiom LOR gilt $x\ co\ z$ im Widerspruch zu $x\ li\ z$. □

Satz 2.86 $\boxed{\text{DIS}}\ \boxed{\text{VST}}\ \boxed{\text{SYM}}\ \boxed{\text{NTR}}\ \boxed{\text{KAA}}\ \boxed{\text{IMK}}\ \boxed{\text{LOR}}\ \boxed{\text{LFO}}$ $\forall s \in S : |im[x]| = 2$.

Beweis Mit Satz 2.82 und Lemma 2.85. □

2.3.8 Konsistente Orientierung

Die im-Relation gibt uns zwar die unmittelbare Umgebung eines jeden Elements an, es wäre jedoch von Vorteil, auch in Nebenläufigkeitsstrukturen wieder über Vor- und Nachbereich eines Elements sprechen zu können, so wie es bei Netzen der Fall ist. Wir müßten dazu die im-Relation orientieren, indem wir zwischen je zwei Elementen in im-Beziehung eine der beiden möglichen Richtungen auswählen.

Basierend auf der Analogie zwischen Nebenläufigkeitsstrukturen und Netzen bezeichnen wir die enstehende Relation dann als Flußrelation. Mit ihrer Hilfe können wir von einer Nebenläufigkeitsstruktur zu einem Netz $(S, T; F)$ gelangen. Statt der Bezeichnung Flußrelation kommt auch der Begriff *konsistente Orientierung* zur Anwendung. Die Relation soll in dem Sinne „konsistent" sein, daß sie nicht frei gewählt werden darf, sondern sich in die Relationen li und co einfügen muß.

Diese Forderung an die konsistente Orientierung ergibt sich daraus, daß zwischen dem Vorbereich und dem Nachbereich eines Elements immer eine li-Beziehung herrschen soll, wie in der Motivation für Axiom LOR angegeben. Andererseits sollte innerhalb des Vor- und Nachbereichs jeweils die $\underline{co}$-Relation gelten, wie wir bei den Erklärungen zu Axiom LCT gesehen haben. Um diese Eigenschaften zu gewährleisten, wird folgende formale Definition gewählt.

Definition 2.87 [Konsistente Orientierung]
Eine Relation $F \subseteq X \times X$ ist eine konsistente Orientierung genau dann, wenn

$$F \cup F^{-1} = im, \qquad \text{(Konsistenz der Änderungen, 2.1)}$$

$$F \odot F \subseteq li, \qquad \text{(li zwischen Vor- und Nachbereich, 2.2)}$$

$$F \odot F^{-1} \subseteq \underline{co}, \qquad \text{($\underline{co}$ im Vorbereich, 2.3)}$$

$$F^{-1} \odot F \subseteq \underline{co} \qquad \text{($\underline{co}$ im Nachbereich, 2.4)}$$

sämtlich erfüllt sind. ◊

Definition 2.88 [Orientierungen]
Orient $:= \{F \subseteq X \times X \mid F \text{ ist eine konsistente Orientierung}\}$. ◊

Zunächst fällt auf, daß diese Definition weder konstruktiv noch eindeutig ist. Es könnte für eine Nebenläufigkeitsstruktur mehrere konsistente Orientierungen geben. Der folgende Beweis wurde aus [Ste93] entnommen.

Satz 2.89 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{SYM}}$ $\forall F \in \text{Orient} : F^{-1} \in \text{Orient}.$

Beweis Sei $F' = F^{-1}$. Wir zeigen nun, daß F' eine konsistente Orientierung ist.

$F' \cup F'^{-1} = F^{-1} \cup F = F \cup F^{-1} = im,$

$F' \odot F' = (F \odot F)^{-1} \subseteq li^{-1} = li$ wegen Satz 2.40,

$F' \odot F'^{-1} = F^{-1} \odot F \subseteq \underline{co},$

$F'^{-1} \odot F' = F \odot F^{-1} \subseteq \underline{co}.$

Also gelten alle geforderten Eigenschaften. □

Also existieren, wenn es eine konsistente Orientierung gibt, mindestens zwei verschiedene konsistente Orientierungen. Die Frage, ob es überhaupt eine konsistente Orientierung gibt, müssen wir für den Moment leider noch aufschieben.

Konsistente Orientierungen sind antisymmetrisch.

Satz 2.90 $\boxed{\text{DIS}}$ $\forall F \in \text{Orient} : F \cap F^{-1} = \varnothing.$

Beweis Nehmen wir das Gegenteil an, dann gibt es $x, y \in X$ mit $x\ F\ y$ und $y\ F\ x$. Also $x\ F \odot F\ x$ und nach Definition $x\ li\ x$. Dies widerspricht Axiom DIS. □

Aus der Definition einer konsistenten Orientierung können wir die sogenannten F-Fortpflanzungsregeln angeben.

Bemerkung 2.91 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{SYM}}$ $\forall F \in \text{Orient} : \forall x, y, z \in X : (x\ F\ y \wedge y\ im\ z \wedge x\ li\ z) \Rightarrow y\ F\ z.$ □

Bemerkung 2.92 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{SYM}}$ $\forall F \in \text{Orient} : \forall x, y, z \in X : (x\ F\ y \wedge y\ im\ z \wedge x\ \underline{co}\ z) \Rightarrow z\ F\ y.$ □

Bemerkung 2.93 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{SYM}}$ $\forall F \in \text{Orient} : \forall x, y, z \in X : (y\ F\ x \wedge y\ im\ z \wedge x\ \underline{co}\ z) \Rightarrow y\ F\ z.$ □

Wir können mit diesen drei Sätzen bestimmen, wie die F-Relation zwischen zwei benachbarten Elementen gerichtet werden muß, wenn eine andere F-Beziehung bekannt ist.

Satz 2.94 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{SYM}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\forall F \in \text{Orient} : \forall x \in S : |F[x]| = 1 = |F^{-1}[x]|.$

Beweis Sei F eine konsistente Orientierung. Sei $x \in S$. Nach Satz 2.86 ist $im[x] = \{y, z\}$ mit $y \neq z$. Axiom LFO ergibt $y\ li\ z$.
Wegen $x\ im\ y$ gilt entweder $x\ F\ y$ oder $y\ F\ x$. Wenn $x\ F\ y$, dann erzwingt $x\ im\ z$ und $y\ li\ z$, daß $x\ F^{-1}\ z$. Satz 2.90 ergibt $\neg x\ F^{-1}\ y$ und $\neg x\ F\ z$, also $F[x] = \{y\}$ und $F^{-1}[x] = \{z\}$. Wenn andererseits $y\ F\ x$, dann $F[x] = \{z\}$ und $F^{-1}[x] = \{y\}$. In jedem Fall $|F[x]| = 1 = |F^{-1}[x]|$. □

Da Stellen genau zwei Transitionen in ihrer im-Umgebung haben, die durch li verbunden sind, sieht man, daß jede Stelle genau eine Transition im Vorbereich und eine Transition im Nachbereich hat. Damit korrespondieren Nebenläufigkeitsstrukturen mit den *Synchronisationsgraphen*, die beispielsweise in [GL73] untersucht werden. Diese Beziehung erlaubt es gelegentlich, Ergebnisse zwischen den beiden Theorien zu übernehmen.

2.3.9 Linien und Schnitte

Ein weiteres entscheidendes Konzept in Petris Theorie der Nebenläufigkeit stellen die Linien und die Schnitte dar. Linien, englisch *lines*, korrespondieren mit den Weltlinien von

Teilchen in der Physik und beschreiben den Weg der Ausbreitung eines Signals durch die Raumzeit. Schnitte, englisch *cuts*, entsprechen Momentaufnahmen des Universums, in denen der Zustand aller aktuell vorhandenen Signale festgehalten wird.

Formal sind Schnitte und Linien Teilmengen von X. Zwei Elemente, die wir in einem Schnitt versammeln, müssen notwendigerweise gleichzeitig beobachtbar sein, also in co stehen. Gleichermaßen sind zwei Punkte in einer Linie notwendigerweise kausal abhängig, das heißt in li.

Andererseits sollte es zu einer Momentaufnahme, einem Schnitt, keine weiteren Elemente geben, die zu allen Elementen des Schnitts in co stehen, denn das würde darauf hindeuten, daß man sie in der Momentaufnahme vergessen hat.

Wir definieren daher Linien und Schnitte daher als maximale Mengen von Elementen, die paarweise in li beziehungsweise co stehen.

Definition 2.95 [Linien]
Lines := Kens($\underline{li}$). $\Diamond$

Definition 2.96 [Schnitte]
Cuts := Kens($\underline{co}$). $\Diamond$

Nachdem wir durch die Einführung einer konsistenten Orientierung eine Verbindung zwischen der Theorie von li und co zur Theorie der Netze aufgestellt haben, wollen wir diese Beziehung jetzt vertiefen. Wir betrachten einen Schnitt als Momentaufnahme des Universum, und dem entspricht gut der Begriff einer Markierung in der Netztheorie: Jede Stelle, die im Schnitt enthalten ist, ist markiert, jede andere Stelle ist unmarkiert.

Nun können in einer Markierung nur Stellen vorkommen, in einem Schnitt dürfen jedoch auch Transitionen enthalten sein. Wir interpretieren dies, indem wir sagen, daß in dem Schnitt die Transition während des Schaltens beobachtet wurde, zu einem Zeitpunkt, wo die Marken von den Eingangsstellen bereits abgezogen wurden und noch keine Marken auf die Ausgangsstellen gelegt wurden.

Einen Schnitt, der nur Stellen enthält, bezeichnen wir als S-Schnitt. In [Ste93] wird bewiesen, daß sich damit eine enge Korrespondenz zwischen Netzen und Nebenläufigkeitsstrukturen ergibt und daß insbesondere die gewöhnliche Schaltregel von S-Schnitten nur zu anderen S-Schnitten führen kann.

Damit wollen wir es zunächst mit der Interpretation von Schnitten bewenden lassen, und einige Sätze über Linien und Schnitte ableiten. Die nächsten Bemerkungen folgen unmittelbar aus der Definition, werden in Beweisen jedoch so häufig eingesetzt, daß sie hier noch einmal genannt werden sollen.

Bemerkung 2.97 Lines $\neq \emptyset$. $\square$

Bemerkung 2.98 Cuts $\neq \emptyset$. $\square$

Bemerkung 2.99 $\boxed{\text{NTR}}$ $\forall L \in \text{Lines} : L \neq \emptyset$. $\square$

Bemerkung 2.100 $\boxed{\text{NTR}}$ $\forall C \in \text{Cuts} : C \neq \emptyset$. $\square$

Bemerkung 2.101 $\forall L \in \text{Lines} : \forall x, y \in L : x \ \underline{li} \ y$. $\square$

Bemerkung 2.102 $\forall C \in \text{Cuts} : \forall x, y \in C : x \ \underline{co} \ y$. $\square$

Eine co-Klique kann zu einem Schnitt und eine li-Klique zu einer Linie erweitert werden. Durch ein einzelnes Element von X geht notwendigerweise ein Schnitt und auch eine Linie.

Satz 2.103 $\forall M \in \text{Kliquen}(\underline{li}) : \exists L \in \text{Lines} : M \subseteq L$.

Beweis Siehe [Ste93]. An entscheidender Stelle ist das Auswahlaxiom für diesen Beweis erforderlich. $\square$

Satz 2.104 $\forall M \in \text{Kliquen}(\underline{co}) : \exists C \in \text{Cuts} : M \subseteq C.$ □

Korollar 2.105 $\forall x \in X : \forall y \in X : x\ \underline{li}\ y \Rightarrow \exists L \in \text{Lines} : x, y \in L.$ □

Korollar 2.106 $\forall x \in X : \forall y \in X : x\ \underline{co}\ y \Rightarrow \exists C \in \text{Cuts} : x, y \in C.$ □

Korollar 2.107 $\forall x \in X : \exists L \in \text{Lines} : x \in L.$ □

Korollar 2.108 $\forall x \in X : \exists C \in \text{Cuts} : x \in C.$ □

Die folgenden Sätze erlauben es uns, auf einfache Weise zu entscheiden, ob ein Element in einer Linie enthalten ist oder nicht.

Satz 2.109 $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : L \subseteq \underline{li}[x] \Rightarrow x \in L.$

Beweis Sei $L \subseteq \underline{li}[x]$ und $\neg x \in L$, dann ist $L \cup \{x\}$ eine $\underline{li}$-Klique im Widerspruch zur Maximalität von L. □

Für Widerspruchsbeweise ist eine andere Formulierung notwendig.

Satz 2.110 $\neg\exists L \in \text{Lines} : \exists x \in X : L \subseteq li[x].$

Beweis Wir nehmen an, es gäbe $L \in \text{Lines}$ und $x \in X$ mit $L \subseteq li[x]$. Dann haben wir $L \subseteq \underline{li}[x]$, und nach Satz 2.109 ist $x \in L$. Damit gilt nach Voraussetzung $x \in li[x]$, Widerspruch. □

Der folgende Satz stellt nur eine Umformulierung des vorigen Satzes dar, aber er ist trotzdem recht hilfreich.

Satz 2.111 $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : L \cap \underline{co}[x] \neq \emptyset.$ □

Alle diese Sätze lassen sich für Schnitte genauso formulieren, es müssen lediglich co und li vertauscht werden.

Wenn wir Linien als Signale im System und Schnitte als Momentaufnahmen des Systems betrachten, dann sollten in einer Momentaufnahme alle Signale sichtbar sein. Es darf nicht passieren, daß wir die Momentaufnahme zu einem Zeitpunkt machen, zu dem das Signal nirgends existent ist.

In diesem Sinne muß die Struktur dicht genug sein, um für jeden Schnitt und jede Linie ein Element zu enthalten, das das Abbild der Linie in dem Schnitt ist. Petri bezeichnete diese Eigenschaft einer Struktur als K-Dichte, wobei das „K“ als „Ken-Dichte“, aber auch als „kombinatorische Dichte“ sinnvoll interpretiert werden kann.

Axiom KDI [K-Dichte]
$\forall C \in \text{Cuts} : \forall L \in \text{Lines} : C \cap L \neq \emptyset.$ ◊

Korollar 2.112 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\forall C \in \text{Cuts} : \forall L \in \text{Lines} : |C \cap L| = 1.$

Beweis Sei $C \in \text{Cuts}$ und $L \in \text{Lines}$. Wegen Axiom KDI ist $|C \cap L| \geq 1$. Wenn $|C \cap L| > 1$, dann gibt es $x, y \in C \cap L$ mit $x \neq y$. Per Definition von Cuts und Lines ist jetzt $x\ \underline{co}\ y$ und $x\ \underline{li}\ y$. Wegen $x \neq y$ heißt dies $x\ co\ y$ und $x\ li\ y$ im Widerspruch zu Axiom DIS. □

Die K-Dichte hat einige schwer zu überblickende Folgen, denen wir uns in späteren Kapiteln zuwenden werden. Im Gegensatz zu den anderen Axiomen dieses Kapitels ist sie nicht unumstritten. Dies gilt insbesondere, da es Strukturen gibt, die die K-Dichte nicht erfüllen, jedoch ansonsten durchaus sinnvoll erscheinen.

Kapitel 3

Beispiele und Gegenbeispiele

Mit Beispielen kann man es immer schaffen.

Bertolt Brecht, in „*Leben des Galilei*“

Eine Theorie einzuführen, die sich um eine enge Beziehung zur realen Welt bemüht, ohne Beispiele für durch sie beschriebene Strukturen anzugeben, wäre kaum denkbar. Doch nicht nur die Illustration der Theorie gelingt durch Beispiele, sondern auch die Beschreibung ihrer Schwächen. Denn wenn sich ein Beispiel für eine Nebenläufigkeitsstruktur findet, dessen Interpretation in der realen Welt nicht intuitiv oder sogar unmöglich ist, deutet dies auf eine Lücke in der Theorie hin, in der zusätzliche Axiome die unerwünschten Strukturen eliminieren müssen.

3.1 Konstruktionen

Die Beispiele der nächsten Abschnitte lassen sich leichter verstehen, wenn man weiß, wie sie erzeugt wurden. Es gibt nämlich Standardverfahren, um Nebenläufigkeitsstrukturen aus Netzen oder Ordnungen zu erzeugen. Die konstruierten Relationen co und li erfüllen durch die Art der Konstruktion schon einige Axiome, zudem läßt sich ein Netz oder eine Ordnung oft einfacher und kürzer beschreiben als die davon abgeleiteten Relationen.

Um aus einer Ordnung $<$ eine co und li zu erzeugen, ordnen wir ihr die Interpretation „ist zeitlich früher als“ zu und erhalten nun li aus $<$ durch Symmetrisierung.

Konstruktion 3.1 Sei $<$ eine Halbordnung in X, dann setzen wir

$$li = (< \cup <^{-1}),$$
$$co = X \times X - \underline{li},$$

um die Nebenläufigkeitsstruktur $CS = (X, li, co)$ zu erhalten. $\Diamond$

Für ein azyklisches Netz ist die Konstruktion auch einfach: Die transitive Hülle der Flußrelation ergibt eine Ordnung, die nach dem obigen Verfahren behandelt wird.

Konstruktion 3.2 Sei $N = (B, E; F)$ ein Netz, dann setzen wir

$$X = B \cup E,$$
$$li = F^+ \cup (F^+)^{-1}$$
$$co = X \times X - \underline{li},$$

sowie $CS = (X, li, co)$. $\Diamond$

Wenn das Netz einen Zyklus enthält, dann ist die Konstruktion nicht mehr so einfach. Da wir jedoch im vorigen Kapitel ein Beziehung zwischen Schnitten und Markierungen aufgezeigt hatten, können wir daraus auch eine Konstruktion ableiten, die zwar häufig verwendet, aber nie formal niedergelegt wurde.

Aus einem Netz und einer Anfangsmarkierung kann jetzt die *co*-Relation gewonnen werden, indem wir zwischen zwei Bedingungen genau dann *co* setzen, wenn die Bedingungen gleichzeitig markiert werden können, zwischen einer Bedingung und einem Ereignis, wenn das Ereignis schalten kann, während die Bedingung gilt ist, und zwischen zwei Ereignissen, wenn diese simultan schalten können.

Konstruktion 3.3 Sei $\Sigma = (B, E; F, M_0)$ ein Netzsystem. Wir setzen

$$\begin{aligned}
X &= B \cup E,\\
co &= \{(b_1, b_2) \mid b_1, b_2 \in B \wedge \exists M \in \mathit{Fall} : b_1, b_2 \in M \wedge b_1 \neq b_2\} \cup\\
&\quad \{(b, e) \mid b \in B \wedge e \in E \wedge \exists M \in \mathit{Fall} : b \in M \wedge M \xrightarrow{e} \wedge \neg b\ F\ e\} \cup\\
&\quad \{(e, b) \mid b \in B \wedge e \in E \wedge \exists M \in \mathit{Fall} : b \in M \wedge M \xrightarrow{e} \wedge \neg b\ F\ e\} \cup\\
&\quad \{(e_1, e_2) \mid e_1, e_2 \in E \wedge \exists M \in \mathit{Fall} : M \xrightarrow{\{e_1, e_2\}} \wedge e_1 \neq e_2\},\\
li &= X \times X - \underline{co},
\end{aligned}$$

wobei mit $\mathit{Fall} = \{M \subseteq B \mid M_0\ R\ M\}$ die volle Fallklasse bezeichnet ist. ◊

Damit allerdings diese Konstruktion eine sinnvolle Nebenläufigkeitsstruktur erzeugt, müssen einige weitere Bedingungen erfüllt sein. Zunächst soll das Netz vorwärts und rückwärts stellenunverzweigt sein, damit kein Konflikt auftreten kann, der die Einführung der Relation *al* erforderlich machen würde. Des weiteren soll die Markierung lebendig sein, damit es keine Netzelemente gibt, die nie in das Tokenspiel einbezogen werden und daher prinzipiell nicht in *co*-Beziehung zu anderen Elementen stehen können. Zuletzt ist es empfehlenswert, daß die Markierung sicher oder besser sogar hochsicher ist, damit die *co*-Relation in der Umgebung von Ereignissen wohlgestaltet ist.

Das Problem bei der vorigen Konstruktion ist, daß die gesamte Fallklasse berechnet werden muß, und diese kann sehr groß werden. Sie kann bis zu $2^{|B|}$ Elemente enthalten, weshalb die Konstruktion für große Netze praktisch undurchführbar ist.

Daher stelle ich hier einen weiteren Algorithmus zur Berechnung von *co* und *li* aus einem Netzsystem $(B, E; F, M_0)$ vor, der schneller ausführbar ist. Ich vermute, daß beide Verfahren für stellenunverzweigte, stark zusammenhängende Netze mit einer hochsicheren und lebendigen Markierung dieselben Relationen liefern, aber ein Beweis für diese Vermutung steht noch aus. Dies ist jedoch für unsere Zwecke nicht entscheidend, da wir nur an der einfachen Generierung von Beispielstrukturen interessiert sind.

Konstruktion 3.4 Sei $\Sigma = (B, E; F, M_0)$ ein Netzsystem, dann definieren wir

$$\begin{aligned}
X &= B \cup E,\\
U &= X - M_0,\\
\mathit{move} &= F \cap (U \times U),\\
\mathit{into} &= F \cap (U \times M_0),\\
\mathit{outof} &= F \cap (M_0 \times U),\\
\mathit{liasym} &= \left((\mathit{move}^+) \cap (\mathit{move}_U^* \odot \mathit{into} \odot \mathit{outof} \odot \mathit{move}_U^*)^{-1}\right) \cup\\
&\quad \left((\mathit{outof} \odot \mathit{move}_U^*) \cap (\mathit{move}_U^* \odot \mathit{into})^{-1}\right),\\
li &= \mathit{liasym} \cup \mathit{liasym}^{-1},\\
co &= X \times X - \underline{li}.
\end{aligned}$$

M_0 sollte eine lebendige und hochsichere Markierung sein. $\Diamond$

Diese Formeln können folgendermaßen interpretiert werden: Zwei verschiedene Elemente von X stehen genau dann in li, wenn es einen F-Zyklus gibt, der durch beide Elemente geht und nur genau eine markierte Bedingung enthält. U enthält die unmarkierten Netzelemente. *move* enthält die F-Schritte durch unmarkiertes Gebiet. *into* enthält die F-Schritte in eine markierte Bedingung hinein, *outof* die Schritte aus einer markierten Bedingung heraus. *liasym* setzt sich aus zwei Teilen zusammen, der erste für den Fall, daß keines der beiden Elemente eine markierte Bedingung ist, der zweite für den Fall, daß ein Element markiert ist. li entsteht daraus durch Symmetrisierung, *co* wiederum aus li durch Komplementbildung.

3.2 Unendliche Modelle

Wir beginnen mit der Beschreibung von unendlichen Modellen, weil diese durch ihre enge Beziehung zu Halbordnungen und Prozessen einen einfachen Zugang ermöglichen.

3.2.1 Die unendliche Kette

Es soll nun das einfachste unendliche Modell vorgestellt werden, das alle bisher aufgestellten Axiome erfüllt. Es ist dies die unendliche Kette, die in den Abbildungen 3.1 und 3.2 zu finden ist. Dies Modell wird schon sehr früh von Petri erwähnt. Seine charakteristische Struktur findet sich in vielen anderen Modellen wieder und ist schon deshalb eine genauere Betrachtung wert.

Die Stellen, die eine Transition überspringen, haben eine doppelte Funktion. Zum ersten sorgen sie für die *co*-Kohärenz, indem sie es erlauben, mit *co*-Schritten auf die jeweils andere Seite einer Transition zu gelangen. Zum zweiten sorgen sie für die korrekte Definition der P-Relation, die nur möglich ist, wenn eine Transition jeweils mehr als ein Element in Vor- und im Nachbereich hat.

Beide Eigenschaften wären nicht gegeben, wenn wir die Struktur auf die in den Abbildungen oben liegende Hauptlinie aus Stellen und Transitionen beschränken würden. Ja, wir würden feststellen, daß die *co*-Relation leer ist, daß also die Nebenläufigkeitsstruktur alle Information verloren hat. Dies können wir uns so vorstellen, daß wir zu viele Kettenglieder aus der Kette entfernt haben, so daß die übrigen Kettenglieder auseinandergefallen sind.

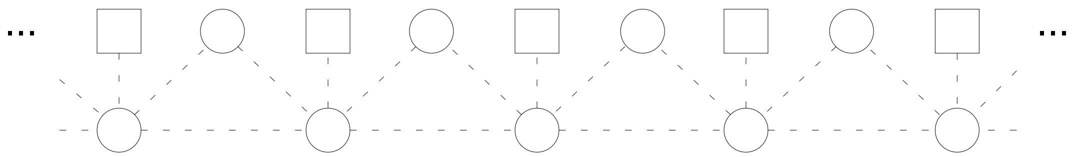


Abbildung 3.1: Unendliche Kette, *co*-Relation

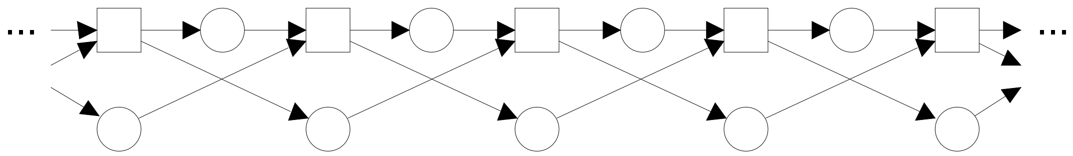


Abbildung 3.2: Unendliche Kette, F-Relation

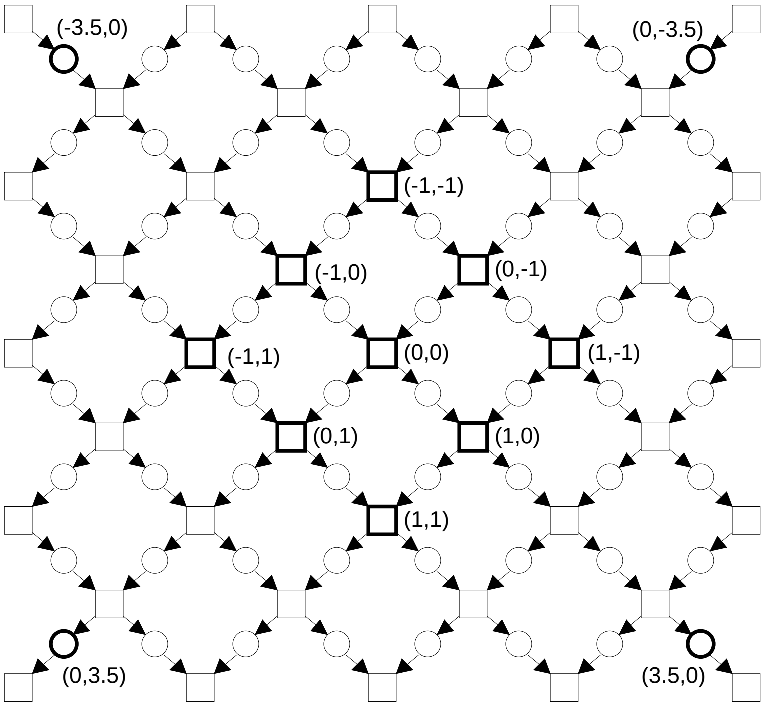


Abbildung 3.3: Standardgitter

Die unendliche Kette ist ein Kausalnetz, was das Verständnis der *co*-Relation erleichtert. In diesem Fall ist $li = F^+ \cup (F^{-1})^+$, weil die Elemente der Struktur in einer strengen zeitlichen Ordnung stehen. Dies bedeutet auch, daß wir die *li*-Relation mit der einfachen Konstruktion 3.2 aus der F-Relation gewinnen können.

Wir werden später die Struktur der unendliche Kette einsetzen, um komplizierte Beispiele zu erzeugen, indem wir zunächst ein einfaches Netz erzeugen und dann Stellen hinzufügen, die jeweils eine Transition überspringen. Gewissermaßen verflechten wir dabei mehrere unendliche Ketten zu einem einheitlichen Ganzen.

3.2.2 Standardgitter

Das Standardgitter, das jetzt vorgestellt wird, bildet die Grundlage für eine ganze Klasse von Modellen, und zwar für die Zykloide. Es ist aber auch in anderer Hinsicht interessant.

Erstens ist es ein Modell, das in Zeitrichtung (*li*) und in Raumrichtung (*co*) unendlich weit ausgedehnt ist. Zweitens sehen wir hier ein Modell, das eine wichtige Eigenschaft, die K-Dichte, nicht besitzt. Drittens stellt es einen Bezug zur Physik in Form der Relativitätstheorie her.

Das Standardgitter erschließt sich am einfachsten in der Netzdarstellung, die in Abbildung 3.3 wiedergegeben ist. Leicht erkennt man die zwei Dimensionen der Ausdehnung: Die F-Pfeile sind alle abwärts gerichtet, die Zeitachse verläuft also vertikal, und senkrecht dazu, in der Horizontalen, können wir uns eine Raumdimension vorstellen.

Somit entspricht das Standardgitter in etwa einem Minkowski-Diagramm, wie es zur Visualisierung der Relativitätstheorie verwendet wird. Wir werden gleich sehen, daß die Ähnlichkeit noch weitergeht und daß sich insbesondere Raum- und Zeitkegel ganz natürlich ergeben. Dazu müssen wir allerdings eine formale Definition des Standardgitters erstellen.

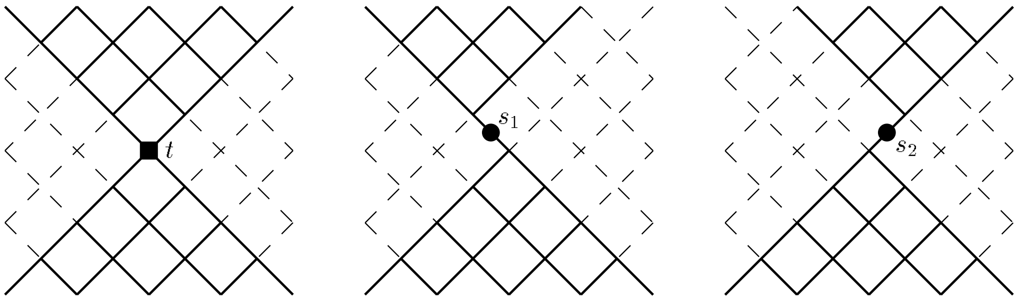


Abbildung 3.4: Zeitkegel im Standardgitter

Definition 3.5 [Standardgitter]
Die Struktur

$$
\begin{aligned}
N_{SG} &:= (S_{SG}, T_{SG}, F_{SG}) \\
S_{SG} &:= \{(x, y+\tfrac{1}{2}) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}\} \cup \\
&\quad\ \{(x+\tfrac{1}{2}, y) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}\} \\
T_{SG} &:= \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}\} \\
F_{SG} &:= \{((x, y), (x, y+\tfrac{1}{2})) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}\} \cup \\
&\quad\ \{((x, y), (x+\tfrac{1}{2}, y)) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}\} \cup \\
&\quad\ \{((x, y-\tfrac{1}{2}), (x, y)) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}\} \cup \\
&\quad\ \{((x-\tfrac{1}{2}, y), (x, y)) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}\} \\
X_{SG} &:= S_{SG} \cup T_{SG} \\
li_{SG} &:= {F_{SG}}^{+} \cup (F_{SG}^{-1})^{+} \\
co_{SG} &:= X_{SG} \times X_{SG} - li_{SG} - \mathrm{id}_{X_{SG}}
\end{aligned}
$$

heißt Standardgitter. $\Diamond$

Die Koordinatenachse x verläuft im Diagramm von links oben nach rechts unten, die Koordinatenachse y entsprechend von rechts oben nach links unten. Für ein Element x ist sein Zeitkegel nun genau die Menge $li[x]$ und der raumartige Bereich entspricht $co[x]$. In Abbildung 3.4 sieht man die Zeitkegel von drei verschiedenen Elementen. Die Transition t besitzt einen symmetrischen Zeitkegel, dieser sieht für alle Transitionen bis auf Verschiebung gleich aus.

Für die Stellen gibt es dagegen zwei zueinander spiegelsymmetrische Varianten, die als s_1 und s_2 dargestellt sind. Hier ist der Zeitkegel etwas schräg versetzt, und zwar bei den beiden Varianten unterschiedlich. Dies liegt daran, daß die Stellen zwar immer eine zeitliche Distanz überbrücken müssen, daß jedoch die eine Hälfte der Stellen dabei eine räumliche Distanz nach links und die andere Hälfte nach rechts überbrückt.

Damit sind auch schon die wichtigsten Unterschiede zum gewöhnlichen Minkowski-Raum klar: Das Standardgitter ist nicht dicht, es besitzt zwei Sorten von Elementen, also Stellen und Transitionen, und es treten gewisse Asymmetrien auf.

Warum wird die K-Dichte verletzt? Wir betrachten die Linie $L = \{\ldots, (-1, 0), (-\frac{1}{2}, 0), (0, 0), (\frac{1}{2}, 0), (1, 0), \ldots)\}$ und den Schnitt $C = \{\ldots, (-1, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{2}), \ldots)\}$ und stellen fest, daß sich die beiden nicht schneiden. Gewissermaßen weicht die Linie dem Schnitt in Raumrichtung aus, wie in Abbildung 3.5 zu sehen ist.

Der Schnitt C hat außerdem die Eigenschaft, daß er, wenn man ihn als Markierung

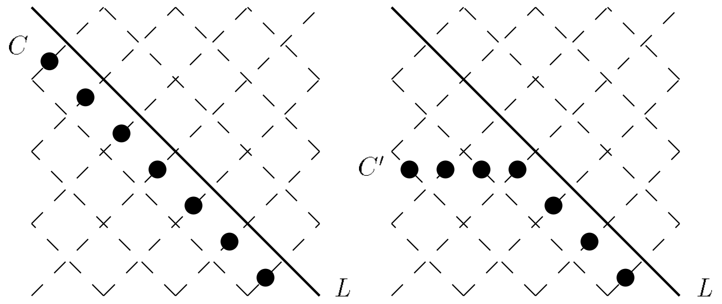


Abbildung 3.5: Verletzung der K-Dichte im Standardgitter

des Netzes auffaßt, keine Transition aktiviert, die Markierung wäre tot. Allerdings hat nicht jeder Schnitt, der eine Linie nicht schneidet, diese Eigenschaft. Sie entsteht hier nur, weil der Schnitt maximal schräg durch die Struktur gelegt wurde. Ein anderes Beispiel ist der Schnitt $C' = \{\ldots, (-1\frac{1}{2}, 2), (-1, 1\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, 1), (0, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{2}), (2, \frac{1}{2}), \ldots\}$, der ebenfalls die K-Dichte verletzt, aber aktivierte Transitionen besitzt.

3.2.3 Konstruktion von Beispielen aus Halbordnungen

Es ist oft nicht leicht, Nebenläufigkeitsstrukturen zu erzeugen, die alle wesentlichen Axiome erfüllen. Sofern die Strukturen nicht zyklisch sein sollen, gibt es eine einfache Möglichkeit, Strukturen aus Halbordnungen zu konstruieren. Dabei werden die Elemente der Halbordnung zu Transitionen, und es werden automatisch Stellen erzeugt, die die Struktur zusammenhalten.

Die Halbordnung, von der wir ausgehen, muß kombinatorisch sein. Des weiteren dürfen keine Maxima oder Minima in der vorgegebenen Ordnung vorhanden sein.

Konstruktion 3.6 Sei $(M, <)$ eine Halbordnung, genannt *Anfangsordnung*, für die

$$M \neq \emptyset, \qquad \text{(Nichttrivialität, 3.1)}$$

$$< \,=\, \lessdot^+, \qquad \text{(Kombinatorische Ordnung, 3.2)}$$

$$\forall a \in M : \exists b \in M : b > a, \qquad \text{(Kein Maximum, 3.3)}$$

$$\forall a \in M : \exists b \in M : b < a \qquad \text{(Kein Minimum, 3.4)}$$

gilt. Nun definieren wir

$$X = \{(a,b) \in M \times M \mid a = b \vee a \lessdot b \vee a \lessdot^2 b\}, \tag{3.5}$$

$$\prec \,=\, \{((a,b),(c,d)) \in X \times X \mid b \leq c \wedge a < d\}, \tag{3.6}$$

$$li = \,\prec \cup \prec^{-1}, \tag{3.7}$$

$$co = (X \times X) - \underline{li}. \tag{3.8}$$

$(X, \prec)$ heißt *Zielordnung*. Die anderen Objekte der Theorie der Nebenläufigkeit wie im, P, Lines und Cuts seien wie üblich definiert. ◊

Den Rest dieses Abschnitts werden wir damit zubringen, einige der wichtigsten Eigenschaften der so konstruierten Strukturen zu beweisen. Es ist zu vermuten, daß Petri diese oder eine ähnliche Konstruktion vorschwebte, als er die Theorie der Nebenläufigkeit entworfen hat, da sich eine charakteristische Form der Linien ergibt, die stets dem von Petri oft angeführten 4-Jahreszeiten-Modell ähnelt.

Zunächst nehmen wir einige triviale Aussagen zur Kenntnis, die später benötigen werden, die aber zunächst noch gar nicht viel mit der Nebenläufigkeitstheorie zu tun haben.

Bemerkung 3.7 Die Aussagen

$\neg Fin(M)$

$\forall a \in M : \exists b \in M : a \lessdot b$

$\forall a \in M : \exists b \in M : b \lessdot a$

gelten für alle Anfangsordnungen $(M, <)$, die für Konstruktion 3.6 zulässig sind. $\square$

Bemerkung 3.8 Für die Struktur $(X, \prec)$ gilt

$\neg Fin(X)$

$\forall\, (a,b) \in X : a \leq b$

$\forall\, (a,b) \in X : (a,a) \preccurlyeq (a,b) \preccurlyeq (b,b)$

$\forall\, (a,b) \in X : a \neq b \Rightarrow ((a,a) \prec (a,b) \prec (b,b))$

$\forall\, (a,a), (b,b) \in X : (a,a) \prec (b,b) \Rightarrow a < b$

per Konstruktion. $\square$

Nun können wir zeigen, daß $(X, \prec)$ eine Ordnung ist.

Lemma 3.9 $\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in X : (a,b) \prec (c,d) \prec (e,f) \Rightarrow (a,b) \prec (e,f)$.

Beweis Sei $(a,b) \prec (c,d) \prec (e,f)$, dann gilt $b \leq c \wedge a < d$ sowie $d \leq e \wedge c < f$. Mit $c \leq d$ und $e \leq f$ ergibt sich $b \leq c \leq d \leq e$ und $a < d \leq e \leq f$, also $(a,b) \prec (e,f)$. $\square$

Lemma 3.10 $\forall (a,b) \in X : \neg(a,b) \prec (a,b)$.

Beweis Wir nehmen das Gegenteil an, dann gibt es $(a,b) \in X$ mit $(a,b) \prec (a,b)$, also $a < b \wedge b \leq a$. Dies führt zu $a < a$, Widerspruch. $\square$

Satz 3.11 $(X, \prec)$ ist eine Halbordnung.

Beweis Lemma 3.9 zeigt die Transitivität und Lemma 3.10 die Irreflexivität. $\square$

Durch die Konstruktion von li und co ist stets gewährleistet, daß die Axiome $\boxed{\text{DIS}}$, $\boxed{\text{VST}}$, $\boxed{\text{SYM}}$ und $\boxed{\text{NTR}}$ erfüllt sind.

Wir stellen jetzt eine Beziehung zu den *Kausalordnungen* her, die wir in Definition 5.28 kennenlernen werden. Für den Moment brauchen wir uns um diese Bezeichnungen aber nicht zu kümmern, es ist nur wichtig, daß die zu beweisenden Eigenschaften bisweilen die weitere Argumentation vereinfachen. Sei dazu

$$B = \{(a,b) \in X \mid a \neq b\}, \tag{3.9}$$

$$E = \{(a,b) \in X \mid a = b\}, \tag{3.10}$$

dann gilt $B \cap E = \varnothing$ und $B \cup E = X$ trivialerweise.

Lemma 3.12 $\forall\, (a,b) \in X : a \neq b \Rightarrow ((a,a) \prec\!\!\cdot\, (a,b) \prec\!\!\cdot\, (b,b))$.

Beweis Sei $(a,b) \in X$ und $a \neq b$. Wir zeigen $(a,a) \prec\!\!\cdot\, (a,b)$, $(a,b) \prec\!\!\cdot\, (b,b)$ ergibt sich analog.

$(a,a) \prec (a,b)$ ist klar. Nehmen wir für einen Widerspruchsbeweis an, daß es ein $(c,d) \in X$ gibt mit $(a,a) \prec (c,d) \prec (a,b)$. Nun gilt $a < d$ wegen $(a,a) \prec (c,d)$, aber $d \leq a$ wegen $(c,d) \prec (a,b)$. Widerspruch. $\square$

Satz 3.13 $\forall a, b \in M : (a \lessdot b \vee a \lessdot^2 b) \Rightarrow ((a,a) \prec\!\!\cdot\, (a,b) \prec\!\!\cdot\, (b,b))$. $\square$

Lemma 3.14 $\forall\, (a,b), (c,d) \in X : (a,b) \prec\!\!\cdot\, (c,d) \Rightarrow b = c$.

Beweis Angenommen, $(a,b) \prec\!\!\cdot\, (c,d)$, aber $b \neq c$. Es folgt $b < c$, somit gibt es ein $e \in M$ mit $b \lessdot e \leq c$. Nun gilt $(a,b) \preccurlyeq (b,b) \prec (b,e) \prec (e,e) \preccurlyeq (c,c) \preccurlyeq (c,d)$ im Widerspruch zu $(a,b) \prec\!\!\cdot\, (c,d)$. $\square$

Lemma 3.15 $\forall\, (a,b), (c,d) \in X : (a,b) \prec\!\!\cdot\, (c,d) \Rightarrow (a = b \vee c = d)$.

Beweis Seien $(a,b),(c,d) \in X$ und $(a,b) \prec (c,d)$, dann $b = c$ wegen Lemma 3.14. Wäre $a \neq b \wedge c \neq d$, dann $(a,b) \prec (b,b) = (c,c) \prec (c,d)$, Widerspruch. □

Lemma 3.16 $\forall\,(a,b),(c,d) \in X : (a,b) \prec (c,d) \Rightarrow (a \neq b \vee c \neq d)$.

Beweis Seien $(a,b),(c,d) \in X$ und $(a,b) \prec (c,d)$, dann $b = c$ wegen Lemma 3.14. Wäre $a = b \wedge c = d$, dann $(a,b) = (c,d)$, Widerspruch. □

Satz 3.17 $(\prec) \subseteq B \times E \cup E \times B$.

Beweis Seien $(a,b),(c,d) \in X$ und $(a,b) \prec (c,d)$. Wenn $a = b$, dann $c \neq d$ wegen Lemma 3.16, also $(a,b) \in B$ und $(c,d) \in E$. Wenn andererseits $a \neq b$, dann $c = d$ wegen Lemma 3.15, und wir haben $(a,b) \in E$ und $(c,d) \in B$. □

Satz 3.18 $\forall x \in B : |x\bullet| = 1 = |\bullet x|$.

Beweis Sei $x \in B$, wir zeigen nur $|\bullet x| = 1$. Es sei $x = (a,b)$, dann gilt $a \neq b$.
Wegen Lemma 3.12 ist $(a,a) \prec (a,b)$, also $\bullet x \neq \emptyset$.
Sei $(c,d) \in X$ mit $(c,d) \prec (a,b) = x$, dann $d = a$ wegen Lemma 3.14. $(c,d) \in E$ wegen Satz 3.17, also $c = d$ und damit $c = a$. Damit ist $\bullet x = \{(a,a)\}$. □

Satz 3.19 $\forall x \in E : |x\bullet| > 1 < |\bullet x|$.

Beweis Sei $x \in E$ und $x = (a,a)$, wir zeigen nur $|\bullet x| > 1$.
Es gibt ein $b \in M$ mit $b \lessdot a$, sowie ein $c \in M$ mit $c \lessdot b$. Nach Satz 3.13 gilt nun $(b,a) \prec (a,a)$, sowie $(c,a) \prec (a,a)$. Da $b \neq c$ ist $(b,a) \neq (c,a)$. □

Korollar 3.20 $\forall L \in \text{Lines} : \neg Fin(L)$. □

Damit ergibt sich die Aufteilung von X in B und E auch aus der Ordnung $\prec$ selbst: B-Elemente haben genau einen Vorgänger und Nachfolger, E-Elemente dagegen stets mehr als einen.

Lemma 3.21 $\forall a,b \in M : a \lessdot b \Rightarrow (a,a) \prec^2 (b,b)$.

Beweis Seien $a,b \in M$ und $a \lessdot b$, dann ist $(a,b) \in X$ und $(a,a) \prec (a,b) \prec (b,b)$. □

Lemma 3.22 $\forall x,y \in E : x \prec y \Rightarrow x \prec^+ y$.

Beweis Seien $x,y \in E$ und $x \prec y$, dann können wir schreiben $x = (a,a)$ und $y = (b,b)$, wobei $a < b$. Formel 3.2 aus Konstruktion 3.6 zeigt $a \lessdot^+ b$, also können wir Lemma 3.21 anwenden und erhalten $(a,a) \prec^+ (b,b)$. □

Satz 3.23 $\forall x,y \in X : x \prec y \Rightarrow x \prec^+ y$.

Beweis Sei $x = (a,b) \in X$ und $y = (c,d) \in X$, wobei $x \prec y$. Es ist $(a,b) \preccurlyeq (b,b) \preccurlyeq (c,c) \preccurlyeq (c,d)$, und nach dem vorigen Lemma $(b,b) \prec^* (c,c)$. Wenn $a \neq b$, dann $(a,b) \prec (b,b)$, ansonsten $(a,b) = (b,b)$. Wenn $c \neq d$, dann $(c,c) \prec (c,d)$, ansonsten $(c,c) = (c,d)$.
Insgesamt $x = (a,b) \prec^* (c,d) = y$, und weil $x \neq y$ ist, haben wir auch $x \prec^+ y$. □

Der letzte Satz bedeutet, daß $(X,\prec)$ eine kombinatorische Ordnung ist. Zusammen mit Satz 3.17 und Satz 3.18 erfüllt die Ordnung damit die Voraussetzungen für eine Kausalordnung.

Lemma 3.24 $\forall x,y,z \in X : (x \prec y \wedge z \prec y) \Rightarrow x \;\underline{co}\; z$. □

Lemma 3.25 $\forall x,y,z \in X : (y \prec x \wedge y \prec z) \Rightarrow x \;\underline{co}\; z$. □

Lemma 3.26 $\forall x \in B : \forall y \in E : (x \prec y \vee y \prec x) \Rightarrow \underline{li}[x] \subsetneq \underline{li}[y]$.

Beweis Seien $x \in B$ und $y \in E$, wir beschränken uns auf den Fall $x \prec y$. Sei $z \in X$ und $x \;\underline{li}\; z$, wir zeigen dann $y \;\underline{li}\; z$.
Wenn $z \preccurlyeq x$, dann $z \preccurlyeq y$ wegen der Transitivität der Ordnung, also $y \;\underline{li}\; z$. Wenn hingegen $x \prec z$, dann auch $x \prec^+ z$. Daher gibt es eine $\prec$-Kette $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ mit $x = a_0$ und $z = a_n$ und $n \geq 1$. Nun muß $a_1 = y$ gelten, weil nach Satz 3.18 $|x\bullet| = 1$ gilt. Also $y = a_1 \preccurlyeq a_n = z$ oder $y \;\underline{li}\; z$.

Damit gilt $\underline{li}[x] \subseteq \underline{li}[y]$. Satz 3.19 zeigt, daß ein $w \in X$ mit $w \prec y$ und $w \neq x$ existiert. $x \ \underline{co}\ w$ wegen Lemma 3.24, also $x\ co\ w$ und $\underline{li}[x] \neq \underline{li}[y]$. $\square$

Lemma 3.27 $\forall x \in X : \forall y \in X : (\underline{li}[x] \subseteq \underline{li}[y] \wedge x \neq y) \Rightarrow y \in E$.

Beweis Sei $x, y \in X$, $\underline{li}[x] \subseteq \underline{li}[y]$ und $x \neq y$. Offensichtlich gilt $x\ \underline{li}\ y$, also $x\ li\ y$, das heißt $x \prec y \vee y \prec x$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $x \prec y$ erfüllt ist.

Angenommen $y \in B$. Es gibt ein $z \in E$ mit $x \preccurlyeq z$ und $z \prec y$ wegen Satz 3.23. Es gibt ein $w \in B$ mit $z \prec w$ und $w \neq y$ nach Satz 3.19. $y\ co\ w$ gemäß Lemma 3.25. $x \preccurlyeq z \prec w$ führt zu $x\ \underline{li}\ w$ im Widerspruch zu $\underline{li}[x] \subseteq \underline{li}[y]$.

Also $y \in E$. $\square$

Lemma 3.28 $\forall x \in X : \forall y \in X : (\underline{li}[x] \subseteq \underline{li}[y] \wedge x \neq y) \Rightarrow (x \prec y \vee y \prec x)$.

Beweis Sei $x, y \in X$, $\underline{li}[x] \subseteq \underline{li}[y]$ und $x \neq y$. Offensichtlich $x\ \underline{li}\ y$, also $x\ li\ y$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $x \prec y$.

$y \in E$ wurde im vorigen Lemma gezeigt, wir können also schreiben $x = (a, b)$ und $y = (c, c)$. Angenommen $b \neq c$, dann $b < c$ und ferner $b \lessdot^+ c$. Es gibt $d \in M$ mit $d \lessdot c$ und $b \leq d$. Es gibt $e \in M$ mit $c \lessdot e$.

Nun ist $(a, b) \preccurlyeq (b, b) \preccurlyeq (d, d) \prec (d, e)$, also $x = (a, b)\ li\ (d, e)$. $(d, e) \preccurlyeq (c, c)$ ist nun unmöglich, da $c < e$, und $(c, c) \preccurlyeq (d, e)$ entfällt wegen $d < c$. Es bleibt $y = (c, c)\ co\ (d, e)$ im Widerspruch zu $\underline{li}[x] \subseteq \underline{li}[y]$.

Also $b = c$ und $a \neq b$ wegen $(a, b) \neq (c, c)$. Wir erhalten $x = (a, b) \prec (c, c) = y$ mit Lemma 3.12.

Hätten wir $y \prec x$ angenommen, dann wären wir zu $y \prec x$ gelangt. $\square$

Satz 3.29 $im = (\prec \cup \prec^{-1})$.

Beweis Mit Lemma 3.26 und Lemma 3.28. $\square$

Satz 3.30 $\forall x \in X : \exists y \in X : x\ im\ y$.

Beweis Sei $x \in X$. Wegen Satz 3.18 beziehungsweise Satz 3.19 gibt es ein $y \in X$ mit $x \lessdot y$. Wegen Satz 3.29 gilt $x\ im\ y$. $\square$

Lemma 3.31 $P \subseteq B \times E$.

Beweis Seien $x, y \in X$, wobei $x\ P\ y$. Lemma 3.27 zeigt $y \in E$. Lemma 3.28 ergibt $x \prec y \vee y \prec x$. Satz 3.17 führt zu $x \in B$. $\square$

Satz 3.32 $B = S \wedge E = T$.

Beweis Lemma 3.31 ergibt $S \subseteq B$ und $T \subseteq E$. Satz 3.30 ergibt $S \cup T = X = B \cup E$. $\square$

Satz 3.33 $P^2 = \varnothing$.

Beweis Unmittelbar aus Lemma 3.31 und $B \cap E = \varnothing$. $\square$

Satz 3.34 $(\prec) \in$ Orient.

Beweis Wir zeigen im einzelnen die geforderten Eigenschaften.

- $(\prec \cup \prec^{-1}) = im$ wegen Satz 3.29.
- $(\prec \odot \prec) \subseteq (\prec) \subseteq li$.
- $(\prec \odot \prec^{-1}) \subseteq \underline{co}$ wegen Lemma 3.24.
- $(\prec^{-1} \odot \prec) \subseteq \underline{co}$ wegen Lemma 3.25.

Also ist $\prec$ eine konsistente Orientierung. $\square$

Daß aus dem letzten Satz die nächsten beiden Korollare folgen, wird später noch gezeigt, sollte aber auch so einsichtig sein.

Korollar 3.35 $\forall x \in X : (co|_{im[x]})^2 \subseteq \underline{co}|_{im[x]}$. $\square$

Korollar 3.36 $\forall x \in X : (li|_{im[x]})^2 \subseteq \underline{co}|_{im[x]}$. □

Wir zeigen nun auch noch die lokale Fortsetzbarkeit.

Satz 3.37 $\forall x \in X : \mathrm{id}_{im[x]} \subseteq (li|_{im[x]})^2$.

Beweis Sei $x \in X$ und $y \in im[x]$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $y \lessdot x$. Nun gibt es ein $z \in X$ mit $x \lessdot z$. Weil $z \in im[x]$ und $y\ li\ z$, gilt der Satz. □

Die Irreduzibilität ergibt sich aus denselben Gründen, die auch schon dazu geführt haben, daß die P-Relation die gewünschte Form hat.

Satz 3.38 $\widetilde{co} = \mathrm{id}_X$.

Beweis $\widetilde{co} \supseteq \mathrm{id}_X$ ist klar. Wir zeigen $\widetilde{co} \subseteq \mathrm{id}_X$.
Seien $x, y \in X$ mit $co[x] = co[y]$. Es gilt dann auch $\underline{li}[x] = \underline{li}[y]$. Angenommen $x \neq y$, dann $x \lessdot y \vee y \lessdot x$ wegen Lemma 3.28. Satz 3.29 verlangt nun $x\ im\ y$ und damit $\underline{li}[x] \subsetneq \underline{li}[y] \vee \underline{li}[x] \supsetneq \underline{li}[y]$. Widerspruch. □

Satz 3.39 $\widetilde{li} = \mathrm{id}_X$.

Beweis $\widetilde{li} \supseteq \mathrm{id}_X$ ist klar. Wir zeigen $\widetilde{li} \subseteq \mathrm{id}_X$.
Seien $x, y \in X$ mit $li[x] = li[y]$. Es gilt $\neg x\ li\ y$, also $x\ \underline{co}\ y$.
Wir beobachten $\forall z \in X : z \prec x \Leftrightarrow z \prec y$, denn gäbe es beispielsweise ein $z \in X$ mit $z \prec x$, aber $\neg z \prec y$, dann wäre $z\ li\ y$ wegen $z\ li\ x$ und daher $y \prec z$ mit einem Widerspruch durch $y \prec z \prec x\ \underline{co}\ y$.
Auf dieselbe Art zeigt man $\forall z \in X : z \succ x \Leftrightarrow z \succ y$. Somit auch $\bullet x = \bullet y$ und $x \bullet = y \bullet$. Sei $u \in \bullet x = \bullet y$ und sei $v \in x \bullet = y \bullet$.
Wir schreiben $x = (a, b)$, $y = (c, d)$, $u = (e, f)$ und $v = (g, h)$, dann ist $f = a$ wegen $u \lessdot x$ und Lemma 3.14. Aus demselben Grund erhalten wir $f = c$, $b = g$ und $d = g$. Zusammen $a = c$ und $b = d$, also $x = y$. □

Lemma 3.40 $im \subseteq co^2$.

Beweis Sei $x, y \in X$ beliebig mit $x\ im\ y$, dann ist $x \in E \vee y \in E$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $x \in E$, das heißt $x = (a, a)$.
Nun gibt es $b, c \in M$ mit $b \lessdot a \lessdot c$, und damit ist $(b, c) \in X$. $\neg(a, a) \prec (b, c)$, weil $b < a$. Weiterhin $\neg(b, c) \prec (a, a)$, weil $a < c$, also $x = (a, a)\ co\ (b, c)$. Weil $x \in E$ haben wir $y\ P\ x$ und daher $y\ co\ (b, c)$, also $x\ co^2\ y$. □

Lemma 3.41 $li \subseteq im^+$.

Beweis $li = (\prec) \cup (\prec^{-1}) = (\lessdot^+) \cup (\lessdot^+)^{-1} \subseteq im^+ \cup im^+ = im^+$. □

Korollar 3.42 $im^*_X = li^*$.

Beweis Mit $im \subseteq li$ erhalten wir $im^*_X \subseteq li^* \subseteq {im^+}^*_X \subseteq im^*_X$. □

Satz 3.43 $co^* = X \times X$.

Beweis $X \times X = \underline{co} \cup li \subseteq \underline{co} \cup im^+ \subseteq \underline{co} \cup (co^2)^+ \subseteq co^* \subseteq X \times X$. □

Damit sind die wichtigsten Eigenschaften der konstruierten Struktur bewiesen, und wir können die Ergebnisse noch einmal zusammenfassen. $CS = (X, li, co)$ erfüllt die Axiome $\boxed{\text{VST}}$, $\boxed{\text{DIS}}$, $\boxed{\text{SYM}}$, $\boxed{\text{NTR}}$, $\boxed{\text{COI}}$, $\boxed{\text{LII}}$, $\boxed{\text{COK}}$, $\boxed{\text{KAA}}$, $\boxed{\text{LOR}}$, $\boxed{\text{LCT}}$ und $\boxed{\text{LFO}}$, wie durch die verschiedenen Sätze in diesem Abschnitt gezeigt wurde. Es existiert außerdem mit $\lessdot$ eine konsistente Orientierung. Weitere Axiome können nun nur noch durch zusätzliche Bedingungen an die Anfangsordnung hergeleitet werden.

Satz 3.44 $((< \cup <^{-1})^*_M = M \times M) \Rightarrow (li^* = X \times X)$.

Beweis Sei $(< \cup <^{-1})^*_M = M \times M$.
Sei $x = (a, b) \in X$ und $y = (c, d) \in X$. Sicher ist $x\ \underline{li}\ (a, a)$ und $(c, c)\ \underline{li}\ y$. Sei nun $\alpha = (a = a_0, a_1, \ldots, a_n = c)$ eine $(< \cup <^{-1})$-Kette, dann ist ebenso $\beta = ((a, a) = (a_0, a_0), (a_1, a_1), \ldots, (a_n, a_n) = (c, c))$ eine li-Kette. Also $x\ \underline{li}\ (a, a)\ li^*\ (c, c)\ \underline{li}\ y$. □

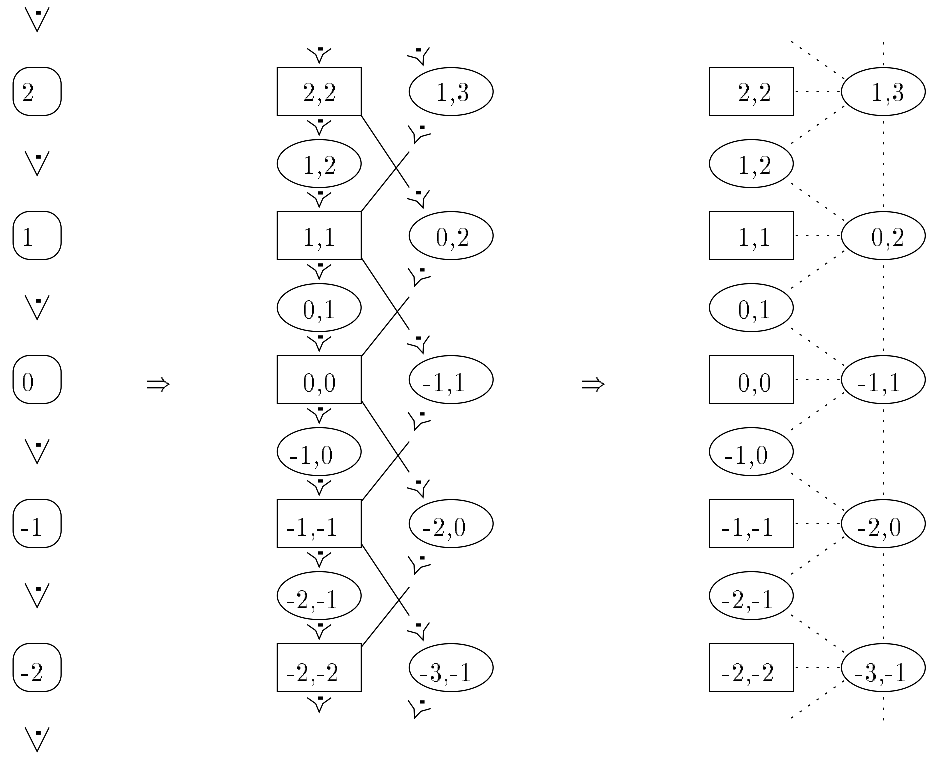


Abbildung 3.6: Konstruktion von $\lessdot$ zu $\prec\!\cdot$ zu *co*

Korollar 3.45 $((< \cup <^{-1})^*_M = M \times M) \Rightarrow (im^*_X = X \times X)$.
Beweis Mit Korollar 3.42 und Satz 3.44. □

Wenn $(< \cup <^{-1})^*_M = M \times M$ gilt, dann erfüllen die Strukturen auch die Axiome $\boxed{\text{LIK}}$ und $\boxed{\text{IMK}}$. Somit sind sämtliche bisher bekannten Axiome bis auf Axiom KDI per Konstruktion erfüllt. Die K-Dichte stellt ein gewisses Problem dar, es kommt uns jedoch zugute, daß in [BF88] eine Charakterisierung der K-Dichte gegeben wird, die für Kausalordnungen leicht zu prüfen ist und die sich in dieser Arbeit als Theorem 5.29 wiederfindet.

Später werden noch die Axiome $\boxed{\text{LUE}}$, $\boxed{\text{KOR}}$ und $\boxed{\text{OBS}}$ eingeführt, die die erzeugten Strukturen auch immer erfüllen. Des weiteren werden diverse Endlichkeitsbedingungen eingeführt, die für generierte Strukturen leicht zu verifizieren oder zu widerlegen sind.

Wenden wir zum Eingewöhnen unser neues Verfahren zunächst einmal auf ein bekanntes Beispiel an, indem wir die unendliche Kette damit generieren. Wir beginnen mit den ganzen Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung. Die Konstruktion liefert uns jetzt

$$\begin{aligned} X = \{ & \ldots, (-1,-1), (0,0), (1,1), \ldots\} \cup \\ \{ & \ldots, (-2,-1), (-1,0), (0,1), (1,2), \ldots\} \cup \\ \{ & \ldots, (-2,0), (-1,1), (0,2), \ldots\}. \end{aligned}$$

Hierbei sind die Paare, die aus zwei gleichen Elementen bestehen, transitionsartig, die anderen Paare sind stellenartig. In Abbildung 3.6 sieht man die beiden Schritte der Konstruktion, in der zunächst die verfeinerte Ordnungsrelation $\prec\!\cdot$ und dann die Relation *co* erzeugt wird.

Da sich die Bedingungen, die an die zugrundeliegende Halbordnung gestellt werden, leicht beweisen lassen, wissen wir, daß die resultierende Struktur eine große Menge von Axiomen erfüllt, ohne daß diese Axiome getrennt geprüft werden müßten. Dies ist insbesondere für unendliche Strukturen wie die unendliche Kette erforderlich, da eine Überprüfung der Axiome mittels eines Computers ausscheidet.

3.2.4 Konstruierte Strukturen

Wir geben nun noch einige weitere Nebenläufigkeitsstrukturen an, die aus Halbordnungen konstruiert werden können. In Abbildung 3.7 sind fünf graphische Darstellungen zu sehen, denen wir nun die mathematische Definition der Anfangsordnungen beistellen.

a) $X = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z} \wedge (a = 0 \vee b \geq 0)\}$,
$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow ((b < d) \wedge (a = c \vee b < 0))$.

b) $X = \{(a,b) \mid a \in \{0,1\} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge (a = 0 \vee b \neq 0)\}$,
$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow ((b < d) \wedge (a = c \vee (b \leq 0 \wedge d \geq 0)))$.

c) $X = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge (a = 0 \vee -a \leq b \leq a)\}$,
$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow ((b < d) \wedge (a = c \vee (a = 0 \wedge b < -c) \vee (c = 0 \wedge a < d)))$.

d) $X = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z} \wedge (a = 0 \vee b = 0)\}$,
$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow (b < d)$.

e) $X = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$,
$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow ((b < d) \wedge (a = c \vee (a = c + 1 \wedge b < 0 \wedge d \geq 0)))$.

Es soll jetzt nicht genauer auf die einzelnen Beispiele eingegangen werden, denn die zugrundeliegenden Ideen sollten aus der Graphik klar werden. In den Abbildungen bedeuten senkrechte, durchgezogene Linien die Linien der Anfangsordnung, gepunktete Linien sollen *co*-Beziehungen anzeigen. Nach der Durchführung der Konstruktion sind zwar mehr Elemente und auch mehr Linien vorhanden, die grobe Struktur bleibt jedoch erhalten.

Es wäre noch zu beweisen, daß alle erzeugten Strukturen K-dicht sind, daß sie also alle bisher vorgestellten Axiome erfüllen. Auf der Ebene von Halbordnungen sollten diese Beweise aber problemlos möglich sein.

Nur das Beispiel c soll einmal getrennt in einer graphischen Darstellung gezeigt werden, um auch die Struktur von Verzweigungen besser verstehen zu können. In Abbildung 3.8 ist das Ergebnis der Konstruktion zu sehen. Man kann links die Hauptlinie sehen, an die sich

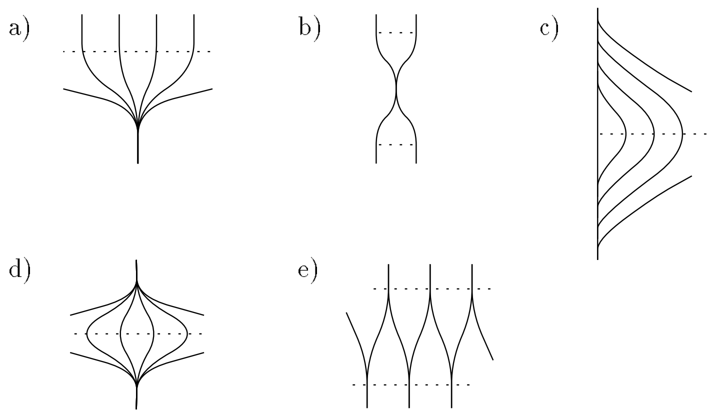


Abbildung 3.7: Anfangsordnungen für Konstruktion 3.6

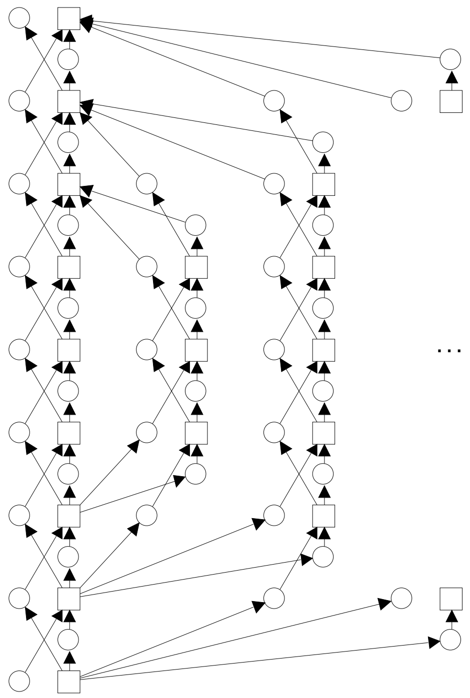


Abbildung 3.8: Ergebnis der Konstruktion für Struktur c, F-Relation

nach rechts die einzelnen Schleifen anschließen, die immer mehr Elemente beinhalten, erst 3, dann 5, 7 und so weiter. Je größer die Schleifen werden, desto größer wird auch der von ihnen übersprungene Bereich auf der Hauptlinie.

Nicht nur die insgesamt sechs vorgestellten Ordnungen, sondern beliebige andere können mit der vorgestellten Methode in eine Nebenläufigkeitsstruktur eingebettet werden. Für eine allgemeine Ordnung geht man dabei so vor, daß man sie zuerst erweitert, um alle Minima und Maxima zu beseitigen. Danach sorgt man dafür, daß die Ordnung kombinatorisch wird, auch dies stellt kein Problem dar. Dann kann man die Konstruktion anwenden und erhält eine Nebenläufigkeitsstruktur. Bei der Entwicklung von Modellen ist man damit nicht mehr nur auf die Intuition angewiesen, sondern kann systematisch vorgehen.

3.3 Endliche Modelle

In diesen Abschnitt sollen die Strukturen im wesentlichen informal beschrieben werden. Obwohl die Methoden, die zur Entwicklung der Modelle verwendet wurden, ausführlich beschrieben werden, finden sich die einzelnen Beispiele nur in graphischer Form wieder. Dies hat zwei Gründe: Zum einen würde eine exakte mathematische Beschreibung der Strukturen, etwa durch die Angabe von X, li und co, die zugrundeliegenden Ideen nicht vermitteln. Zum anderen wäre die Darstellung sehr umfangreich, so daß sie den Text unangemessen belasten würde.

Die formalen Modelle und die Ergebnisse einer Computerauswertung der Axiome, die ja gerade bei endlichen Modellen einfach möglich ist, finden sich daher in Anhang C, wo sie gegebenenfalls nachgeschlagen werden können.

Dabei steht bei der Bestimmung der Eigenschaften immer die Relation co und ihr Komplement, die Relation li, im Vordergrund. Alle anderen Objekte – P, im, F, Lines und so

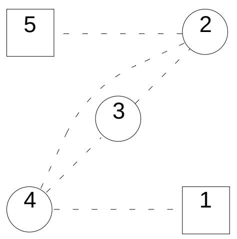


Abbildung 3.9: N-Struktur, *co*-Relation

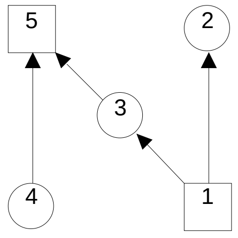


Abbildung 3.10: N-Struktur, F-Relation

weiter – werden später von diesen Relationen abgeleitet. Dem widerspricht nicht, daß für die Konstruktion der *co*-Relation gelegentlich zuerst die F-Relation festgelegt wird oder daß zuerst die wichtigsten Linien skizziert werden. Nach der Konstruktion sind die abgeleiteten Objekte stets wieder neu zu konstruieren, um zu überprüfen, ob sie die beabsichtigte Form haben.

3.3.1 N-Struktur

In Abbildung 2.1 wurde bereits eine sehr einfache Beispielstruktur angegeben, diese ist jedoch insbesondere nicht K-dicht, da $\{a, b\} \in$ Cuts und $\{c, d\} \in$ Lines gilt. Wir schließen diese Lücke, indem wir ein Element hinzufügen, das dem Schnitt und der Linie gemeinsam ist, und erhalten die Struktur aus Abbildung 3.9, die N-Struktur heißen soll.

Die Elemente von X wurden dabei umbenannt, um alle Beispiele einheitlich zu gestalten. Es werden grundsätzlich Zahlen von 1 aufwärts zur Numerierung verwendet, da die Anzahl der Buchstaben in größeren Beispielen nicht ausreicht. Des weiteren wird so die automatische Überprüfung der Axiome durch den Computer erleichtert.

Die N-Struktur erfüllt alle bisher vorgestellten Axiome außer Axiom LFO und besitzt eine konsistente Orientierung, die in Abbildung 3.10 dargestellt ist.

Der Grund, sich die N-Struktur anzusehen, obwohl sie ein Axiom nicht erfüllt, ist die Kleinheit der Struktur. Es ist bei der N-Struktur noch möglich, von Hand die Axiome durchzuprüfen. Bei größeren Strukturen wird dies immer schwieriger, ja bereits bei der nächsten vorzustellenden Struktur ist dies kaum noch möglich, obwohl sie immer noch sehr klein ist.

3.3.2 4-Jahreszeiten

Es wird jetzt die kleinste mögliche Struktur vorgestellt, die alle bisher vorgestellten Axiome gleichzeitig erfüllt. Das Modell ist unter dem Namen 4-Jahreszeiten-Netz bekannt und in den Abbildungen 3.11 und 3.12 dargestellt.

Um die Bezeichnung besser verstehen zu können, geben wir den Stellen und Transitionen eine Interpretation, die insbesondere in der Netzdarstellung aus Abbildung 3.12 deutlich werden wird. Wir interpretieren dazu die Elemente aus X folgendermaßen:

$1 \approx$ Übergang Winter zu Frühling.
$2 \approx$ Es ist Frühling.
$3 \approx$ Es ist Frühling oder Sommer.
$4 \approx$ Übergang Frühling zu Sommer.
$5 \approx$ Es ist Sommer.
$6 \approx$ Es ist Sommer oder Herbst.

7 ≈ Übergang Sommer zu Herbst.
8 ≈ Es ist Herbst.
9 ≈ Es ist Herbst oder Winter.
10 ≈ Übergang Herbst zu Winter.
11 ≈ Es ist Winter.
12 ≈ Es ist Winter oder Frühling.

Jetzt wird im Netz klar, warum welche F-Kanten eingezeichnet worden sind. Beispielsweise gilt 11 F 1, weil der Übergang von Winter zum Frühling die Bedingung „Es ist Winter“ ungültig macht. Andererseits gilt nach dem Eintreten des Ereignisses bestimmt die Bedingung 2, denn dann ist es Frühling.

Interessant ist, daß das 4-Jahreszeiten-Netz eine zyklische Struktur ist und daher die *co*-Relation nicht mehr so einfach zu verstehen ist, wie noch bei der N-Struktur. Beispielsweise sind die Elemente 1 und 12 durch eine F-Kette miteinander verbunden, Element 1 wirkt also, zumindest indirekt, auf Element 12. Trotzdem sind die beiden Elemente nach der Interpretation von *co* kausal unabhängig, eine Tatsache, an die man sich erst gewöhnen muß.

Dennoch läßt sich die Wahl der *co*-Relation verteidigen, es ist gerade der große Vorzug der Theorie der Nebenläufigkeit, daß auch zyklische Situationen sinnvoll behandelt werden. Wir betrachten zur Verdeutlichung einen Schnitt, also eine maximale *co*-Klique, beispielsweise $\{9, 11, 12\}$. Dieser Schnitt hat die besondere Eigenschaft, nur aus Stellen zu bestehen, was es ermöglicht, ihn als Markierung des Petrinetzes aus Abbildung 3.12 aufzufassen. Wir können jetzt in dem markierten Netz die gewöhnliche Schaltregel anwenden und so zu anderen Markierungen fortschreiten. Dabei stellen wir fest, daß jede erreichbare Markierung wieder einem Schnitt entspricht, beispielsweise die Markierung $\{2, 3, 12\}$. Damit wird die vorhin vorgeschlagene Konstruktion von *co* aus einem Netzsystem gerechtfertigt, da mit ihrer Hilfe eine sinnvolle Struktur erzeugt wurde.

Eine interessante Querbeziehung ergibt sich, wenn wir den Prozeß des 4-Jahreszeiten-Netzes betrachten. Es handelt sich dabei nämlich um die unendliche Kette, die in Unterabschnitt 3.2.1 vorgestellt wurde. Damit entspricht das kleinste endliche Beispiel in seinem inneren Aufbau genau den einfachsten unendlichen Modell.

Diese Beziehung kann nicht nur als Abwicklung eines Netzes zu einem Prozess verstan-

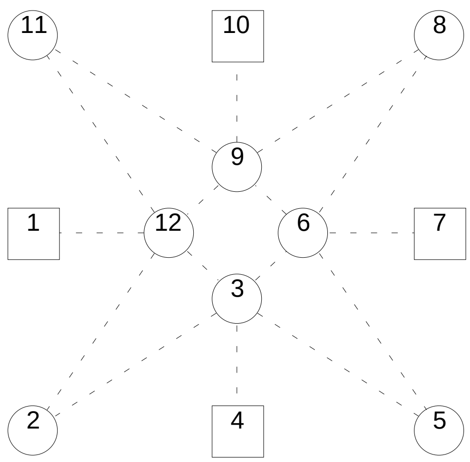


Abbildung 3.11: 4-Jahreszeiten, *co*-Relation

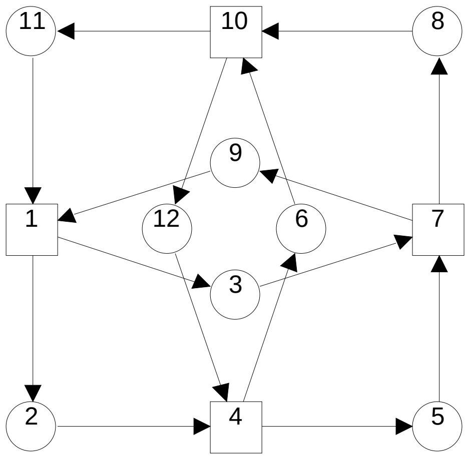


Abbildung 3.12: 4-Jahreszeiten, F-Relation

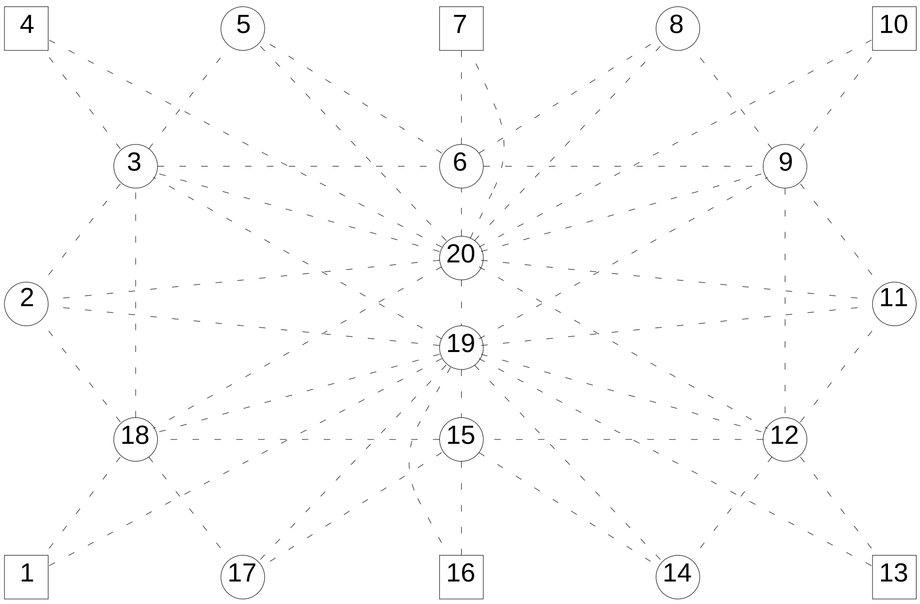


Abbildung 3.13: 6-Jahreszeiten und 2 Stellen, *co*-Relation

den wrden, sondern auch umgekehrt als Faltung eines Prozesses in ein Netz. Indem wir nun „weniger eng“ falten, gelangen wir zu weiteren Modellen, deren Aufbau unmittelbar einleuchtend sein sollte: das 5-Jahreszeiten-Netz, das 6-Jahreszeiten-Netz und beliebig viele weitere Modelle.

Jene Modelle haben allerdings nicht die Bedeutung wie das Standardbeispiel für die Theorie der Nebenläufigkeit, das 4-Jahreszeiten-Netz. Dies gilt besonders deshalb, weil es die kleinste Nebenläufigkeitsstruktur ist, die alle Standardaxiome erfüllt, und weil es eine eingängige Interpretation besitzt. Weil in dieser Struktur alle Axiome, die Petri aufgestellt hat, erfüllt sind, gibt es für die Axiome ein Modell, und damit ist bewiesen, daß die Theorie konsistent ist. Insbesondere läßt sich auch die K-Dichte prüfen, was bei den unendlichen Modellen problematisch war.

An dieser Stelle ist es sinnvoll, einen grundsätzlichen Unterschied zwischen Petris Theorie der Nebenläufigkeit und einigen anderen axiomatischen Systemen aufzuzeigen. Axiomatische Systeme haben oft bis auf Isomorphie genau ein erwünschtes Modell, beispielsweise sollen die Peano-Axiome genau die gewöhnlichen natürlichen Zahlen beschreiben. Nichtstandardmodelle stellen sich zwar manchmal ein, sind aber selten erwünscht.

Bei der hier vorgestellten Theorie sind voneinander verschiedene Modelle jedoch von Anfang an eingeplant. Wir werden in den nächsten Abschnitten ein Fülle von gültigen Modellen für die Theorie der Nebenläufigkeit sehen. Es ist daher nicht möglich zu fragen: „Wie sieht die *co*-Relation denn nun aus?“, obwohl man fragen kann „Wie sieht die Nachfolgerrelation bei den natürlichen Zahlen aus?“ Die *co*-Relation ist eben kein festes Objekt, sondern hängt vom gerade gewählten Modell ab.

Aus demselben Grund versucht die Theorie der Nebenläufigkeit nicht, vollständig zu sein. Nicht jede Aussage hat einen Wahrheitswert, der von der Interpretation, also dem Modell, unabhängig ist. Manche Aussage, zum Beispiel $|X| = 12$, gilt in dem einem Modell, aber nicht im nächsten. Dies ist eine der Hauptschwierigkeiten, wenn man versucht, eine Intuition für die Theorie zu entwickeln: Bei der Unzahl der Modelle abschätzen zu können, welche Aussagen in allen Modellen gültig sind.

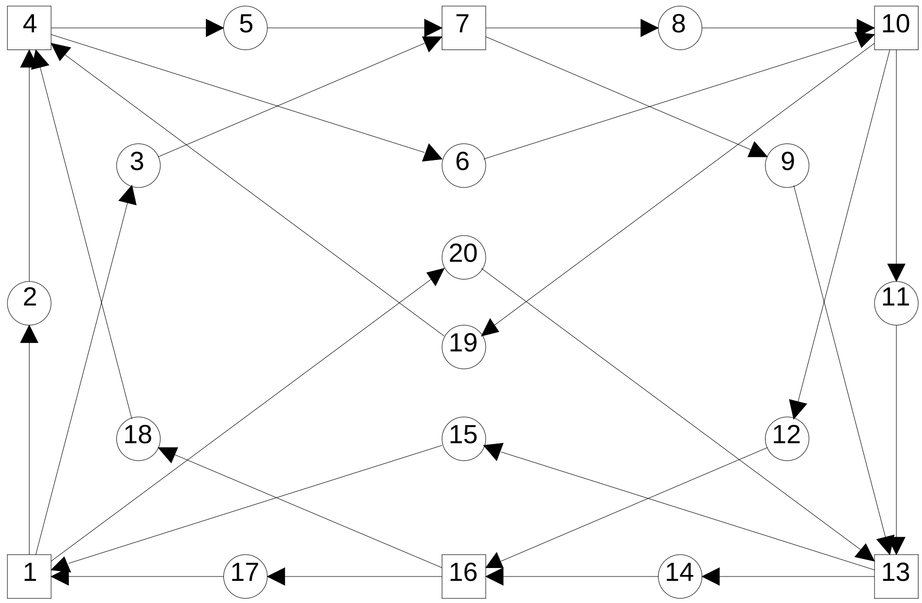


Abbildung 3.14: 6-Jahreszeiten und 2 Stellen, F-Relation

3.3.3 6-Jahreszeiten und zwei Stellen

Der Name dieses Beispiels muß merkwürdig erscheinen, er deutet jedoch eine Verwandtschaft zum 4-Jahreszeiten-Netz an. Wenn wir in der Struktur aus Abbildung 3.14 und 3.13 die Stellen 19 und 20 entfernen, dann bleibt eine Struktur übrig, die der des 4-Jahreszeiten-Netzes entspricht, nur daß sich eine sechsfache statt einer vierfachen Rotationssymmetrie ergibt.

Die Stellen 19 und 20 sind Komplementärstellen zu den Stellen 6 und 15. Wie beim 4-Jahreszeiten-Netz entspricht auch hier ein Schnitt aus S-Elementen jeweils einer Markierung, auch das Tokenspiel kann durchgeführt werden.

Das Modell erfüllt alle bisher benannten Axiome, doch genau hier liegt das Problem. Es erfüllt nämlich zwei Annahmen nicht, die in [Ste93] aufgestellt und als *Con 4a* und *Con 4b* bezeichnet wurden. Wir können damit nicht mehr hoffen, daß sich diese Annahmen eines Tages aus den Standardaxiomen beweisen lassen.

Wollen wir also die Beweise, die auf den Annahmen 4a und 4b basieren, weiterhin anwenden können, dann müssen wir entweder die Vermutungen als Axiome zur Theorie hinzunehmen oder ihre Gültigkeit anderweitig herstellen.

Mit einer so gearteten Verschärfung des Axiomensystems würden wir aber das vorliegende Modell ausschließen, obwohl es keine ungünstigen Eigenschaften besitzt. Es erfüllt sogar den Hauptsatz, der aus den Annahmen 4a und 4b abgeleitet wurde.

Dieser Hauptsatz besagt, daß jeder S-Schnitt von jedem anderen S-Schnitt mit dem Tokenspiel erreichbar ist. Dies führt letztendlich dazu, daß die Menge aller S-Schnitte mit der Fallklasse des zugehörigen Netzsystems übereinstimmt. Dies ist eine wünschenswerte Eigenschaft, die nicht selbstverständlich ist. Wir werden bald eine Struktur kennenlernen, für die die Menge der S-Schnitte aus mehreren Fallklassen zusammengesetzt ist.

Worin bestehen die beiden besagten Annahmen genau? Wir betrachten dazu eine $\underline{co}$-Klique K. Es kann nun verschiedene Möglichkeiten geben, um K zu einem Schnitt zu vervollständigen. Alle Elemente, die wir in einen solchen Schnitt zusätzlich zu K aufnehmen können, haben die Eigenschaft, mit allen Elementen aus K in *co* zu stehen. Wir werden später in Definition 4.104 die Menge dieser Elemente mit $CO(K)$ bezeichnen.

Wir betrachten nun zwei Elemente $x, y \in CO(K)$. Die Annahme 4a, die wir später als Axiom LIG formalisieren werden, besagt nun, daß, wenn $x\ li\ y$ gilt, es eine F-Kette zwischen x und y beziehungsweise y und x gibt, die vollständig in $CO(K)$ enthalten ist. Unser Beispiel ergibt eine Verletzung dieser Annahme gerade für $K = \{19, 20\}$. Wir erhalten $CO(\{19, 20\}) = \{2, 3, 9, 11, 12, 18\}$. $x = 2$ und $y = 11$ erfüllen zwar $x\ li\ y$, aber es gibt keine passende F-Kette.

Annahme 4b, die später Axiom COG heißen wird, fordert, daß es für $x\ \underline{co}\ y$ gerade keine solche Kette geben darf. Betrachten wir aber $K = \{20\}$, dann ist $CO(\{20\}) = \{2, 3, \ldots, 11, 12, 18, 19\}$. Die F-Kette $(19, 4, 6, 10, 11)$ mit $x = 19$ und $y = 11$ erfüllt nun aber $x\ \underline{co}\ y$ und $\{19, 4, 6, 10, 11\} \subseteq CO(\{20\})$ im Widerspruch zur Annahme 4b.

3.3.4 Zykloide

Zykloide sind eine Klasse von regelmäßigen Nebenläufigkeitsstrukturen, die trotz ihrer Einfachheit interessante Untersuchungen zulassen und die hier kurz vorgestellt werden sollen. Zykloide wurden von Carl Adam Petri in [Pet] beschrieben. Es handelt sich hierbei aber um eine Vorversion einer Arbeit, und der Teil, der sich mit Zykloiden beschäftigt, wird vermutlich nicht veröffentlicht werden. Auch andere leicht zugängliche Quellen sind nicht existent.

Ein Zykloid entsteht durch die Faltung des Standardgitters in ein zyklisches Netz, wobei die Faltung sehr einfach ist und durch nur vier natürliche Zahlen als Parameter gesteuert wird.

Definition 3.46 [Zykloid]
Für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 1$ heißt die Struktur

$$\begin{aligned}
N_{\alpha\beta\gamma\delta} &:= (S_{\alpha\beta\gamma\delta}, T_{\alpha\beta\gamma\delta}, F_{\alpha\beta\gamma\delta}; M_{\alpha\beta\gamma\delta}) \\
(x, y) \equiv (u, v) &:\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : x = u + m\alpha + n\gamma \wedge y = v - m\beta + n\delta \\
S_{\alpha\beta\gamma\delta} &:= S_{SG}/\equiv \\
T_{\alpha\beta\gamma\delta} &:= T_{SG}/\equiv \\
F_{\alpha\beta\gamma\delta} &:= F_{SG}/\equiv \\
M_{\alpha\beta\gamma\delta} &:= \{(x, y + \tfrac{1}{2}) \mid x, y \in \mathbb{Z} \wedge x\beta + y\alpha < 0 \wedge x\beta + (y+1)\alpha \geq 0\}/\equiv \cup \\
& \{(x + \tfrac{1}{2}, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \wedge x\beta + y\alpha < 0 \wedge (x+1)\beta + y\alpha \geq 0\}/\equiv
\end{aligned}$$

der Zykloid $\alpha\beta\gamma\delta$. Dabei ist die Faltung als Faltung der Elemente des Standardgitters auf die Äquivalenzklassen von $\equiv$ zu verstehen. Wir bilden dann $(X_{\alpha\beta\gamma\delta}, li_{\alpha\beta\gamma\delta}, co_{\alpha\beta\gamma\delta})$ durch Anwendung von Konstruktion 3.4. $\diamond$

Die Definition der Anfangsmarkierung ist bei Petri nicht zu finden, es ist aber wahrscheinlich, daß die hier gewählte Definition sinnvoll ist und Petris Ideen entspricht. Zwar gibt es zu manchen Zykloiden mehrere Markierungen, die lebendig und sicher sind, aber das entstehende Netzsystem ist dann isomorph zu einem der Zykloide mit der hier vorgestellten Standardmarkierung.

Es wurden über 1000 Parameterwerte mit dem Computer durchgerechnet und die Eigenschaften der entstehenden Strukturen bestimmt. Insbesondere wurde die K-Dichte untersucht. Die dabei entstandene Liste mit Eigenschaften von Zykloiden weist klare Regelmäßigkeiten auf, die zu der folgenden Vermutung führen.

Vermutung 3.47 Ein Zykloid $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 1$ und $\alpha \neq 1 \vee \beta \neq 1$ und $\gamma \neq 1 \vee \delta \neq 1$ erfüllt genau dann Axiom KDI, wenn

$$\begin{aligned}(\alpha > \gamma \wedge \beta > \delta) \vee ((&\beta - 3 < \delta \vee 2\alpha - 0 < \gamma) \wedge (\alpha - 3 < \gamma \vee 2\beta - 0 < \delta) \wedge \\ &(\beta - 2 < \delta \vee 2\alpha - 1 < \gamma) \wedge (\alpha - 2 < \gamma \vee 2\beta - 1 < \delta) \wedge \\ &(\beta - 1 < \delta \vee 2\alpha - 2 < \gamma) \wedge (\alpha - 1 < \gamma \vee 2\beta - 2 < \delta) \wedge \\ &(\beta - 0 < \delta \vee 2\alpha - 3 < \gamma) \wedge (\alpha - 0 < \gamma \vee 2\beta - 3 < \delta))\end{aligned}$$

gilt. Der Zykloid erfüllt die Axiome KAA, LCT und LOR genau dann, wenn

$$(\gamma \neq 1 \vee \delta \geq \beta) \wedge (\delta \neq 1 \vee \gamma \geq \alpha)$$

gilt. Der Zykloid erfüllt stets die Axiome DIS, VST, SYM, NTR, IRR, KOH, NDI, IMK und LFO.

Das hier benutzte Verfahren ist durchaus nicht die einzige Möglichkeit, eine sinnvolle *co*-Relation für einen Zykloid zu definieren. [Ste94] führt die Definition durch, indem direkt *co*- und *li*-Relation des Standardgitters Faltungen unterworfen werden. Dieser Ansatz gestattet es, unmittelbar einige Eigenschaften der resultierenden Struktur zu beweisen. Er wurde jedoch hier nicht gewählt, da er nur schwerer zu motivieren ist.

Diese alternative Konstruktion erlaubt es, einige Teile der Vermutung zu beweisen. Insbesondere in Hinsicht auf die K-Dichte sind jedoch auch bei diesem Ansatz noch nicht alle Probleme geklärt. Stefan Haar gibt in [Haa96] einige Ideen, die zu notwendigen Bedingungen für eine Verletzung der K-Dichte führen, aber diese sind nicht hinreichend und erklären insbesondere den Term $\alpha > \gamma \wedge \beta > \delta$ in Vermutung 3.47 nicht befriedigend.

Für den Augenblick müssen wir daher auf einen Beweis verzichten und können nur jede Struktur einzeln mit dem Computer überprüfen. In Anhang C finden sich Analysen der Zykloide 2222, 2233, 3333, 3223 und 4422. Davon werden wir hier nur den Zykloid 4422 besprechen, da er die Basis für ein weiteres Gegenbeispiel bietet. Es ist zu beachten, daß die Elemente der Zykloide in den Computerbeweisen als Zahlen von 1 aufwärts dargestellt werden, die intern vom Computer zu den Äquivalenzklassen der Faltungsrelation zugeordnet werden.

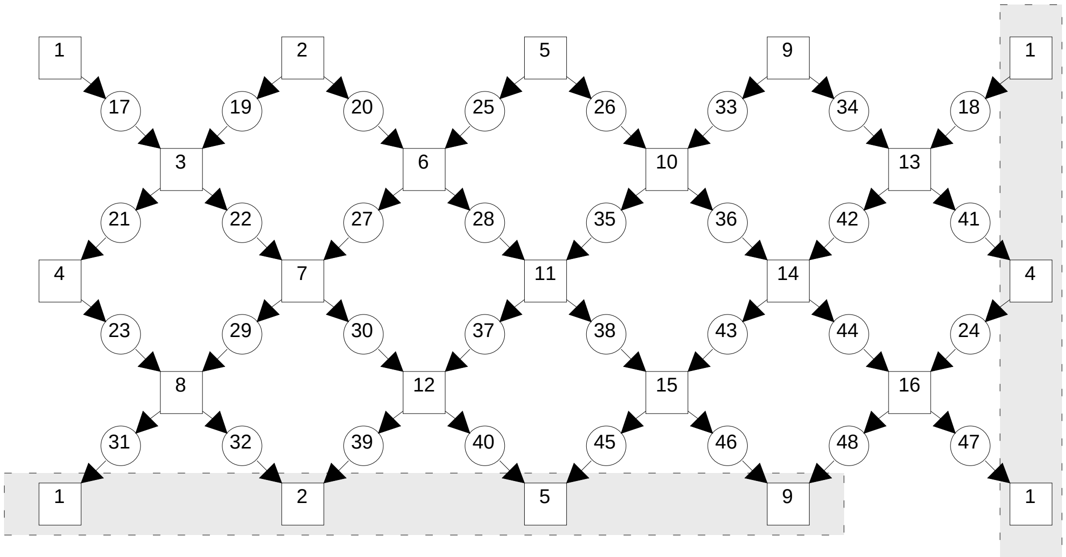


Abbildung 3.15: Zykloid 4422, F-Relation

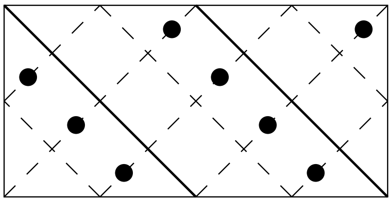
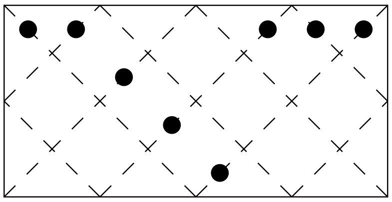
a)  b) 

Abbildung 3.16: Ungewöhnliche Schnitte im Zykloid 4422

3.3.5 Zykloid 4422

Als Beispiel für einen Zykloid sei nun der Zykloid 4422 angegeben, das ist der Zykloid mit $\alpha = 4$, $\beta = 4$, $\gamma = 2$ und $\delta = 2$. In Abbildung 3.15 sieht man die Flußrelation nach der Faltung, dabei bezeichnet 1 die zu $(0, 0)$ äquivalenten Elemente, 2 sind die zu $(1, -1)$ äquivalenten Elemente, und 32 steht beispielsweise für die zu $(2\frac{1}{2}, 1)$ äquivalenten Elemente.

Es sind einige Elemente am unteren und am rechten Rand grau unterlegt, die in der Abbildung doppelt dargestellt sind. Wenn man in Gedanken die drei Elemente auf der rechten Seite mit den entsprechenden Elementen auf der linken Seiten identifiziert, dann erhält man eine Röhre. Identifiziert man dann noch Elemente an der Unterkante der Röhre mit den Elementen an der Oberkante, dann entsteht ein Torus.

Dieser Torus stellt jetzt den fertigen Zykloid dar, auf dem man jetzt die Anfangsmarkierung $\{31, 32, 39, 40, 45, 46, 48, 47\}$ definiert und daraus co und li berechnet. Die vollständige co-Relation ist im Anhang nachzulesen, es stellt sich heraus, daß von dieser Struktur alle Basisaxiome erfüllt werden, die K-Dichte eingeschlossen.

Es ist praktisch nur mit Computerhilfe möglich festzustellen, daß die Menge $\{21, 29, 39, 25, 35, 43, 48, 18\}$ ein S-Schnitt ist. Wenn wir diesen S-Schnitt als Markierung betrachten, stellen wir fest, daß es eine tote Markierung ist. Keine Transition ist aktiviert, ebenso ist keine Transition rückwärts aktiviert. Dies liegt daran, daß es durch jede Transition einen F-Zyklus gibt, der den Schnitt nicht schneidet.

Die Zyklen sind leicht zu finden, indem man bei einer Transition beginnt und immer einen F-Schritt nach rechts unten macht, bis man am Ausgangspunkt ankommt. Die Markenzahl auf einem F-Zyklus muß konstant sein, weil die Stellen unverzweigt sind, und da der Zyklus unmarkiert ist, heißt dies, daß auf einer Stelle im Vorbereich der Transition nie eine Marke zu liegen kommt. In Abbildung 3.16a ist der genannte S-Schnitt und ein F-Zyklus eingezeichnet, die sich nicht schneiden.

Obwohl im Zykloid 4422 also jeder Schnitt jede Linie schneidet, ist, wie gezeigt, die in [Ste93] aufgestellte Annahme 3 nicht erfüllt, die besagt, daß jeder F-Zyklus jeden Schnitt schneidet. Auch diese Annahme ist also unabhängig von den Basisaxiomen.

Eine Voraussetzung für diese Situation ist, daß der Zykloid 4422 recht „breit" ist, daß heißt, er ist in co-Richtung (rechts/links) weiter ausgedehnt als in li-Richtung (oben/unten). Nicht bei allen breiten Zykloiden entsteht ein toter Schnitt, es zerfällt für $\alpha > \gamma \wedge \beta > \delta$ jedoch die Menge der S-Schnitte stets in mehrere Fallklassen.

Auch der vorliegenden Zykloid hat außer der lebendigen und sicheren Fallklasse, die sich aus dem normalen Anfangsfall entwickelt, noch zwei weitere nichttriviale Fallklassen, die durch die Schnitte $\{17, 19, 27, 37, 45, 33, 34, 18\}$ – dieser ist in Abbildung 3.16b eingezeichnet – sowie $\{31, 32, 30, 28, 26, 46, 48, 47\}$ erzeugt werden. Diese beiden Fallklassen sind lebendig, aber sie wickeln sich im Gegensatz zur normalen Fallklasse einmal in li-Richtung um den Zykloid. Ob solche zusätzlichen Fallklassen ein Problem darstellen, kann wohl nicht allgemein beantwortet werden, und so ist es auch nicht klar, ob sie durch Axiome verboten werden sollten.

3.3.6 Fünfeck

Die Nebenläufigkeitsstruktur, die jetzt vorgestellt wird, hat eine besonders unangenehme Eigenschaft, nämlich, daß sie keine konsistente Orientierung F besitzt. Es wurde angenommen, daß sich mit Hilfe der Basisaxiome die Orientierbarkeit beweisen läßt, dies ist jedoch nicht haltbar, wie wir gleich sehen werden.

Die Struktur, die wir als Fünfeck bezeichnen wollen, ist in den Abbildungen 3.17 und 3.18 dargestellt, wobei die F-Relation natürlich nicht dargestellt werden kann, da sie nicht existiert.

Die Fünfeck-Struktur erfüllt alle Basisaxiome mit Ausnahme von Axiom LFO. Wir werden gleich eine, allerdings ungleich kompliziertere, Struktur sehen, die auch dies Axiom erfüllt, aber dennoch nicht orientierbar ist. Die Fünfeck-Struktur dient uns zunächst als einfacher Einstieg in die Welt der nichtorientierbaren Strukturen.

Bei Betrachtung der *co*-Relation fällt auf, daß sie sehr viel umfangreicher als die *li*-Relation ist, im Gegensatz etwa zum 4-Jahreszeiten-Netz, wo die *li*-Relation dominierte. Wir können das Fünfeck also als „breite“ Struktur bezeichnen, in demselben vagen Sinn, wie wir dies beim Zykloid 4422 getan haben. Anscheinend ist es so, daß es die breiten Strukturen sind, die zu unerwünschten Eigenschaften der Modelle führen können, wenngleich nicht unbedingt führen müssen.

Die Annahmen, die bisher widerlegt wurden, waren interessant, aber nicht wirklich entscheidend. Die Eigenschaft, eine konsistente Orientierung zu besitzen, ist dagegen so unentbehrlich, daß sich im folgenden einige Abschnitte nur damit beschäftigen werden, diese Lücke wieder zu schließen.

Interessanterweise läßt sich das Fünfeck als eine einfache Lösung für das 5-Philosophen-Problem interpretieren. Die Stellen symbolisieren dabei die Gabeln, und die Transitionen stehen für die Philosophen. Ein Schnitt gibt eine erlaubte Situation an, z. B. bedeutet $\{2, 4, 6, 9\}$, daß drei Gabeln auf dem Tisch liegen und ein Philosoph ißt.

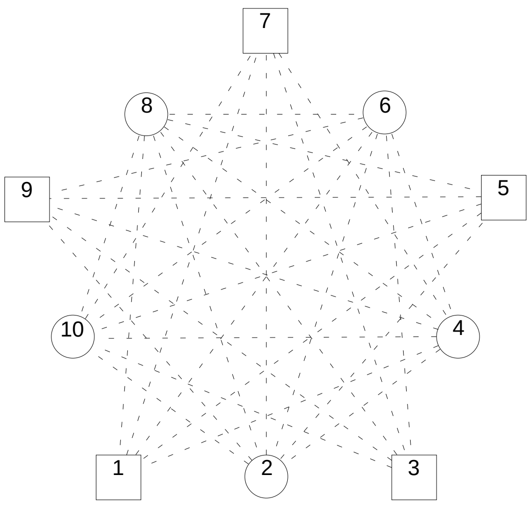


Abbildung 3.17: Fünfeck, *co*-Relation

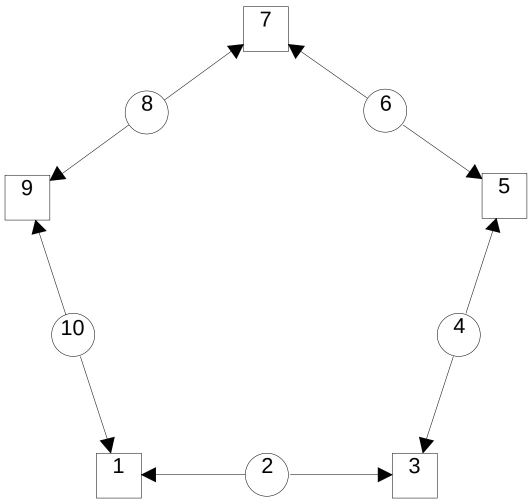


Abbildung 3.18: Fünfeck, P-Relation

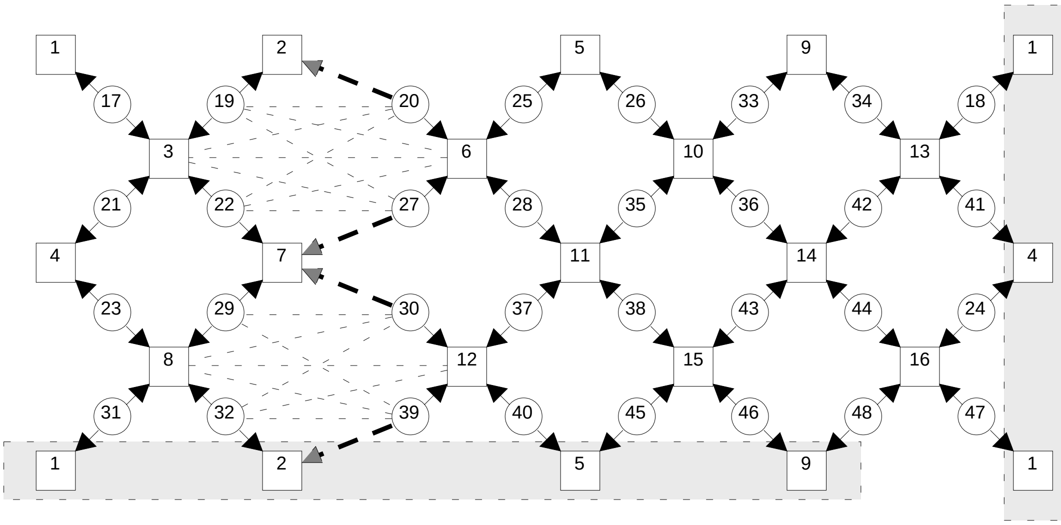


Abbildung 3.19: Kleinsche Flasche beim Auseinanderschneiden

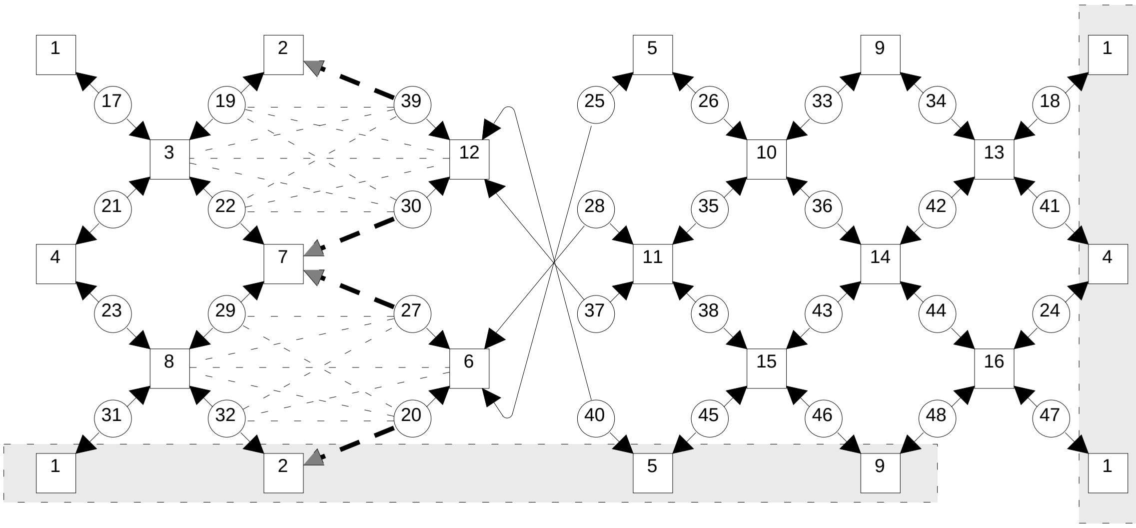


Abbildung 3.20: Kleinsche Flasche beim Zusammenkleben

3.3.7 Kleinsche Flasche

Der Nachteil des vorigen Beispiels ist, daß es das Axiom LFO nicht erfüllt und daß wir daher immer noch die Vermutung hegen könnten, daß alle Basisaxiome zusammen die Orientierbarkeit erzwingen.

Daß dies nicht so ist, zeigt das Beispiel der Kleinschen Flasche, das jetzt hergeleitet werden soll. Es wäre möglich, ein Gegenbeispiel zu finden, das dem Fünfeck-Beispiel ähnlicher ist, doch die Kleinsche Flasche gibt uns auch gleich eine neue Konstruktionsmethode an die Hand, mit der beliebig viele verschiedene nicht orientierbare Strukturen generiert werden können.

Was ist also die Idee hinter diesem Beispiel? Zunächst beobachten wir, daß ein Zykloid, nehmen wir einfach den bereits vorgestellten Zykloid 4422, viel Ähnlichkeit mit einem Torus hat. Wenn wir den Torus jetzt an einer Stelle öffnen, indem wir ihn in Gedanken entlang

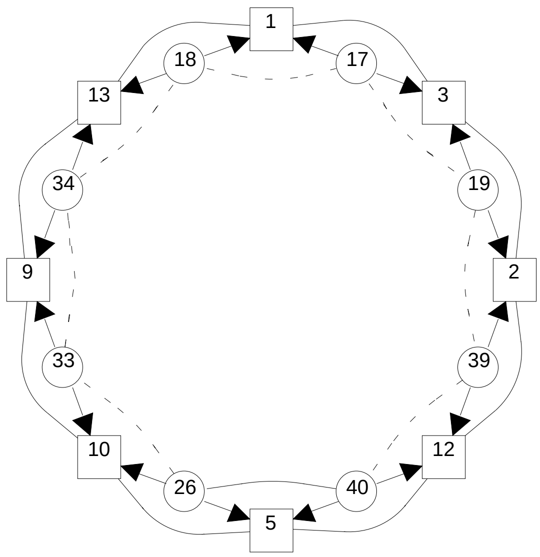


Abbildung 3.21: Nicht orientierbare Unterstruktur der Kleinschen Flasche

einer Linie durchschneiden, dann entsteht eine offene Röhre. Die Flußrelation ist dabei so gerichtet, daß die beiden „Schnittkanten“ gleich gerichtet sind.

Dies wird durch die Abbildung 3.19 illustriert, in der die zu löschenden P-Kanten gestrichelt markiert sind. Der Schnitt wurde hier bewußt nicht in die Nähe der Transitionen 1 oder 4 gelegt, sondern in der Mitte, um leichter die sich ändernden *co*-Beziehungen darstellen zu können. In der Zeichnung sieht man auf diese Weise, daß die Transitionen 3 und 6 sowie 8 und 12 nebeneinander in *co*-artiger Beziehung liegen.

Wenn wir jetzt bei einem der beiden Enden die vordere Seite nach hinten drücken – in der Zeichnung entspricht dies einem Vertauschen von oben und unten – bis sie die hintere Fläche durchdringt, dann hat sich der Drehsinn der Schnittkante umgedreht, er läuft jetzt anders als bei dem gegenüberliegenden Ende. Nun brauchen wir die beiden Enden nur noch wieder „zusammenzukleben“ und stellen fest, daß dabei an der Klebekante die von einer Flußrelation geforderten Eigenschaften nicht mehr erfüllt sind.

Betrachten wir dazu Abbildung 3.20. Man erkennt hier, daß die Transition 6 und 12 als Folge des Umstülpens ihre Plätze getauscht haben, ebenso wie die Stellen 27 und 30, sowie 20 und 39. Damit müssen jetzt andere *co*-Beziehungen gelten als vorher, die neu hinzugekommenen *co*-Kanten sind in der Abbildung eingezeichnet. Hingegen entfallen die *co*-Beziehungen, die noch auf Abbildung 3.19 zu sehen waren.

Bei genauer Betrachtung findet sich in der fertigen Kleinschen Flasche die Unterstruktur von Abbildung 3.21. Jede mögliche Orientierung wird bereits durch die dargestellte Menge von Elemente mit den eingezeichneten Relationen verhindert. Dies liegt daran, daß sich bei einmaligem Durchlaufen des Zyklus nach der Definition von F die Flußrelation genau siebenmal umgekehrt haben müßte, was nicht möglich ist, denn die Orientierung muß bei der Rückkehr zum Ausgangspunkt ja wieder gleich sein. Die Struktur ist also nicht orientierbar.

Nun ist die Sorge gewiß nicht unbegründet, bei der Manipulation an der Struktur könnten auch andere Eigenschaften verloren gegangen sein, beispielsweise die K-Dichte. Eine Überprüfung der Struktur mit dem Computer ergibt jedoch, daß alle Basisaxiome erfüllt sind. Die Annahme, es gäbe immer eine konsistente Orientierung, ist daher wirklich nicht aus den Basisaxiomen herleitbar.

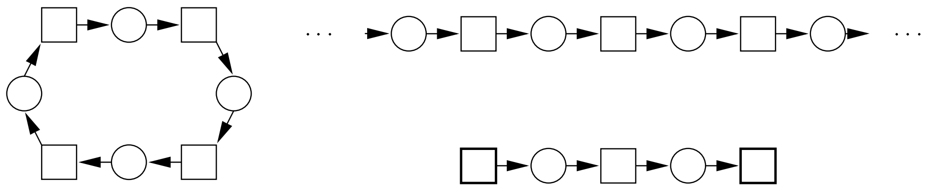


Abbildung 3.22: Erwartete Formen für Linien

3.3.8 Anti-LKO

Bisher wurde der Begriff Linie sehr suggestiv gebraucht. Der Name deutet an, daß die Elemente der Linie sauber eines nach dem anderen aufgereiht sind. Die bisherigen Beispiele nährten diese Anschauung zusätzlich, es gab grundsätzlich drei Arten von Linien.

- Unendliche Linien. Die Stellen und Transitionen der Linie sind abwechselnd zu einer beidseitig unendlichen *im*-Kette angeordnet. Dieses Phänomen tritt bei der unendlichen Kette und beim Standardgitter auf.
- Endliche, azyklische Linien. Wieder ergibt sich eine Kette, die jedoch zwei Endelemente hat, die nur ein Nachbarelement in der Linie haben, wie beispielsweise bei der N-Struktur.
- Zyklische Linien. Hier haben wir einen *im*-Zyklus, der die Linie verbindet. Die meisten der hier behandelten Beispiele fallen in diese Kategorie.

In Abbildung 3.22 sind die drei erwarteten Formen für Linien dargestellt. Für die beiden endlichen Fälle könnten natürlich noch beliebige verschiedene Längen auftauchen, so daß die Endpunkte der Linie – dick gezeichnet – weiter voneinander entfernt stehen.

Dies sind jedoch leider nicht die einzigen Möglichkeiten, denn schon in [BM85] wurde eine Nebenläufigkeitsstruktur vorgestellt, in der eine unerwartete Linie auftrat. Diese Linie bestand aus *zwei* beidseitig unendlichen *im*-Ketten, die untereinander nicht durch *im* verbunden waren, und das, obwohl Axiom IMK und auch alle anderen bisher bekannten Axiome gültig waren. Lediglich eine zusätziche Bedingung war nicht erfüllt, die wir später als Axiom LKO kennenlernen werden, und die gerade dafür sorgt, daß eine Linie nicht in mehrere voneinander getrennte Komponenten zerfällt.

Dieses Gegenbeispiel war jedoch unendlich, und lange Zeit hielt man ein endliches Gegenbeispiel für unwahrscheinlich, da die unendliche Struktur darauf basierte, daß zwischen zwei Ereignissen unendlich viele andere Ereignisse stattfanden, was in einer endlichen Struktur natürlich nicht möglich ist.

Das endliche Gegenbeispiel ist dennoch möglich und findet sich in den Abbildungen 3.24 und 3.23 wieder. Eine der unerwarteten Linien ist die Menge $\{5, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 21\}$, sie besteht aus *zwei* voneinander getrennten *im*-Zyklen, die sich im Diagramm in der linken und in der rechten Hälfte spiegelbildlich wiederfinden.

Die Struktur erfüllt sämtliche Axiome, insbesondere auch die besonders problematischen Axiome KDI und KAA. Damit ist auch für endliche Modelle die Unabhängigkeit von Axiom LKO von den anderen Axiomen gezeigt. Wir nennen die Struktur daher auch Anti-LKO.

Zur Erzeugung einer so ungewöhnlichen *co*-Relation genügen die anfangs aufgelisteten Konstruktionen nicht mehr. Die *co*-Relation mußte von Hand erzeugt werden, wobei die gewünschte F-Relation schnell feststand und eine erste Version der *co*-Relation damit und mit einem passenden Anfangsfall erzeugt werden konnte. Diese konnte dann modifiziert werden, um der Struktur die gewünschten Eigenschaften zu geben.

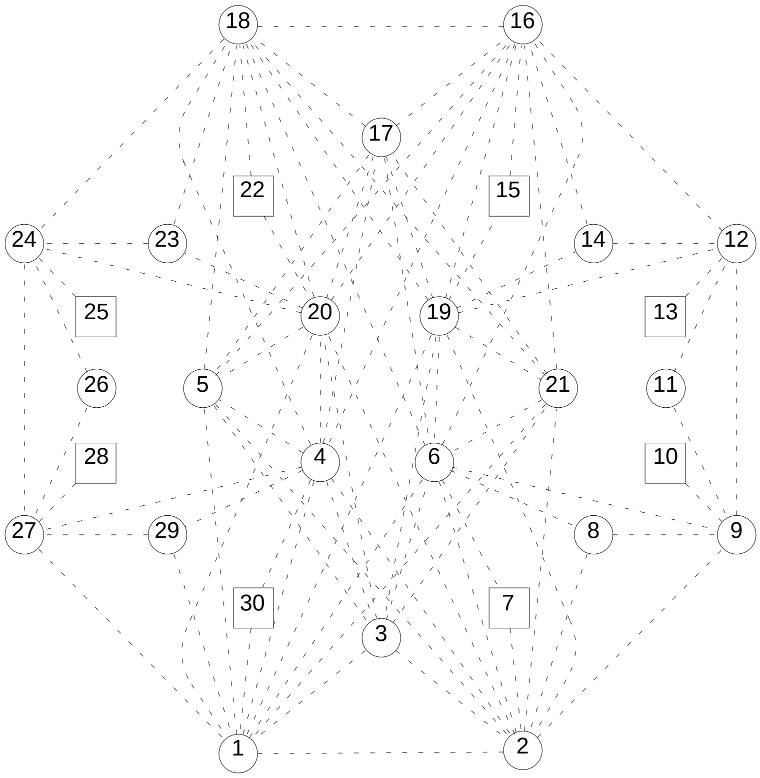


Abbildung 3.23: Anti-LKO, *co*-Relation

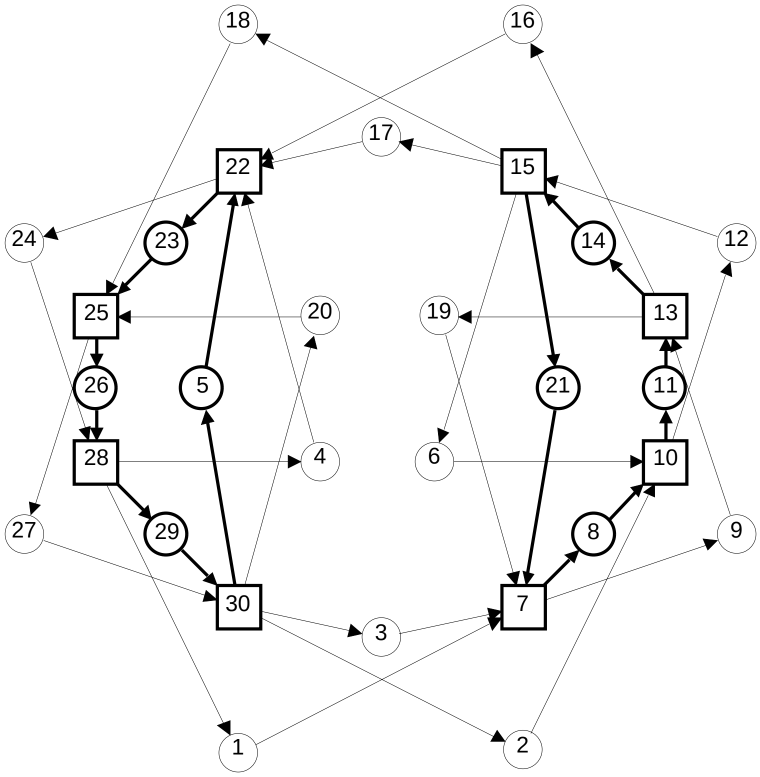


Abbildung 3.24: Anti-LKO, *F*-Relation

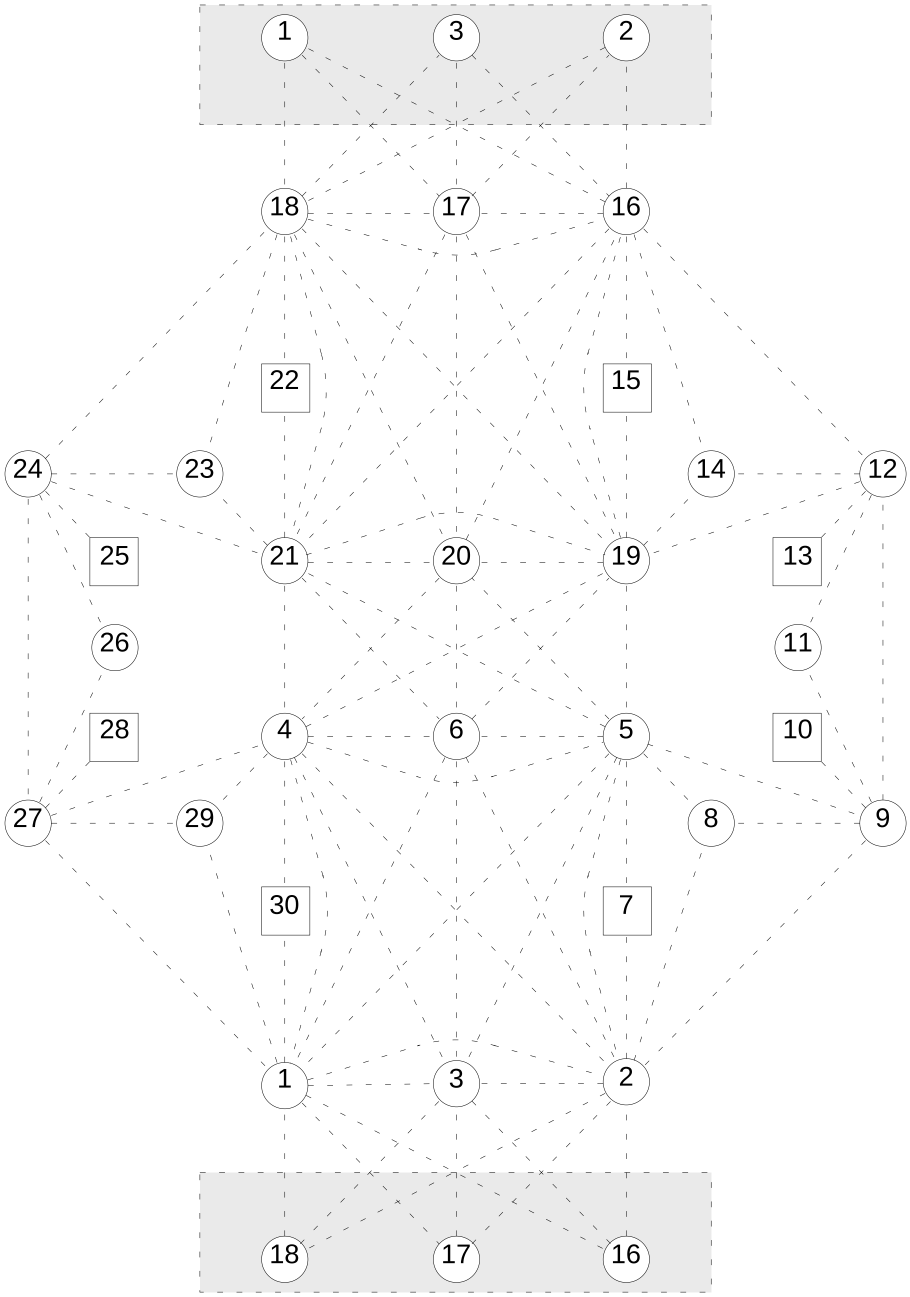


Abbildung 3.25: Anti-EKO, *co*-Relation

3.3.9 Anti-EKO

Dieses Gegenbeispiel ist nicht so offensichtlich falsch wie das vorige, aber gerade deshalb um so tückischer. Die F-Relation des Modells ist in der Abbildung 3.26 zu sehen. Um die *co*-Relation dieses Beispiels übersichtlich darstellen zu können, wurden einige Elemente der Menge X mehrfach in die Abbildung 3.25 aufgenommen. Diese Elemente, die grau hinterlegt sind, müssen miteinander identifixert werden. Dabei entstehen dann *co*-Kanten, die die Stellen in der obersten Reihe mit denen in der untersten Reihe verbinden.

Wir untersuchen eine typische Linie der Struktur, beispielsweise $\{3, 7, 8, 10, 11, 13, 14,$

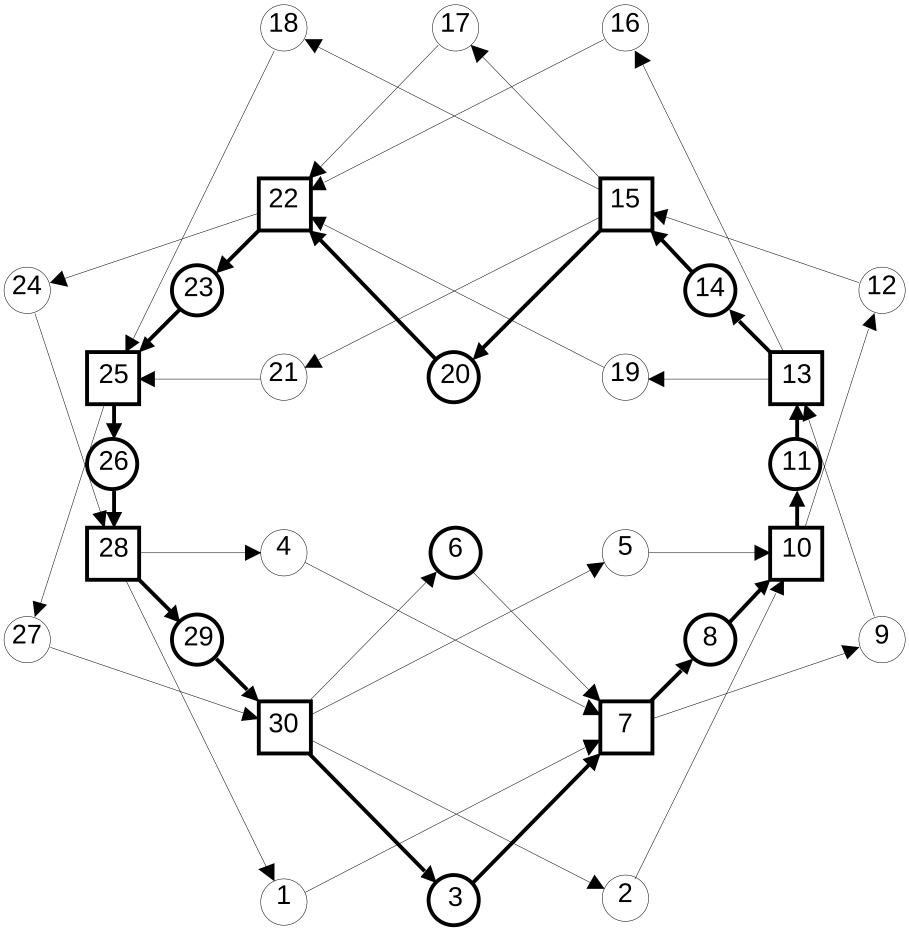


Abbildung 3.26: Anti-EKO, F-Relation

$15, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30\}$, und stellen fest, daß es sich um einen ganz gewöhnlichen geschlossenen *im*-Zyklus handelt.

Für diese Linie weist jedoch beispielsweise das Element 6 eine Besonderheit auf: Die Linie enthält zwei Elemente, die mit Element 6 in *co* stehen, und zwar die Elemente 3 und 20. Die beiden Elemente liegen auf dem Zyklus jedoch vollkommen voneinander getrennt an völlig verschiedenen Stellen. Wenn wir jetzt die Frage stellen, an welchem Zeitpunkt in der zyklischen Entwicklung des Systems das Element 6 einzuordnen ist, dann läßt sich das nicht ohne weiteres beantworten. Später, bei der Behandlung von Axiom EKO, wird dieses Problem genauer behandelt, dort wird auch eine weitere Motivation mittels azyklischer Systeme gegeben.

Auch die Schnitte verhalten sich anders als gewohnt. Der Schnitt $\{4, 5, 6, 19, 20, 21\}$ kann als Markierung des Netzes aufgefaßt werden, aber es ist keine Transition aktiviert, die Markierung ist tot. Dieser tote Schnitt ist jedoch von einer ganz anderen Art als der, den wir im Zykloid 4422 beobachtet haben. Letzterer entstand durch die besondere Breite der Struktur, doch hier können wir nicht davon sprechen, daß die Struktur sonderlich breit ist. Bei der Behandlung ungewöhnlicher Schnitte werden wir also in Zukunft beide Fälle berücksichtigen müssen.

Kapitel 4

Spezielle Axiome

Zeit *die*; -, -en; zu meiner, seiner, uns[e]rer -; zu aller Zeit (a b e r: all[e]zeit); zur Zeit (Abk.: z. Z., z. Zt.); vgl. zurzeit; auf Zeit (Abk.: a. Z.); eine Zeitlang, a b e r: einige, eine kurze Zeit lang; es ist an der Zeit; von Zeit zu Zeit; Zeit haben; beizeiten, vorzeiten, zuzeiten (bisweilen), a b e r: zu der Zeit ...

Duden, Band 1, „Die Rechtschreibung“

Unter den Beispielen, die im Verlauf des vorigen Kapitels vorgestellt wurden, finden sich etliche, die unerwartete Eigenschaften aufweisen, insbesondere sind für die Annahmen 2, 3, 4a und 4b aus [Ste93] Gegenbeispiele gefunden worden.

Wir können daraus folgern, daß strengere Axiome notwendig sind, um ein akzeptables Axiomensystem zu finden, doch gleichzeitig stellt sich die Frage, welche Axiome zusätzlich aufgenommen werden sollen, um die Annahmen beweisen zu können.

Trivialerweise wäre es dazu ausreichend, die Annahmen selbst als neue Axiome hinzuzufügen, doch sollte bei dieser Gelegenheit genau bedacht werden, ob sich die Bedingungen nicht abschwächen lassen und ob sich nicht mathematisch oder physikalisch schönere Axiomatisierungen finden lassen.

Die Axiome sollen nach Themenbereichen gegliedert werden, es werden stets Axiome für ein Gebiet gegenübergestellt, eventuell in unterschiedlicher Stärke oder in anderer Formulierung. So umfangreich die Aufstellung von Axiomen auch sein mag, sind die hier vorgestellten Variationen doch nur ein winziger Teil der möglichen Formulierungen.

4.1 Varianten der Basisaxiome

Um die Anzahl der Axiome zu reduzieren und um elegante Formulierungen zu erreichen, hat Petri einige der Basisaxiome auf andere Weise formuliert, als sie hier vorgestellt wurden.

4.1.1 Irreduzibilität

Zunächst betrachten wir eine spezielle Form der Irreduzibilität.

Axiom IRR [Irreduzibilität]
$\widetilde{co} = \widetilde{li}$. $\Diamond$

Dies Axiom besagt, daß zwei Elemente einer genau dann bezüglich ihrer *li*-Partner übereinstimmen sollen, wenn sie auch bezüglich ihrer *co*-Partner ununterscheidbar sind.

Satz 4.1 $\boxed{\text{DIS}}\,\boxed{\text{VST}}\,\boxed{\text{IRR}}$ $\widetilde{co} = \mathrm{id}_X$.
Beweis Sei $x\ \widetilde{co}\ y$ für $x, y \in X$ beliebig, dann ist wegen Axiom IRR $x\ \widetilde{li}\ y$. Daher $co[x] = co[y] \wedge li[x] = li[y]$, also unter anderem $X - (co[x] \cup li[x]) = X - (co[y] \cup li[y])$. Mit Axiom DIS und Axiom VST folgt daraus $\mathrm{id}_X[x] = \mathrm{id}_X[y]$, also $x = y$. □

Satz 4.2 $\boxed{\text{DIS}}\,\boxed{\text{VST}}\,\boxed{\text{IRR}}$ $\widetilde{li} = \mathrm{id}_X$.
Beweis $\widetilde{li} = \widetilde{co} = \mathrm{id}_X$ bei Anwendung von Axiom IRR und anschließend Satz 4.1. □

Satz 4.3 $\boxed{\text{LII}}\,\boxed{\text{COI}}$ $\widetilde{co} = \widetilde{li}$.
Beweis $\widetilde{co} = \mathrm{id}_X = \widetilde{li}$ wegen Axiom COI und Axiom LII. □

4.1.2 Kohärenz

Sehr ähnlich zur neuen Axiomatisierung der Irreduzibilität hat Petri auch die Kohärenz anders formuliert.

Axiom KOH [Kohärenz]
$co^* = li^*$. ◊

Anschaulich besagt dieses Axiom, daß zwei Elemente, die mit einer *co*-Kette verbunden sind, auch mit einer *li*-Kette verbunden sind.

Satz 4.4 $\boxed{\text{VST}}\,\boxed{\text{KOH}}$ $li^* = X \times X$.
Beweis Seien $x, y \in X$ beliebig. Wenn $x\ \underline{li}\ y$, dann gilt offensichtlich $x\ li^*\ y$. Wenn $\neg x\ \underline{li}\ y$, dann erfordert Axiom VST $x\ co\ y$, also $x\ co^*\ y$ und nach Axiom KOH ergibt sich $x\ li^*\ y$. □

Satz 4.5 $\boxed{\text{VST}}\,\boxed{\text{KOH}}$ $co^* = X \times X$.
Beweis $co^* = li^* = X \times X$, da Axiom KOH gilt und wir Satz 4.4 anwenden können. □

Satz 4.6 $\boxed{\text{LIK}}\,\boxed{\text{COK}}$ $co^* = li^*$.
Beweis $co^* = X \times X = li^*$ vermittels Axiom COK und Axiom LIK. □

Wir stellen fest, daß sowohl bei der Irreduzibilität als auch bei der Kohärenz die neuen Axiome exakt genauso stark wie die beiden Teilaxiome für die *co*- und die *li*-Relation zusammen sind. Es ist daher eher eine Geschmacksfrage, welche der Formulierungen man bevorzugt.

4.1.3 Dichte

Wir haben bereits die K-Dichte kennengelernt, und hier gibt es nun in der Tat eine Möglichkeit, die Formulierung etwas abzuschwächen und trotzdem ein interessantes Axiom zu erhalten, das von Petri bereits in den ersten Arbeiten über die Theorie der Nebenläufigkeit eingeführt und motiviert wurde.

Axiom NDI [N-Dichte]
$\forall a, b, c, d \in X : (c\ co\ b \wedge b\ co\ a \wedge a\ co\ d \wedge a\ li\ c \wedge c\ li\ d \wedge d\ li\ b \Rightarrow \exists e \in X : e\ co\ a \wedge e\ co\ b \wedge e\ li\ c \wedge e\ li\ d)$. ◊

Die Formel, die wir im Axiom der N-Dichte sehen, wirkt zunächst recht undurchschaubar. Wir wollen sie daher durch eine Analogie zur gewöhnlichen Dichte in Ordnungen motivieren.

Eine Ordnung $<$ heißt dicht, wenn es zu je zwei Elementen c und d mit $c < d$ ein weiteres Element e gibt, das zwischen c und d liegt, das also $c < e < d$ erfüllt. Diese typische Situation ist in Abbildung 4.1a dargestellt.

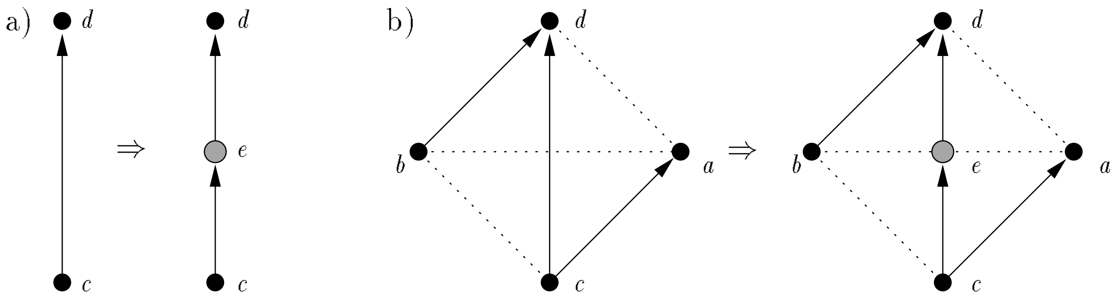


Abbildung 4.1: Dichte und N-Dichte in Ordnungen

Diese Definition von Dichte sorgt aber dafür, daß zwischen zwei Elementen der Ordnung immer unendlich viele andere Elemente liegen. Wenn wir versuchen, eine diskrete Beschreibung von Systemen zu erhalten, dann müssen wir darauf achten, nur dann ein Element zwischen zwei andere einzufügen, wenn es unbedingt notwendig ist.

Eine Situation, in der das Einfügen eines Elements nötig sein kann, ist in Abbildung 4.1b dargestellt. Hier gibt es noch zwei weitere Elemente a und b, die die Bedingungen $c < a$ und $b < d$ erfüllen, weiterhin sind a und d, a und b, sowie b und c nicht durch $<$ geordnet. In Anlehnung an [BF88] können wir diese Situation folgendermaßen interpretieren: Ein Ereignis c sendet Signale aus, und ein Ereignis d empfängt Signale. Wenn das Signal a noch unterwegs ist, während das Ereignis d eintritt, und wenn b schon abgeschickt wurde, als c aktiv war, dann muß es ein weiteres Signal e zwischen c und d geben, um die zeitliche Reihenfolge der beiden Ereignisse zu garantieren, denn die Signale a und b kommen für diese Synchronisation nicht in Frage.

Wir müssen jetzt nur noch von der Ordnung abstrahieren und uns auf die Relation der Geordnetheit, also li, beschränken, um zur Formulierung von Axiom NDI zu kommen. Der Name N-Dichte ergibt sich damit einerseits aus der Verwandtschaft zur gewöhnlichen Dichte, andererseits aber aus dem N-förmigen Bild, das man in den co- und den li- Beziehungen sehen kann und das in der N-Struktur aus Abschnitt 3.3.1 besonders deutlich wird – man setze dazu $a = 2$, $b = 4$, $c = 1$, $d = 5$ und schließlich $e = 3$.

Es gibt noch eine andere Argumention, die direkt über unsere Interpretation von co und li führt. Und zwar sorgt in Abbildung 4.1b das Element a dafür, daß $c\ P\ d$ nicht gelten kann, und das Element b verhindert $d\ P\ c$. Kombiniert haben wir $\neg c\ im\ d$, also sind c und d nach unserer Interpretation nicht benachbart. Sie sollten daher auch nicht direkt aufeinander folgen, sondern durch ein weiteres Element e getrennt sein.

Es ist lange bekannt, daß die N-Dichte tatsächlich eine Abschwächung der K-Dichte ist.

Satz 4.7 $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{SYM}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\forall a, b, c, d \in X : (c\ co\ b \wedge b\ co\ a \wedge a\ co\ d \wedge a\ li\ c \wedge c\ li\ d \wedge d\ li\ b \Rightarrow \exists e \in X : e\ co\ a \wedge e\ co\ b \wedge e\ li\ c \wedge e\ li\ d)$.

Beweis Seien a, b, c, d beliebig gemäß den Voraussetzungen des Satzes gewählt. Wegen Axiom SYM und Satz 2.40 gelten dann auch die symmetrischen Beziehungen, also $b\ co\ c$, $a\ co\ b$ usw.

Da $a\ co\ b$, läßt sich ein Schnitt C mit $a, b \in C$ finden. Und da $c\ li\ d$, läßt sich eine Linie L mit $c, d \in L$ finden. Nach Axiom KDI ist nun $C \cap L \neq \emptyset$, also gibt es ein $e \in C \cap L$.

Offensichtlich $a\ \underline{co}\ e$, $b\ \underline{co}\ e$, $c\ \underline{li}\ e$ und $d\ \underline{li}\ e$ gemäß Konstruktion. Wegen $a\ li\ c$ ist $e \neq c$. Wegen $b\ li\ d$ ist $e \neq d$. Wegen $c\ co\ b$ ist $e \neq b$. Wegen $d\ co\ a$ ist $e \neq a$. Also $a\ co\ e$, $b\ co\ e$, $c\ li\ e$ und $d\ li\ e$. □

Wie das Beispiel des Zykloids 3333 zeigt, ist die N-Dichte aber nicht hinreichend für die

K-Dichte. Die N-Dichte kann daher die K-Dichte nicht ersetzen, sie ist sogar für nur sehr wenige Beweise brauchbar.

Andererseits scheint es so, als würde die K-Dichte – insbesondere für endliche Strukturen – eine unnötig große Klasse von Modellen ausschließen. Was ist am Zykloid 3333 „schlechter" als am Zykloid 2222? Warum sollte man den einen ausschließen, aber den anderen nicht?

Es könnte sein, daß wir die K-Dichte auf eine andere Weise abschwächen müssen, die noch den Beweis der wichtigen Sätze erlaubt, aber weitere Modelle zuläßt. Vielleicht stellen die nicht K-dichten Modelle der Theorie auch einfach eine Grenze dar, bei der die Interpretation der $\underline{co}$-Kens als Momentaufnahmen des Systems und die Interpretation der $\underline{li}$-Kens als Weltlinien nicht mehr erlaubt ist.

4.2 Konvention

Im folgenden werden wir die Axiome DIS, VST und SYM nicht mehr in den Abhängigkeitslisten erwähnen, da sie sonst bei fast jedem Satz genannt werden müßten, was keinen besonderen Erkenntnisgewinn bringt. Wir werden stattdessen $\boxed{\text{Basis}}$ als Abkürzung für diese drei Axiome verwenden.

4.3 Nachbarschaftskohärenz

Die einfachste Form der Nachbarschaftskohärenz in Form von Axiom IMK besagt, daß jedes Element der Struktur von jedem anderen Element in endlich vielen im-Schritten erreichbar ist.

Die im-Kohärenz reicht aber noch nicht, um alle gewünschten Eigenschaften der im-Relation zu gewährleisten, deshalb werden wir jetzt zwei Verschärfungen dieses Axioms kennenlernen.

4.3.1 Linienkohärenz

Abschnitt 3.3.8 zeigte ein Beispiel für eine ungünstige im-Relation. Dort war zwar die im-Kohärenz erfüllt, aber innerhalb einer Linie waren die im-Beziehungen anders gestaltet, als dies zu erwarten gewesen wäre.

Das folgende Axiom wurde in [Ste93] eingeführt und besagt, daß nicht nur die Gesamtstruktur im-kohärent sein soll, sondern auch jede einzelne Linie. Damit wird verhindert, daß eine Linie in mehrere unzusammenhängende Teile zerfällt.

Axiom LKO [Linienkohärenz]
$\forall L \in \text{Lines} : (im|_L)^*_L = L \times L.$ ◊

Wir zeigen nun, daß die Linienkohärenz die im-Kohärenz impliziert, wenn wir Axiom LIK annehmen.

Lemma 4.8 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $li \subseteq im^*_X$.
Beweis Seien $x, y \in X$ mit $x\ li\ y$, dann gibt es eine Linie L mit $x, y \in L$. Auf Grund von Axiom LKO ist dann $x\ (im|_L)^*_L\ y$ und insbesondere $x\ im^*_X\ y$. □

Satz 4.9 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LIK}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $im^*_X = X \times X$.
Beweis $im^*_X \subseteq X \times X$ ist offensichtlich. Nach Axiom LIK ist $X \times X = li^*$ und mit Lemma 4.8 ergibt sich $li^* \subseteq (im^*_X)^*_X = im^*_X$ und damit $X \times X \subseteq im^*_X$. □

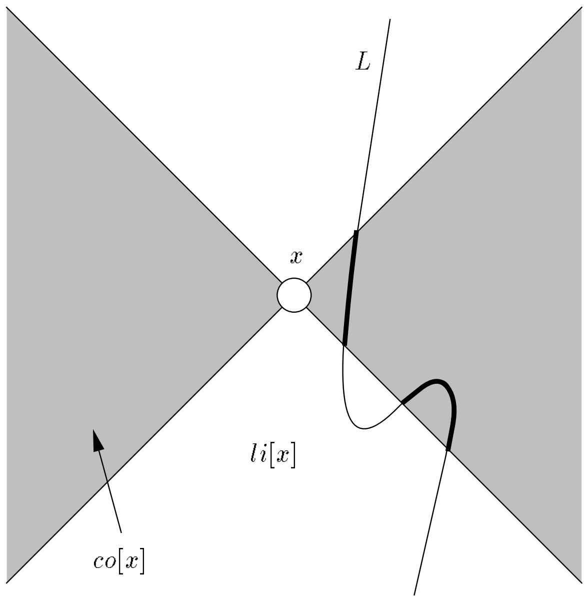


Abbildung 4.2: Visualisierung von Axiom EKO

Kombinieren wir dieses Ergebnis mit den Erkenntnissen aus dem Beispiel Anti-LKO in Abschnitt 3.3.8, dann sehen wir, daß Axiom LKO echt stärker ist als Axiom IMK, wenn wir Axiom LIK annehmen.

In Unterabschnitt 4.6.6 werden wir uns genauer mit den Folgerungen aus Axiom LKO beschäftigen, zu denen insbesondere gehört, daß es nur Linien mit einer erwünschten Struktur gibt.

4.3.2 Episodenkohärenz

Es gibt eine noch stärkere Formulierung des Kohärenzprinzips, die in der Abbildung 4.2 veranschaulicht wird und die dazu dient, jetzt auch noch das Gegenbeispiel aus Abschnitt 3.3.9 auszuschließen.

In Abbildung 4.2 ist ein Element x mit seiner Umgebung in einem Minkowski-Diagramm dargestellt, wie es aus der Relativitätstheorie bekannt ist. Der Raumkegel von x ist in der Abbildung grau gezeichnet und stellt den *co*-Bereich von x dar. Der Zeitkegel hingegen, also der *li*-Bereich, ist weiß abgebildet.

Man erkennt eine Linie L, die den Raumkegel des Elements x schneidet. Dabei bilden sich zwei in der Abbildung stark gezeichnete Bereiche, die zwar in sich *im*-zusammenhängend sind, aber untereinander nicht mit einer *im*-Kette verbunden werden können, ohne die Linie oder den *co*-Bereich zu verlassen.

Eine solche Situation ist nicht wünschenswert, da sich die Linie dazu – zumindest für einige Beobachter – zeitweilig rückwärts in der Zeit bewegen muß, wenn sie mehrfach zwischen Raumkegel und Zeitkegel hin- und herwechselt. Dies widerspricht aber unserer Auffassung, was eine Linie sein soll, also liegt es nahe, diese Möglichkeit auszuschließen.

Axiom EKO [Episodenkohärenz]
$\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : E = L \cap \underline{co}[x] \Rightarrow (im|_E)^*_E = E \times E.$ $\Diamond$

Es soll noch der Begriff *Episode* erläutert werden. Eine Linie können wir uns als die vollständige Aufzeichnung aller Phasen der Ausbreitung eines Signals vorstellen; sie verkör-

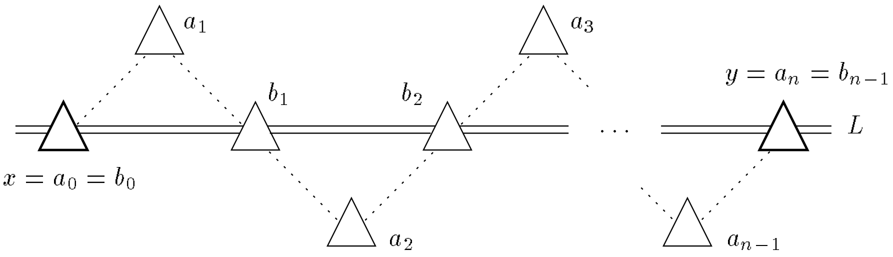


Abbildung 4.3: Konstruktion aus Satz 4.10

pert die gesamte Geschichte eines Signals. Wenn wir nun den Schnitt der Linie mit einem $\underline{co}$-Bereich eines Elements bilden, dann beschränken wir uns auf einen Teil der Geschichte, auf eine Episode im Leben des Signals.

Diese Art, mit der ein Abschnitt aus einer Linie herausgegriffen wird, steht im Kontrast zur gängigen Methode bei Halbordnungen: Dort wählen wir ein unteres und ein oberes Element und bezeichnen das davon begrenzte Gebiet als Intervall. In Abschnitt 5.2.7 werden wir jedoch sehen, warum auch für Halbordnungen der Begriff einer Episode sinnvoll ist und neben den Begriff eines Intervalls gestellt werden sollte.

Zunächst werden die Abhängigkeiten von Axiom EKO zu den bereits bekannten Axiomen untersucht. Um aus Axiom EKO die beiden vorangehenden Axiome herzuleiten, muß eine Dichtebedingung erfüllt sein, hier beispielsweise Axiom KDI.

Satz 4.10 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{COK}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\forall L \in \text{Lines} : (im|_L)^*_L = L \times L$.

Beweis Sei L eine beliebige Linie und seien $x, y \in L$. Dann gibt es nach Axiom COK eine *co*-Kette $\alpha = (x = a_0, a_1, \ldots, a_n = y)$. Da $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\} : a_i \; co \; a_{i+1}$ gilt, können wir die Menge $\{a_i, a_{i+1}\}$ zu einem Schnitt erweitern. Also $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\} : \exists C_i \in \text{Cuts} : a_i \in C_i \wedge a_{i+1} \in C_i$. Nun wenden wir Axiom KDI an und stellen fest, daß $L \cap C_i$ nicht leer ist, mit anderen Worten $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\} : \exists C_i \in \text{Cuts} : \exists b_i \in L : a_i \in C_i \wedge a_{i+1} \in C_i \wedge b_i \in C_i$. Zwei Elemente, die in einem Schnitt liegen sind notwendigerweise in $\underline{co}$, demnach $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\} : \exists b_i \in L : a_i \; \underline{co} \; b_i \wedge a_{i+1} \; \underline{co} \; b_i$.
Fixieren wir ein b_i mit den obigen Eigenschaften für jedes i, wie dies in Abbildung 4.3 zu sehen ist. Da $a_0 \in L$ und $b_0 \in L$ gilt $a_0 \; \underline{li} \; b_0$. Da aber auch $a_0 \; \underline{co} \; b_0$, folgt $b_0 = a_0 = x$. Aus demselben Grund erhalten wir $b_{n-1} = a_n = y$. Per Konstruktion gilt $\forall i \in \{0, \ldots, n-2\} : \{b_i, b_{i+1}\} \subseteq L \cap \underline{co}[a_{i+1}]$. Daraus folgt, daß Axiom EKO anwendbar ist, und es ergibt sich $\forall i \in \{0, \ldots, n-2\} : E = L \cap \underline{co}[a_{i+1}] \Rightarrow b_i \; (im|_E)^*_E \; b_{i+1}$. Dies läßt sich abschwächen zu $\forall i \in \{0, \ldots, n-2\} : b_i \; (im|_L)^*_L \; b_{i+1}$.
Zwischen b_0 und b_{n-1} läßt sich so über die Zwischenstationen b_i eine *im*-Kette konstruieren, daher $b_0 \; ((im|_L)^*_L)^{n-1} \; b_{n-1}$. Vereinfacht geschrieben $x = b_0 \; (im|_L)^*_L \; b_{n-1} = y$. Da dies für alle x, y gilt, ist der Satz bewiesen. □

Es läßt sich jetzt natürlich leicht ein Äquivalent von Axiom IMK zeigen, doch wir wollen uns etwas mehr Arbeit machen und diesen Satz unter Verwendung von Axiom NDI statt Axiom KDI herleiten.

Lemma 4.11 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $x \; li \; y \wedge x \; co \; z \wedge y \; co \; z \Rightarrow x \; im^*_X \; y$.

Beweis Es läßt sich eine Linie L finden mit $\{x, y\} \subseteq L$. Sei $E = L \cap \underline{co}[z]$, dann ergibt Axiom EKO, daß $x \; (im|_E)^*_E \; y$ und speziell $x \; im^*_X \; y$. □

Lemma 4.12 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{COK}}$ $\boxed{\text{NDI}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $li \subseteq im^*_X$.

Beweis Sei $x, y \in X$ mit $x \; li \; y$. Dann gibt es nach Axiom COK eine *co*-Kette $\alpha = (x = a_0, a_1, \ldots, a_n = y)$, wir wählen eine Kette mit minimaler Länge. Dann gelten die Formeln

$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\} : a_i \; co \; a_{i+1}$ und $\forall i \in \{0, \ldots, n-2\} : a_i \; li \; a_{i+2}$. Nach Lemma 4.11 ist nun auch $\forall i \in \{0, \ldots, n-2\} : a_i \; im^*_X \; a_{i+2}$ erfüllt.
Wegen $x \; li \; y$ gilt $n \neq 0$. Wegen $x = a_0 \; co \; a_1$ gilt $n \neq 1$, also $n \geq 2$. Wir führen jetzt eine Fallunterscheidung durch, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist.

Fall 1: $n = 2m$. Es ist $a_0 \; im^*_X \; a_2 \; im^*_X \; a_4 \ldots a_{2(m-1)} \; im^*_X \; a_{2m}$ und deshalb $a_0 \; im^*_X \; a_{2m} = a_n$.

Fall 2: $n = 2m+1$. Also $n \neq 2$ und somit $n \geq 3$. Analog zum vorigen Fall folgt $a_3 \; im^*_X \; a_n$, weil $n-3$ gerade ist. Nach Konstruktion ist jetzt $a_0 \; co \; a_1$, $a_1 \; co \; a_2$, $a_2 \; co \; a_3$ und $a_0 \; li \; a_2$, $a_0 \; li \; a_3$, $a_1 \; li \; a_3$.
Damit ist die Prämisse von Axiom NDI erfüllt, und es gibt ein z mit $a_0 \; li \; z$, $a_3 \; li \; z$, $a_1 \; co \; z$ und $a_2 \; co \; z$. Wir wenden Lemma 4.11 an und erhalten $a_0 \; im^*_X \; z$ und $z \; im^*_X \; a_3$. Alles in allem also $a_0 \; im^*_X \; a_n$.

Somit $x \; im^*_X \; y$, und der Satz gilt für alle x, y. □

Satz 4.13 $\boxed{\text{Basis}}\boxed{\text{LIK}}\boxed{\text{COK}}\boxed{\text{NDI}}\boxed{\text{EKO}}$ $im^*_X = X \times X$.
Beweis Der Beweis erfolgt analog zu Satz 4.9, aber unter Verwendung von Axiom LIK und Lemma 4.12. □

Auf die N-Dichte kann in dieser Beweiskette nicht verzichtet werden, wie das Beispiel des 4-elementigen N-Netzes aus Abbildung 2.1 zeigt, denn dieses erfüllt Axiom LIK und Axiom EKO, nicht aber Axiom IMK.

Erst in späteren Abschnitten werden wir die Mächtigkeit von Axiom LKO und Axiom EKO voll ausnutzen. Dies haben wir jetzt nicht getan, denn es sollten zunächst nur die Beziehungen der Axiome untereinander geklärt werden.

4.3.3 Weitere Abhängigkeiten zwischen den Kohärenzaxiomen

Jetzt decken wir noch einen Zusammenhang zwischen der *im*-Kohärenz und der normalen Kohärenz auf, der es ermöglicht, in vielen Fällen auf Axiom COK und Axiom LIK zugunsten von Axiom IMK zu verzichten.

Satz 4.14 $\boxed{\text{Basis}}\boxed{\text{IMK}}$ $li^*_X = X \times X$.
Beweis Mit Satz 2.66 und Axiom IMK. □

Lemma 4.15 $\boxed{\text{Basis}}\boxed{\text{COI}}\boxed{\text{KAA}}\boxed{\text{LFO}}$ $P \subseteq co^2$.
Beweis Wir wählen $x, y \in X$ beliebig mit $x \; P \; y$. Axiom LFO garantiert die Existenz eines w mit $w \; im \; x$ und $w \; li \; y$. Axiom KAA erzwingt $x \; P \; w$. Wegen Bemerkung 2.49 ist $\underline{li}[w] \neq \underline{li}[y]$.
Angenommen, $co[y] = \emptyset$. Es gilt nun $\underline{li}[y] = X$, also $\underline{li}[w] \neq X$ und $\underline{li}[w] \subsetneq X = \underline{li}[y]$. Nach Definition von P ist $w \; P \; y$, was zusammen mit $x \; P \; w$ einen Widerspruch zu Axiom KAA darstellt. Folglich haben wir $co[y] \neq \emptyset$.
Damit gibt es ein $z \in X$ mit $y \; co \; z$. Wegen $x \; P \; y$ gilt auch $x \; co \; z$, also $x \; co^2 \; y$. □

Satz 4.16 $\boxed{\text{Basis}}\boxed{\text{COI}}\boxed{\text{KAA}}\boxed{\text{IMK}}\boxed{\text{LFO}}$ $co^*_X = X \times X$.
Beweis Wegen Lemma 4.15 ist $P \subseteq co^2$, also auch $im \subseteq co^2$. Nun gilt $X \times X = im^*_X \subseteq (co^2)^*_X \subseteq co^*_X \subseteq X \times X$ unter Verwendung von Axiom IMK. □

Satz 4.17 $\boxed{\text{Basis}}\boxed{\text{COI}}\boxed{\text{KAA}}\boxed{\text{IMK}}\boxed{\text{LFO}}$ $co^*_X = li^*_X$.
Beweis Mit Satz 4.16 und Satz 4.14. □

4.4 Endpunkte

Dieser Abschnitt handelt von einer Vermutung zur Theorie der Nebenläufigkeit, die in [Ste93] formuliert wurde und sich seitdem hartnäckig einem Beweis widersetzte: die Nichtexistenz von Endpunkten. Diese Vermutung konnte jetzt bestätigt werden, womit ein wichtiger Schritt zum Verständnis der Theorie der Nebenläufigkeit getan ist.

4.4.1 ... gibt es nicht

Ein Element $x \in L$ heißt ein Endpunkt der Linie $L \in$ Lines, wenn es genau ein $y \in L$ gibt, für das $y\ im\ x$ gilt. Anders ausgedrückt, wenn $|L \cap im[x]| = 1$. Dies kann durchaus vorkommen, wie die N-Struktur aus Abschnitt 3.3.1 beweist. Dort ist aber auch das Axiom LFO nicht erfüllt, so daß es Elemente gibt, deren gesamte im-Umgebung eine $\underline{co}$-Klique darstellt. Wenn es jedoch zwei $\underline{co}$-Kliquen in der im-Umgebung gibt, dann sollte eine Linie auch durch beide hindurchgehen. Dies wird jetzt bewiesen werden.

Lemma 4.18 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in L : \forall y \in X : (y\ P\ x \Rightarrow \exists z \in im[x] \cap \underline{co}[y] : z \in L)$.

Beweis Wir betrachten beliebige $L \in$ Lines, $x \in L$ und $y \in X$ mit $y\ P\ x$.
Sei $C \in$ Cuts ein Schnitt mit $x \in C$. Sei $K = C - \{x\}$, dann gilt $\forall k \in K : x\ co\ k$. Wegen $y\ P\ x$ gilt nach Satz 2.56 auch $\forall k \in K : y\ co\ k$, also ist $K \cup \{y\}$ eine $\underline{co}$-Klique, die zu einem Schnitt C' mit $K \cup \{y\} \subseteq C'$ erweitert werden kann.
Wegen Axiom KDI ist $L \cap C' \neq \emptyset$, wir wählen also ein $z \in L \cap C'$. Weil $\{y, z\} \subseteq C'$, ist $y\ \underline{co}\ z$.
Angenommen, $\neg z\ im\ x$. Wegen $y\ im\ x$ ist offensichtlich $y \neq z$, also $y\ co\ z$. Weil $y\ im\ x$ gilt, folgt ferner $x\ li\ y$ und daraus $z \neq x$. Mit $\{z, x\} \subseteq L$ führt dies zu $z\ li\ x$.
Es gilt $\neg \underline{li}[z] \subsetneq \underline{li}[x]$ wegen $\neg z\ P\ x$. Da $x\ \underline{li}\ y$ und $z\ co\ y$, ist $\underline{li}[z] \neq \underline{li}[x]$, also $\neg \underline{li}[z] \subseteq \underline{li}[x]$. Es gibt also ein $u \in X$ mit $z\ \underline{li}\ u$ und $\neg x\ \underline{li}\ u$. Wir erhalten $x\ co\ u$, und dies ergibt mit $z\ li\ x$, daß $z \neq u$ und folglich $z\ li\ u$.
Sei $L' \in$ Lines eine Linie mit $\{z, u\} \subseteq L'$. Axiom KDI impliziert $L' \cap C \neq \emptyset$, deshalb gibt es ein $v \in L' \cap C$.
Wäre $v = x$, dann $v = x\ co\ u$ im Widerspruch zu $\{u, v\} \subseteq L'$, also $v \neq x$. Weil $v \in C$ folgt damit aber $v \in K$, also $v \in C'$. $\{v, z\} \subseteq C'$ bedeutet nun $v\ \underline{co}\ z$.
Wegen $\{v, z\} \subseteq L'$ haben wir aber $v\ \underline{li}\ z$, also $v = z$. Nun steht $v = z\ li\ x$ im Widerspruch zu $\{v, x\} \subseteq C$.
Also $z\ im\ x$, damit ist der Satz bewiesen. □

Mit diesem Lemma haben wir bereits den schwierigsten Fall erledigt, im weiteren ist der Beweis recht geradlinig.

Lemma 4.19 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in L : \forall y \in im[x] : \exists z \in im[x] \cap \underline{co}[y] : z \in L$.

Beweis Sei $L \in$ Lines, $x \in L$, $y \in X$ und $x\ im\ y$. Wenn $y\ P\ x$, dann ergibt sich der Beweis aus Lemma 4.18. Wir betrachten also den Fall $x\ P\ y$. Es ist $L \subseteq \underline{li}[x]$ wegen $x \in L$. Wir erhalten $L \subseteq \underline{li}[y]$ durch $x\ P\ y$, also $y \in L$, der Satz ergibt sich für $z = y$. □

Theorem 4.20 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in L : |im[x] \cap L| \neq 1$.

Beweis Für einen Widerspruchsbeweis wählen wir $L \in$ Lines und $x \in L$ mit $|im[x] \cap L| = 1$. Sei $w \in im[x] \cap L$. Wegen Axiom LFO gibt es ein $y \in im[x]$ mit $y\ li\ w$, und nach Lemma 4.19 gibt es ein $z \in im[x] \cap \underline{co}[y]$ mit $z \in L$. Weil $\{z, w\} \subseteq im[x] \cap L$, muß $z = w$ gelten. Nun ergibt sich ein Widerspruch durch $y\ li\ w = z\ \underline{co}\ y$. □

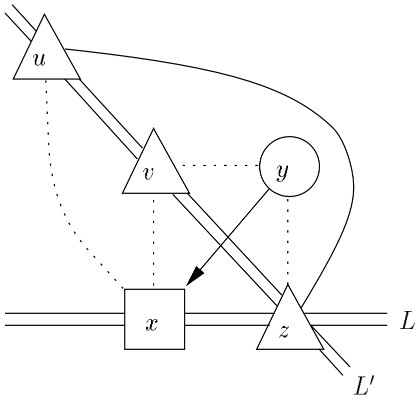


Abbildung 4.4: Konstruktion aus Lemma 4.18

Auch der Fall, daß ein Element einer Linie überhaupt keine Nachbarn auf der Linie hat, kann mit dem Lemma leicht behandelt werden.

Satz 4.21 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in L : |im[x] \cap L| \neq 0.$

Beweis Sei $L \in$ Lines und $x \in L$. Satz 2.76 beweist, daß es ein $y \in X$ gibt mit $x\ im\ y$. Mit Lemma 4.19 folgern wir nun die Existenz eines $z \in im[x]$ mit $z \in L$. □

Es ist nun nicht mehr schwer, diese Aussage soweit zu verschärfen, daß jedes Element einer Linie genau zwei im-Nachbarn auf der Linie hat. Die folgenden Beweise sind zuerst bei [Ste93] ausgeführt.

Lemma 4.22 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in L : |im[x] \cap L| \leq 2.$

Beweis Sei $L \in$ Lines und $x \in L$ und für einen Widerspruchsbeweis $|im[x] \cap L| > 2$, dann gibt es $a, b, c \in im[x]$, für die $a\ li\ b\ li\ c\ li\ a$ gilt. Dies widerspricht jedoch Axiom LOR. □

Satz 4.23 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in L : |im[x] \cap L| = 2.$

Beweis Sei $L \in$ Lines und $x \in L$, dann ist $|im[x] \cap L| = 0$ wegen Satz 4.21 unmöglich, und $|im[x] \cap L| = 1$ entfällt wegen Theorem 4.20. $|im[x] \cap L| \leq 2$ wegen Lemma 4.22 läßt jetzt nur noch $|im[x] \cap L| = 2$ zu. □

Da die K-Dichte eine entscheidende Rolle in der vorangegangenen Beweiskette spielte, können wir das vorhergehende Ergebnis auch als wichtige Motivation von Axiom KDI auffassen. Erst die K-Dichte erlaubt es uns, die Interpretation von li-Kliquen als Weltlinien aufrechtzuerhalten, denn nur sie garantiert die sinnvolle Struktur der Linien.

Die Alternative, statt der K-Dichte ein zu Theorem 4.20 äquivalentes Axiom in das Axiomensystem aufzunehmen, wirkt dagegen künstlich und nicht überzeugend. Sie wäre jedoch erneut in Betracht zu ziehen, wenn Axiom KDI als zu stark erkannt und durch ein schwächeres Axiom ersetzt wird, sich der Beweis Theorem 4.20 jedoch nicht unter schwächeren Bedingungen herleiten läßt.

4.4.2 Transitionen

Aus der Nichtexistenz von Endpunkten folgen noch einige weitere Eigenschaften von Nebenläufigkeitsstrukturen, die für uns hilfreich sein werden.

Wir haben bereits gesehen, daß Stellen genau ein Element im Vorbereich und ein Element im Nachbereich haben. Mit den Ergebnissen des vorigen Abschnitts können wir einen analogen Satz für Transitionen herleiten: Transitionen haben mindestens je zwei Elemente im Vor- und Nachbereich. Wir finden den folgenden Beweis schon in der Arbeit [Ste93].

Lemma 4.24 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $P \subseteq co \odot P$.
Beweis Seien $x, y \in X$ und $y\ P\ x$. Satz 2.58 zeigt die Existenz eines $u \in X$ mit $y\ co\ u$ und $u\ li\ x$. Sei $L \in$ Lines eine Linie, die $x, u \in L$ erfüllt. Wegen Lemma 4.18 gibt es ein $z \in im[x] \cap \underline{co}[y]$ mit $z \in L$. Es ergibt sich $z\ \underline{li}\ u$, also $z \neq y$ wegen $y\ co\ u$. Daher $z\ co\ y$.
Es gilt $x\ P\ z \vee z\ P\ x$. Wäre $x\ P\ z$, dann $z\ \underline{li}\ y$ wegen $x\ \underline{li}\ y$, im Widerspruch zu $z\ co\ y$. Also $z\ P\ x$, und insgesamt haben wir $y\ co\ z\ P\ x$. □

In der Nachbarschaft einer Transition liegen mindestens vier Elemente.

Lemma 4.25 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\forall x \in T : |P^{-1}[x]| \geq 4$.
Beweis Sei $x \in T$, dann gibt es ein $y \in X$ mit $y\ im\ x$ wegen Satz 2.76. Axiom KAA ergibt $y\ P\ x$. Wegen Axiom LFO gibt es ein $z \in X$ mit $y\ li\ z$ und $x\ im\ z$, also $z\ P\ x$ wegen Axiom KAA. Da Lemma 4.24 gilt, gibt es $u, v \in X$ mit $y\ co\ u\ P\ x$ und $z\ co\ v\ P\ x$.
Angenommen, $u = v$, dann führt Axiom LCT mit $y\ co\ u = v\ co\ z$ zu $y\ \underline{co}\ z$ im Widerspruch zu $y\ li\ z$. Also sind $u, v, y, z \in P^{-1}[x]$ paarweise verschieden. □

Die Argumentation des vorigen Lemmas können wir für eine Verschärfung einsetzen, die besagt, daß Vor- und Nachbereich einer Transition mindestens zwei Elemente umfassen.

Lemma 4.26 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\forall F \in$ Orient $: \forall x \in T : |F[x]| > 1 < |F^{-1}[x]|$.
Beweis Sei F eine konsistente Orientierung. Sei $x \in T$. Analog zu Lemma 4.25 leiten wir die Existenz von $u, v, y, z \in P^{-1}[x]$ ab, mit den dort genannten Eigenschaften.
Wegen $x\ im\ y$ gilt entweder $x\ F\ y$ oder $y\ F\ x$. Wenn $x\ F\ y$, dann erzwingen die F-Fortpflanzungsregeln, daß $x\ F\ u$, $x\ F^{-1}\ z$ und $x\ F^{-1}\ v$. Also $\{u, y\} \subseteq F[x]$ und $\{v, z\} \subseteq F^{-1}[x]$.
Wenn andererseits $y\ F\ x$, dann $\{v, z\} \subseteq F[x]$ und $\{u, y\} \subseteq F^{-1}[x]$. In jedem Fall $|F[x]| > 1 < |F^{-1}[x]|$. □

4.4.3 Kleinste Modelle der Theorie

Wir können nun zeigen, daß das 4-Jahreszeiten-Modell wirklich ein kleinstes mögliches Modell der Theorie der Nebenläufigkeit ist, wie schon lange vermutet wurde. Daß wirklich alle kleinsten Modelle diesem Modell isomorph sind, ist nach wie vor nur eine Vermutung, die sich hoffentlich einmal mit ähnlichen Techniken wie den hier vorgestellten beweisen lassen wird.

Lemma 4.27 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $|T| \geq 1$.
Beweis Wegen Axiom NTR ist $X \neq \emptyset$. Sei $x \in X$. Es gibt ein $y \in X$ mit $x\ im\ y$ auf Grund von Satz 2.76. Nun ist $x\ P\ y$ oder y$P\ x$, also $x \in T$ oder $y \in T$. □

Lemma 4.28 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{COK}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\forall x \in X : \exists y \in S : x\ co\ y$.
Beweis Sei $x \in X$. Wegen Satz 2.43 gibt es ein $u \in X$ mit $u\ co\ x$, also $u \neq x$. Wenn $u \in S$, dann sind wir fertig, betrachten wir also den Fall, daß $u \notin S$.
Wegen Satz 2.76 gibt es ein $y \in X$ mit $y\ im\ u$. Da $u \notin S$ ergibt sich $y\ P\ u$, also $y \in S$. Mit Satz 2.56 ergibt sich $y\ co\ x$. □

Lemma 4.29 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{COK}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $|T| \geq 3$.
Beweis Wegen Lemma 4.27 ist $T \neq \emptyset$. Sei $x \in T$. Lemma 4.28 gilt, und es gibt ein $u \in S$ mit $u\ co\ x$, also $u \neq x$.
Wegen Axiom KAA ist $im[u] \subseteq T$. Satz 2.82 zeigt $|im[u]| \geq 2$. Da $\neg x\ im\ u$, können wir abschätzen $|T| \geq |im[u]| + 1 = 3$. □

Satz 4.30 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{COK}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $|T| \geq 4$.

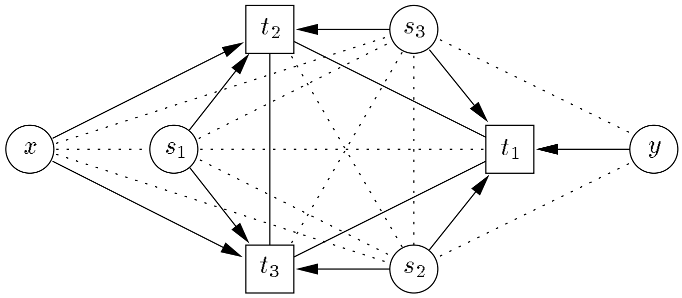


Abbildung 4.5: Konstruktion aus Satz 4.30

Beweis Da Lemma 4.29 gilt, ist $|T| \geq 3$. Angenommen, $|T| = 3$, dann $T = \{t_1, t_2, t_3\}$. Mit Lemma 4.28 zeigen wir die Existenz von $s_1, s_2, s_3 \in S$ mit $t_1\ co\ s_1$, $t_2\ co\ s_2$ und $t_3\ co\ s_3$. Wegen Axiom KAA ist $im[s_1] \subseteq T$. Satz 2.82 zeigt $|im[s_1]| \geq 2$. Da $\neg s_1\ im\ t_1$, ist $im[s_1] = \{t_2, t_3\}$, also $s_1\ P\ t_2$, sowie $s_1\ P\ t_3$. Auf ähnliche Weise gelangen wir zu $s_2\ P\ t_1$, $s_2\ P\ t_3$, $s_3\ P\ t_1$ und $s_3\ P\ t_2$.
$t_2\ li\ s_3$ und $s_3\ P\ t_1$ führt zu $t_2\ \underline{li}\ t_1$. Also $t_1\ li\ t_2$, analog dazu $t_1\ li\ t_3$ und $t_2\ li\ t_3$. $s_2\ co\ t_2$ und $s_1\ P\ t_2$ ergibt $s_1\ co\ s_2$. Analog dazu $s_1\ co\ s_3$ und $s_2\ co\ s_3$. Es gibt daher eine Linie $L \in \text{Lines}$ und einen Schnitt $C \in \text{Cuts}$ mit $\{t_1, t_2, t_3\} \subseteq L$ und $\{s_1, s_2, s_3\} \subseteq C$.
Axiom KDI zeigt, daß es $x \in L \cap C$ gibt. Wäre $x = t_1$, dann steht $s_2\ li\ t_1$ im Widerspruch zu $\{s_2, t_1\} \subseteq C$. Also $x \neq t_1$, aber ebenso $x \neq t_2$ und $x \neq t_3$, also $x \in S$. Nun ist $|im[x]| = 2$, wir nehmen daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $im[x] = \{t_2, t_3\}$, also $x\ im\ t_2$ und $x\ im\ t_3$.
Wegen Lemma 4.18 gibt es ein $y \in im[t_1] \cap \underline{co}[s_2] \cap L$. Mit Axiom LCT, $y\ \underline{co}\ s_2$ und $s_2\ \underline{co}\ s_3$ erhalten wir $y\ \underline{co}\ s_3$.
Weil $|im[y]| = 2$ ist $y\ im\ t_2$ oder $y\ im\ t_3$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $y\ im\ t_2$. Mit Axiom LCT, $y\ \underline{co}\ s_3$ und $s_3\ \underline{co}\ s_1$ ergibt sich $y\ \underline{co}\ s_1$. Da $x\ \underline{co}\ s_1$ und $y\ \underline{co}\ s_1$ und $\{y, s_1, s_3\} \subseteq im[t_2]$, führt eine nochmalige Anwendung von Axiom LCT zu $x\ \underline{co}\ y$. Aber $\{x, y\} \subseteq L$, daher $x = y$.
Jetzt gilt aber $x = y\ im\ t_1$ im Widerspruch zu $im[x] = \{t_2, t_3\}$ und $t_2 \neq t_1 \neq t_3$. Also $|T| \neq 3$, es bleibt $|T| \geq 4$. □

Satz 4.31 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{COK}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $|X| \geq 12$.

Beweis Es ist

$$\sum_{t \in T} |P^{-1}[t]| = |P| = \sum_{s \in S} |P[s]|,$$

dies ergibt mit Satz 2.82

$$\sum_{t \in T} |P^{-1}[t]| = 2|S|.$$

Unter Verwendung von Lemma 4.25 läßt sich dies abschätzen zu $4|T| \leq 2|S|$, also $16 \leq 2|S|$ wegen Satz 4.30, sowie letztlich $|S| \geq 8$. Axiom KAA zeigt $S \cap T = \emptyset$, also $|X| \geq |S| + |T| \geq 8 + 4 = 12$. □

4.4.4 Keine Änderung einer Änderung

Unerwarteterweise hat sich herausgestellt, daß sich Axiom KAA aus anderen Axiomen herleiten läßt, also nicht notwendigerweise als eigenes Axiom aufgenommen werden müßte.

Lemma 4.32 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall A \subseteq L : (A \neq \emptyset \wedge \forall x \in A : |im[x] \cap A| \geq 2) \Rightarrow A = L$.

Beweis Sei $L \in \text{Lines}$, $A \subseteq L$ und $\forall x \in A : |im[x] \cap A| \geq 2$. Sei $x \in A$ beliebig.
Angenommen, es gibt ein $z \in L$ mit $z \notin A$, dann gibt es nach Axiom LKO eine $im|_L$-Kette $\delta = (x = d_0, d_1, \ldots, d_m = z)$ und es muß ein i existieren, so daß $d_i \in A$ und $d_{i+1} \notin A$.
Nun gibt es $u, v \in im[d_i] \cap A$ mit $u \neq v$, weil $|im[d_i] \cap A| \geq 2$. Wegen $d_{i+1} \notin A$ ist außerdem $u \neq d_{i+1} \neq v$, also $u \; li \; v \; li \; d_{i+1} \; li \; u$ wegen $\{u, v, d_{i+1}\} \subseteq L$. Dies steht im Widerspruch zu Axiom LOR wegen $u, v, d_{i+1} \in im[d_i]$.
Also $\text{Set}(\alpha) = L$. □

Satz 4.33 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LII}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $P^2 = \emptyset$.

Beweis Wir nehmen das Gegenteil an, dann gibt es $x, y, z \in X$ mit $x \; P \; y \; P \; z$. Nach Definition von P ergibt sich jetzt $x \; P \; z$, also nach Satz 2.55 $x \; li \; z$. Wegen Lemma 4.24 gibt es ein $w \in X$, für das $w \; co \; x$ und $w \; P \; y$ gilt.
Axiom LII zeigt, daß es ein $v \in X$ gibt, für das $(v \; li \; x) \wedge (\neg v \; li \; w)$ oder $(v \; li \; w) \wedge (\neg v \; li \; x)$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $(v \; li \; x) \wedge (\neg v \; li \; w)$, ansonsten erreichen wir diesen Fall durch Vertauschen von x und w.
Wegen $v \; li \; x$ und $w \; co \; x$ ist $v \neq w$, also $v \; co \; w$. Nun ergibt sich $v \; \underline{li} \; y$ mit $x \; P \; y$. Da $v \; co \; w$ und $y \; li \; w$, folgt $v \neq y$, also $v \; li \; y$. Auf ähnliche Weise ergibt sich $v \; li \; z$. Also ist $\{x, y, z, v\}$ eine $\underline{li}$-Klique und kann zu einer Linie $L \in \text{Lines}$ erweitert werden.
Sei $A = \{x, y, z\}$, dann ist $\forall u \in A : |im[u] \cap A| \geq 2$. Lemma 4.32 verlangt $A = L$, dies ist jedoch unmöglich, weil $v \notin \{x, y, z\}$. □

Wir behalten dennoch Axiom KAA als ein zentrales Axiom der Theorie, da es eine Grundidee der Theorie ausdrückt, wogegen es als bewiesene Eigenschaft nur eine unter vielen wäre und relativ zufällig aussehen könnte.

4.5 Endlichkeit

Wenn wir die Komplexität einer Nebenläufigkeitsstruktur einschränken wollen, gelingt dies am einfachsten, indem wir für sie gewisse Endlichkeitseigenschaften fordern. Es gibt erstaunlich viele mögliche Möglichkeiten dafür.

Axiom TEN [Totale Endlichkeit]
$Fin(X)$. ◊

Axiom REN [Raumkegelendlichkeit]
$\forall x \in X : Fin(co[x])$. ◊

Axiom SEN [Schnittendlichkeit]
$\forall C \in \text{Cuts} : Fin(C)$. ◊

Axiom NEN [Nachbarschaftsendlichkeit]
$\forall x \in X : Fin(im[x])$. ◊

Hier wollen wir zunächst anhalten und die Abhängigkeiten zwischen den vier bisher vorgestellten Endlichkeitsaxiomen darstellen.

Satz 4.34 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{TEN}}$ $\forall x \in X : Fin(co[x])$.

Beweis $\forall x \in X : co[x] \subseteq X$, wobei $Fin(X)$ wegen Axiom TEN. □

Lemma 4.35 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{REN}}$ $\forall x \in X : Fin(\underline{co}[x])$.

Beweis Es ist $|\underline{co}[x]| = |co[x]| + 1$ und damit $Fin(co[x]) \Rightarrow Fin(\underline{co}[x])$. Der Satz folgt nun aus Axiom REN. □

Satz 4.36 $\boxed{\text{Basis}}\,\boxed{\text{REN}}$ $\forall C \in \text{Cuts} : Fin(C)$.

Beweis $\forall C \in \text{Cuts} : \forall x \in C : C \subseteq \underline{co}[x]$, und $\forall x \in X : Fin(\underline{co}[x])$ gemäß Lemma 4.35. $\square$

Satz 4.37 $\boxed{\text{Basis}}\,\boxed{\text{LOR}}\,\boxed{\text{SEN}}$ $\forall x \in X : Fin(im[x])$.

Beweis Wir nehmen das Gegenteil an, dann gibt es ein Element x, für das $im[x]$ unendlich ist. Sei $C \subseteq im[x]$ eine maximale $\underline{co}|_{im[x]}$-Klique. C kann zu einem Schnitt $C' \supseteq C$ erweitert werden, also ist C wegen Axiom SEN endlich.
Wegen der Maximalität von C gilt $\forall y \in im[x] - C : \exists z \in C : y\ li\ z$. Weil $im[x] - C$ unendlich ist, gibt es ein $z \in C$, für das $li|_{im[x]}[z]$ unendlich ist. Aber nach Axiom LOR ist $li|_{im[x]}[z]$ eine co-Klique, die zu einem Schnitt C'' erweitert werden kann. Aber dann haben wir einen unendlichen Schnitt in Widerspruch zu Axiom SEN. $\square$

Es lassen sich auch in Hinblick auf die Objekte $\underline{li}$ und Lines Endlichkeitseigenschaften angeben.

Axiom ZEN [Zeitkegelendlichkeit]
$\forall x \in X : Fin(li[x])$. $\Diamond$

Axiom LEN [Linienendlichkeit]
$\forall L \in \text{Lines} : Fin(L)$. $\Diamond$

Axiom EEN [Episodenendlichkeit]
$\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : Fin(L \cap \underline{co}[x])$. $\Diamond$

Die beiden nächsten Sätze werden analog zu den beiden Sätzen über Raum- und Schnittendlichkeit bewiesen.

Satz 4.38 $\boxed{\text{Basis}}\,\boxed{\text{TEN}}$ $\forall x \in X : Fin(li[x])$. $\square$

Satz 4.39 $\boxed{\text{Basis}}\,\boxed{\text{ZEN}}$ $\forall L \in \text{Lines} : Fin(L)$. $\square$

Satz 4.40 $\boxed{\text{Basis}}\,\boxed{\text{ZEN}}$ $\forall x \in X : Fin(im[x])$.

Beweis Wegen $im \subseteq li$ und Axiom ZEN. $\square$

Satz 4.41 $\boxed{\text{Basis}}\,\boxed{\text{LEN}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : Fin(L \cap \underline{co}[x])$.

Beweis $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : L \cap \underline{co}[x] \subseteq L$, und $\forall L \in \text{Lines} : Fin(L)$ wegen Axiom LEN. $\square$

Satz 4.42 $\boxed{\text{Basis}}\,\boxed{\text{REN}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : Fin(L \cap \underline{co}[x])$.

Beweis $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : L \cap \underline{co}[x] \subseteq \underline{co}[x]$, und $\forall x \in X : Fin(\underline{co}[x])$ wegen Lemma 4.35. $\square$

Ob Schnittendlichkeit und Linienendlichkeit zusammen die totale Endlichkeit erzwingen, ist eine interessante Frage, die von Best in [Bes80] untersucht wird. Sie stellt einen Spezialfall der sogenannten Theorie von Ramsey dar; eine Einführung dieser Theorie findet sich in [GRS80].

Da jedoch der Beweis für den vorliegenden Spezialfall recht einfach ist, soll er hier explizit hergeleitet werden. Wir zeigen zunächst eine Verallgemeinerung des oben genannten Resultats: Episodenendlichkeit und Schnittendlichkeit implizieren Raumkegelendlichkeit.

Satz 4.43 $\boxed{\text{Basis}}\,\boxed{\text{SEN}}\,\boxed{\text{EEN}}$ $\forall x \in X : Fin(\underline{co}[x])$.

Beweis Wir führen den Beweis durch Widerspruch und nehmen an, daß es ein x gibt, für das $\underline{co}[x]$ und daher auch $co[x]$ unendlich ist. Wir konstruieren nun in einer Induktion immer größere Kliquen von $\underline{co}$, die wir A_i nennen wollen, wobei $A_0 = \{x\}$. Dabei werden wir die A_i so wählen, daß es immer unendlich viele Elemente aus X gibt, die mit allen Elementen aus A_i in co stehen, wir fassen diese Elemente in B_i zusammen.

Anfang: $A_0 = \{x\}$ ist eine $\underline{co}$-Klique. $B_0 = co[x]$ ist auf Grund unserer Widerspruchsannahme unendlich.

Hypothese: $x \in A_i$, und A_i ist eine $\underline{co}$-Klique, und $B_i = \bigcap_{y \in A_i} co[y]$ ist unendlich.

Von i nach $i+1$: Da B_i unendlich ist, ist es nicht leer und wir können jetzt eine beliebige maximale $\underline{li}|_{B_i}$-Klique auswählen und sie mit L_i bezeichnen. Es gibt auch eine Linie L'_i mit $L_i \subseteq L'_i$.
Wegen Axiom EEN ist $co[x] \cap L'_i$ endlich. Da per Konstruktion $B_i \subseteq co[x]$ wegen $x \in A_i$, ist auch $B_i \cap L'_i$ endlich. Da $L_i \subseteq B_i \cap L'_i$, ist auch L_i endlich.
Weil aber L_i eine maximale Klique ist und innerhalb von B_i nicht erweitert werden kann, gilt $\forall w \in (B_i - L_i) : \exists v \in L_i : w \; co \; v$. Anders formuliert ist $B_i - L_i = \bigcup_{v \in L_i} co|_{B_i}[v]$.
Aber $B_i - L_i$ ist eine unendliche Menge und L_i ist eine endliche Menge. Daher gibt es ein $v_i \in L_i$, für das $co|_{B_i}[v_i]$ unendlich ist.
Sei $A_{i+1} = A_i \cup \{v_i\}$. Wegen $v_i \in B_i$ gilt nach Induktionshypothese $A_i \subseteq co[v_i]$, also ist A_{i+1} genauso wie A_i eine $\underline{co}$-Klique. Offensichtlich $A_i \subsetneq A_{i+1}$ und somit $x \in A_{i+1}$.
Es ist $B_{i+1} = \bigcap_{y \in A_{i+1}} co[y] = B_i \cap co[v_i] = co|_{B_i}[v_i]$. Damit ist aber B_{i+1} unendlich.

Somit ist die Induktion abgeschlossen. Wir beobachten, daß $A_i \subsetneq A_{i+1}$ für alle i erfüllt ist, also ist $\bigcup_{i \geq 0} A_i$ eine unendliche Menge. Aber $\bigcup_{i \geq 0} A_i$ ist auch eine $\underline{co}$-Klique und kann daher zu einem unendlichen Schnitt $C \supseteq \bigcup_{i \geq 0} A_i$ erweitert werden. Ein unendlicher Schnitt steht jedoch im Widerspruch zu Axiom SEN. □

Zur Lösung unseres Problems ist es jetzt nur noch ein kleiner Schritt, denn der folgende Satz ist schon lange bekannt.

Satz 4.44 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{REN}}$ $\boxed{\text{LEN}}$ $Fin(X)$.
Beweis Sei L eine Linie, also eine maximale $\underline{li}$-Klique, dann $\forall x \in X : \exists y \in L : x \; \underline{co} \; y$. L ist endlich wegen Axiom LEN. $X = \bigcup_{y \in L} \underline{co}[y]$, also ist X nach Lemma 4.35 die Vereinigung von endlich vielen endlichen Mengen und damit selbst endlich. □

Korollar 4.45 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{SEN}}$ $\boxed{\text{LEN}}$ $Fin(X)$.
Beweis Mit Satz 4.41, Satz 4.43 und Satz 4.44 □

Eine ähnliche Beweistechnik hilft uns, den folgenden Satz zu beweisen, der in gewisser Hinsicht eine Variation des Satzes von König ist.

Satz 4.46 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{NEN}}$ $\boxed{\text{LEN}}$ $\forall x \in X : Fin(li[x])$.
Beweis Wir führen den Beweis durch Widerspruch und nehmen an, daß es ein x gibt, für das $\underline{li}[x]$ und daher auch $li[x]$ unendlich ist. Wir konstruieren nun in einer Induktion immer größere Kliquen von $\underline{li}$, die wir A_i nennen wollen, wobei $A_0 = \{x\}$. Dabei werden wir die A_i so wählen, daß es immer unendlich viele Elemente aus X gibt, die mit allen Elementen aus A_i in li stehen, wir fassen diese Elemente in B_i zusammen.

Anfang: $A_0 = \{x\}$ ist eine endliche $\underline{li}$-Klique. $B_0 = li[x]$ ist gemäß Widerspruchsannahme unendlich.

Hypothese: $x \in A_i$, und A_i ist eine endliche $\underline{li}$-Klique, und $B_i = \bigcap_{y \in A_i} li[y]$ ist unendlich.

Von i nach $i+1$: Sei $C_i = im[A_i] \cap B_i$, dann ist C_i endlich wegen Axiom NEN.
Sei $b \in B_i$, dann ist $A_i \cup \{b\}$ eine $\underline{li}$-Klique und somit enthalten in einer Linie L. Wegen Axiom LKO ist aber $b \; (im|_L)^*_L \; x$. Da $b \notin A_i$, aber $x \in A_i$, muß es $c, d \in X$ geben, für die $c \; im|_L \; d$ und $c \notin A_i$ und $d \in A_i$ gilt.
Aber $c \; im|_L \; d$ erfordert $c \in L$. Außerdem ist $d \in A_i$, also $c \in im[A_i]$. Da $c \in L$ und $A_i \subseteq L$, ist $A_i \subseteq \underline{li}[c]$. Mit $c \notin A_i$ erhalten wir $A_i \subseteq li[c]$, also $c \in B_i$. Insgesamt $c \in im[A_i] \cap B_i = C_i$.
$\{b, c\} \subseteq L$ führt zu $b \; \underline{li} \; c$. Wir können zusammenfassen: $\forall b \in B_i : \exists c \in C_i : b \; \underline{li} \; c$.

Dies läßt sich schreiben als $B_i = \bigcup_{c \in C_i} \underline{li}[c] \cap B_i$. Aber B_i ist eine unendliche Menge und C_i ist eine endliche Menge. Daher gibt es ein $c_i \in C_i$, für das $li[c_i] \cap B_i$ unendlich ist.
Sei $A_{i+1} = A_i \cup \{c_i\}$. Wegen $c_i \in B_i$ gilt $A_i \subseteq li[c_i]$, also ist A_{i+1} genauso wie A_i eine $\underline{li}$-Klique. Offensichtlich $A_i \subseteq A_{i+1}$ und daher $x \in A_{i+1}$. Es ist $B_{i+1} = \bigcap_{y \in A_{i+1}} li[y] = B_i \cap li[c_i]$. Damit ist aber B_{i+1} unendlich.

Somit ist die Induktion abgeschlossen. Wir beobachten, daß $A_i \subsetneq A_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, also ist $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ eine unendliche Menge. Aber $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ ist auch eine $\underline{li}$-Klique und kann daher zu einer unendlichen Linie $L \supseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ erweitert werden. Eine unendliche Linie steht jedoch im Widerspruch zu Axiom LEN. □

Es ist in manchen Fällen auch sinnvoll, statt Endlichkeit Unendlichkeit zu fordern, jedoch nicht in so vielen Variationen. Es gibt nur eine Unendlichkeitsforderung, die praktisch Verwendung findet, und zwar die Unendlichkeit von Linien.

Axiom LUE [Linienunendlichkeit]
$\forall L \in \text{Lines} : \neg Fin(L)$. ◊

Es sollte klar sein, daß Linienunendlichkeit die Linienendlichkeit und damit auch Zeitendlichkeit und totale Endlichkeit ausschließt. Alle anderen Endlichkeitsforderungen sind jedoch mit der Linienunendlichkeit verträglich. Wenn alle Linien unendlich sind, dann kann die Struktur natürlich auch nicht trivial sein.

Bemerkung 4.47 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LUE}}$ $\neg Fin(X)$. □

Bemerkung 4.48 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LUE}}$ $|X| \geq 2$. □

Wenn es eine endliche Linie gibt, dann sind nicht notwendigerweise alle Linien endlich. Axiom EEN erlaubt es jedoch, diesen Schluß zu ziehen.

Satz 4.49 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{EEN}}$ $\exists L \in \text{Lines} : Fin(L) \Rightarrow \forall L \in \text{Lines} : Fin(L)$.

Beweis Sei L_e eine endliche Linie. Nach Axiom EEN gilt, $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in L_e : Fin(L \cap \underline{co}[x])$. Weil L_e eine maximale $\underline{li}$-Klique ist, gilt $\forall y \in X - L_e : \exists x \in L_e : y\ co\ x$. Weiterhin $\forall y \in X : \exists x \in L_e : y\ \underline{co}\ x$ und $\forall L \in \text{Lines} : \forall y \in L : \exists x \in L_e : y\ \underline{co}\ x$.

$$\forall L \in \text{Lines} : L = \bigcup_{x \in L_e} (\underline{co}[x] \cap L)$$

Also ist jede Linie die endliche Vereinigung endlicher Mengen und somit endlich. □

In Abbildung 4.6 ist ein Venn-Diagramm gezeichnet, das die verschiedenen Endlichkeitsbedingungen in Beziehung setzt. Es werden Axiom LOR und Axiom LKO angenommen, jedoch sind sie nur notwendig, um Axiom NEN sinnvoll einordnen zu können, für die anderen Beziehungen sind sie ohne Belang. Die graphischen Darstellungen beziehen sich auf die in Unterabschnitt 3.2.4 generierten Beispiele, die gerade in den entsprechenden Teilmengen plaziert werden müssen.

4.6 Orientierbarkeit

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einigen Eigenschaften der Menge der konsistenten Orientierungen.

4.6.1 Globale und lokale Orientierbarkeit

Die einfachste Möglichkeit, die Existenz einer konsistenten Orientierung zu sichern, ist, dies in einem Axiom zu fordern.

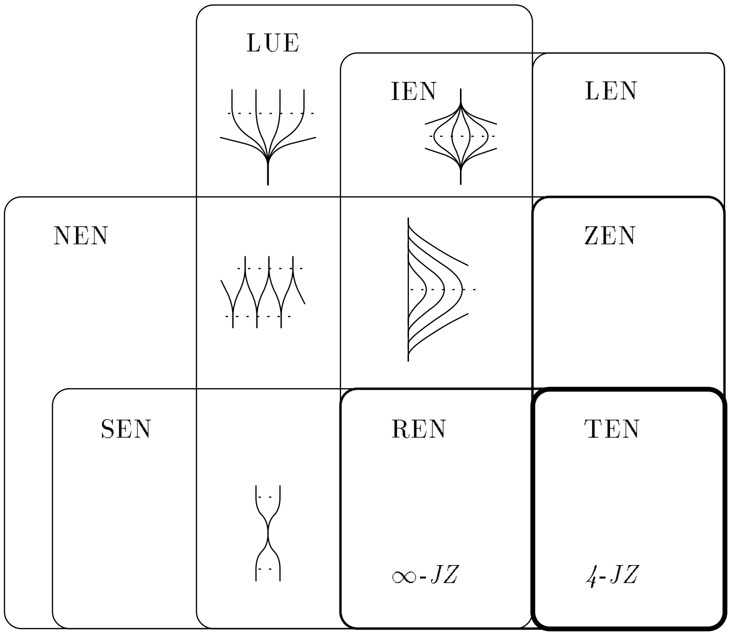


Abbildung 4.6: Abhängigkeiten der Endlichkeitsaxiome

Axiom KOR [Konsistente Orientierbarkeit]
Orient $\neq \emptyset$. ◊

Zunächst einmal erfüllt solch ein Axiom natürlich seinen Zweck, aber es tut sich ein Problem auf, denn die Menge der Flußrelationen wird, indem wir über sie direkte Aussagen treffen, zu einem Hauptobjekt der Theorie der Nebenläufigkeit. Dies sollte jedoch nach Möglichkeit den Relationen *co* und *li* vorbehalten bleiben.

Andererseits ist es notwendig, auf eine konsistente Orientierung zurückgreifen zu können, denn sie erleichtert die Beschreibung von Nebenläufigkeitsstrukturen und macht einige wichtige Beweistechniken verfügbar. Nicht zuletzt gelangt man mit der F-Relation von der Theorie der Nebenläufigkeit zur Theorie der Netze, und man kann sowohl Sätze über Netze auf Nebenläufigkeitsstrukturen übertragen, als auch umgekehrt.

Weiterhin ist die Existenz einer zeitlichen Orientierung aus der Physik motivierbar. Aber ist die Existenz einer globalen Zeitrichtung in der Physik wirklich ein unverzichtbares Prinzip? Wenn ja, kann es aus anderen Prinzipien der Physik abgeleitet werden? Diese Fragen sollen hier, da wir uns ja nicht so sehr über die Rechtfertigung von Axiomen Gedanken machen, nicht beantwortet werden. Schon der erwünschte Bezug zu Netzen stellt eine ausreichende Motivation dar, um Orientierbarkeit zu fordern.

Axiom KOR stellt eine globale Bedingung dar, die nur durch Betrachtung der Gesamtstruktur entschieden werden kann. Wir stellen jetzt eine Beziehung zu den lokalen Orientierbarkeitsbedingungen her.

Satz 4.50 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{KOR}}$ $\forall x \in X : (co|_{im[x]})^2 \subseteq \underline{co}|_{im[x]}$.

Beweis Sei F eine konsistente Orientierung gemäß Axiom KOR und $x \in X$ beliebig. Seien $a, b, c \in im[x]$ mit $a\ co\ b\ co\ c$. Zu zeigen ist $a\ \underline{co}\ c$.

Fall 1: $a\ F\ x$. Nach der Definition von F ergibt sich $b\ F\ x$ und weiter $c\ F\ x$. Also $a\ \underline{co}\ c$.

Fall 2: $a\ F^{-1}\ x$. Nach der Definition von F ergibt sich $b\ F^{-1}\ x$ und weiter $c\ F^{-1}\ x$. Wiederum $a\ \underline{co}\ c$.

Also $(co|_{im[x]})^2 \subseteq \underline{co}|_{im[x]}$. $\square$

Satz 4.51 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{KOR}}$ $\forall x \in X : (li|_{im[x]})^2 \subseteq \underline{co}|_{im[x]}$.

Beweis Sei F eine konsistente Orientierung gemäß Axiom KOR und $x \in X$ beliebig. Seien $a, b, c \in im[x]$ mit $a\ li\ b\ li\ c$. Zu zeigen ist $a\ \underline{co}\ c$.

Fall 1: $a\ F\ x$. Nach der Definition von F ergibt sich $b\ F^{-1}\ x$ und weiter $c\ F\ x$. Also $a\ \underline{co}\ c$.

Fall 2: $a\ F^{-1}\ x$. Nach der Definition von F ergibt sich $b\ F\ x$ und weiter $c\ F^{-1}\ x$. Wiederum $a\ \underline{co}\ c$.

Also $(li|_{im[x]})^2 \subseteq \underline{co}|_{im[x]}$. $\square$

Damit haben wir gezeigt, daß die Axiome zur lokalen Orientierbarkeit notwendig für Axiom KOR sind, das damit eine eindeutig stärkere Bedingung ist.

4.6.2 Wendepunkte

Um die Forderung nach einer konsistenten Orientierung einfacher auszudrücken, definieren wir zunächst eine Funktion, die angibt, bei welchen Indizes sich in einer im-Kette die Zeitrichtung umkehrt. Intuitiv sollte dies genau dort sein, wo der Vorgänger und der Nachfolger eines Elements in der zeitlichen Entwicklung nicht aufeinander folgen, also nicht in li, sondern in $\underline{co}$ stehen.

Definition 4.52 [Wendepunkte]
Ist $\alpha = (a_0, \ldots, a_n) \in \text{Ketten}(im)$, dann sei $\text{WP}(a_0, \ldots, a_n) := \{i \mid 0 < i < n \wedge a_{i-1}\ \underline{co}\ a_{i+1}\}$. $\Diamond$

Wir müssen auch für im-Zyklen eine geeignete Definition finden, die insbesondere auch die Rückkehr des Zyklus zum Ausgangspunkt richtig behandelt.

Definition 4.53 [Alle Wendepunkte]
Ist $\alpha = (a_0, \ldots, a_n) \in \text{Zyklen}(im)$, dann sei $\text{AWP}(a_0, \ldots, a_n) := \text{WP}(a_0, \ldots, a_n, a_1)$. $\Diamond$

Jetzt können wir nicht orientierbare Strukturen ausschließen, indem wir in einem Axiom fordern, daß die Kardinalität von AWP stets gerade ist. Daß dies in der Tat unverzichtbar ist, beweist das Beispiel der Kleinschen Flasche aus Abschnitt 3.3.7.

Axiom GAW [Gerade Anzahl Wendepunkte]
$\forall \alpha \in \text{Zyklen}(im) : |\text{AWP}(\alpha)|$ ist gerade. $\Diamond$

Um dies neue Axiom für einen Beweis einsetzen zu können, brauchen wir eine weitere Definition, mit der wir feststellen können, ob zwei beliebige im-Paare in derselben Richtung orientiert werden müssen.

Definition 4.54 [Parallel orientiert]
$PO(a, b, c, d) :\Leftrightarrow a\ im\ b \wedge c\ im\ d \wedge \exists \alpha = (a, b, x_1, \ldots, x_n, c, d) \in \text{Ketten}(im) : |\text{WP}(\alpha)|$ ist gerade. $\Diamond$

Einige Eigenschaften des neu definierten Prädikats können einfach abgeleitet werden, auch wenn ihre Bedeutung erst in Satz 4.58 klar werden wird.

Lemma 4.55 $\boxed{\text{Basis}}$ $a\ im\ b \wedge c\ im\ d \wedge e\ im\ f \wedge PO(a, b, c, d) \wedge PO(a, b, e, f) \Rightarrow PO(c, d, e, f)$.

Beweis Nach der Prämisse existieren $\alpha = (a, b, x_1, \ldots, x_n, c, d)$ mit $|\text{WP}(\alpha)|$ gerade und $\beta = (a, b, y_1, \ldots, y_n, e, f)$ mit $|\text{WP}(\beta)|$ gerade. Indem wir α umkehren, erhalten wir $\gamma = (d, c, x_n, \ldots, x_1, b, a)$ mit $|\text{WP}(\gamma)|$ gerade.

Wir fügen das Element c und die Ketten γ und β zusammen und erhalten $\delta = (c, d, c, x_1, \ldots, x_n, b, a, b, y_n, \ldots, y_1, e, f)$. Man beobachtet, daß $|\mathrm{WP}(\delta)| = 1 + |\mathrm{WP}(\gamma)| + 1 + |\mathrm{WP}(\beta)|$. Damit ist aber $|\mathrm{WP}(\delta)|$ gerade, und wir haben $PO(c, d, e, f)$. □

Lemma 4.56 $\boxed{\text{Basis}}\,\boxed{\text{GAW}}$ $a\ im\ b \wedge c\ im\ d \wedge PO(a, b, c, d) \Rightarrow \neg PO(a, b, d, c)$.

Beweis Wir nehmen das Gegenteil an, dann existieren $\alpha = (a, b, x_1, \ldots, x_n, c, d)$ mit $|\mathrm{WP}(\alpha)|$ gerade und $\beta = (a, b, y_1, \ldots, y_n, d, c)$ mit $|\mathrm{WP}(\beta)|$ gerade. Indem wir β umkehren, erhalten wir $\gamma = (c, d, y_n, \ldots, y_1, b, a)$ mit $|\mathrm{WP}(\gamma)|$ gerade.
Wir fügen α und γ zusammen und erhalten $\delta = (a, b, x_1, \ldots, x_n, c, d, y_n, \ldots, y_1, b, a)$. Wir wissen, daß $|\mathrm{WP}(\delta)| = |\mathrm{WP}(\alpha)| + |\mathrm{WP}(\gamma)|$ gerade ist. Aber weil $b\ \underline{co}\ b$, führt dies zu $|\mathrm{AWP}(\delta)|$ ungerade und somit zu einem Widerspruch mit Axiom GAW. □

Der Rest der Beweiskette könnte einfacher ablaufen, wenn wir Axiom IMK voraussetzen, was jedoch um der Aussagekraft des Satzes willen nicht geschehen soll.

Lemma 4.57 $\boxed{\text{Basis}}$ $a\ im\ b \wedge c\ im\ d \wedge b\ im^+\ c \Rightarrow (PO(a, b, c, d) \vee PO(a, b, d, c))$.

Beweis Per Voraussetzung gibt es eine im-Kette von b nach c, die wir $\alpha = (b, x_1, \ldots, x_n, c)$ nennen wollen. Dann sind auch $\beta = (a, b, x_1, \ldots, x_n, c, d)$ und $\gamma = (a, b, x_1, \ldots, x_n, c, d, c)$ im-Ketten, wobei $|\mathrm{WP}(\beta)| + 1 = |\mathrm{WP}(\gamma)|$. Letztlich ist $|\mathrm{WP}(\beta)|$ oder $|\mathrm{WP}(\gamma)|$ gerade, womit das Lemma bewiesen ist. □

Nun können wir den Beweis schließen und die Existenz einer konsistenten Orientierung sichern, indem wir für jede im-Zusammenhangskomponente willkürlich eine Orientierung festlegen und sie mit Hilfe des Prädikats PO durch die Struktur fortpflanzen.

Satz 4.58 $\boxed{\text{Basis}}\,\boxed{\text{GAW}}$ Orient $\neq \varnothing$.

Beweis Sei $\prec$ eine beliebige Wohlordnung von X und $rep_1(x) = \min_\prec(im^*_X[x])$ für $x \in X$. Sei $rep_2(x) = \min_\prec(im[rep_1(x)])$, wenn $im[rep_1(x)] \neq \varnothing$, $rep_2(x) = x$ sonst.
Jetzt stellt rep_1 einen Repräsentanten für jede im-Zusammenhangskomponente dar und rep_2 liefert eine Referenz für die Orientierung dieser Komponente, wenn sie nicht einelementig ist.
Sei $F = \{(a, b) \in im \mid PO(rep_2(a), rep_1(a), a, b)\}$. Wir werden jetzt sehen, daß F eine konsistente Orientierung ist.

- $F \cup F^{-1} = im$. Daß $F \cup F^{-1} \subseteq im$ gilt, folgt unmittelbar aus der Konstruktion von F. Für die Rückrichtung wählen wir jetzt $a\ im\ b$ beliebig. Die im-Zusammenhangskomponente ist damit nicht einelementig und somit $im[rep_1(a)] \neq \varnothing$ und $rep_1(a)\ im\ rep_2(a)$, sowie $rep_1(a)\ im^+\ a$. Nach Lemma 4.57 gilt nun $PO(rep_2(a), rep_1(a), a, b) \vee PO(rep_2(a), rep_1(a), b, a)$. Wegen $rep_1(a) = rep_1(b)$ heißt dies jedoch $PO(rep_2(a), rep_1(a), a, b) \vee PO(rep_2(b), rep_1(b), b, a)$ und somit $a\ F\ b \vee a\ F^{-1}\ b$, also $F \cup F^{-1} \supseteq im$.

- $F \odot F \subseteq li$. Wir wählen $a\ F\ b\ F\ c$ beliebig, dann gilt $rep_1(a) = rep_1(b) = rep_1(c)$ und $a\ im\ b\ im\ c$. Außerdem $PO(rep_2(a), rep_1(a), a, b)$ und $PO((rep_2(a), rep_1(a), b, c)$. Mit Lemma 4.55 führt dies zu $PO(a, b, b, c)$. Wenn wir $a\ \underline{co}\ c$ annehmen und die im-Kette $\alpha = (a, b, c, b)$ definieren, dann gilt $\mathrm{WP}(\alpha) = \{1, 2\}$. Also $PO(a, b, c, b)$, was einen Widerspruch zu Lemma 4.56 ergibt. Also $a\ li\ c$ und allgemein $F \odot F \subseteq li$.

- $F \odot F^{-1} \subseteq \underline{co}$. Wir wählen $a\ F\ b\ F^{-1}\ c$ beliebig, dann gilt $rep_1(a) = rep_1(b) = rep_1(c)$ und $a\ im\ b\ im\ c$. $PO(rep_2(a), rep_1(a), a, b)$ und $PO(rep_2(a), rep_1(a), c, b)$ ergeben sich daraus unmittelbar. Mit Lemma 4.55 führt dies zu $PO(a, b, c, b)$. Wenn wir $a\ li\ c$ annehmen und die im-Kette $\alpha = (a, b, c, b, c)$ definieren, dann gilt $\mathrm{WP}(\alpha) = \{2, 3\}$. Also $PO(a, b, b, c)$, was einen Widerspruch zu Lemma 4.56 ergibt. Also $a\ \underline{co}\ c$ und allgemein $F \odot F^{-1} \subseteq \underline{co}$.

- $F^{-1} \odot F \subseteq \underline{co}$. Analog zum vorigen Punkt.

Damit hat F alle von einer konsistenten Orientierung geforderten Eigenschaften. □

4.6.3 Eindeutigkeit der Orientierung

Warum wäre der Beweis von Satz 4.58 einfacher geworden, wenn wir Axiom IMK angenommen hätten? Dies liegt daran, daß es dann nur eine im-Zusammenhangskomponente gegeben hätte und damit höchstens zwei Orientierungen.

Satz 4.59 $\boxed{\text{Basis}}\boxed{\text{IMK}}$ $\forall F_1, F_2 \in \text{Orient} : F_1 = F_2 \vee F_1 = F_2^{-1}$.

Beweis Seien F_1 und F_2 zwei konsistente Orientierungen, und nehmen wir an, daß $F_1 \neq F_2 \wedge F_1 \neq F_2^{-1}$. Wir wählen uns $x, y \in X$ mit $x\ F_1\ y$. Wegen $F_1 \cup F_1^{-1} = im = F_2 \cup F_2^{-1}$ ist $x\ F_2\ y \vee x\ F_2^{-1}\ y$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x\ F_2\ y$, ansonsten könnten wir F_2^{-1} statt F_2 betrachten.

Wegen $F_1 \neq F_2$ gibt es $v, w \in X$, so daß $v\ F_1\ w \wedge \neg v\ F_2\ w \vee \neg v\ F_1\ w \wedge v\ F_2\ w$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $v\ F_1\ w \wedge \neg v\ F_2\ w$, ansonsten könnten wir F_1 und F_2 austauschen.

Es ist nun $v\ im\ w$ und daher $v\ F_2^{-1}\ w$. Sei $\alpha = (x = a_0, y = a_1, a_2, \ldots, v = a_{n-1}, w = a_n)$ eine im-Kette, diese existiert wegen Axiom IMK. Sei $m = \max\{0 \leq i < n \mid a_i\ F_1\ a_{i+1} \Leftrightarrow a_i\ F_2\ a_{i+1}\}$, also die höchste Position in der im-Kette, an der die beiden Orientierungen übereinstimmen. Also $(a_m\ F_1\ a_{m+1} \Leftrightarrow a_m\ F_2\ a_{m+1}) \wedge (\neg a_{m+1}\ F_1\ a_{m+2} \Leftrightarrow a_{m+1}\ F_2\ a_{m+2})$.

Fall 1: $a_m\ li\ a_{m+2}$. Nach der Definition einer konsistenten Orientierung ist $a_m\ F_1\ a_{m+1} \Leftrightarrow a_{m+1}\ F_1\ a_{m+2}$ und $a_m\ F_2\ a_{m+1} \Leftrightarrow a_{m+1}\ F_2\ a_{m+2}$. Also $(a_{m+1}\ F_1\ a_{m+2} \Leftrightarrow a_{m+1}\ F_2\ a_{m+2}) \wedge (\neg a_{m+1}\ F_1\ a_{m+2} \Leftrightarrow a_{m+1}\ F_2\ a_{m+2})$. Widerspruch.

Fall 2: $a_m\ \underline{co}\ a_{m+2}$. Nach der Definition einer konsistenten Orientierung ist $a_m\ F_1\ a_{m+1} \Leftrightarrow \neg a_{m+1}\ F_1\ a_{m+2}$ und $a_m\ F_2\ a_{m+1} \Leftrightarrow \neg a_{m+1}\ F_2\ a_{m+2}$. Also $(\neg a_{m+1}\ F_1\ a_{m+2} \Leftrightarrow \neg a_{m+1}\ F_2\ a_{m+2}) \wedge (\neg a_{m+1}\ F_1\ a_{m+2} \Leftrightarrow a_{m+1}\ F_2\ a_{m+2})$. Widerspruch.

Somit kann $F_1 \neq F_2 \wedge F_1 \neq F_2^{-1}$ nicht gelten. □

Damit ist die konsistente Orientierung für eine Nebenläufigkeitsstruktur bis auf Richtungsumkehr eindeutig.

4.6.4 Einfache Zyklen

Wir wollen uns aber mit dem bisher Erreichten nicht zufrieden geben, sondern versuchen, das benötigte Axiom GAW abzuschwächen. Insbesondere ist es möglich, sich auf die Betrachtung von Zyklen ohne Wiederholungen zu beschränken, wenn die Axiome zur lokalen Orientierbarkeit gelten.

Axiom LCT und Axiom LOR führen zu den folgenden beiden Sätzen, die oft einfacher anwendbar sind.

Lemma 4.60 $\boxed{\text{Basis}}\boxed{\text{LCT}}\boxed{\text{LOR}}$ $\forall x \in X : \forall a, b, c \in im[x] : (a\ \underline{co}\ b \Leftrightarrow a\ \underline{co}\ c) \Leftrightarrow b\ \underline{co}\ c$.

Beweis Wir unterscheiden je nach der Beziehung zwischen a und b, sowie a und c.

Fall 1: $a\ \underline{co}\ b \wedge a\ \underline{co}\ c$. Axiom LCT erfordert $b\ \underline{co}\ c$.

Fall 2: $a\ li\ b \wedge a\ li\ c$. Axiom LOR erfordert $b\ \underline{co}\ c$.

Fall 3: $a\ \underline{co}\ b \wedge a\ li\ c$. Angenommen $b\ \underline{co}\ c$, dann erzwingt Axiom LCT, daß $a\ \underline{co}\ c$. Es ergibt sich ein Widerspruch mit $a\ li\ c$, daher $b\ li\ c$.

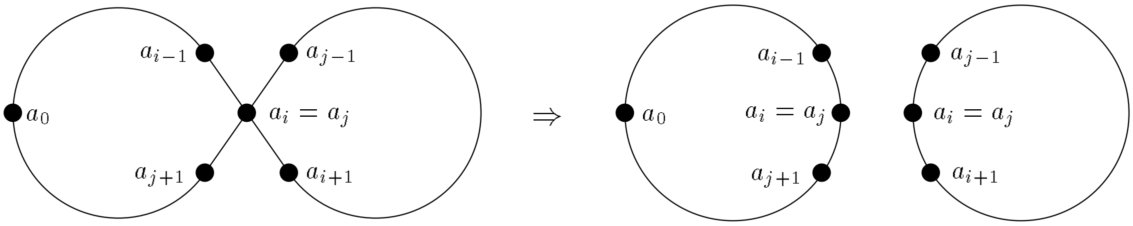


Abbildung 4.7: Konstruktion aus Satz 4.62

Fall 4: $a\ li\ b \wedge a\ \underline{co}\ c$. Angenommen $b\ \underline{co}\ c$, dann erzwingt Axiom LCT, daß $a\ \underline{co}\ c$. Es ergibt sich ein Widerspruch mit $a\ li\ c$, daher $b\ li\ c$.

Damit ist die Aussage in allen Fällen wahr. $\square$

Lemma 4.61 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\forall x \in X : \forall a, b, c, d \in im[x] : (a\ \underline{co}\ b \Leftrightarrow a\ \underline{co}\ d) \Leftrightarrow (c\ \underline{co}\ d \Leftrightarrow c\ \underline{co}\ b)$.

Beweis $\forall x \in X : \forall a, b, c, d \in im[x] : (b\ \underline{co}\ d \Leftrightarrow d\ \underline{co}\ b)$ ist offensichtlich. Durch Umbenennen von Variablen in Lemma 4.60 erhalten wir $\forall x \in X : \forall a, b, d \in im[x] : (a\ \underline{co}\ b \Leftrightarrow a\ \underline{co}\ d) \Leftrightarrow b\ \underline{co}\ d$, sowie $\forall x \in X : \forall c, d, b \in im[x] : (c\ \underline{co}\ d \Leftrightarrow c\ \underline{co}\ b) \Leftrightarrow d\ \underline{co}\ b$. Die Verknüpfung der drei $\forall$-Terme beweist das Lemma. $\square$

Jetzt können wir das abgeschwächte Axiom einführen, das Axiom GAW auf einfache Zyklen einschränkt.

Axiom GWE [Gerade Anzahl Wendepunkte in einfachen Zyklen]
$\forall \alpha \in \text{Zyklen}(im) : \mathit{ZykEinf}(\alpha) \Rightarrow |\text{AWP}(\alpha)|$ ist gerade. $\Diamond$

Wir können daraus Axiom GAW ableiten. Der Beweis wir mit Hilfe von vollständiger Induktion geführt, wobei wir im Induktionsschritt größere Zyklen, die eine Wiederholung enthalten, in zwei kleinere Zyklen aufteilen.

Satz 4.62 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{GWE}}$ $\forall \alpha =\in \text{Zyklen}(im) : |\text{AWP}(\alpha)|$ ist gerade.

Beweis Der Beweis dieses Satzes erfolgt durch Induktion nach der Länge der im-Zyklen $\alpha = (a_0, \ldots, a_n)$.

Anfang: $n = 0$, $\alpha = (a_0)$. $|\text{AWP}(a_0)| = |\varnothing| = 0$.

Hypothese: $\forall m \leq n - 1 : |\text{AWP}(a_0, \ldots, a_m)|$ ist gerade.

Von $n - 1$ nach n für $n > 0$: Es ist zu zeigen, daß $|\text{AWP}(a_0, \ldots, a_n)|$ gerade ist.

Fall 1: $\forall i, j \in \{0, \ldots, n-1\} : i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$.
Axiom GWE liefert das gewünschte Ergebnis.

Fall 2: $\exists i, j \in \{0, \ldots, n-1\} : i \neq j \wedge a_i = a_j$.
Wir fixieren i und j, dabei sei $i < j$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Offensichtlich ist $(a_i, \ldots, a_j)$ ein im-Zyklus, genauso wie $(a_j, \ldots, a_{n-1}, a_0, a_1, \ldots, a_i)$. Gemäß der Induktionshypothese ist $|\text{AWP}(a_i, \ldots, a_j)|$ gerade, und ebenso ist $|\text{AWP}(a_j, \ldots, a_{n-1}, a_0, a_1, \ldots, a_i)|$ gerade. Per Definition heißt dies, daß $|\text{WP}(a_i, \ldots, a_j, a_{i+1})|$ und $|\text{WP}(a_j, \ldots, a_{n-1}, a_0, a_1, \ldots, a_i, a_{j+1})|$ gerade sind.
Wir werden jetzt die Ende der im-Ketten modifizieren. $|\text{WP}(a_i, \ldots, a_j, a_{j+1})|$ ist gerade $\Leftrightarrow (a_{j-1}\ \underline{co}\ a_{j+1} \Leftrightarrow a_{j-1}\ \underline{co}\ a_{i+1})$. $|\text{WP}(a_j, \ldots, a_{n-1}, a_0, a_1, \ldots, a_i, a_{i+1})|$ ist gerade $\Leftrightarrow (a_{i-1}\ \underline{co}\ a_{i+1} \Leftrightarrow a_{i-1}\ \underline{co}\ a_{j+1})$.
Lemma 4.61 zeigt, daß $(a_{j-1}\ \underline{co}\ a_{j+1} \Leftrightarrow a_{j-1}\ \underline{co}\ a_{i+1}) \Leftrightarrow (a_{i-1}\ \underline{co}\ a_{i+1} \Leftrightarrow a_{i-1}\ \underline{co}\ a_{j+1})$. Insgesamt erhalten wir aus diesen Äquivalenzen: $|\text{WP}(a_i, \ldots, a_j, a_{j+1})|$ ist gerade $\Leftrightarrow |\text{WP}(a_j, \ldots, a_{n-1}, a_0, a_1, \ldots, a_i, a_{i+1})|$ ist gerade.

Wenn wir nun die beiden letztgenannten im-Ketten aneinanderhängen, so ergibt sich, daß $|\mathrm{WP}(a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_{n-1}, a_0, a_1, \ldots, a_i, a_{i+1})| = |\mathrm{WP}(a_i, \ldots, a_j, a_{j+1})| + |\mathrm{WP}(a_j, \ldots, a_{n-1}, a_0, a_1, \ldots, a_i, a_{i+1})|$ gerade ist. Also ist gemäß unserer Definition $|\mathrm{AWP}(a_0, \ldots, a_n)|$ gerade.

Damit ist die Induktion abgeschlossen. In Abbildung 4.7 sind die wichtigen Objekte des Beweises noch einmal dargestellt. □

4.6.5 Ordnungen

Obwohl wir nicht betrachten wollen, welches von zwei Elementen früher oder später in der Zeit auftritt, wäre es immerhin interessant, ob sich prinzipiell eine zeitliche Ordnung der Elemente finden ließe. Diese Ordnung sollte aber auf jeden Fall mit der Struktur von co und li verträglich sein.

Definition 4.63 [li-erzeugende Ordnung]
$(<) \subseteq X \times X$ ist eine li-erzeugende Ordnung genau dann, wenn

$$(< \odot <) \subseteq (<) \wedge (< \cap \mathrm{id}_X) = \varnothing, \qquad \text{(Halbordnung, 4.1)}$$

$$(< \cup <^{-1}) = li \qquad \text{(li-Konsistenz, 4.2)}$$

beide erfüllt sind. ◊

Definition 4.64 [Ordnungen]
$\mathrm{Order} := \{(<) \subseteq X \times X \mid (<) \text{ ist eine } li\text{-erzeugende Ordnung}\}$. ◊

Axiom OBS [Ordnungsbasierte Struktur]
$\mathrm{Order} \neq \varnothing$. ◊

Diese Formulierung kann jedoch nur für den azyklischen Fall herangezogen werden, für zyklische Systeme kann die Transitivität der Ordnungen nicht erfüllt werden. Petri deutet in seinen Definitionen eine Möglichkeit an, wie mit Hilfe der sogenannten Separationsquadrupel zyklische Ordnungen definiert werden könnten. Am weitesten sind diese Überlegungen in [Pet91] ausgeführt. Auch dieses Papier ist aber primär als Denkanstoß für weitere Forschungen gedacht, so daß bis heute die Frage, wie zyklische Ordnungen definiert werden sollten, als offen gelten muß. Zur Zeit werden jedoch diesbezügliche Forschungen durchgeführt, die in [Ste96] zur Veröffentlichung geplant sind.

In Petris ersten Arbeiten wurde die der Struktur zugrundeliegende Ordnung noch in folgender stärkerer Form eingeführt. Es wurde nämlich gefordert, daß die Ordnung nicht nur existiert, sondern sogar bis auf Richtungsumkehr eindeutig ist. Wir sprechen in diesem Fall von einer natürlichen Ordnung.

Axiom NOR [Natürliche Ordnung]
$|\mathrm{Order}| = 2$. ◊

Daß Axiom OBS echt schwächer als Axiom NOR ist, ist leicht zu sehen.

Satz 4.65 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NOR}}$ $\mathrm{Order} \neq \varnothing$. □

Können wir aus einer der beiden Bedingungen aber die Existenz einer konsistenten Orientierung ableiten? Ja, das können wir, wie die folgende Beweiskette zeigt.

Lemma 4.66 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{COI}}$ $\boxed{\text{NDI}}$ $\forall (<) \in \mathrm{Order} : (\lessdot) \subseteq im$.
Beweis Sei $(<) \in \mathrm{Order}$. Angenommen, es gäbe $a \lessdot b$ mit $\neg a \; im \; b$. Wegen $\neg a \; P \; b$ und Satz 2.62 gibt es ein c mit $a \; li \; c$ und $b \; co \; c$, es folgt $a < c$. Wegen $\neg b \; P \; a$ gibt es ein d mit $a \; co \; d$ und $b \; li \; d$, es folgt $d < b$. Axiom NDI erfordert die Existenz eines e mit $a \; li \; e \; li \; b$

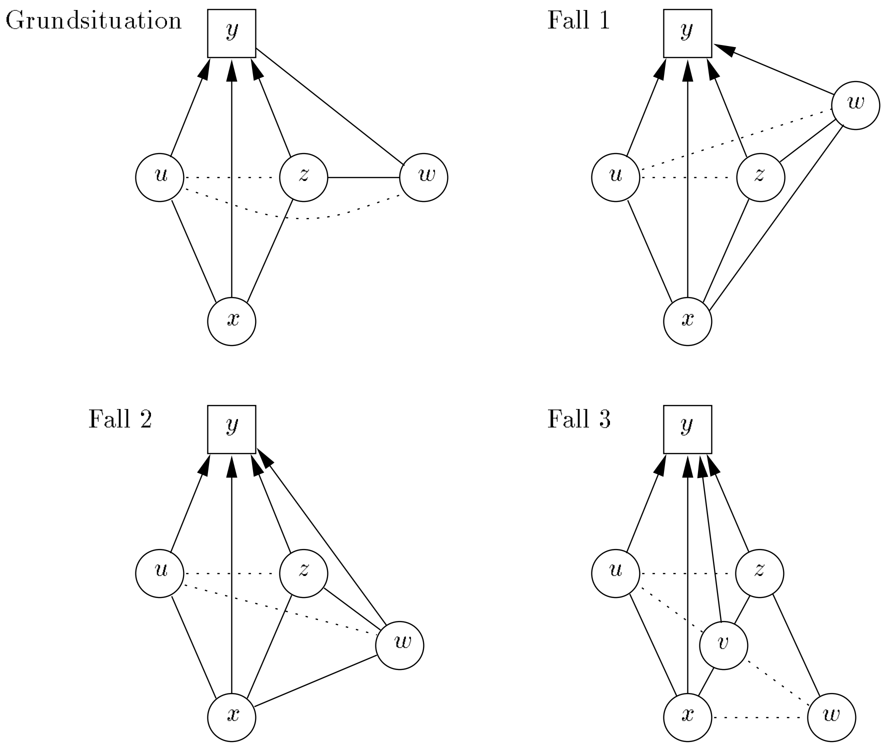


Abbildung 4.8: Konstruktion aus Lemma 4.68

und $c\ co\ e\ co\ d$. Nun muß $a < e$ wegen $a < c$ und $c\ co\ e$ gelten, analog folgt $e < b$. Damit $\neg a \lessdot b$, Widerspruch. □

Lemma 4.67 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{COI}}$ $\forall(<) \in \text{Order} : \forall x, y, z \in X : x < z < y \wedge x\ P\ y \Rightarrow z\ P\ y.$

Beweis Angenommen, $x < z < y \wedge x\ P\ y$, aber $\neg z\ P\ y$. Weil $z\ li\ y$, folgt aus Satz 2.62, daß es ein $u \in X$ mit $u\ li\ z$ und $u\ co\ y$ gibt.

Es ergibt sich $z < u$ wegen $z < y$ und $y\ co\ u$. Daraus wird $x\ li\ u$ wegen $x < z$, aber nun haben wir einen Widerspruch mit $x\ P\ y$ und $y\ co\ u$. □

Das folgende Lemma findet sich in etwas abgewandelter Formulierung in [BM85].

Lemma 4.68 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{COI}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{NDI}}$ $\forall(<) \in \text{Order} : (P \cap <) \subseteq (\lessdot).$

Beweis Sei $x, y \in X$ mit $x\ P\ y$ und $x < y$. Nehmen wir an, daß $\neg x \lessdot y$, dann gibt es ein $z \in X$ mit $x < z < y$. Nach Lemma 4.67 ergibt sich $z\ P\ y$.

Axiom KAA erfordert nun $\neg x\ P\ z$. Da $x\ li\ z$, folgt aus Satz 2.62, daß es ein $u \in X$ mit $u\ li\ x$ und $u\ co\ z$ gibt. Wegen $x < z$ verbietet sich $u < x$, also $x < u$. Aus $u\ \underline{li}\ x$ und $x\ P\ y$ folgt $u\ \underline{li}\ y$. Mit $u\ co\ z$ und $y\ li\ z$ folgt $u \neq y$ und auch $u\ li\ y$. $y < u$ entfällt wegen $z < y$ und $z\ co\ u$, also $u < y$. Erneute Anwendung von Lemma 4.67 ergibt $u\ P\ y$.

Mit Axiom COI erhalten wir $\exists w \in X : (u\ co\ w\ li\ z) \vee (u\ li\ w\ co\ z)$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $w \in X$ und $u\ co\ w\ li\ z$. Mit $z\ P\ y$ ergibt sich $w\ \underline{li}\ y$. Wegen $w\ co\ u < y$ führt dies zu $w < y$. Wir treffen eine Fallunterscheidung.

Fall 1: $z < w$. Es folgt $w\ P\ y$ aus Lemma 4.67. Nun ist aber $\{x, z, w\} \subseteq im[y]$ und $x\ li\ z\ li\ w\ li\ x$.

Fall 2: $w < z \wedge x\ \underline{li}\ w$. Mit $x < u\ co\ w$ ergibt sich $x < w$. Aus $x < w < y$ folgt mit Lemma 4.67, daß $w\ P\ y$. Damit haben wir $\{x, w, z\} \subseteq im[y]$ mit $x\ li\ w\ li\ z\ li\ x$.

Fall 3: $w < z \wedge x \; co \; w$. Die Elemente u, w, x, z erfüllen mit $u \; li \; x \; li \; z \; li \; w$ und $x \; co \; w \; co \; u \; co \; z$ die Vorbedingung von Axiom NDI, es gibt daher ein $v \in X$ mit $w \; co \; v \; co \; u$ und $x \; li \; v \; li \; z$. Mit $x < u \; co \; v$ ergibt sich $x < v$, ebenso ist $v < z$. Wieder können wir Lemma 4.67 anwenden und erhalten $v \; P \; y$. $\{x, v, z\} \subseteq im[y]$ nebst $x \; li \; v \; li \; z \; li \; x$ sind offensichtlich.

Die drei Fälle finden wir in Abbildung 4.8 wieder. Stets ergibt sich ein Widerspruch mit Axiom LOR. □

Wir fassen die Ergebnisse zusammen.

Satz 4.69 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{COI}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{NDI}}$ $\forall (<) \in \text{Order} : (im \cap <) = (\lessdot)$.
Beweis Mit Lemma 4.66 haben wir $(im \cap <) \supseteq (\lessdot)$.
Lemma 4.68 zeigt $(P \cap <) \subseteq (\lessdot)$, ein ähnliches Argument führt zu $(P^{-1} \cap <) \subseteq (\lessdot)$. Zusammen $(im \cap <) = (P \cap <) \cup (P^{-1} \cap <) \subseteq (\lessdot)$. □

Satz 4.70 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{COI}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{NDI}}$ $\forall (<) \in \text{Order} : (im \cap <) \in \text{Orient}$.
Beweis Sei $<$ eine li-erzeugende Ordnung. Wir definieren nun $F = (im \cap <)$ und zeigen, daß F die Eigenschaften einer konsistenten Orientierung hat. Nach Satz 4.69 ist $F = \lessdot$.

- $F \cup F^{-1} = (im \cap <) \cup (im \cap <^{-1}) = im \cap (< \cup <^{-1}) = im \cap li = im$.
- $F \odot F \subseteq (< \odot <) \subseteq (<) \subseteq li$.
- $F \odot F^{-1} \subseteq \underline{co}$. Seien $a, b, c \in X$ beliebig gewählt mit $a \; F \; b$ und $c \; F \; b$, dann $a \lessdot b$ und $c \lessdot b$. Nun ist $a < c$ unmöglich wegen $c < b$ und $a \lessdot b$. Entsprechend steht $c < a$ im Widerspruch zu $a < b$ und $c \lessdot b$. Also $a \; \underline{co} \; c$.
- $F^{-1} \odot F \subseteq \underline{co}$. Analog zum vorigen Punkt.

Also ist F eine konsistente Orientierung. □

Korollar 4.71 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{COI}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{NDI}}$ $\forall (<) \in \text{Order} : (\lessdot) \in \text{Orient}$.
Beweis Unmittelbar aus Satz 4.69 und Satz 4.70. □

Satz 4.72 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{COI}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{NDI}}$ $\boxed{\text{OBS}}$ $\text{Orient} \neq \varnothing$.
Beweis Sei $<$ eine li-erzeugende Ordnung gemäß Axiom OBS. Nach Satz 4.70 ist $F = (im \cap <)$ eine konsistente Orientierung. □

Ein schaler Nachgeschmack bleibt bei diesem Beweis, denn wir benutzen sowohl ein globales Kriterium (Axiom OBS) als auch ein lokales Kriterium (Axiom LOR) für die Orientierbarkeit. Wäre es möglich, das lokale Kriterium fallenzulassen? Vermutlich nicht, aber ein Gegenbeispiel, das diese Tatsache beweist, ist nur schwer zu erstellen und zu überprüfen, daher wird der Beweis in seiner jetzigen Form belassen.

Bevor wir uns nun wieder der Formalisierung von Nebenläufigkeitsstrukturen durch konsistente Orientierungen zuwenden, müssen wir jedoch einige Überlegungen anstellen, die auf den ersten Blick nichts mit der Orientierbarkeit zu tun haben.

4.6.6 Ketten, Zyklen und Linien

Wir wollen nun etwas mehr über die Nachbarschaftsbeziehungen innerhalb von Linien erfahren. Wenn man bedenkt, daß Axiom LKO den im-Zusammenhang fordert und Satz 4.23 verlangt, daß jedes Element genau zwei Nachbarn hat, dann sollte intuitiv klar sein, daß endliche Linien immer im-Zyklen und unendliche Linien immer beidseitig unendliche im-Ketten sind. Dennoch ist der Beweis etwas umständlich.

Lemma 4.73 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall \beta = (b_0, \ldots, b_n) \in \text{Ketten}(im) : (n \geq 1 \land \text{WP}(\beta) = \varnothing \land \text{Set}(\beta) \subseteq L) \Rightarrow (\exists \alpha = (a_0, a_1, \ldots) \in \omega\text{-Ketten}(im) : \text{Set}(\alpha) \subseteq L \land \text{WP}(\alpha) = \varnothing \land \forall i \in \{0, \ldots, n\} : a_i = b_i)$.

Beweis Sei $L \in$ Lines und $\beta = (b_0, \ldots, b_n) \in \text{Ketten}(im)$ mit den entsprechenden Voraussetzungen. Wir verwenden β als Anfangsteil einer Kette und konstruieren den Rest in einer Induktion. Sei $\forall i \in \{0, \ldots, n\} : a_i = b_i$.

Anfang: $i \leq n - 1$. Es ist $a_i = b_i \in L$, $a_{i+1} = b_{i+1} \in L$ und $a_i = b_i \; im \; b_{i+1} = a_{i+1}$, weil $\beta \in \text{Ketten}(im)$.

Hypothese: $a_i \in L \land a_{i+1} \in L \land a_i \; im \; a_{i+1}$.

Von i nach $i + 1$ für $i \geq n - 1$: Gemäß Satz 4.23 ist $|im[a_{i+1}] \cap L| = 2$. Da $a_i \in im[a_{i+1}] \cap L$ und $\neg a_i \; li \; a_i$, ist $|im[a_{i+1}] \cap li[a_i] \cap L| = 1$. Sei $a_{i+2} \in im[a_{i+1}] \cap li[a_i] \cap L$. Wir beobachten $a_i \; li \; a_{i+2}$. Per Konstruktion $a_{i+2} \in L$ und $a_{i+1} \; im \; a_{i+2}$.

Sei $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. $\forall i \in \{0, \ldots, n\} : a_i = b_i$ ist per Konstruktion erfüllt. In der Induktion wurde gezeigt, daß $\forall i \in \mathbb{N} : a_i \in L$, also $\text{Set}(\alpha) \subseteq L$. Weiterhin $\forall i \in \mathbb{N} : a_i \; im \; a_{i+1}$, also $\alpha \in \omega\text{-Ketten}(im)$.
Weiterhin wurde bewiesen $\forall i \geq n - 1 : a_i \; li \; a_{i+2}$. Aus $\text{WP}(\beta) = \varnothing$ folgt $\forall i \in \{0, \ldots, n - 2\} : a_i \; li \; a_{i+2}$. Zusammengesetzt $\forall i \in \mathbb{N} : a_i \; li \; a_{i+2}$, also $\text{WP}(\alpha) = \varnothing$. $\square$

Lemma 4.74 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall \beta = (b_0, \ldots, b_n) \in \text{Ketten}(im) : (n \geq 1 \land \text{WP}(\beta) = \varnothing \land \text{Set}(\beta) \subseteq L) \Rightarrow (\exists \varepsilon = (\ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots) \in \omega\omega\text{-Ketten}(im) : \text{Set}(\varepsilon) = L \land \text{WP}(\varepsilon) = \varnothing \land \forall i \in \{0, \ldots, n\} : e_i = b_i)$.

Beweis Sei $L \in$ Lines und $\beta = (b_0, \ldots, b_n) \in \text{Ketten}(im)$, wobei die Bedingungen an β erfüllt sind. Lemma 4.73 beweist, daß es eine im-Kette $\alpha = (a_0, a_1, \ldots)$ gibt mit $\forall i \in \{0, \ldots, n\} : a_i = b_i$, $\text{Set}(\alpha) = L$ und $\text{WP}(\alpha) = \varnothing$.
Sei nun $\gamma = (b_1, b_0)$, dann liefert eine erneute Anwendung von Lemma 4.73 eine Kette $\delta = (d_0, d_1, \ldots)$ mit $d_0 = b_1$, $d_1 = b_0$, $\text{Set}(\delta) \subseteq L$ und $\text{WP}(\delta) = \varnothing$. Wir vereinigen nun die beiden Ketten zu

$$\varepsilon = (\ldots, e_{-2} = d_3, e_{-1} = d_2, e_0 = a_0, e_1 = a_1, e_2 = a_2, \ldots)$$

und stellen fest, daß $\epsilon \in \omega\omega\text{-Ketten}(im)$ gilt. Man verifiziert leicht $|\text{WP}(\varepsilon)| = |\text{WP}(\alpha)| + |\text{WP}(\delta)| = 0$. Es gilt $\forall x \in \text{Set}(\varepsilon) : |im[x] \cap \text{Set}(\varepsilon)| \geq 2$, daher wissen wir nach Lemma 4.32, daß $\text{Set}(\varepsilon) = L$. $\square$

Satz 4.75 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall \beta = (b_0, \ldots, b_n) \in \text{Ketten}(im) : (\neg Fin(L) \land n \geq 1 \land \text{WP}(\beta) = \varnothing \land \text{Set}(\beta) \subseteq L) \Rightarrow (\exists \varepsilon = (\ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots) \in \omega\omega\text{-Ketten}(im) : \text{Set}(\varepsilon) = L \land \text{WP}(\varepsilon) = \varnothing \land Einf(\varepsilon) \land \forall i \in \{0, \ldots, n\} : e_i = b_i)$.

Beweis Seien L und $\beta = (b_0, \ldots, b_n)$ nach Voraussetzung gegeben, dann erhalten wir mit Lemma 4.74 eine Kette $\varepsilon = (\ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots) \in \omega\omega\text{-Ketten}(im)$, für die $\text{Set}(\varepsilon) = L$, $\text{WP}(\varepsilon) = \varnothing$ und $\forall i \in \{0, \ldots, n\} : e_i = b_i)$ gilt.
Angenommen, $\neg Einf(\varepsilon)$, dann gibt es $i, j \in \mathbb{Z}$ mit $a_i = a_j$ und $i \neq j$. Wir wählen i und j so, daß $i < j$ gilt und $j - i$ minimal ist. Nun ist $\gamma = (a_i, \ldots, a_j)$ ein im-Zyklus ohne Wiederholungen. Man überprüft leicht $\forall x \in \text{Set}(\gamma) : |im[x] \cap \text{Set}(\gamma)| \geq 2$, und mit Lemma 4.32 folgt $\text{Set}(\gamma) = L$. Aber $\text{Set}(\gamma)$ ist endlich und L ist unendlich, Widerspruch.
Also $Einf(\varepsilon)$, und ε erfüllt alle Bedingungen des Satzes. $\square$

Die volle Mächtigkeit des vorigen Satzes wird selten benötigt, oft reicht die folgende schwächere Version.

Korollar 4.76 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \neg Fin(L) \Rightarrow \exists \alpha \in \omega\omega\text{-Ketten}(im) : Einf(\alpha) \land \text{Set}(\alpha) = L \land \text{WP}(\alpha) = \varnothing$.

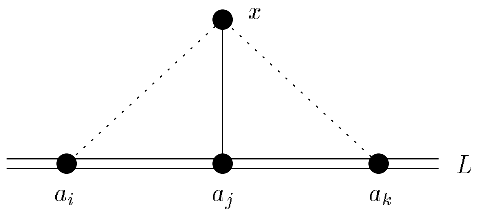


Abbildung 4.9: Verbotene Situation gemäß Lemma 4.80

Beweis Sei $L \in$ Lines und $\neg Fin(L)$. Sei $x \in L$. Mit Satz 4.21 erhalten wir $im[x] \cap L \neq \varnothing$, also können wir ein $y \in im[x] \cap L$ wählen.
Sei $\beta = (x, y)$, dann erfüllt β die Voraussetzungen für Satz 4.75. Es gibt also eine Kette $\alpha = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots) \in \omega\omega$-Ketten$(im)$ ohne Wiederholungen, für die $\mathrm{Set}(\alpha) = L$ und $\mathrm{WP}(\alpha) = \varnothing$ gilt. □

Nun betrachten wir den Fall endlicher Linien.

Satz 4.77 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall \beta = (b_0, \ldots, b_n) \in \text{Ketten}(im) : (Fin(L) \wedge n \geq 1 \wedge Einf(\beta) \wedge \mathrm{Set}(\beta) \subseteq L) \Rightarrow (\exists \alpha = (e_0, \ldots, e_m) \in \text{Zyklen}(im) : \mathrm{Set}(\alpha) = L \wedge \mathrm{AWP}(\alpha) = \varnothing \wedge ZykEinf(\alpha) \wedge \forall i \in \{0, \ldots, n\} : e_i = b_i)$.
Beweis L und β seien mit den genannten Eigenschaften gegeben. Aus $\mathrm{Set}(\beta) \subseteq L$ und $Einf(\beta)$ erhalten wir $\mathrm{WP}(\beta) = \varnothing$. Wir erhalten mit Lemma 4.74 eine Kette $\varepsilon = (\ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots) \in \omega\omega$-Ketten$(im)$, für die $\mathrm{Set}(\varepsilon) = L$, $\mathrm{WP}(\varepsilon) = \varnothing$ und $\forall i \in \{0, \ldots, n\} : e_i = b_i$ gilt. Sei $m = |L|$. Da $\{b_0, \ldots, b_n\} \subseteq L$, gilt sicherlich $m = |L| \geq |\{b_0, \ldots, b_n\}| = n{+}1$, also $m > n$.
Angenommen, in der Kette $\delta = (e_0, \ldots, e_{m-1})$ gäbe es eine Wiederholung. Dann können wir $i, j \in \{0, \ldots, m-1\}$ wählen, so daß $i < j$, $e_i = e_j$ und dabei $j - i$ minimal ist. Nun ist $\gamma = (e_i, \ldots, e_j)$ ein im-Zyklus ohne Wiederholungen. Man überprüft leicht $\forall x \in \mathrm{Set}(\gamma) : |im[x] \cap \mathrm{Set}(\gamma)| = 2$, und mit Lemma 4.32 folgt $\mathrm{Set}(\gamma) = L$. Aber nun $m > j \geq j - i = |\mathrm{Set}(\gamma)| = |L| = m$, Widerspruch.
Also $Einf(\delta)$. Mit $|L| = m = |\mathrm{Set}(\delta)|$ und $\mathrm{Set}(\delta) \subseteq L$ ergibt sich $L = \mathrm{Set}(\delta)$. Wegen $e_m \in \mathrm{Set}(\varepsilon) = L = \mathrm{Set}(\delta)$ gibt es ein $k \in \{0, \ldots, m-1\}$, so daß $e_k = e_m$.
Sei $\alpha = (e_k, \ldots, e_m)$, dann ist α ein im-Zyklus. Man zeigt durch erneute Anwendung von Lemma 4.32, daß $\mathrm{Set}(\alpha) = L$. Aber $m - k = |\mathrm{Set}(\alpha)| = |L| = |\mathrm{Set}(\delta)| = m$ führt zu $k = 0$. Also $\alpha = (e_0, \ldots, e_m)$. Schon früher wurde gezeigt, daß $\forall i \in \{0, \ldots, n\} : e_i = b_i$. Aus $Einf(\delta)$ folgt $ZykEinf(\alpha)$. Mit $\mathrm{Set}(\alpha) = L$ ist also auch $\mathrm{AWP}(\alpha) = \varnothing$. □

Wir bilden wieder ein Korollar.

Korollar 4.78 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\forall L \in \text{Lines} : Fin(L) \Rightarrow \exists \alpha \in \text{Zyklen}(im) : ZykEinf(\alpha) \wedge \mathrm{Set}(\alpha) = L \wedge |\mathrm{AWP}(\alpha)| = 0$.
Beweis Wir konstruieren wie in Korollar 4.76 eine im-Kette $\beta = (x, y)$. Das Korollar ergibt sich nun unter Verwendung von Satz 4.77. □

Mit Hilfe von Axiom EKO können weitere Sätze zum Verhältnis der Elemente einer Linie zu anderen Elementen aufgestellt werden. Wir betrachten wieder zuerst den unendlichen Fall.

Lemma 4.79 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\forall \alpha = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots) \in \omega\omega\text{-Ketten}(im) : (\mathrm{Set}(\alpha) \in \text{Lines} \wedge Einf(\alpha)) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{Z} : im[a_i] \cap \mathrm{Set}(\alpha) = \{a_{i-1}, a_{i+1}\})$.
Beweis Sei $\alpha = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$ eine im-Kette mit $Einf(\alpha)$, $\mathrm{Set}(\alpha) = L$ und $L \in$ Lines. Sei $i \in \mathbb{Z}$. Weil α keine Wiederholungen hat und weil $i - 1 \neq i + 1$, ist $a_{i-1} \neq a_{i+1}$. Weil $im[a_i] \cap L \supseteq \{a_{i-1}, a_{i+1}\}$ ist und Lemma 4.22 gilt, ist $im[a_i] \cap L = \{a_{i-1}, a_{i+1}\}$. □

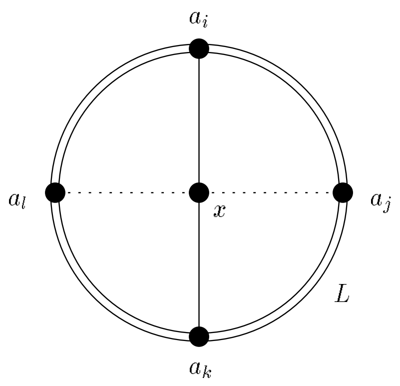


Abbildung 4.10: Verbotene Situation gemäß Lemma 4.82

Lemma 4.80 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\forall \alpha = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots) \in \omega\omega\text{-Ketten}(im) : \forall x \in X : \forall i, j, k \in \mathbb{Z} : (\mathit{Einf}(\alpha) \wedge \mathrm{Set}(\alpha) \in \mathrm{Lines} \wedge i \leq j \leq k \wedge a_i \; \underline{co} \; x \wedge a_k \; \underline{co} \; x) \Rightarrow a_j \; \underline{co} \; x$.

Beweis Seien α, i, j, k und x nach den Voraussetzungen des Satzes gegeben. Für $i = j$ oder $j = k$ ist der Satz trivial, wir nehmen also $i < j < k$ an. Sei $L = \mathrm{Set}(\alpha)$, dann ist $L \in \mathrm{Lines}$. Sei $E = L \cap \underline{co}[x]$, dann ist bestimmt $a_i \in E$ und $a_k \in E$.
Sei $M = \{a_m \mid m \in \mathbb{Z} \wedge m < j\}$. Mit Hilfe von Lemma 4.79 erhalten wir

$$im|_L[M] = \{a_{m-1} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge m < j\} \cup \{a_{m+1} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge m < j\}$$

oder abgeschwächt

$$im|_L[M] \subseteq \{a_{m+1} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge m < j\}.$$

Weil $E \subseteq L$, ergibt sich

$$im|_E[M] \subseteq \{a_m \mid m \in \mathbb{Z} \wedge m < j\} \cup \{a_j\} = M \cup \{a_j\}.$$

Wäre $a_j \notin E$, dann wäre $im|_E[M] \subseteq M$. Aber dies würde $(im|_E)^*_E[a_i] \subseteq M$ bedeuten im Widerspruch zu $a_k \notin M$ und zu $a_k \in (im|_E)^*_E[a_i]$ wegen Axiom EKO.
Also $a_j \in E$ und daher $a_j \; \underline{co} \; x$. □

Der vorige Satz wird als wichtiges Lemma den Einsatz von Axiom EKO erleichtern, denn wir können jetzt eine Situation, wie sie in Abbildung 4.9 dargestellt ist, ausschließen. Auch für den endlichen Fall gibt es Verwendung, wobei die Beweise fast exakt wie im unendlichen Fall geführt werden. Wir müssen jedoch darauf achten, daß sich im zyklischen Fall der Kreis wieder schließt und wir diesmal die Struktur ausschließen müssen, die in Abbildung 4.10 zu finden ist.

Lemma 4.81 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\forall \alpha = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathrm{Zyklen}(im) : (\mathit{ZykEinf}(\alpha) \wedge \mathrm{Set}(\alpha) \in \mathrm{Lines} \wedge n > 2) \Rightarrow (\forall i \in \{0, \ldots, n\} : im[a_i] \cap \mathrm{Set}(\alpha) = \{a_{(i-1) \bmod n}, a_{(i+1) \bmod n}\})$.

Beweis Sei $\alpha = (a_0, \ldots, a_n)$ ein im-Zyklus, wobei $\mathit{ZykEinf}(\alpha)$, $\mathrm{Set}(\alpha) = L$ und $L \in \mathrm{Lines}$. Sei $i \in \{0, \ldots, n\}$.
Weil $n > 2$, ist $(i-1) \bmod n \neq (i+1) \bmod n$. Weil α keine Wiederholungen hat, ist folglich $a_{(i-1) \bmod n} \neq a_{(i+1) \bmod n}$. Weil $im[a_i] \cap L \supseteq \{a_{(i-1) \bmod n}, a_{(i+1) \bmod n}\}$ ist und Lemma 4.22 gilt, ist $im[a_i] \cap L = \{a_{(i-1) \bmod n}, a_{(i+1) \bmod n}\}$. □

Lemma 4.82 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\forall \alpha = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathrm{Zyklen}(im) : \forall x \in X : \forall i, j, k, l \in \{0, \ldots, n-1\} : (\mathit{ZykEinf}(\alpha) \wedge \mathrm{Set}(\alpha) \in \mathrm{Lines} \wedge i \leq j \leq k \leq l \wedge a_i \; li \; x \wedge a_j \; \underline{co} \; x \wedge a_k \; li \; x) \Rightarrow a_l \; li \; x$.

Beweis Seien α, i, j, k, l und x nach den Voraussetzungen des Satzes gegeben. Aus $a_i \; li \; x \wedge a_j \; \underline{co} \; x$ folgt $i \neq j$, ähnlich ist auch $j \neq k$. Es ergibt sich $i < j < k < n$, also unter anderem auch $n > 2$.
Sei $L = \mathrm{Set}(\alpha)$, dann ist $L \in \mathrm{Lines}$. Sei $E = L \cap \underline{co}[x]$, dann ist bestimmt $a_j \in E$.
Sei $M = \{a_m \mid m \in \mathbb{Z} \wedge i < m < k\}$. Mit Hilfe von Lemma 4.81 erhalten wir

$$\begin{aligned} im|_L[M] = &\{a_{(m-1) \bmod n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge i < m < k\} \cup \\ &\{a_{(m+1) \bmod n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge i < m < k\}. \end{aligned}$$

oder abgeschwächt

$$im|_L[M] \subseteq \{a_{m \bmod n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge i \leq m \leq k\}.$$

$$im|_L[M] \subseteq \{a_{m \bmod n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge i < m < k\} \cup \{a_{i \bmod n}, a_{k \bmod n}\}.$$

Weil $E \subseteq L$, ergibt sich

$$im|_E[M] \subseteq \{a_{m \bmod n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge i < m < k\} \cup \{a_{i \bmod n}, a_{k \bmod n}\}.$$

Dies ist gerade

$$im|_E[M] \subseteq M \cup \{a_i, a_k\}.$$

Da jedoch $a_i, a_k \notin E$, verschärft sich dies zu $im|_E[M] \subseteq M$. Aus $a_j \in M$ erhalten wir daher $(im|_E)^*_E[a_j] \subseteq M$.
Angenommen, $a_l \in E$, dann $a_l \in (im|_E)^*_E[a_j]$ wegen Axiom EKO. Dies heißt $a_l \in M$, also $l < k$ nach Konstruktion von M im Widerspruch zu $k \leq l$.
Also $a_l \notin E$ und daher $a_l \; li \; x$. □

Lemma 4.83 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\forall \alpha = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathrm{Zyklen}(im) : \forall x \in X : \forall i, j, k, l \in \{0, \ldots, n-1\} : (\mathit{ZykEinf}(\alpha) \wedge \mathrm{Set}(\alpha) \in \mathrm{Lines} \wedge i \leq j \leq k \leq l \wedge a_i \; \underline{co} \; x \wedge a_j \; li \; x \wedge a_k \; \underline{co} \; x) \Rightarrow a_l \; \underline{co} \; x$.
Beweis Analog zu Lemma 4.82. □

4.6.7 Orientierbarkeit azyklischer Strukturen

Als nächstes zeigen wir, daß Axiom GAW aus anderen Axiomen ableitbar ist, obwohl die bekannten Gegenbeispiele uns dabei einige Grenzen setzen. Wir betrachten in diesem Unterabschnitt nur Strukturen, in denen Axiom LUE und Axiom EKO gelten.

Lemma 4.84 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LUE}}$
$\forall \beta = (b_0, \ldots, b_n) \in \mathrm{Ketten}(im) : (\mathrm{WP}(b_0, \ldots, b_n) = \varnothing \wedge n \geq 1) \Rightarrow b_0 \; li \; b_n$.
Beweis Wir beweisen das Lemma mittels Induktion.

Anfang: $n = 1 \vee n = 2$. Wenn $n = 1$, dann ergibt sich für $\beta = (b_0, b_1)$, daß $b_0 \; im \; b_1$ und daher $b_0 \; li \; b_1$ gemäß Satz 2.66.
Wenn $n = 2$, dann ist $\beta = (b_0, b_1, b_2)$. Aus $\mathrm{WP}(b_0, b_1, b_2) = \varnothing$ folgt unmittelbar $b_0 \; li \; b_2$.

Hypothese: $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\} : \forall \beta = (b_0, \ldots, b_i) : \mathrm{WP}(b_0, \ldots, b_i) = \varnothing \Rightarrow b_0 \; li \; b_i$.

Von $n-1$ nach n für $n \geq 3$: Sei $\beta = (b_0, \ldots, b_n)$ eine im-Kette und $\mathrm{WP}(b_0, \ldots, b_n) = \varnothing$. Wir können die Induktionshypothese für alle Teilketten anwenden, aus

$$\forall i, j \in \{0, \ldots, n-1\} : i < j \Rightarrow |\mathrm{WP}(b_i, \ldots, b_j)| = 0$$

erhalten wir damit

$$\forall i, j \in \{0, \ldots, n-1\} : i < j \Rightarrow b_i \; li \; b_j.$$

Deshalb ist $\{b_0, \ldots, b_{n-1}\}$ eine $\underline{li}$-Klique, die zu einer Linie L erweitert werden kann.

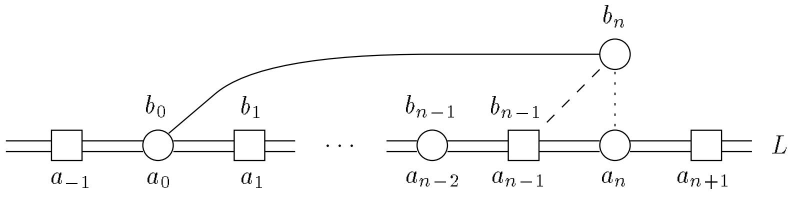


Abbildung 4.11: Konstruktion aus Lemma 4.84

Auf Grund von Axiom LUE ist L unendlich und wir können daher mit Satz 4.75 eine im-Kette $\alpha = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$ erzeugen, die $\mathrm{Set}(\alpha) = L \wedge \mathrm{WP}(\alpha) = \varnothing \wedge \mathit{Einf}(\alpha)$ erfüllt, wobei außerdem $\forall 0 \leq i < n : b_i = a_i$ gilt.
Da $\mathrm{WP}(b_0, \ldots, b_n) = \varnothing$, ist $b_n \; li \; b_{n-2}$. Mit $a_n \; li \; a_{n-2} = b_{n-2}$ und Axiom LOR ergibt dies $b_n \; \underline{co} \; a_n$.
Wäre $b_n \; \underline{co} \; a_0$, dann erforderte Lemma 4.80 für $i = 0$, $j = n-1$, $k = n$ und $x = b_n$, daß $b_{n-1} = a_j \; \underline{co} \; x = b_n$. Dies widerspräche $b_{n-1} \; im \; b_n$.
Also $b_n \; li \; a_0 = b_0$.

Der Induktionsschritt ist in Abbildung 4.11 graphisch dargestellt. □

Satz 4.85 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LUE}}$ $\forall \alpha \in \mathrm{Zyklen}(im) : |\mathrm{AWP}(\alpha)| \neq 1$.

Beweis Sei $\alpha = (a_0, \ldots, a_n)$ ein im-Zyklus. Für $n = 0$ ist der Satz unmittelbar klar, sei also $n \geq 1$.
Angenommen $\mathrm{AWP}(a_0, \ldots, a_n) = \{i\}$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sei $\beta = (a_i, \ldots, a_n = a_0, \ldots, a_i)$, dann ist $\mathrm{WP}(\beta) = \varnothing$. Nach Lemma 4.84 ist jetzt $a_i \; li \; a_i$, Widerspruch.
Also $|\mathrm{AWP}(\alpha)| \neq 1$. □

Den letzten Satz können wir als eine abgeschwächte Variante von Axiom GAW auffassen. Die Abschwächung liegt aber nur in der Formulierung, nicht in der Aussage, denn wir können aus Satz 4.85 ableiten, daß Axiom GAW gilt.

Satz 4.86 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{EEN}}$ $\boxed{\text{LUE}}$
$\forall \alpha \in \mathrm{Zyklen}(im) : |\mathrm{AWP}(\alpha)|$ ist gerade.

Beweis Sei L eine Linie, dann gilt $\neg \mathit{Fin}(L)$ wegen Axiom LUE. Es gibt eine beidseitig unendliche im-Kette $\beta = (\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots)$ ohne Wiederholungen, so daß $\mathrm{Set}(B) = L$, wie in Korollar 4.76 nachgewiesen wurde.
Angenommen, es gibt eine im-Kette $\alpha = (a_0, \ldots, a_n)$ mit $|\mathrm{AWP}(a_0, \ldots, a_n)| = m$ und m ungerade. Sei t_i ein Folge mit $\mathrm{AWP}(a_0, \ldots, a_n) = \{t_1, \ldots, t_m\}$ und $\forall i, j \in \{1, \ldots, m\} : i < j \Leftrightarrow t_i < t_j$.
Per Definition von AWP gilt zum einen $\forall i \in \{1, \ldots, m\} : 1 \leq t_i \leq n$, zum anderen $\forall i \in \{1, \ldots, m\} : a_{t_i - 1} \; \underline{co} \; a_{(t_i+1) \bmod n}$. Die Modulodivision ist notwendig, falls $t_i = n$.
Auf Grund von Axiom EEN gibt es eine Zahl h, so daß $\forall i, k \in \mathbb{N} : (1 \leq i \leq m \wedge k \geq h) \Rightarrow (a_{t_i} \; li \; b_{-k} \wedge a_{t_i} \; li \; b_k)$. Also sind die Mengen $K_i = \{\ldots, b_{-h-1}, b_{-h}\} \cup \{a_{t_i}\} \cup \{b_h, b_{h+1}, \ldots\}$ stets li-Kliquen.
Jede der Mengen K_i kann zu einer Linie erweitert werden, und wir werden jeweils eine der möglichen Linien mit L_i bezeichnen. Per Konstruktion gilt dann $K_i \subseteq L_i$. Jede dieser Linien kann durch eine zweiseitig unendliche im-Kette γ_i repräsentiert werden, auch dann, wenn wir fordern, daß beide Enden der Kette identisch zur Kette β sein sollen und es keine Wiederholungen geben darf. Es muß für diese Konstruktion allerdings Theorem 4.20 gelten.

Die Ketten γ_i sind so aufgebaut, daß

$$\gamma_i = (\ldots, b_{-h-1}, b_{-h}, c_{i,-min_i}, \ldots, c_{i,-1}, a_{t_i}, c_{i,1}, \ldots, c_{i,max_i}, b_h, b_{h+1}, \ldots)$$

ist, wobei $-min_i$ und max_i Konstanten sind, die passend zu der angegebenen Numerierung gewählt werden. Per Konstruktion hat γ_i keine Wiederholungen und es ist $\mathrm{Set}(\gamma_i) = L_i$.
Jetzt wird ein Prädikat eingeführt, das angibt, ob die Wendepunkte um a_{t_i} in derselben Richtung wie die Referenzkette β orientiert sind. Wir definieren $Forward(i) = a_{t_i-1}\ li\ c_{i,-1}$. Da es eine ungerade Anzahl m an Wendepunkten gibt, muß mindestens ein g existieren, so daß $Forward(g) \Leftrightarrow Forward((g \bmod m) + 1)$. Wir fixieren ein solches g und treffen eine Fallunterscheidung je nach dem Wahrheitswert von $Forward(g)$.

Fall 1: $Forward(g)$.
Es gilt auch $Forward((g \bmod m) + 1)$. Mit der Definition von *Forward* erhalten wir $a_{t_g-1}\ li\ c_{g,-1}$ und $a_{t_{(g \bmod m)+1}-1}\ li\ c_{(g \bmod m)+1,-1}$. Mit $a_{t_g-1}\ \underline{co}\ a_{(t_g+1) \bmod n}$ liefert Lemma 4.60 die Aussage $a_{(t_g+1) \bmod n}\ li\ c_{g,-1}$.
Wir definieren jetzt den im-Zyklus δ.

$$\delta = (b_{-h}, b_{-h-1}, b_{-h}, c_{g,-min_g}, \ldots, c_{g,-1}, a_{t_g}, a_{(t_g+1) \bmod n}, \ldots, a_{t_{(g \bmod m)+1}-1}, \\ a_{t_{(g \bmod m)+1}}, c_{(g \bmod m)+1,-1}, \ldots, c_{(g \bmod m)+1,-min_{(g \bmod m)+1}}, b_{-h})$$

Wegen $b_{-h}\ \underline{co}\ b_{-h}$ gilt $1 \in \mathrm{AWP}(\delta)$. Wir werden jetzt zeigen, daß es keine anderen Wendepunkte in δ gibt.
$\{b_{-h-1}, b_{-h}, c_{g,-min_g}, \ldots, c_{g,-1}, a_{t_g}\} \subset L_g$, also kann es in diesem Teil des Zyklus keinen Wendepunkt geben.
$c_{g,-1}\ li\ a_{(t_g+1) \bmod n}$ wurde bereits gezeigt.
$(a_{t_g}, a_{(t_g+1) \bmod n}, \ldots, a_{t_{(g \bmod m)+1}-1}, a_{t_{(g \bmod m)+1}})$ ist eine im-Kette ohne Wendepunkte, da im im-Zyklus α die Elemente a_{t_g} und $a_{t_{(g \bmod m)+1}}$ zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Wendepunkte bezeichnen.
Es wurde bereits erwähnt, daß $a_{t_{(g \bmod m)+1}-1}\ li\ c_{(g \bmod m)+1,-1}$.
Per Konstruktion ist $\{a_{t_{(g \bmod m)+1}}, c_{(g \bmod m)+1,-1}, \ldots, c_{(g \bmod m)+1,-min_{(g \bmod m)+1}}, b_{-h}, b_{-h-1}\} \subset L_{(g \bmod m)+1}$, und diese Kette ist somit frei von Wendepunkten.
Somit $|\mathrm{AWP}(\delta) = 1|$, Widerspruch zu Satz 4.85.

Fall 2: $\neg Forward(g)$.
Der Beweis verläuft ähnlich zu Fall 1, jedoch läuft die Kette δ diesmal statt über b_{-h-1} über b_{h+1}.

Dies schließt die Fallunterscheidung. □

Korollar 4.87 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{EEN}}$ $\boxed{\text{LUE}}$
$\mathrm{Orient} \neq \emptyset$.

Beweis Nach Satz 4.86 und Satz 4.58. □

Dieser Satz gilt nur, wenn alle Linien unendlich sind, also in azyklischen Strukturen. Für den zyklischen Fall werden wir einen völlig anderen Weg einschlagen, der nicht über Axiom GAW verläuft.

4.7 Länge

Mit den Beispielen wurde gezeigt, daß bestimmte Nebenläufigkeitsstrukturen ungewöhnliche Eigenschaften aufweisen. In der Regel sind dies Strukturen, die in einem gewissen Sinne in der Raumrichtung (co) weiter ausgedehnt sind als in der Zeitrichtung (li). Wir wollen solche

Strukturen informal als *breit* bezeichnen, und der entgegengesetzte Fall, in dem die zeitliche Ausdehnung dominiert, soll als *lang* beschrieben werden.

4.7.1 Axiome der Länge

Um Länge und Breite etwas genauer fassen zu können, sollen nun einige mögliche Bedingungen für Länge aufgezählt werden. Es wird versucht, die Axiome physikalisch zu deuten, doch dabei gibt es ein großes Problem: Für keine Deutung ist bekannt, daß sie einem physikalischen Prinzip entspricht. Wir wissen nicht, wie weit unser Universum im Raum und in der Zeit ausgedehnt ist, ja, wir wissen nicht einmal, ob es in der einen oder anderen Richtung endlich ist.

Trotzdem sind die Axiome der Länge ein wichtiges Werkzeug zum Verständnis der Theorie der Nebenläufigkeit. Im Laufe der Zeit werden wir die Grenze zwischen zu breiten und gerade noch akzeptablen Modellen immer genauer ziehen können, wenn neue Beweise und Gegenbeispiele hinzukommen. Dann wird es hoffentlich möglich, eine genauere Interpretation dieser Bedingung zu geben und zu entscheiden, ob sie physikalischer Natur ist oder durch den Formalismus der Theorie künstlich erzeugt wird.

Die Benennung des ersten Axioms der Länge mag zunächst merkwürdig anmuten: Was stellt an der geforderten Linie eine Referenz dar?

Axiom ERL [Existenz einer Referenzlinie]
$\exists L \in \mathrm{Lines} : \forall x \in X : L \cap li[x] \neq \emptyset.$ $\Diamond$

Nun, da jedes Element der Struktur einen li-Partner auf der Linie hat, wird jedes Element während einer Periode im Ablauf des Systems mit der Linie synchronisiert. Die Linie stellt also gewissermaßen einen zentralen Taktgeber dar, eine Referenzuhr. Der Begriff „Periode“ ist selbstverständlich nur für zyklische Systeme sinnvoll, aber es sind ja gerade die zyklischen Systeme, in denen wir Probleme mit zu breiten Strukturen hatten, so daß wir uns bei der Interpretation auf diese beschränken können.

Wir können auch fordern, daß jede Linie eine Referenzlinie ist. Dies wäre physikalisch sinnvoller, da in der Natur keine Weltlinie besonders hervorgehoben scheint. Leider ist kein Beweis bekannt, der von der verstärkten Aussage Gebrauch machen könnte, und insofern gibt es keinen Grund, das folgende Axiom in ein Axiomensystem aufzunehmen. Es ist jedoch eine plausible Formulierung, die bei zukünftigen Forschungen berücksichtigt werden sollte.

Axiom LSL [Linien schneiden li-Bereiche]
$\forall L \in \mathrm{Lines} : \forall x \in X : L \cap li[x] \neq \emptyset.$ $\Diamond$

Offensichtlich ist diese Bedingung stärker als Axiom ERL.

Satz 4.88 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LSL}}$ $\exists L \in \mathrm{Lines} : \forall x \in X : L \cap li[x] \neq \emptyset.$ $\Box$

Es ist auch möglich, Länge über Schnitte zu definieren.

Axiom KSE [Komplementäre Schnitte existieren]
$\forall C \in \mathrm{Cuts} : \exists C' \in \mathrm{Cuts} : C \times C' \subseteq li.$ $\Diamond$

Anschaulich bedeutet dies, daß jedes Element des einen Schnittes alle Elemente des anderen Schnittes miteinander synchronisiert. Wir könnten dies Axiom dazu verwenden, eine zyklische Nebenläufigkeitsstruktur in zwei azyklische Teile aufzutrennen, ein Teil, der C in C' überführt, und einen weiteren, der für den Rückweg verantwortlich ist. Damit ließe sich dann eventuell ein Prozeß des zyklischen Systems ohne den Umweg über B/E-Systeme erzeugen.

Mit diesem Axiom steht uns ein noch stärkeres Werkzeug als mit Axiom LSL bereit, wie nun gezeigt wird. Dazu müssen wir jedoch Axiom KDI annehmen.

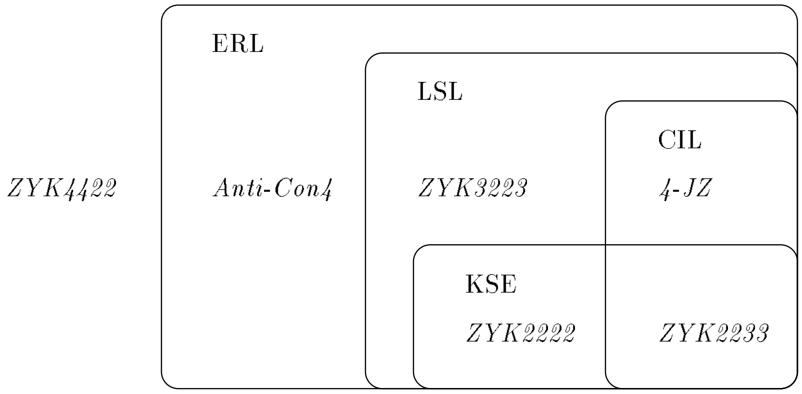


Abbildung 4.12: Abhängigkeiten der Axiome der Länge

Satz 4.89 $\boxed{\text{Basis}}\ \boxed{\text{KDI}}\ \boxed{\text{KSE}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : L \cap li[x] \neq \varnothing$.
Beweis Sei $L \in$ Lines und $x \in X$. Wir wählen einen Schnitt C mit $x \in C$, dann liefert uns Axiom KSE einen Schnitt C', für den gilt $C \times C' \subseteq li$. Weil nach Axiom KDI stets $C' \cap L \neq \varnothing$, gibt es ein $y \in C' \cap L$. Nach Konstruktion von C' ist $C \subseteq li[y]$ und insbesondere $x\ li\ y$. Also $y \in L \cap li[x]$. □

Aber es gibt Gründe, auf eine Formulierung mit Hilfe von Linien oder Schnitten zu verzichten. Zunächst einmal ist eine solche Formulierung schwer zu überprüfen, da alle Linien beziehungsweise Schnitte berücksichtigt werden müssen und da dies in einer großen Struktur sehr viele sein können. Des weiteren sind Linien und Schnitte nur die abgeleiteten Objekte, viel besser wäre es, wenn Breite und Länge nur mit Hilfe von *co* und *li* formuliert werden könnten.

Axiom CIL [*co* in *li*]
$\forall x \in X : \exists y \in X : \underline{co}[x] \subseteq li[y]$. ◊

Auch dieses Axiom kann bis jetzt noch nicht in einem Beweis ausgenutzt werden, aber es bietet sich durch seine leichte Prüfbarkeit für Computeranalysen von Modellen an.

Satz 4.90 $\boxed{\text{Basis}}\ \boxed{\text{CIL}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : L \cap li[x] \neq \varnothing$.
Beweis Wir nehmen das Gegenteil an, dann gibt es $L \in$ Lines und $x \in X$ mit $L \subseteq \underline{co}[x]$. Nach Axiom CIL gibt es ein y mit $\underline{co}[x] \subseteq li[y]$, also insbesondere $L \subseteq li[y]$ im Widerspruch zu Satz 2.110. □

Abbildung 4.12 illustriert die verschiedene Stärke der Axiome der Länge. Für das Diagramm wurde angenommen, daß Axiom KDI gilt. Die kursiven Bezeichnungen stehen für Beispielstrukturen, beispielsweise sind für *ZYK3223* – also den Zykloiden 3223 – gerade die Axiome ERL und LSL erfüllt.

4.7.2 Orientierbarkeit langer Strukturen

Im Fall von unendlichen, aber episodenendlichen Strukturen gelang es uns bereits, die Existenz einer konsistenten Orientierung herzuleiten. Wir wollen dies jetzt auch für endliche Strukturen tun und werden zu diesem Zweck die soeben eingeführten Axiome der Länge verwenden.

Der nun folgende Beweis ist lang und technisch, so daß es nicht einfach ist, ihn zu verfolgen. Die grundlegende Idee ist folgende: Mit Axiom ERL fordern wir die Existenz einer Referenzlinie L_R und können dann diese Linie orientieren, um damit wiederum eine konsistente Orientierung für die Gesamtstruktur zu generieren.

Lemma 4.91 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LEN}}$
$\forall\alpha = (a_0, \ldots, a_n) \in \text{Ketten}(im) : (\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq li[a_0] \wedge \text{WP}(\alpha) = \varnothing) \Rightarrow \forall i, j \in \{0, \ldots, n\} : i \neq j \Rightarrow a_i\ li\ a_j$.

Beweis Sei $\alpha = (a_0, \ldots, a_n)$ eine im-Kette, wobei $\text{Set}(\alpha) \subseteq \underline{li}[a_0]$ und $\text{WP}(\alpha) = \varnothing$. Für $n \leq 1$ ist der Satz offensichtlich, wir setzen also $n \geq 2$ voraus.
Wir beweisen den Satz durch Induktion nach i.

Anfang: $i = 1$. $a_0\ im\ a_1$ bedeutet $a_0\ li\ a_1$, also auch $a_1\ li\ a_0$.

Hypothese: $\forall j, k \in \{0, \ldots, i-1\} : j \neq k \Rightarrow a_j\ li\ a_k$.

Von $i - 1$ **nach** i **für** $2 \leq i \leq n$: Nach Induktionshypothese ist die Menge $\{a_0, \ldots, a_{i-1}\}$ eine $\underline{li}$-Klique, also können wir eine Linie $L \in \text{Lines}$ wählen, die $\{a_0, \ldots, a_{i-1}\} \subseteq L$ erfüllt. $Fin(L)$ wegen Axiom LEN. Wir können nun unter Verwendung von Korollar 4.78 einen im-Zyklus $\beta = (b_0, b_1, \ldots, b_m)$ ohne Wiederholungen finden, so daß $\forall j \in \{0, \ldots, i-1\} : b_j = a_j$ und $\text{Set}(\beta) = L$.
Wegen $a_i\ im\ a_{i-1}$ haben wir $a_i\ li\ a_{i-1}$. $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq li[a_0]$ führt zu $a_i\ li\ a_0$.
Da $\text{WP}(\alpha) = \varnothing$ gilt $a_i\ li\ a_{i-2}$. Da β ebenfalls keine Wendepunkte enthält, gilt $b_i\ li\ b_{i-2} = a_{i-2}$. Mit Axiom LOR ergibt sich daraus $a_i\ \underline{co}\ b_i$. Weil $a_i\ li\ a_0 = b_0$, ist $b_i \neq b_0 = b_m$ und somit $i < m$.
Gäbe es nun ein $j \in \{1, \ldots, i-1\}$, so daß $a_j\ \underline{co}\ a_i$, dann würde dies Lemma 4.82 verletzen. Also $\forall j \in \{0, \ldots, i-1\} : a_j\ li\ a_i$.
Dies können wir mit der Hypothese verbinden zu $\forall j, k \in \{0, \ldots, i\} : j \neq k \Rightarrow a_j\ li\ a_k$.

Für $i = n$ ergibt sich gerade $\forall k \in \{0, \ldots, n\} : \forall j \in \{0, \ldots, n\} : k \neq j \Rightarrow a_j\ li\ a_k$. □

Als ein einfaches Korollar ergibt sich aus dem vorigen Lemma, daß im-Ketten ohne Wendepunkte innerhalb eines $li[x]$-Gebietes stets wiederholungsfrei sind. Wir betrachten als nächstes Zyklen innerhalb eines $\underline{li}[x]$-Gebietes, hier sind Wiederholungen durchaus zu berücksichtigen.

Lemma 4.92 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LEN}}$
$\forall\alpha = (a_0, \ldots, a_n) \in \text{Zyklen}(im) : (\text{WP}(\alpha) = \varnothing \wedge \text{Set}(\alpha) \subseteq \underline{li}[a_0] \wedge n \geq 1) \Rightarrow a_1\ li\ a_{n-1}$.

Beweis Sei α ein im-Zyklus mit $\text{Set}(\alpha) \subseteq \underline{li}[a_0]$, $\text{WP}(\alpha) = \varnothing$ und $n \geq 1$, aber im Widerspruch zum Satz $a_1\ \underline{co}\ a_{n-1}$. Wir wählen einen kürzesten solchen Zyklus. Wäre $n = 1$, dann $a_0 = a_1\ im\ a_0$, Widerspruch. Also $n \geq 2$. Wäre $n = 2$, dann $a_0 = a_2\ li\ a_0$ wegen $\text{WP}(\alpha) = \varnothing$. Auch dies ist ein Widerspruch, also $n \geq 3$.
Sei $m = \min\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid a_i = a_0\}$, dies existiert wegen $a_n = a_0$. Sicher $m \geq 3$, denn $a_0\ im\ a_1$ und $a_0\ li\ a_2$ ergeben $a_0 \neq a_1$ und $a_0 \neq a_2$. Sei $\beta = (a_0, \ldots, a_{m-1})$. Da $\{a_1, \ldots, a_{m-1}\} \subseteq li[a_0]$ gilt und außerdem $\text{WP}(\beta) = \varnothing$, ergibt sich nach Lemma 4.91, daß $a_1\ li\ a_{m-1}$.
Wir wissen aber $a_1\ \underline{co}\ a_{n-1}$, also $m \neq n$, speziell $m < n$. Es ist $a_{m-1}\ li\ a_{m+1}$, weil $\text{WP}(\alpha) = \varnothing$. Da $\{a_1, a_{m-1}, a_{m+1}\} \subseteq im[a_0]$, finden wir mit Axiom LOR, daß $a_1\ \underline{co}\ a_{m+1}$. Nach Voraussetzung ist $a_1\ \underline{co}\ a_{n-1}$. $\{a_1, a_{m+1}, a_{n-1}\} \subseteq im[a_0]$ und Axiom LCT ergeben nun $a_{m+1}\ \underline{co}\ a_{n-1}$.
Sei $\gamma = (a_m, \ldots, a_n)$, dann ist γ ein im-Zyklus, weil $a_m = a_0 = a_n$. $\text{WP}(\gamma) = \varnothing$ wegen $\text{WP}(\alpha) = \varnothing$. $a_{m+1}\ \underline{co}\ a_{n-1}$ und $n - m < n$ stehen jedoch im Widerspruch zu der Tatsache, daß α einen kürzesten im-Zyklus mit diesem Eigenschaften darstellt. □

Während wir eben noch einen einzigen Zyklus ohne Wendepunkte betrachtet haben, werden wir die Zyklen jetzt aus zwei oder drei wendepunktfreien Teilstücken zusammensetzen.

Lemma 4.93 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LEN}}$
$\forall x, y \in X : \forall \alpha = (x = a_0, \ldots, a_n = y) \in \text{Ketten}(im) : \forall \beta = (x = b_0, \ldots, b_m = y) \in \text{Ketten}(im) : \text{Set}(\alpha) \cup \text{Set}(\beta) \subseteq \underline{li}[x] \cap \underline{li}[y] \wedge n \geq 1 \wedge m \geq 1 \wedge \text{WP}(\alpha) = \varnothing \wedge \text{WP}(\beta) = \varnothing \Rightarrow (a_1 \; li \; b_1 \Leftrightarrow a_{n-1} \; li \; b_{m-1})$.
Beweis Seien x, y, α und β nach den Voraussetzungen des Satzes gegeben, insbesondere also $\text{WP}(\alpha) = \varnothing \wedge \text{WP}(\beta) = \varnothing$.
Angenommen, $a_{n-1} \; li \; b_{m-1}$. Sei

$$\gamma = (x = a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n = y = b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0 = x).$$

γ ist ein im-Zyklus mit $\text{WP}(\gamma) = \varnothing$ und $\text{Set}(\gamma) \subseteq \underline{li}[x]$. Nach Lemma 4.92 erhalten wir $a_1 \; li \; b_1$. Also $a_{n-1} \; li \; b_{m-1} \Rightarrow a_1 \; li \; b_1$.
Angenommen, $a_1 \; li \; b_1$. Sei

$$\delta = (y = b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0 = x = a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n = y).$$

δ ist ein im-Zyklus mit $\text{WP}(\delta) = \varnothing$ und $\text{Set}(\delta) \subseteq \underline{li}[y]$. Nach Lemma 4.92 erhalten wir $a_{n-1} \; li \; b_{m-1}$. Also $a_1 \; li \; b_1 \Rightarrow a_{n-1} \; li \; b_{m-1}$.
Insgesamt $a_1 \; li \; b_1 \Leftrightarrow a_{n-1} \; li \; b_{m-1}$. □

Lemma 4.94 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{LEN}}$ $\forall x, y, z \in X : (x \; \underline{li} \; y \; \underline{li} \; z \; \underline{li} \; x) \Rightarrow (\exists \delta = (d_0, \ldots, d_r) \in \text{Zyklen}(im) : \exists p, q \in \{1, \ldots, r-1\} : \text{AWP}(\delta) = \varnothing \wedge \text{Set}(\delta) \subseteq \underline{li}[x] \cap \underline{li}[y] \cap \underline{li}[z] \wedge d_0 = x \wedge d_p = y \wedge d_q = z \wedge 0 < p < q < r)$.
Beweis Seien $x, y, z \in X$ mit $x \; \underline{li} \; y \; \underline{li} \; z \; \underline{li} \; x$ gegeben, dann gibt es eine Linie $L \in \text{Lines}$ mit $x, y, z \in L$. $Fin(L)$ wegen Axiom LEN. Wir können nun unter Verwendung von Korollar 4.78 einen im-Zyklus $\alpha = (a_0, \ldots, a_n)$ finden, der $\text{AWP}(\alpha) = \varnothing$ und $\text{Set}(\alpha) = L$ erfüllt.
Nun ist $x, y, z \in \text{Set}(\alpha)$, daher finden wir $i, j, k \in \{0, \ldots, n-1\}$ mit $x = a_i$, $y = a_j$, $z = a_k$. Betrachten wir den Zyklus

$$\delta = (a_i = x, \ldots, a_n = a_0, \ldots, a_j = y, \ldots, a_n = a_0, \ldots, a_k = z, \ldots, a_n = a_0, \ldots, a_i = x)$$

dann gilt für diesen sicherlich $\text{AWP}(\delta) = \varnothing$ und $\text{Set}(\delta) = L \subseteq \underline{li}[x] \cap \underline{li}[y] \cap \underline{li}[z]$. Sei $r = 3n$, dann können wir schreiben

$$\delta = (d_0 = x, \ldots, d_p = y, \ldots, d_q = z, \ldots, d_r = x)$$

für geeignete $p, q \in \{1, \ldots, r-1\}$. □

Lemma 4.95 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LEN}}$
$\forall x, y, z \in X : \forall \alpha = (x = a_0, \ldots, a_n = y) \in \text{Ketten}(im) : \forall \beta = (y = b_0, \ldots, b_m = z) \in \text{Ketten}(im) : \forall \gamma = (z = c_0, \ldots, c_k = x) \in \text{Ketten}(im) : (\text{Set}(\alpha) \cup \text{Set}(\gamma) \subseteq \underline{li}[x] \wedge \text{Set}(\alpha) \cup \text{Set}(\beta) \subseteq \underline{li}[y] \wedge \text{Set}(\beta) \cup \text{Set}(\gamma) \subseteq \underline{li}[z] \wedge n \geq 1 \wedge m \geq 1 \wedge k \geq 1 \wedge \text{WP}(\alpha) = \varnothing \wedge \text{WP}(\beta) = \varnothing \wedge \text{WP}(\gamma) = \varnothing) \Rightarrow ((a_1 \; li \; c_{k-1} \Leftrightarrow b_1 \; li \; a_{n-1}) \Leftrightarrow c_1 \; li \; b_{m-1})$.
Beweis Seien die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. $x \; \underline{li} \; y \; \underline{li} \; z \; \underline{li} \; x$ ergibt sich unmittelbar, also können wir Lemma 4.94 anwenden. Es gibt einen im-Zyklus δ, so daß

$$\delta = (d_0 = x, d_1, \ldots, d_{p-1}, d_p = y, d_{p+1}, \ldots, d_{q-1}, d_q = z, d_{q+1}, \ldots, d_{r-1}, d_r = x),$$

$\text{AWP}(\delta) = \varnothing$ und $\text{Set}(\delta) \subseteq \underline{li}[x] \cap \underline{li}[y] \cap \underline{li}[z]$. δ enthält keine Wendepunkte, also $d_{p-1} \; li \; d_{p+1}$, $d_{q-1} \; li \; d_{q+1}$ und $d_{r-1} \; li \; d_1$.
Mit Lemma 4.61 ergibt sich aus $\{d_{p-1}, d_{p+1}, a_{n-1}, b_1\} \subseteq im[y]$

$$(d_{p-1} \; \underline{co} \; d_{p+1} \Leftrightarrow d_{p-1} \; \underline{co} \; a_{n-1}) \Leftrightarrow (b_1 \; \underline{co} \; a_{n-1} \Leftrightarrow b_1 \; \underline{co} \; d_{p+1}),$$

$$(d_{p-1} \; li \; d_{p+1} \Leftrightarrow d_{p-1} \; li \; a_{n-1}) \Leftrightarrow (b_1 \; li \; a_{n-1} \Leftrightarrow b_1 \; li \; d_{p+1}).$$

Wegen $d_{p-1} \; li \; d_{p+1}$ läßt sich dies verkürzen zu

$$d_{p-1} \; li \; a_{n-1} \Leftrightarrow (b_1 \; li \; a_{n-1} \Leftrightarrow b_1 \; li \; d_{p+1}). \tag{4.3}$$

Analog dazu auch wegen $\{d_{q-1}, d_{q+1}, b_{m-1}, c_1\} \subseteq im[z]$

$$d_{q-1}\ li\ b_{m-1} \Leftrightarrow (c_1\ li\ b_{m-1} \Leftrightarrow c_1\ li\ d_{q+1}), \tag{4.4}$$

und wegen $\{d_{r-1}, d_1, c_{k-1}, a_1\} \subseteq im[x]$

$$d_{r-1}\ li\ c_{k-1} \Leftrightarrow (a_1\ li\ c_{k-1} \Leftrightarrow a_1\ li\ d_1). \tag{4.5}$$

Lemma 4.93 kann jetzt für die Paare von Ketten

$$(x = a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n = y) \quad \text{und} \quad (x = d_0, d_1, \ldots, d_{p-1}, d_p = y),$$
$$(y = b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}, b_m = z) \quad \text{und} \quad (x = d_p, d_{p+1}, \ldots, d_{q-1}, d_q = y),$$
$$(z = c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}, c_k = x) \quad \text{und} \quad (x = d_q, d_{q+1}, \ldots, d_{r-1}, d_r = y)$$

dreimal angewendet werden, und wir erhalten $a_1\ li\ d_1 \Leftrightarrow a_{n-1}\ li\ d_{p-1}$, sowie $b_1\ li\ d_{p+1} \Leftrightarrow b_{m-1}\ li\ d_{q-1}$ und $c_1\ li\ d_{q+1} \Leftrightarrow c_{k-1}\ li\ d_{r-1}$. Durch Substitution äquivalenter Ausdrücke in den Gleichungen 4.3, 4.4 und 4.5 erhalten wir

$$a_1\ li\ d_1 \Leftrightarrow (b_1\ li\ a_{n-1} \Leftrightarrow b_1\ li\ d_{p+1}) \tag{4.6}$$
$$b_1\ li\ d_{p+1} \Leftrightarrow (c_1\ li\ b_{m-1} \Leftrightarrow c_1\ li\ d_{q+1}) \tag{4.7}$$
$$c_1\ li\ d_{q+1} \Leftrightarrow (a_1\ li\ c_{k-1} \Leftrightarrow a_1\ li\ d_1) \tag{4.8}$$

Durch Modifikation von Formel 4.8 erhält man

$$(c_1\ li\ d_{q+1} \Leftrightarrow a_1\ li\ c_{k-1}) \Leftrightarrow a_1\ li\ d_1$$

Dies kombinieren wir mit Formel 4.6 zu

$$(c_1\ li\ d_{q+1} \Leftrightarrow a_1\ li\ c_{k-1}) \Leftrightarrow (b_1\ li\ a_{n-1} \Leftrightarrow b_1\ li\ d_{p+1})$$

Aus der letzten Formel wird

$$(a_1\ li\ c_{k-1} \Leftrightarrow b_1\ li\ a_{n-1}) \Leftrightarrow (b_1\ li\ d_{p+1} \Leftrightarrow c_1\ li\ d_{q+1}) \tag{4.9}$$

Aus Formel 4.7 erhalten wir

$$(b_1\ li\ d_{p+1} \Leftrightarrow c_1\ li\ d_{q+1}) \Leftrightarrow c_1\ li\ b_{m-1}$$

Dies substituieren wir in Formel 4.9 und erhalten $(a_1\ li\ c_{k-1} \Leftrightarrow b_1\ li\ a_{n-1}) \Leftrightarrow c_1\ li\ b_{m-1}$. □

Mit diesen Lemmata sind wir gerüstet, eine Relation F_R zu konstruieren, von der wir später beweisen, daß sie eine konsistente Orientierung ist. Die Konstruktion ist aber nur möglich, wenn Axiom ERL gültig ist.

Definition 4.96 $F_R \subseteq X \times X$ heißt Referenzorientierung genau dann, wenn es $L_R \in$ Lines und $\rho = (r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}, r_m) \in \mathrm{Zyklen}(im)$ gibt, für die

$$\forall x \in X : L_R \cap li[x] \neq \varnothing, \tag{4.10}$$
$$\mathit{ZykEinf}(\rho), \tag{4.11}$$
$$\mathrm{Set}(\rho) = L_R, \tag{4.12}$$
$$\mathrm{AWP}(\rho) = \varnothing, \tag{4.13}$$
$$\begin{aligned} x\ F_R\ y \Leftrightarrow x\ im\ y \wedge \exists i \in \{0, \ldots, m-1\} : \exists \alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \in \mathrm{Ketten}(im) : \\ \exists L \in \mathrm{Lines} : \mathrm{Set}(\alpha) \subseteq L \wedge \mathrm{WP}(\alpha) = \varnothing \wedge n \geq 2 \wedge \\ a_0 = r_i \wedge a_1\ \underline{co}\ r_{i+1} \wedge a_{n-1} = x \wedge a_n = y \end{aligned} \tag{4.14}$$

gilt. ◊

Satz 4.97 $\boxed{\text{Basis}}\ \boxed{\text{NTR}}\ \boxed{\text{IMK}}\ \boxed{\text{LOR}}\ \boxed{\text{LFO}}\ \boxed{\text{KDI}}\ \boxed{\text{LKO}}\ \boxed{\text{LEN}}\ \boxed{\text{ERL}}$ $\exists F_R \subseteq X \times X : F_R$ ist eine Referenzorientierung.

Beweis Wir können L_R finden, wenn Axiom ERL gilt. Axiom LEN zeigt dann, daß $\mathit{Fin}(L_R)$ erfüllt ist. Korollar 4.78 beweist daraus die Existenz von ρ mit den angegebenen Eigenschaften. F_R ist durch die Objekte L_R und ρ exakt festgelegt, die Konstruktion gelingt stets. □

Wir werden jetzt einige Eigenschaften von Referenzorientierungen aufzeigen.

Lemma 4.98 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{LEN}}$ Sei F_R eine Referenzorientierung, dann $\forall x, y \in X : x \; im \; y \Rightarrow (x \; F_R \; y \vee y \; F_R \; x)$.

Beweis Seien $x, y \in X$ mit $x \; im \; y$ beliebig gewählt. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $x \; P \; y$, also $\underline{li}[x] \subseteq \underline{li}[y]$.
Wegen Formel 4.10 ist $L_R \cap li[x] \neq \varnothing$. Sei $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ so gewählt, daß $r_i \in L_R \cap li[x]$. Weil $x \; P \; y$ erhalten wir auch $r_i \in \underline{li}[y]$, damit ist $\{x, y, r_i\}$ eine $\underline{li}$-Klique und kann zu einer Linie $L \in$ Lines erweitert werden, die $\{x, y, r_i\} \subseteq L$ erfüllt. $Fin(L)$ gilt gemäß Axiom LEN. (x, y) ist eine im-Kette mit $\{x, y\} \subseteq L$. Auf Grund von Satz 4.77 gibt es einen im-Zyklus $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ mit $\mathrm{Set}(\alpha) = L$, $a_0 = x$, $a_1 = y$ und $\mathrm{AWP}(\alpha) = \varnothing$. Weil $r_i \in L = \mathrm{Set}(\alpha)$ gibt es ein $k \in \{0, \ldots, n\}$, für das $a_k = r_i$ gilt. Da $r_i \; li \; x$, folgt $a_k = r_i \neq x = a_0 = a_n$, also ist $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Fall 1: $a_{k-1} \; \underline{co} \; r_{i+1}$. Sei

$$\beta = (a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0 = a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0).$$

Weil $\mathrm{AWP}(\alpha) = \varnothing$, gilt auch $\mathrm{WP}(\beta) = \varnothing$. i, L und β erfüllen genau die Bedingungen, die in der Definition von F_R gefordert sind, es gilt $k + n \geq 2$, also $y \; F_R \; x$.

Fall 2: $a_{k-1} \; li \; r_{i+1}$. Wegen $k < n$ und $\mathrm{AWP}(\alpha) = \varnothing$ ist $a_{k-1} \; li \; a_{k+1}$, dies ergibt mittels Axiom LOR $a_{k+1} \; \underline{co} \; r_{i+1}$. Sei

$$\gamma = (a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n = a_0, a_1),$$

dann sind die Vorbedingungen für $x \; F_R \; y$ erfüllt, denn $k \leq n-1$ führt zu $1+(n-k) \geq 2$.

Also gilt $x \; F_R \; y \vee y \; F_R \; x$. □

Bei dem vorigen Beweis mußte die im-Kette β scheinbar unsinnigerweise den im-Zyklus α einmal zusätzlich durchlaufen. Dies geschah, damit die resultierende Kette nicht zu kurz wird, was im folgenden zu unangenehmen Sonderfällen geführt hätte.

Lemma 4.99 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LEN}}$
Sei F_R eine Referenzorientierung, dann $\forall x, y, z \in X : (x \; F_R \; y \wedge y \; F_R \; z) \Rightarrow x \; li \; z$.

Beweis Seien $x, y, z \in X$ mit $x \; F_R \; y$ und $y \; F_R \; z$ gegeben. Es gibt dann $i, j \in \{0, \ldots, m-1\}$ und $L_A, L_B \in$ Lines und im-Ketten $\alpha = (r_i = a_0, \ldots, a_{p-1} = x, a_p = y)$ und $\beta = (r_j = b_0, \ldots, b_{q-1} = y, b_q = z)$, für die gilt $\mathrm{Set}(\alpha) \subseteq L_A$, $\mathrm{Set}(\beta) \subseteq L_B$, $\mathrm{WP}(\alpha) = \varnothing$, $\mathrm{WP}(\beta) = \varnothing$, $p \geq 2$, $q \geq 2$, $r_{i+1} \; \underline{co} \; a_1$ und $r_{j+1} \; \underline{co} \; b_1$. Es gilt $x \; im \; y \; im \; z$.
Wir betrachten die Ketten

$$\gamma = (r_i = a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p = y),$$
$$\delta = (y = b_{q-1}, b_{q-2}, \ldots, b_1, b_0 = r_j),$$
$$\epsilon = (r_j, r_{j+1}, \ldots, r_m = r_0, r_1, \ldots, r_{i-1}, r_i).$$

Wegen $\mathrm{WP}(\gamma) = \varnothing$, $\mathrm{WP}(\delta) = \varnothing$, $\mathrm{WP}(\epsilon) = \varnothing$,

$$\mathrm{Set}(\gamma) \cup \mathrm{Set}(\delta) \subseteq L_A \cup L_B \subseteq \underline{li}[a_p] \cup \underline{li}[b_{q-1}] = \underline{li}[y],$$
$$\mathrm{Set}(\delta) \cup \mathrm{Set}(\epsilon) \subseteq L_B \cup L_R \subseteq \underline{li}[b_0] \cup \underline{li}[r_j] = \underline{li}[r_j],$$
$$\mathrm{Set}(\gamma) \cup \mathrm{Set}(\epsilon) \subseteq L_A \cup L_R \subseteq \underline{li}[a_0] \cup \underline{li}[r_i] = \underline{li}[r_i],$$

$p \geq 1$, $q - 1 \geq 1$ und $m > j$ gelten die Vorbedingungen von Lemma 4.95, und wir erhalten

$$((a_1 \; li \; r_{i-1} \Leftrightarrow b_{q-2} \; li \; a_{p-1}) \Leftrightarrow r_{j+1} \; li \; b_1).$$

$r_{i+1} \; li \; r_{i-1}$, also auch $r_{i-1} \; li \; a_1$ wegen $r_{i+1} \; \underline{co} \; a_1$ und Axiom LCT. Es ist $r_{j+1} \; \underline{co} \; b_1$, also bleibt $b_{q-2} \; \underline{co} \; a_{p-1}$ als einzige Möglichkeit.
Es ist $b_{q-2} \; li \; b_q$, also $x = a_{p-1} \; li \; b_q = z$ wegen Axiom LCT. □

Der vorige Beweis kann mit minimalen Änderungen noch zweimal wiederverwendet werden. Leider ist es nicht möglich, die Beweise zu einem Beweis zusammenzufassen, da die Ketten γ und δ jeweils leicht unterschiedlich definiert werden.

Lemma 4.100 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LEN}}$
Sei F_R eine Referenzorientierung, dann $\forall x, y, z \in X : (x\ F_R\ y \wedge z\ F_R\ y) \Rightarrow x\ \underline{co}\ z$.
Beweis Seien $x, y, z \in X$ mit $x\ F_R\ y$ und $z\ F_R\ y$ gegeben. Es gibt dann $i, j \in \{0, \ldots, m-1\}$ und $L_A, L_B \in$ Lines und im-Ketten $\alpha = (r_i = a_0, \ldots, a_{p-1} = x, a_p = y)$ und $\beta = (r_j = b_0, \ldots, b_{q-1} = z, b_q = y)$, für die gilt $\mathrm{Set}(\alpha) \subseteq L_A$, $\mathrm{Set}(\beta) \subseteq L_B$, $\mathrm{WP}(\alpha) = \varnothing$, $\mathrm{WP}(\beta) = \varnothing$, $p \geq 2$, $q \geq 2$, $r_{i+1}\ \underline{co}\ a_1$ und $r_{j+1}\ \underline{co}\ b_1$. Es gilt $x\ im\ y\ im\ z$.
Wir betrachten die Ketten

$$\gamma = (r_i = a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p = y),$$
$$\delta = (y = b_q, b_{q-1}, \ldots, b_1, b_0 = r_j),$$
$$\epsilon = (r_j, r_{j+1}, \ldots, r_m = r_0, r_1, \ldots, r_{i-1}, r_i).$$

Wegen $\mathrm{WP}(\gamma) = \varnothing$, $\mathrm{WP}(\delta) = \varnothing$, $\mathrm{WP}(\epsilon) = \varnothing$,

$$\mathrm{Set}(\gamma) \cup \mathrm{Set}(\delta) \subseteq L_A \cup L_B \subseteq \underline{li}[a_p] \cup \underline{li}[b_q] = \underline{li}[y],$$
$$\mathrm{Set}(\delta) \cup \mathrm{Set}(\epsilon) \subseteq L_B \cup L_R \subseteq \underline{li}[b_0] \cup \underline{li}[r_j] = \underline{li}[r_j],$$
$$\mathrm{Set}(\gamma) \cup \mathrm{Set}(\epsilon) \subseteq L_A \cup L_R \subseteq \underline{li}[a_0] \cup \underline{li}[r_i] = \underline{li}[r_i],$$

$p \geq 1$, $q \geq 1$ und $m > j$ gelten die Vorbedingungen von Lemma 4.95, und wir erhalten

$$((a_1\ li\ r_{i-1} \Leftrightarrow b_{q-1}\ li\ a_{p-1}) \Leftrightarrow r_{j+1}\ li\ b_1).$$

$r_{i+1}\ li\ r_{i-1}$, also auch $r_{i-1}\ li\ a_1$ wegen $r_{i+1}\ \underline{co}\ a_1$ und Axiom LCT. Es ist $r_{j+1}\ \underline{co}\ b_1$, also bleibt $b_{q-1}\ \underline{co}\ a_{p-1}$ als einzige Möglichkeit. Dies ist gerade $z\ \underline{co}\ x$. □

Lemma 4.101 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LEN}}$
Sei F_R eine Referenzorientierung, dann $\forall x, y, z \in X : (y\ F_R\ x \wedge y\ F_R\ z) \Rightarrow x\ \underline{co}\ z$.
Beweis Seien $x, y, z \in X$ mit $y\ F_R\ x$ und $y\ F_R\ z$ gegeben. Es gibt dann $i, j \in \{0, \ldots, m-1\}$ und $L_A, L_B \in$ Lines und im-Ketten $\alpha = (r_i = a_0, \ldots, a_{p-1} = y, a_p = x)$ und $\beta = (r_j = b_0, \ldots, b_{q-1} = y, b_q = z)$, für die gilt $\mathrm{Set}(\alpha) \subseteq L_A$, $\mathrm{Set}(\beta) \subseteq L_B$, $\mathrm{WP}(\alpha) = \varnothing$, $\mathrm{WP}(\beta) = \varnothing$, $p \geq 2$, $q \geq 2$, $r_{i+1}\ \underline{co}\ a_1$ und $r_{j+1}\ \underline{co}\ b_1$. Es gilt $x\ im\ y\ im\ z$.
Wir betrachten die Ketten

$$\gamma = (r_i = a_0, a_1, \ldots, a_{p-2}, a_{p-1} = y),$$
$$\delta = (y = b_{q-1}, b_{q-2}, \ldots, b_1, b_0 = r_j),$$
$$\epsilon = (r_j, r_{j+1}, \ldots, r_m = r_0, r_1, \ldots, r_{i-1}, r_i).$$

Wegen $\mathrm{WP}(\gamma) = \varnothing$, $\mathrm{WP}(\delta) = \varnothing$, $\mathrm{WP}(\epsilon) = \varnothing$,

$$\mathrm{Set}(\gamma) \cup \mathrm{Set}(\delta) \subseteq L_A \cup L_B \subseteq \underline{li}[a_{p-1}] \cup \underline{li}[b_{q-1}] = \underline{li}[y],$$
$$\mathrm{Set}(\delta) \cup \mathrm{Set}(\epsilon) \subseteq L_B \cup L_R \subseteq \underline{li}[b_0] \cup \underline{li}[r_j] = \underline{li}[r_j],$$
$$\mathrm{Set}(\gamma) \cup \mathrm{Set}(\epsilon) \subseteq L_A \cup L_R \subseteq \underline{li}[a_0] \cup \underline{li}[r_i] = \underline{li}[r_i],$$

$p - 1 \geq 1$, $q - 1 \geq 1$ und $m > j$ gelten die Vorbedingungen von Lemma 4.95, und wir erhalten die Formel

$$((a_1\ li\ r_{i-1} \Leftrightarrow b_{q-2}\ li\ a_{p-2}) \Leftrightarrow r_{j+1}\ li\ b_1).$$

$r_{i+1}\ li\ r_{i-1}$, also auch $r_{i-1}\ li\ a_1$ wegen $r_{i+1}\ \underline{co}\ a_1$ und Axiom LCT. Es ist $r_{j+1}\ \underline{co}\ b_1$, also bleibt $b_{q-2}\ \underline{co}\ a_{p-2}$ als einzige Möglichkeit.
Es ist $b_{q-2}\ li\ b_q$, also $a_{p-2}\ li\ b_q$ wegen Axiom LCT. Es ist $a_{p-2}\ li\ a_p$, also $a_p\ \underline{co}\ b_q$ wegen Axiom LOR. Dies ist jedoch gerade $x\ \underline{co}\ z$. □

Satz 4.102 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LEN}}$
Sei F_R eine Referenzorientierung, dann ist $F_R \in \text{Orient}$.
Beweis Wir überprüfen für F_R einzeln die von einer konsistenten Orientierung geforderten Eigenschaften.

- $F_R \cup F_R^{-1} = im$. $F_R \cup F_R^{-1} \subseteq im$ ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktion von F. Aus Lemma 4.98 folgt zusätzlich $F_R \cup F_R^{-1} \supseteq im$.
- $F_R \odot F_R \subseteq li$. Mit Lemma 4.99.
- $F_R \odot F_R^{-1} \subseteq \underline{co}$. Mit Lemma 4.100.
- $F_R^{-1} \odot F_R \subseteq \underline{co}$. Mit Lemma 4.101.

Also gilt der Satz. □

Korollar 4.103 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LEN}}$ $\boxed{\text{ERL}}$
$\text{Orient} \neq \varnothing$.
Beweis Mit Satz 4.97 und Satz 4.102. □

4.7.3 Eindeutigkeit der Fallklasse langer Strukturen

Wenn eine $\underline{co}$-Klique K gegeben ist, dann läßt sich diese nur durch solche Elemente aus X zu einem Ken erweitern, die mit ganz K in co stehen. Wir bezeichnen die Menge dieser Elemente als gemeinsamen co-Bereich der Klique.

Definition 4.104 [Gemeinsamer co-Bereich]
$CO(K) := \{x \in X \mid K \subseteq co[x]\}$. ◊

Die drei folgenden Axiome entsprechen den Annahmen 3, 4a und 4b aus [Ste93]. Um diese Bedingungen formulieren zu können, wurde $CO(K)$ in der genannten Arbeit eingeführt.

Axiom FDI [F-Dichte]
$\forall F \in \text{Orient} : \forall \alpha = (a_0, \ldots, a_n) \in \text{Zyklen}(F) : \forall C \in \text{Cuts} : n \geq 1 \Rightarrow \text{Set}(\alpha) \cap C \neq \varnothing$. ◊

Axiom LIG [li im gemeinsamen co-Bereich]
$\forall F \in \text{Orient} : \forall K \in \text{Kliquen}(\underline{co}) : \forall x, y \in CO(K) : x \; li \; y \Rightarrow \exists \alpha = (a_0, \ldots, a_n) \in \text{Ketten}(F|_{CO(K)}) : (x = a_0 \wedge y = a_n) \vee (y = a_0 \wedge x = a_n)$. ◊

Axiom COG [$\underline{co}$ im gemeinsamen co-Bereich]
$\forall F \in \text{Orient} : \forall K \in \text{Kliquen}(\underline{co}) : \forall x, y \in CO(K) : (K \neq \varnothing \wedge x \; \underline{co} \; y) \Rightarrow \neg \exists \alpha = (a_0, \ldots, a_n) \in \text{Ketten}(F|_{CO(K)}) : x = a_0 \wedge y = a_n \wedge n \geq 1$. ◊

In der oben genannten Arbeit beweist Stehr den folgenden Satz, der eine enge Beziehung zur Theorie der Netzsysteme herstellt.

Satz 4.105 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{IRR}}$ $\boxed{\text{KOH}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{REN}}$ $\boxed{\text{GAW}}$ $\boxed{\text{FDI}}$ $\boxed{\text{LIG}}$ $\boxed{\text{COG}}$ $\forall C_1, C_2 \in \text{Cuts} : (C_1 \subseteq S \wedge C_2 \subseteq S) \Rightarrow C_1 \; (R^{\leftrightarrow})^+ \; C_2$. □

Wir versuchen nun, Axiom LIG und Axiom COG aus den bereits bekannten Axiomen herzuleiten.

Satz 4.106 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LEN}}$ $\boxed{\text{KSE}}$
$\forall F \in \text{Orient} : \forall K \in \text{Kliquen}(\underline{co}) : \forall x, y \in CO(K) : x \; li \; y \Rightarrow \exists \delta = (d_0, \ldots, d_m) \in \text{Ketten}(F|_{CO(K)}) : (x = d_0 \wedge y = d_m) \vee (y = d_0 \wedge x = d_m)$.
Beweis Sei F eine konsistente Orientierung. Seien K, x und y nach den Voraussetzungen gegeben.
Sei $L \in \text{Lines}$ eine Linie mit $\{x, y\} \subseteq L$, dann gilt $Fin(L)$ wegen Axiom LEN. Sei $\alpha = (a_0, \ldots, a_n)$ ein im-Zyklus ohne Wiederholungen mit $\text{Set}(\alpha) = L$, dieser existiert wegen

Korollar 4.78. α ist nun ein F-Zyklus oder ein F^{-1}-Zyklus, wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß α ein F-Zyklus ist.
Wir können durch geeignetes Schieben von α sicherstellen, daß $a_0 = x$. Es gibt nun ein $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ mit $a_k = y$.
Sei $C \in$ Cuts ein Schnitt mit $K \subseteq C$. Sei $C' \in$ Cuts ein Schnitt mit $C \times C' \subseteq li$ gemäß Axiom KSE. Nach Axiom KDI ist $L \cap C' \neq \varnothing$, sei $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ so gewählt, daß $a_j \in L \cap C'$. Wegen $a_j \in C'$ und $K \subseteq C$ haben wir $\forall z \in K : z\ li\ a_j$. Wir erhalten

$$\forall z \in K : z\ \underline{co}\ a_0 \wedge z\ li\ a_j \wedge z\ \underline{co}\ a_k, \tag{4.15}$$

weil $\{a_0, a_k\} \subseteq CO(K)$.
Wenn es ein $u \in K \cap L$ gäbe, dann erzeugen $u\ \underline{li}\ x$ wegen $u, x \in L$ und $u\ co\ x$ wegen $u \in K$ einen Widerspruch. Also $K \cap L = \varnothing$.
Wir treffen eine Fallunterscheidung.

Fall 1: $j \leq k$. Es ist $0 \leq j \leq k$. Mit Lemma 4.83 und Formel 4.15 erhalten wir $\forall z \in K : \forall l \in \{k, \ldots, n-1\} : z\ \underline{co}\ a_l$. Da $K \cap L = \varnothing$ verschärft sich dies zu $\forall z \in K : \forall l \in \{k, \ldots, n-1\} : z\ co\ a_l$.
Also ist $\delta = (y = a_k, \ldots, a_{n-1}, a_n = a_0 = x)$ eine $F|_{CO(K)}$-Kette.

Fall 2: $j > k$. Sei $\gamma = (c_0 = a_n, \ldots, c_n = a_0)$, also das Inverse der Kette α. Sei $j' = n - j$ und $k' = n - k$. Es ergibt sich $c_0 = a_n = a_0 = c_n$, $c_{j'} = a_j$ und $c_{k'} = a_k$. Wir haben $\forall z \in K : z\ \underline{co}\ c_0 \wedge z\ li\ c_{j'} \wedge z\ \underline{co}\ c_{k'}$ und können wieder Lemma 4.83 anwenden, um $\forall z \in K : \forall l' \in \{k', \ldots, n-1\} : z\ \underline{co}\ c_{l'}$ zu erhalten.
Letztlich ist $\delta' = (x = c_n, c_{n-1}, \ldots, c_{k'} = a_k = y)$ eine $F|_{CO(K)}$-Kette.

Also gilt der Satz. □

Satz 4.107 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LEN}}$ $\boxed{\text{KSE}}$
$\forall F \in \text{Orient} : \forall x, y, z \in X : z\ co\ x\ \underline{co}\ y\ co\ z \Rightarrow \neg\exists \alpha = (a_0, \ldots, a_n) \in \text{Ketten}(F|_{co[z]}) : x = a_0 \wedge y = a_n \wedge n \geq 1$.
Beweis Sei F eine konsistente Orientierung.
Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen, es gibt $x, y, z \in X$ mit $z\ co\ x\ \underline{co}\ y\ co\ z$ und $\alpha = (x = a_0, \ldots, a_n = y) \in \text{Ketten}(F)$, so daß $\text{Set}(\alpha) \subseteq co[z]$. Wir können α nun so wählen, daß n minimal wird, aber trotzdem $n \geq 1$ gilt.
Wäre $n = 1$, dann ist $a_0 = x\ \underline{co}\ y = a_n = a_1$ im Widerspruch zu $a_0\ F\ a_1$. Wäre $n = 2$, dann steht $a_0 = x\ \underline{co}\ y = a_n = a_2$ im Widerspruch zu $a_0\ F\ a_1\ F\ a_2$. Also $n \geq 3$.
Wäre $a_i\ \underline{co}\ a_j$ für $0 \leq i < j < n$, dann wäre $\gamma = (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j)$ eine kürzere, aber nicht einelementige Kette mit den gegebenen Eigenschaften im Widerspruch zur Minimalität von n. Also ist $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ eine $\underline{li}$-Klique und kann zu einer Linie $L \in$ Lines mit $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\} \subseteq L$ erweitert werden. Ferner ist $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ frei von Wiederholungen.
$Fin(L)$ erhalten wir mit Axiom LEN. Satz 4.77 zeigt, daß es einen im-Zyklus ohne Wiederholungen $\delta = (d_0, \ldots, d_m)$ gibt, so daß $\text{Set}(\delta) = L$ und außerdem $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\} : d_i = a_i$ gilt.
Da $d_n\ li\ d_{n-2}$ und $a_n\ li\ a_{n-2}$, gilt $a_n\ \underline{co}\ d_n$ wegen Axiom LOR. Wegen $a_n\ im\ a_{n-1}$ gilt $a_n\ li\ d_{n-1}$. Es ist $a_n = y\ \underline{co}\ x = a_0 = d_0$.
$\{z, y\}$ ist eine $\underline{co}$-Klique und kann zu einem Schnitt C erweitert werden. Also gibt es gemäß Axiom KSE einen Schnitt $C' \in$ Cuts mit $C \times C' \subseteq li$. Wegen Axiom KDI gilt $C' \cap L \neq \varnothing$, also gibt es ein $l \in \{0, \ldots, m-1\}$ mit $d_l \in C' \cap L$.
Weil $d_l\ li\ z$, aber $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\} : d_i = a_i\ co\ z$, ergibt sich $l \notin \{0, \ldots, n-1\}$. Also $n \leq l$. Wegen $d_l\ li\ a_n$ und $d_n\ \underline{co}\ a_n$ verschärft sich diese Aussage zu $n < l$.

Nun ist $0 < n-1 < n < l < m$ und d_0 $\underline{co}$ a_n, d_{n-1} li a_n, d_n $\underline{co}$ a_n und d_l li a_n im Widerspruch zu Lemma 4.83. $\square$

Aus diesem Satz ergeben sich zwei Korollare, wobei das erste gerade dem Axiom COG entspricht. Das zweite Korollar wird später als Lemma benötigt.

Korollar 4.108 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LEN}}$ $\boxed{\text{KSE}}$
$\forall F \in \text{Orient} : \forall K \in \text{Kliquen}(\underline{co}) : \forall x, y \in CO(K) : (K \neq \varnothing \wedge x \ \underline{co} \ y) \Rightarrow \neg\exists\alpha = (a_0, \ldots, a_n) \in \text{Ketten}(F|_{CO(K)}) : x = a_0 \wedge y = a_n \wedge n \geq 1$.
Beweis Sei K eine nichtleere $\underline{co}$-Klique. Sei $z \in K$. Der Satz folgt nun unmittelbar aus Satz 4.107, da $CO(K) \subseteq co[z]$. $\square$

Korollar 4.109 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LEN}}$ $\boxed{\text{KSE}}$
$\forall F \in \text{Orient} : \forall z \in X : \forall \gamma = (c_0, \ldots, c_n) \in \text{Ketten}(F|_{co[z]}) : \forall i, j \in \{0, \ldots, n\} : i < j \Rightarrow c_i \ li \ c_j$.
Beweis Seien F, z und α nach Voraussetzung gegeben. Angenommen, $\exists i, j \in \{0, \ldots, n\} : i < j \wedge c_i \ \underline{co} \ c_j$, dann ergibt sich für $\alpha = (c_i, \ldots, c_j)$ und $x = c_i$ und $y = c_j$ ein Widerspruch mit Satz 4.107.
Also $\forall i, j \in \{0, \ldots, n\} : i < j \Rightarrow c_i \ li \ c_j$. $\square$

Nun zeigen wir noch, daß aus Axiom KSE Axiom FDI folgt.

Lemma 4.110 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LEN}}$
$\forall F \in \text{Orient} : \forall x \in X : \forall \alpha = (a_0, \ldots, a_n) \in \text{Zyklen}(F) : n \geq 1 \Rightarrow (\exists y \in \text{Set}(\alpha) : y \ \underline{co} \ x)$.
Beweis Sei $x \in X$ und sei $\alpha = (a_0, \ldots, a_n)$ ein F-Zyklus. Wir nehmen für einen Widerspruchsbeweis an, daß $\text{Set}(\alpha) \subseteq li[x]$.
Wegen $x \ li \ a_0$ gibt es eine Linie $L \in \text{Lines}$ mit $x, a_0 \in L$. Mit Axiom LKO erhalten wir eine $F|_L$-Kette oder eine $F^{-1}|_L$-Kette ohne Wiederholungen von x nach a_0. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, es gäbe eine $F|_L$-Kette $\beta = (x = b_0, b_1, \ldots, b_m = a_0)$ ohne Wiederholungen. Weil $\text{Set}(\beta) \subseteq L$ ist $\{b_1, \ldots, b_m\} \subseteq li[b_0] = li[x]$.
Sei $\gamma = (c_0, \ldots, c_m, \ldots, c_{m+n}) = (x = b_0, b_1, \ldots, b_m = a_0, a_1, \ldots, a_n)$, dann ist γ eine F-Kette und folglich eine im-Kette mit $\text{WP}(\gamma) = \varnothing$. Außerdem gilt $\text{Set}(\gamma) \subseteq li[x]$. Damit können wir Lemma 4.91 anwenden, es ergibt sich $\forall i, j \in \{0, \ldots, n+m\} : i \neq j \Rightarrow c_i \ li \ c_j$.
Dies heißt aber $c_m \ li \ c_{m+n}$ wegen $m \neq m + n$. Es ergibt sich ein Widerspruch mit $c_m = a_0 = a_n = c_{m+n}$.
Also $\exists y \in \text{Set}(\alpha) : y \ \underline{co} \ x$. $\square$

Satz 4.111 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LEN}}$ $\boxed{\text{KSE}}$
$\forall F \in \text{Orient} : \forall \alpha = (a_0, \ldots, a_n) \in \text{Zyklen}(F) : \forall C \in \text{Cuts} : n \geq 1 \Rightarrow \text{Set}(\alpha) \cap C \neq \varnothing$.
Beweis Sei $C \in \text{Cuts}$ und sei $\alpha = (a_0, \ldots, a_n)$ ein im-Zyklus mit $n \geq 1$. Sei $x \in C$. Wenn $x \in \text{Set}(\alpha)$, dann gilt der Satz offensichtlich. Wir betrachten also den Fall $x \notin \text{Set}(\alpha)$.
Lemma 4.110 führt zu $\exists y \in \text{Set}(\alpha) : y \ \underline{co} \ x$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $a_0 \ \underline{co} \ x$, wenn dies nicht gilt, könnte dieser Fall durch zyklisches Schieben erreicht werden. Es ist nun auch $a_n = a_0 \ \underline{co} \ x$.
Wäre $\text{Set}(\alpha) \subseteq co[x]$, dann ergäbe sich unmittelbar ein Widerspruch mit Korollar 4.108. Also gibt es ein $p \in \{0, \ldots, n-1\}$, für das $a_p \ \underline{li} \ x$ gilt. Mit $x \notin \text{Set}(\alpha)$ verschärft sich dies zu $a_p \ li \ x$. Jetzt führt uns $a_0 \ \underline{co} \ x$ zu $p \neq 0$, also $1 \leq p \leq n-1$.
Wir setzen $q = \min\{0 \leq i \leq n-1 \mid a_i \ \underline{co} \ x \wedge a_{i+1} \ li \ x\}$ und $r = \max\{1 \leq i \leq n \mid a_i \ \underline{co} \ x \wedge a_{i-1} \ li \ x\}$. Wegen $a_0 \ \underline{co} \ x$, $a_p \ li \ x$ und $a_n \ \underline{co} \ x$ sind diese Werte definiert und es gilt $0 \leq q < p < r \leq n$.
Sei $\gamma = (a_r, \ldots, a_n = a_0, \ldots, a_q)$, dann $\gamma \in \text{Ketten}(F)$. Weil zudem $\text{Set}(\gamma) \subseteq co[x]$ bekannt ist, können wir mittels Korollar 4.109 leicht $\mathit{Einf}(\gamma)$ und $\text{Set}(\gamma) \in \text{Kliquen}(\underline{li})$ folgern.

Wegen a_q *im* a_{q+1} und x *co* a_q und x *li* a_{q+1}, ist a_q P a_{q+1}. Gleichermaßen a_r P a_{r-1}. Wir schließen daraus, daß auch $\mathrm{Set}(\gamma) \cup \{a_{q+1}, a_{r-1}\}$ eine $\underline{li}$-Klique ist, die wir zu einer Linie $L \in \mathrm{Lines}$ erweitern. $Fin(L)$ wegen Axiom LEN. Sei

$$\beta = (a_{r-1}, a_r, \ldots, a_n = a_0, \ldots, a_q) = (b_0, b_1, \ldots, b_{n+1-r}, \ldots, b_{n+q+1-r}).$$

Mit $Einf(\gamma)$, a_{r-1} *li* x und $\mathrm{Set}(\gamma) \subseteq co[x]$ erhalten wir $Einf(\beta)$. Satz 4.77 beweist, daß es $\delta = (d_0, \ldots, d_m)$ gibt mit $\mathrm{Set}(\delta) = L$, $\mathrm{AWP}(\delta) = \varnothing$, $ZykEinf(\delta)$ und $\forall i \in \{0, \ldots, n+q+1-r\} : d_i = b_i$.
Unter Verwendung von Satz 4.23 erhalten wir $L \cap im[d_{n+q+1-r}] = \{d_{n+q-r}, d_{n+q+2-r}\}$ und weiter $L \cap im[a_q] = \{a_{q-1}, d_{n+q+2-r}\}$. Weil $a_{q+1} \in L \cap im[a_q]$ und $a_{q+1} \neq a_{q-1}$, ergibt sich $d_{n+q+2-r} = a_{q+1}$. Es ist $d_0 = a_{r-1}$ *li* x, $d_1 = a_r$ *co* x und $d_{n+q+2-r} = a_{q+1}$ *li* x. Lemma 4.82 ergibt nun $\forall i \in \{n+q+2-r, \ldots, m\} : d_i$ *li* x. Also $\underline{co}[x] \cap L \subseteq \{d_1, \ldots, d_{n+q+1-r}\} = \mathrm{Set}(\gamma)$. Axiom KDI zeigt, daß es ein $z \in C \cap L$ gibt. Wegen $x \in C$ gilt $z \in \underline{co}[x] \cap L$, also $z \in \mathrm{Set}(\gamma) \subseteq \mathrm{Set}(\alpha)$. □

Damit zeigt sich, daß im wesentlichen Axiom EKO, Axiom KDI und Axiom KSE ausreichen, um die Menge der S-Schnitte als eine Fallklasse des Netzes zu charakterisieren. Dieser Satz läßt noch eine kleine Lücke, denn Axiom KSE ist möglicherweise ein zu einschränkendes Axiom. Vielleicht genügt Axiom LSL oder gar Axiom ERL, um die eindeutige Fallklasse herzustellen.

Kapitel 5

Axiomensysteme

Da hat er die Teile in seiner Hand,
fehlt leider! nur das geistige Band.

Johann Wolfgang von Goethe, in *„Faust“*

Schon im vorherigen Kapitel konnten wir sehen, daß selten ein Axiom genügte, um interessante Sätze herleiten zu können, vielmehr ist es stets das Zusammenspiel mehrerer Axiome, das neue Erkenntnisse erbringt. Deswegen sollen jetzt verschiedene Systeme von Axiomen vorgestellt werden.

Es werden einige Axiomensysteme darunter sein, die schon früher von Petri oder seinen Schülern untersucht wurden, aber auch neue, die auf ungewöhnlichen Wegen zum Ziel kommen. Das Alter der Systeme soll aber nicht die Reihenfolge im folgenden Text bestimmen, denn viel besser gelingt eine Klassifikation der Systeme an Hand der Frage, ob Axiom OBS gültig ist, das heißt, ob alle Modelle ordnungsbasiert sind oder nicht.

5.1 Nicht ordnungsbasierte Systeme

Wenn wir nicht verlangen, daß li aus einer Ordnung entstehen muß, dann können wir gleichzeitig zyklische und azyklische Modelle behandeln. Dies ist der entscheidende Punkt, der die folgenden Systeme interessant macht.

5.1.1 Minimalsystem

Dieses System wurde in [Mül93] als Quintessenz aller von Petri veröffentlichten Axiomensysteme zur Theorie der Nebenläufigkeit herausgearbeitet. Es stellt gewissermaßen einen kleinsten gemeinsamen Nenner aller Systeme dar, weshalb die Anzahl der Axiome gering und die Klasse der möglichen Modelle groß ist.

$$\boxed{\text{KAA}}\ \boxed{\text{IMK}}\ \boxed{\text{LOR}}\ \boxed{\text{LCT}}\ \boxed{\text{LOR}}$$
$$\boxed{\text{NTR}}\ \boxed{\text{VST}}\ \boxed{\text{DIS}}\ \boxed{\text{SYM}}\ \boxed{\text{IRR}}\ \boxed{\text{KOH}}\ \boxed{\text{KDI}}$$

In der Darstellung enthält die untere Ebene die Axiome, die sich direkt mit den Relationen co und li beschäftigen und die sozusagen das Fundament der Theorie bilden. In der oberen Ebene haben wir dann die komplizierteren Axiome, die sich auf die im-Relation beziehen, also beispielsweise die lokalen Axiome.

Es ergibt sich in diesem System unmittelbar, daß $\boxed{\text{NDI}}$, $\boxed{\text{LOR}}$, $\boxed{\text{LCT}}$, $\boxed{\text{COI}}$, $\boxed{\text{LII}}$, $\boxed{\text{COK}}$ und $\boxed{\text{LIK}}$ gelten. Axiom NTR wurde nicht als gleichwertig in die Liste der Axiome aufgenommen wurde, sondern es wurde implizit angenommen, daß die Struktur nicht trivial ist.

Axiom LOR und Axiom LCT wurden zu einem Axiom zusammengefaßt, was auf Grund der Formulierung leicht möglich ist. Ganz allgemein ist es möglich, die lokalen Axiome miteinander zu kombinieren, was dann auch in manchen Systemen geschieht. Der Beweis der Äquivalenz ist stets so eindeutig, daß wir uns mit diesen Varianten nicht beschäftigen müssen.

Durch die Einschränkung auf die Axiome, die bei Petri immer vorkommen, entsteht notwendigerweise ein schwaches System, das insbesondere keine Bedingung enthält, um eine globale Ordnung zu sichern. Petri hat in seinen veröffentlichten Arbeiten stets eines der Axiome OBS, NOR oder KOR verwendet, jedoch nicht stets dasselbe Axiom, weshalb keines der drei Axiome als zum Kern des Systems gehörig erachtet wurde. Zudem bestand noch die Hoffnung, daß sich Axiom KOR durch die lokale Orientierbarkeit garantieren läßt. Wie wir jetzt wissen, hat sich diese Hoffnung nicht erfüllt.

Auch alle anderen Probleme, die durch die Gegenbeispiele demonstriert wurden, treten in diesem System auf. Namentlich Axiom EKO und Axiom LKO müssen nicht erfüllt sein, so daß wir die Klasse der möglichen Modelle eindeutig als zu groß bezeichnen müssen.

5.1.2 Episodenkohärenz

Wir ersetzen nun im Minimalsystem Axiom IMK durch Axiom EKO, um damit einige der Probleme aus der Welt zu schaffen.

$$\boxed{\text{KAA}}\ \boxed{\text{EKO}}\ \boxed{\text{LOR}}\ \boxed{\text{LCT}}\ \boxed{\text{LFO}}$$
$$\boxed{\text{NTR}}\ \boxed{\text{VST}}\ \boxed{\text{DIS}}\ \boxed{\text{SYM}}\ \boxed{\text{IRR}}\ \boxed{\text{KOH}}\ \boxed{\text{KDI}}$$

Es folgt $\boxed{\text{LKO}}$ mit Satz 4.10 und $\boxed{\text{IMK}}$ mit Satz 4.9. Es bleibt aber immer noch die Möglichkeit, daß sich keine Orientierung finden läßt.

5.1.3 Orientierbarkeit

Wir ersetzen jetzt im Vergleich zum vorigen System Axiom LCT und Axiom LOR durch Axiom KOR.

$$\boxed{\text{KAA}}\ \boxed{\text{EKO}}\ \boxed{\text{KOR}}\ \boxed{\text{LFO}}$$
$$\boxed{\text{NTR}}\ \boxed{\text{VST}}\ \boxed{\text{DIS}}\ \boxed{\text{SYM}}\ \boxed{\text{IRR}}\ \boxed{\text{KOH}}\ \boxed{\text{KDI}}$$

Wiederum folgt $\boxed{\text{LKO}}$ mit Satz 4.10 und $\boxed{\text{IMK}}$ mit Satz 4.9. Aus Axiom KOR ergeben sich mit Hilfe von Satz 4.50 und Satz 4.51 die Axiome $\boxed{\text{LCT}}$ und $\boxed{\text{LOR}}$.

Wir haben nun in Bezug auf Orientierbarkeit, Linien- und Episodenkohärenz ein System, das nur gutartige Modelle besitzt. Es lassen sich in diesem System außerdem zyklische und azyklische Modelle gleichermaßen behandeln. Die Menge der S-Schnitte mancher Modelle besteht aus mehr als einer Fallklasse, was manchmal unerwünscht ist, aber auch interessante Strukturen ermöglicht.

5.1.4 Länge

Dieses Axiomensystem basiert nach wie vor auf dem Minimalsystem, mit dem wir dieses Kapitel begonnen haben. Wir verwenden jedoch zusätzlich die Episodenkohärenz, die Linienendlichkeit und ein Axiom der Länge.

$\boxed{\text{KSE}}$ $\boxed{\text{LEN}}$

$\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LFO}}$

$\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{SYM}}$ $\boxed{\text{IRR}}$ $\boxed{\text{KOH}}$ $\boxed{\text{KDI}}$

Wir haben Axiom KSE und Axiom LEN in eine dritte Zeile gestellt, da sie wiederum auf eine deutlich komplexere Art und Weise als die anderen Axiome in die Theorie eingreifen. Sie sind auch erst dann sinnvoll, wenn durch die anderen Axiome das Fundament der Theorie gelegt wurde.

Unmittelbar klar sollte inzwischen die Gültigkeit von $\boxed{\text{LKO}}$ und $\boxed{\text{IMK}}$ sein. Die Orientierbarkeit in Form von $\boxed{\text{KOR}}$ ergibt sich durch Korollar 4.103. Mit der Linienendlichkeit folgt auch $\boxed{\text{EEN}}$. Aus Axiom KSE werden mit Satz 4.89 und Satz 4.88 die Axiome $\boxed{\text{LSL}}$ und $\boxed{\text{ERL}}$.

Dann geben uns Satz 4.106, Korollar 4.108 und Satz 4.111 Zugriff auf die Axiome $\boxed{\text{LIG}}$, $\boxed{\text{COG}}$ und $\boxed{\text{FDI}}$. Dies sind nach Satz 4.105 aber gerade die Voraussetzungen dafür, daß die Menge der S-Schnitte eine eindeutige Fallklasse darstellt. Man könnte noch diskutieren, ob nicht Axiom KSE zu stark gewählt ist. Immerhin würde Axiom ERL reichen, um die Orientierbarkeit zu gewährleisten, und es ist nicht klar, ob die Eindeutigkeit der Fallklasse notwendig ist. Vielleicht läßt sich auch der Beweis zu Satz 4.105 noch mit schwächeren Voraussetzungen führen.

5.1.5 System von Stehr

Dieses System wird in [Ste93] verwendet, wobei wir uns hier auf die explizit genannten Axiome beschränken und diese erst im nächsten Abschnitt um die zusätzlichen Annahmen erweitern.

$\boxed{\text{REN}}$

$\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LFO}}$

$\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{SYM}}$ $\boxed{\text{IRR}}$ $\boxed{\text{KOH}}$ $\boxed{\text{KDI}}$

Damit sind gegenüber dem Minimalsystem durch Axiom LKO die unzusammenhängenden Linien entfallen, $\boxed{\text{IMK}}$ gilt weiterhin wegen Satz 4.9.

Automatisch folgt mit Axiom REN auch $\boxed{\text{EEN}}$ und $\boxed{\text{SEN}}$. Satz 4.49 ergibt mit Axiom EEN eine saubere Trennung in zyklische und azyklische Modelle, also Modelle mit nur endlichen oder nur unendlichen Linien. Wesentlich stärkere Beweise lassen sich aber nicht führen.

5.1.6 System von Stehr mit zusätzlichen Annahmen

Jetzt fügen wir zum vorigen System noch die Annahmen 2, 3, 4a und 4b aus [Ste93] hinzu und erhalten ein sehr starkes System. Dabei verzichten wir auf Annahme 1, da diese in Form von Theorem 4.20 mittlerweile bewiesen ist.

$\boxed{\text{COG}}$ $\boxed{\text{LIG}}$

$\boxed{\text{REN}}$ $\boxed{\text{GAW}}$ $\boxed{\text{FDI}}$

$\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LFO}}$

$\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{SYM}}$ $\boxed{\text{IRR}}$ $\boxed{\text{KOH}}$ $\boxed{\text{KDI}}$

Die Formulierung von Axiom GAW ist zwar im Ausdruck etwas anders, aber äquivalent. Mit diesem Axiom können wir $\boxed{\text{KOR}}$ ableiten, indem wir Satz 4.58 anwenden. Wie im vorigen System erhalten wir $\boxed{\text{EEN}}$, $\boxed{\text{SEN}}$ und $\boxed{\text{IMK}}$.

Satz 5.1 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{KOH}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{REN}}$ $\boxed{\text{FDI}}$ $\boxed{\text{LIG}}$
$(\forall L \in \text{Lines} : \neg Fin(L)) \Rightarrow (\forall F \in \text{Orient} : li = F^+ \cup (F^{-1})^+)$. □

Der vorige Satz wird in der oben genannten Arbeit von Stehr bewiesen und dient uns jetzt dazu, die Episodenkohärenz herzuleiten.

Satz 5.2 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{KOH}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{REN}}$ $\boxed{\text{EEN}}$ $\boxed{\text{KOR}}$ $\boxed{\text{FDI}}$ $\boxed{\text{LIG}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : E = L \cap \underline{co}[x] \Rightarrow (im|_E)^*_E = E \times E$.

Beweis Sei $L \in$ Lines und $x \in X$. Sei $E = L \cap \underline{co}[x]$ und $y, z \in E$. Wir nehmen für einen Widerspruchsbeweis an, daß $\neg y\ (im|_E)^*_E\ z$.
Sei F eine konsistente Orientierung gemäß Axiom KOR.

Fall 1: $\neg Fin(L)$. Wegen Satz 4.49 gilt $\forall L \in \text{Lines} : \neg Fin(L)$ und $li = F^+ \cup (F^{-1})^+$ ergibt sich damit aus Satz 5.1.
Wegen Axiom LKO gibt es eine $F|_L$-Kette von y nach z oder von z nach y. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit den ersten Fall an und fixieren $\alpha = (y = a_0, a_1, \ldots, a_n = z)$. α ist auch eine $im|_L$-Kette, kann aber nach Widerspruchsannahme keine $im|_E$-Kette sein.
Also gibt es ein $i \in \{0, \ldots, n\}$ mit $x\ li\ a_i$. Wäre nun $x\ F^+\ a_i$, dann auch $x\ F^+\ z$ im Widerspruch zu $x\ \underline{co}\ z$. Also $a_i\ F^+\ x$, aber dies führt nun zu $y\ F^+\ x$ und somit zu einem Widerspruch mit $y\ \underline{co}\ x$.

Fall 2: $Fin(L)$. Falls $y = z$, dann gilt der Satz trivial, also beschränken wir uns auf $y \neq z$.
Wäre nun $x \in L$, dann ergibt sich $y\ \underline{li}\ x\ \underline{li}\ z$. Mit $y\ \underline{co}\ x\ \underline{co}\ z$ gilt auch $y = x = z$ im Widerspruch zu $y \neq z$. Somit $x \notin L$. Zusammen mit $y, z \in L$ ergibt sich $y \neq x \neq z$, also $y\ co\ x\ co\ z$.
Wenn $L - \underline{co}[x] = \emptyset$, dann $E = L$. Der Satz ergibt sich einfach aus Axiom LKO. Wir beschränken uns also auf $L - \underline{co}[x] \neq \emptyset$.
$(L - \underline{co}[x]) \cup \{x\}$ ist eine $\underline{li}$-Klique, daher gibt es eine Linie L' mit $L - \underline{co}[x] \subseteq L'$ und $x \in L'$. Wegen $y\ co\ x\ co\ z$ gilt $y, z \notin L'$. Die Linie L' ist wegen Satz 4.49 ebenfalls endlich. Man überzeugt sich leicht von $L \cap L' = L - \underline{co}[x] \neq \emptyset$.
Sei $w \in L \cap L'$. Mit Satz 4.23 folgern wir, daß es ein $u \in L$ mit $w\ F\ u$ gibt. Ebenso gibt es ein $v \in L'$, so daß $w\ F\ v$. Es sind (w, u) und (w, v) im-Ketten ohne Wiederholungen aus denen wir mit Satz 4.77 zwei im-Zyklen $\alpha = (a_0 = w, a_1 = u, a_2, \ldots, a_n)$ und $\beta = (b_0 = w, b_1 = v, b_2, \ldots, b_m)$ gewinnen, so daß $ZykEinf(\alpha)$, $ZykEinf(\beta)$, $\text{Set}(\alpha) = L$, $\text{Set}(\beta) = L'$, $\text{AWP}(\alpha) = \emptyset$ und $\text{AWP}(\beta) = \emptyset$ gilt. Wir erhalten $\alpha \in \text{Zyklen}(F)$ und $\beta \in \text{Zyklen}(F)$, indem wir von $w\ F\ u$ und $w\ F\ v$ ausgehen.
Es gibt $r, s \in \{0, \ldots, n\}$, so daß $a_r = y$ und $a_s = z$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r \leq s$. Aus $x \neq y \neq z \neq x$ ergibt sich $0 < r < s < n$. Wäre $\forall q \in \{r, \ldots, s\} : a_q\ \underline{co}\ x$, dann wäre $(a_r, a_{r+1}, \ldots, a_s) \in \text{Ketten}(im|_E)$ im Widerspruch zur Annahme. Also $\exists q \in \{r, \ldots, s\} : a_q\ li\ x$, und wir wählen ein solches q fest. $x\ \underline{co}\ a_r$, $x\ li\ a_q$ und $x\ \underline{co}\ a_s$ führen zu $r \neq q \neq s$ und weiter $r < q < s$.
$x\ li\ a_q$ führt zu $a_q \in L'$. In Anbetracht von $\text{Set}(\beta) = L'$ wählen wir $j \in \{0, \ldots, m\}$, so daß $b_j = a_q$. Wegen $x \in L'$ können wir auch $k \in \{0, \ldots, m\}$ wählen mit $b_k = x$. Mit $x\ li\ a_q$ erhalten wir $b_k = x \neq a_q = b_j$, also $k \neq j$. Aus $x\ li\ w$ folgt $b_k = x \neq w = b_0 = b_n$, daher verbleibt nur $0 < k < m$.

Unterfall a: $j < k$. Sei $\gamma = (w = b_0, b_1, \ldots, b_j = a_q, a_{q+1}, \ldots, a_n = w)$. δ ist ein

F-Zyklus. $\{x, y\} \in \text{Kliquen}(\underline{co})$, also gibt es $C \in \text{Cuts}$ mit $\{x, y\} \subseteq C$. $\{b_0, b_1, \ldots, b_j\} \subseteq L'$, also $\{b_0, b_1, \ldots, b_j\} \subseteq \underline{li}[x]$. Wegen $j < k < m$ und *ZykEinf*(β) gilt $b_k \notin \{b_0, b_1, \ldots, b_j\}$. Aber $x = b_k$, also $\{b_0, b_1, \ldots, b_j\} \subseteq li[x]$. $\{a_q, a_{q+1}, \ldots, a_n\} \subseteq L$, also $\{a_q, a_{q+1}, \ldots, a_n\} \subseteq \underline{li}[y]$. Wegen $r < q$ gilt $a_r \notin \{a_q, a_{q+1}, \ldots, a_n\}$. Aber $y = a_r$, also $\{a_q, a_{q+1}, \ldots, a_n\} \subseteq li[y]$. Zusammen ergibt sich $\text{Set}(\gamma) \subseteq li[x] \cup li[y]$ oder abgeschwächt $\text{Set}(\gamma) \subseteq li[C]$ im Widerspruch zu $\text{Set}(\gamma) \cap C \neq \varnothing$ gemäß Axiom FDI.

Unterfall b: $k < j$. Sei diesmal $\delta = (w = a_0, a_1, \ldots, a_q = b_j, b_{j+1}, \ldots, b_m = w)$. Wir wählen $C' \in \text{Cuts}$ mit $\{x, z\} \subseteq C'$. Der Rest des Beweises verläuft analog zum vorigen Unterfall.

L ist entweder endlich oder unendlich, also ist die Fallunterscheidung vollständig. □

Durch den letzten Beweis wurde gezeigt, daß auch Axiom EKO gilt. Deshalb gibt es keine Modelle dieses Systems, die der Intuition widersprechende Eigenschaften aufweisen. Es gilt auch Satz 4.105, das heißt, daß die Menge der S-Schnitte einer Fallklasse des zugeordneten Netzes entspricht.

Daß alle Modelle so gutmütig gestaltet sind, geht einher mit der Tatsache, daß dies System von allen, die gleichzeitig zyklische und azyklische Modelle erlauben, das strengste ist. Vielleicht ist sind die Axiome jedoch wiederum zu stark, beispielsweise ließe sich lange über die Gültigkeit der Axiome REN, COG und LIG diskutieren.

Das Axiomensystem ließe sich in seiner Formulierung noch geringfügig abschwächen, indem wir Axiom GWE anstelle von Axiom GAW für die Sicherung der konsistenten Orientierbarkeit wählen, ohne daß dies an den Überlegungen etwas ändern würde.

5.1.7 Nebenläufigkeit und Physik

Dies ist das System aus dem Artikel [Pet82], wo Petri ein recht kleines Axiomensystem vorstellt, in der Hoffnung, daß sich die wenigen verwendeten Axiome dann um so leichter mit Hilfe von elementaren physikalischen Gesetzmäßigkeiten begründen lassen.

Wir können hier auf Bezüge zur Physik nicht eingehen, sondern wollen nur die Stärke des Axiomensystems untersuchen. Im Gegensatz zum oben genannten Artikel betrachten wir *co* als irreflexiv, was geringfügige Änderungen mit sich bringt, aber nicht entscheidend ist.

$\boxed{\text{KAA}}\ \boxed{\text{IMK}}\ \boxed{\text{LOR}}\ \boxed{\text{LCT}}\ \boxed{\text{LFO}}\ \boxed{\text{KOR}}$

$\boxed{\text{NTR}}\ \boxed{\text{VST}}\ \boxed{\text{DIS}}\ \boxed{\text{SYM}}\ \boxed{\text{IRR}}\ \boxed{\text{KOH}}\ \boxed{\text{KDI}}$

Petri erwähnt Axiom TEN, weist aber darauf hin, daß dies Axiom nicht universelle Gültigkeit besitzen soll, sondern nur eine besonders interessante Klasse von Modellen kennzeichnet.

Petri führt in diesem Artikel zwar *co* und *li* über den Umweg einer Ordnung ein, erwähnt aber kein Äquivalent von Axiom OBS. Da er das 4-Jahreszeiten-Netz als Modell für das Axiomensystem nennt, ist also anzunehmen, daß Petri dieses Axiomensystem explizit nicht ordnungsbasiert gestalten wollte.

Petri hat dafür zwar Axiom KOR verlangt, was übrigens die Axiome LOR und LCT impliziert, aber dies kann Axiom OBS nicht vollständig ersetzen. Es entstehen nämlich Probleme durch Verletzungen der Axiome LKO und EKO. Diese beiden Probleme waren aber noch unbekannt, als der Artikel erschien, ansonsten hätte Petri sie bestimmt behandelt.

5.2 Ordnungsbasierte Systeme

Alle ab jetzt behandelten Systeme enthalten entweder Axiom OBS direkt, oder es kann als Satz in den Systemen abgeleitet werden.

5.2.1 System von Best und Merceron

In [BM85] wird *co* als von einer Halbordnung abgeleitet betrachtet, und *li* wird über *co* definiert. Dadurch erfüllen die Strukturen stets die Axiome DIS, VST, SYM und OBS, obwohl diese Axiome nicht explizit angegeben werden. Der Artikel nimmt *co* als reflexiv an, dem wollen wir uns aber nicht anschließen.

$$\boxed{\text{KAA}}\ \boxed{\text{LCT}}\ \boxed{\text{LOR}}\ \boxed{\text{LFO}}\ \boxed{\text{IMK}}\ \boxed{\text{OBS}}\ \boxed{\text{KOR}}$$
$$\boxed{\text{NTR}}\ \boxed{\text{VST}}\ \boxed{\text{DIS}}\ \boxed{\text{SYM}}\ \boxed{\text{COI}}\ \boxed{\text{LII}}\ \boxed{\text{KOH}}\ \boxed{\text{KDI}}$$

Hiermit lösen sich die meisten Probleme, da die Orientierbarkeit, sogar in zweifacher Ausfertigung, explizit angenommen wird. Satz 4.70 zeigt, daß Axiom KOR und damit auch Axiom LCT aus den anderen Axiomen hergeleitet werden können und daher überflüssig sind. Dies System war jedoch nie als Minimalsystem gedacht.

Es kann keine endlichen Linien geben, da durch die Transitivität der Ordnungsrelation die lokale Fortsetzbarkeit auch immer die Fortsetzbarkeit jeder einzelnen Linie impliziert.

Satz 5.3 $\boxed{\text{Basis}}\boxed{\text{NTR}}\boxed{\text{COI}}\boxed{\text{KAA}}\boxed{\text{IMK}}\boxed{\text{LOR}}\boxed{\text{LFO}}\boxed{\text{NDI}}\boxed{\text{OBS}}$ $\forall L \in$ Lines : L ist unendlich.

Beweis Sei $<$ eine Halbordnung mit $li = (< \cup <^{-1})$, diese existiert wegen Axiom OBS. Angenommen, es gäbe eine endliche Linie L. Diese Linie ist durch die Relation $<$ total geordnet. Sei $x = \min_< L$. Wegen Axiom IMK und Axiom NTR gibt es ein $y \in im[x]$. Wegen Axiom LFO gibt es ein $z \in im[x]$ mit $z \; li \; y$. $F = \lessdot$ ist eine konsistente Orientierung wegen Satz 4.70. Nun ist entweder $z \; F \; x \wedge x \; F \; y$ oder $y \; F \; z \wedge z \; F \; x$. In jedem Fall $\exists w \in X : w \lessdot x$, dies ergibt jedoch $\exists w \in X : L \subseteq li[w]$, Widerspruch.
Also gibt es keine endliche Linie. □

Jetzt haben wir also zusätzlich $\boxed{\text{LUE}}$. Lediglich Axiom LKO und Axiom EKO fehlen noch im System. Bereits im Originalartikel wurde aber durch ein Gegenbeispiel gezeigt, daß diese Sätze in der Tat nicht gelten.

5.2.2 Natürliche Ordnung

Dies ist der klassische Ansatz von Petri, wie er beispielsweise in [Pet80] dargestellt ist.

$$\boxed{\text{KAA}}\ \boxed{\text{LOR}}\ \boxed{\text{LCT}}\ \boxed{\text{LFO}}\ \boxed{\text{NOR}}$$
$$\boxed{\text{NTR}}\ \boxed{\text{VST}}\ \boxed{\text{DIS}}\ \boxed{\text{SYM}}\ \boxed{\text{IRR}}\ \boxed{\text{KOH}}\ \boxed{\text{KDI}}$$

Wir verwenden hier Axiom NTR statt der etwas stärkeren Formulierung $|X| > 2$, die Petri benutzt hat. Petris System beinhaltete außerdem noch die Axiome $\boxed{\text{COI}}$, $\boxed{\text{LII}}$, $\boxed{\text{COK}}$, $\boxed{\text{LIK}}$ und $\boxed{\text{NDI}}$, die sich aus den anderen Axiomen ableiten lassen. Die Idee war dabei wohl, daß sich diese Axiome leichter verstehen und motivieren lassen, verglichen mit den stärkeren Axiomen IRR, KOH oder KDI. Daher besitzen auch die schwachen Axiome eine Daseinsberechtigung.

Petri erwähnte auch einige Axiome zur sogenannten Detailrelation $D := \{(x, y) \in X \times X \mid \underline{co}[x] \subsetneq \underline{co}[y]\}$. Die Detailaxiome wurden in dieser Arbeit nicht behandelt, denn es sind keine

Beweise bekannt, in denen die Verwendung der Detailrelation eine neue Erkenntnis gebracht hätte.

Es gilt sicher $\boxed{\text{OBS}}$ wegen Satz 4.65 und $\boxed{\text{KOR}}$ wegen Satz 4.72. Da die Relationen *co* und *li* über den Umweg von Netzen eingeführt wurden, ist klar, daß die Gültigkeit von Axiom KOR unbedingt erwünscht war.

Das im vorigen Abschnitt erwähnte Gegenbeispiel aus [BM85] erfüllt alle Axiome dieses Systems, da insbesondere Axiom NOR gültig ist. Somit können wir die Axiome LKO und EKO auch in diesem System nicht ableiten.

5.2.3 Linienkohärenz

Wir ersetzen gegenüber dem vorigen System Axiom NOR durch Axiom OBS, außerdem verdrängt Axiom LKO das vorher verwendete Axiom IMK. Wir entfernen Axiom LCT, da wir es aus anderen Axiomen herleiten können.

$$\boxed{\text{KAA}}\ \boxed{\text{LOR}}\ \boxed{\text{LFO}}\ \boxed{\text{LKO}}\ \boxed{\text{OBS}}$$
$$\boxed{\text{NTR}}\ \boxed{\text{VST}}\ \boxed{\text{DIS}}\ \boxed{\text{SYM}}\ \boxed{\text{IRR}}\ \boxed{\text{KOH}}\ \boxed{\text{KDI}}$$

Offensichtlich gelten $\boxed{\text{COK}}$, $\boxed{\text{LIK}}$, $\boxed{\text{COI}}$ und $\boxed{\text{LII}}$. Unter Verwendung von Satz 4.9, Satz 4.7, Satz 4.72, Satz 4.50 und Satz 5.3 ergeben sich $\boxed{\text{IMK}}$, $\boxed{\text{NDI}}$, $\boxed{\text{KOR}}$, $\boxed{\text{LCT}}$ und $\boxed{\text{LUE}}$.

Lemma 5.4 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\forall F \in \text{Orient} : \forall L \in \text{Lines} : \forall x, y \in L : x \neq y \Rightarrow ((x,y) \in (F|_L)^+ \vee (y,x) \in (F|_L)^+)$.

Beweis Sei F eine konsistente Orientierung. Sei $L \in \text{Lines}$ und $x, y \in L$ mit $x < y$. Wir wählen gemäß Axiom LKO eine kürzeste $im|_L$-Kette von x nach y, also $\alpha = (x = a_0, a_1, \ldots, a_n = y)$. Wegen $x \neq y$ folgt $n \geq 1$.
α enthält per Konstruktion keine Wiederholungen, und es gilt $\text{Set}(\alpha) \subset L$. Also $\text{WP}(\alpha) = \emptyset$, und α ist eine F-Kette oder eine F^{-1}-Kette. □

Lemma 5.5 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{COI}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{NDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\forall (<) \in \text{Order} : \forall L \in \text{Lines} : \forall x, y \in L : x < y \Rightarrow (x,y) \in (\lessdot|_L)^+$.

Beweis Sei $<$ eine Halbordnung mit $li = (< \cup <^{-1})$, dann ist $F = \lessdot$ eine konsistente Orientierung wegen Satz 4.70.
Sei $L \in \text{Lines}$ und $x, y \in L$ mit $x < y$. Sicher $x \neq y$, also $(x,y) \in (F|_L)^+ \vee (x,y) \in (F|_L)^+$ wegen Lemma 5.4.
$(y,x) \in (F|_L)^+$ führt zu $y \lessdot^+ x$ im Widerspruch zu $x < y$. Daher $(x,y) \in (\lessdot|_L)^+$. □

Satz 5.6 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{COI}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{NDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{OBS}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : E = L \cap \underline{co}[x] \Rightarrow (im|_E)^*_E = E \times E$.

Beweis Sei $L \in \text{Lines}$ und $x \in X$ beliebig und $E = L \cap \underline{co}[x]$. Sei $y, z \in E$, wobei $y < x$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Mit Axiom OBS konstruieren wir eine Halbordnung $<$ mit $li = (< \cup <^{-1})$. Wegen Lemma 5.5 gibt es eine $\lessdot|_L$-Kette $\alpha = (y = a_0, a_1, \ldots, a_n = z)$. Wäre $a_i < x$ für ein $i \in \{0, \ldots, n\}$, dann auch $a_0 < x$ im Widerspruch zu $y\ \underline{co}\ x$. Wäre $a_i > x$ für ein $i \in \{0, \ldots, n\}$, dann $x < a_n$ im Widerspruch zu $x\ \underline{co}\ z$. Also $\text{Set}(\alpha) \subseteq \underline{co}[x]$, dies ergibt aber $\text{Set}(\alpha) \subseteq E$ und daher $y\ (im|_E)^*_E\ z$. □

Damit haben wir $\boxed{\text{EKO}}$ erhalten. Wir werden jetzt zeigen, daß es nur zwei Halbordnungen gibt, für die $li = < \cup <^{-1}$ gilt.

Lemma 5.7 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\forall F \in \text{Orient} : li \subseteq F^+ \cup (F^{-1})^+$.

Beweis Sei F eine konsistente Orientierung. Sei $x, y \in X$ und $x\ li\ y$, dann ist sicher $x \neq y$. Ferner gibt eine Linie $L \in \text{Lines}$ mit $x, y \in L$. Nach Lemma 5.4 ist $(x,y) \in (F|_L)^+ \vee (y,x) \in (F|_L)^+$, also abgeschwächt $x\ F^+\ y \vee x\ (F^{-1})^+\ y$. □

Das vorige Lemma findet sich auch in [Ste93].

Lemma 5.8 $\boxed{\text{Basis}}\,\boxed{\text{COI}}\,\boxed{\text{KAA}}\,\boxed{\text{LOR}}\,\boxed{\text{NDI}}\,\boxed{\text{LKO}}$ $\forall (<) \in \text{Order} : (im \cap <)^+ = (<)$.

Beweis Sei $<$ eine Halbordnung, für die $(< \cup <^{-1}) = li$ gilt. Sei $F = im \cap <$, dann ist F eine konsistente Orientierung nach Satz 4.70.
$(im \cap <)^+ \subseteq (<)$ ist unmittelbar einsichtig.
Betrachten wir nun $a, b \in X$ beliebig mit $a < b$. Es ist dann $a\ li\ b$ nach der Voraussetzung für $<$. Also $a\ F^+\ b \vee b\ F^+\ a$ wegen Lemma 5.7.
Aber $b\ F^+\ a$ bedeutet wegen $F \subseteq (<)$, daß $b <^+ a$ und somit $b < a$ im Widerspruch zu $a < b$. Es bleibt also nur $a\ F^+\ b$ als Möglichkeit, und somit $(<) \subseteq F^+ = (im \cap <)^+$, was die Rückrichtung beweist. □

Lemma 5.9 $\boxed{\text{Basis}}\,\boxed{\text{COI}}\,\boxed{\text{KAA}}\,\boxed{\text{IMK}}\,\boxed{\text{LOR}}\,\boxed{\text{NDI}}\,\boxed{\text{LKO}}$ $\forall (<), (<') \in \text{Order} : (<' = <) \vee (<' = <^{-1})$.

Beweis Seien $<$ und $<'$ Halbordnungen mit $(< \cup <^{-1}) = li$ und $(<' \cup <')^{-1} = li$, dann sind nach Satz 4.70 die Relationen $F = im \cap (<)$ und $F' = im \cap (<')$ konsistente Orientierungen. Wegen Satz 4.59 gilt $(F' = F) \vee (F' = F^{-1})$, dies läßt sich abschwächen zu $(F'^+ = F^+) \vee (F'^+ = (F^{-1})^+)$.
Lemma 5.8 zeigt $F^+ = (im \cap <)^+ = (<)$ und auch $F'^+ = (im \cap <')^+ = (<')$. Wir substituieren in der letzten Formel des vorigen Absatzes und erhalten $(<' = <) \vee (<' = <^{-1})$. □

Satz 5.10 $\boxed{\text{Basis}}\,\boxed{\text{COI}}\,\boxed{\text{KAA}}\,\boxed{\text{IMK}}\,\boxed{\text{LOR}}\,\boxed{\text{NDI}}\,\boxed{\text{LKO}}\,\boxed{\text{OBS}}$ $|\text{Order}| = 2$.

Beweis Mit Axiom OBS und Lemma 5.9. □

Der letzte Satz ist gerade $\boxed{\text{NOR}}$, also lassen sich alle Nebenläufigkeitsstrukturen, die das aktuelle Axiomensystem erfüllen, durch eine Ordnung charakterisieren, die bis auf Umkehrung eindeutig ist. Damit verfügen wir jetzt über alle Methoden aus der weitaus gründlicher untersuchten Theorie der Halbordnungen.

Petri hat in seinen Axiomensystemen teilweise Axiom NOR explizit vorausgesetzt. Wie wir jetzt sehen, läßt sich Axiom NOR bereits mit Hilfe von Axiom OBS herleiten, wenn wir Axiom LKO voraussetzen. Es bleibt noch zu zeigen, ob sich der Beweis auch führen läßt, wenn wir statt Axiom LKO nur Axiom IMK annehmen.

Wir werden jetzt die Eigenschaften der entstehenden Ordnungen untersuchen.

Satz 5.11 $\boxed{\text{Basis}}\,\boxed{\text{COI}}\,\boxed{\text{KAA}}\,\boxed{\text{LOR}}\,\boxed{\text{NDI}}\,\boxed{\text{LKO}}$ $\forall (<) \in \text{Order} : (\lessdot)^+ = (<)$.

Beweis Mit Lemma 5.8 und Satz 4.69. □

Die zuletzt bewiesene Eigenschaft bedeutet, daß $<$ eine kombinatorische Ordnung ist. Wir können sogar noch eine Verschärfung erreichen, die im Zusammenhang mit der *weak discreteness* aus [BF88] steht.

Satz 5.12 $\boxed{\text{Basis}}\,\boxed{\text{NTR}}\,\boxed{\text{COI}}\,\boxed{\text{KAA}}\,\boxed{\text{IMK}}\,\boxed{\text{LOR}}\,\boxed{\text{LFO}}\,\boxed{\text{KDI}}\,\boxed{\text{NDI}}\,\boxed{\text{LKO}}\,\boxed{\text{LUE}}$
$\forall (<) \in \text{Order} : \forall L \in \text{Lines} : \exists \alpha = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots) \in \text{Ketten}(\lessdot) : \text{Set}(\alpha) = L$.

Beweis Wir betrachten eine beliebige Linie $L \in \text{Lines}$, dann gilt $\neg Fin(L)$ wegen Axiom LUE. Sei $\alpha = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$ eine im-Kette nach Korollar 4.76, es gilt also $\text{Set}(\alpha) = L \wedge |\text{WP}(\alpha)| = 0$.
Da $\lessdot$ auf Grund von Korollar 4.71 eine konsistente Orientierung ist und $a_0\ im\ a_1$, ist $a_0 \lessdot a_1 \vee a_1 \lessdot a_0$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_0 \lessdot a_1$, ansonsten könnten wir statt α die Kette $(\ldots, a_1, a_0, a_{-1}, \ldots)$ betrachten.
Da $|\text{WP}(\alpha)| = 0$, muß $\forall i \in \mathbb{Z} : a_i \lessdot a_{i+1}$ gelten. Also ist α eine $\lessdot$-Kette. □

Die Relation $<$ erfüllt auch die Anforderungen an eine Kausalordnung, wie sie in Abschnitt 5.2.6 definiert werden wird.

Satz 5.13 $\boxed{\text{Basis}}\,\boxed{\text{COI}}\,\boxed{\text{NDI}}$ $\forall (<) \in \text{Order} : (\lessdot) \subseteq S \times T \cup T \times S$.

Beweis Lemma 4.66 gibt $(\lessdot) \subseteq im$, also $(\lessdot) \subseteq P \cup P^{-1} \subseteq S \times T \cup T \times S$. $\square$

Bemerkung 5.14 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{COI}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{NDI}}$ $\forall(<) \in \text{Order} : \forall x \in S : |{\bullet}x| = 1 = |x{\bullet}|$.

Beweis Sei $<$ eine Halbordnung mit $li = (< \cup <^{-1})$, dann ist $F = \lessdot$ eine konsistente Orientierung wegen Satz 4.70.
Sei $x \in S$. Satz 2.94 ergibt $|F[x]| = 1 = |F^{-1}[x]|$, daraus folgt der Satz durch Übergang von F zu $\lessdot$. $\square$

Bemerkung 5.15 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{COI}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{NDI}}$
$\forall(<) \in \text{Order} : \forall x \in T : |{\bullet}x| > 1 < |x{\bullet}|$.

Beweis Sei $<$ eine Halbordnung mit $li = (< \cup <^{-1})$, dann ist $F = \lessdot$ eine konsistente Orientierung wegen Satz 4.70.
Sei $x \in T$. Lemma 4.26 ergibt $|F[x]| > 1 < |F^{-1}[x]|$, daraus folgt der Satz durch Übergang von F zu $\lessdot$. $\square$

Wir haben in diesem Unterabschnitt ein System kennengelernt, daß eine große Menge von Modellen besitzt. Es ist ein natürliches Axiomensystem, da alle Axiome für azyklische Modelle plausibel sind. Wir können jedoch – dies geschieht im nächsten Unterabschnitt – die Klasse der Modelle noch weiter einschränken, ohne daß die Anforderungen künstlich oder zu streng wirken.

5.2.4 Zeitkegel schneiden sich

Die folgende Bedingung wurde von Petri in [Pet87] als Axiom gefordert. Die Bedingung wird als *Cone Intersection Property* eingeführt, was wörtlich „Kegelschnitteigenschaft“ bedeutet. Wir wählen aber eine etwas andere Bezeichnung.

Axiom ZSS [Zeitkegel schneiden sich]
$\forall(<) \in \text{Order} : \forall x, y \in X : x \; co \; y \Rightarrow \exists u, v \in X : u < x < v \wedge u < y < v$. $\Diamond$

Anschaulich bedeutet dies Axiom, daß zwei Elemente x und y in der Vergangenheit ihren Ursprung in einem gemeinsamen Ereignis u haben und daß sie in der Zukunft wieder vereint auf ein Ereignis v wirken werden. Das nun vorzustellende System entspricht dem des vorigen Abschnitts, jedoch nehmen wir Axiom ZSS einschränkend hinzu.

$\boxed{\text{ZSS}}$

$\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{OBS}}$

$\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{SYM}}$ $\boxed{\text{IRR}}$ $\boxed{\text{KOH}}$ $\boxed{\text{KDI}}$

Aus dem vorigen Axiomensystem können wir unmittelbar $\boxed{\text{IMK}}$, $\boxed{\text{NDI}}$, $\boxed{\text{KOR}}$, $\boxed{\text{LCT}}$, $\boxed{\text{EKO}}$, $\boxed{\text{LUE}}$ und $\boxed{\text{NOR}}$ übernehmen.

Da neu hinzugekommene Axiom ZSS hat zur Folge, daß alle Modelle dieses Axiomensystems episodenendlich sind. Dies wird jetzt bewiesen, wobei intensiv auf die Halbordnungen zurückgegriffen wird.

Lemma 5.16 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{COI}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{NDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{LUE}}$
$\forall(<) \in \text{Order} : \forall L \in \text{Lines} : \forall y \in L : \forall x \in X : (x \; co \; y \wedge \neg Fin(L \cap co[x])) \Rightarrow (\forall u \in L : u \leq y \Rightarrow u \; co \; x \vee \forall v \in L : y \leq v \Rightarrow v \; co \; x)$.

Beweis Sei $(<) \in \text{Order}$, also $li = (< \cup <^{-1})$. Seien L, x und y mit $x \; co \; y$ und $\neg Fin(L \cap co[x])$ gegeben.

Angenommen, es gibt $u, v \in L$, so daß $u \leq y \leq v$ und $u \; \underline{li} \; x \; \underline{li} \; v$. Aus $u \leq y$ und $x \; co \; y$ folgt $u \neq x$. Aus $y \leq v$ und $y \; co \; x$ folgt $v \neq x$. Zusammen $u \; li \; x \; li \; v$. $x < u$ und $u < y$ widerspricht $x \; co \; y$, also $u < x$, analog dazu $x < v$.
Wegen Satz 5.12 gibt es eine $\lessdot$-Kette $\alpha = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$ mit $\mathrm{Set}(\alpha) = L$. Es gilt $u, v \in L$, daher gibt es $i, j \in \mathbb{Z}$, so daß $a_i = u$ und $a_j = v$. $\forall k \in \mathbb{Z} : k \leq i \Rightarrow a_k < x$ und $\forall k \in \mathbb{Z} : j \leq k \Rightarrow x < a_k$ wegen der Transitivität der Ordnung. Daraus ergibt sich $\forall k \in \mathbb{Z} : a_k \; co \; x \Rightarrow i < k < j$ und somit $|L \cap co[x]| < j - i$ im Widerspruch zu $\neg Fin(L \cap co[x])$.
Also $\neg \exists u, v \in L : u \leq y \leq v \wedge u \; \underline{li} \; x \; \underline{li} \; v$.
Wir formen um zu $\forall u, v \in L : \neg(u \leq y \wedge y \leq v \wedge u \; \underline{li} \; x \wedge x \; \underline{li} \; v)$ beziehungsweise $\forall u, v \in L : (\neg u \leq y) \vee (\neg y \leq v) \vee u \; co \; x \vee x \; co \; v$. Wir trennen nach den Variablen und erhalten $(\forall u \in L : (\neg u \leq y) \vee u \; co \; x) \vee (\forall v \in L : (\neg y \leq v) \vee x \; co \; v)$. Die Aussage des Lemmas folgt unmittelbar. □

Satz 5.17 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{COI}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{NDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{LUE}}$ $\boxed{\text{OBS}}$ $\boxed{\text{ZSS}}$
$\forall L \in \mathrm{Lines} : \forall x \in X : Fin(L \cap \underline{co}[x])$.

Beweis Sei gemäß Axiom OBS $(<) \in \mathrm{Order}$ eine Halbordnung mit $li = (< \cup <^{-1})$.
Sei für einen Widerspruchsbeweis $L \in \mathrm{Lines}$, $x \in X$ und $\neg Fin(L \cap \underline{co}[x])$. Offensichtlich $x \notin L$, also $\neg Fin(L \cap co[x])$. Wir wählen ein $y \in L \cap co[x]$. Wegen Lemma 5.16 gilt $(\forall a \in L : a \leq y \Rightarrow a \; co \; x) \vee (\forall a \in L : y \leq a \Rightarrow a \; co \; x)$.
Das heißt, mindestens eine Seite der Linie steht mit x in co. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $\forall a \in L : y \leq a \Rightarrow a \; co \; x$, andernfalls könnten wir zu $<^{-1}$ übergehen. Wir werden jetzt eine Induktion durchführen, in der wir einen Schnitt konstruieren, der L nicht schneidet.

Anfang: $i = 1$. Wir setzen $x_1 = x$ und $y_1 = y$, dann gilt

$$\forall 1 \leq k \leq 1 : x_k \; \underline{co} \; x_1,$$
$$\neg \exists a \in L : x_i < a,$$
$$y_1 \in L,$$
$$\forall a \in L : y_1 \leq a \Rightarrow a \; co \; x_1,$$
$$\forall 1 \leq k < 1 : y_k < y_1.$$

Hypothese: Für alle $1 \leq j \leq i$ gilt

$$\forall 1 \leq k \leq j : x_k \; \underline{co} \; x_j, \tag{5.1}$$
$$\neg \exists a \in L : x_j < a, \tag{5.2}$$
$$y_j \in L, \tag{5.3}$$
$$\forall a \in L : y_j \leq a \Rightarrow a \; co \; x_j, \tag{5.4}$$
$$\forall 1 \leq k < j : y_k < y_j. \tag{5.5}$$

Von i nach $i+1$: $y_i \in L$ wegen Formel 5.3, also folgt $y_i \; co \; x_i$ aus Formel 5.4. Wegen Axiom ZSS gibt es ein z_{i+1}, so daß $x_i < z_{i+1} \wedge y_i < z_{i+1}$. Sei L_{i+1} eine Linie mit $\{y_i, z_{i+1}\} \subseteq L_{i+1}$.
Wegen Satz 5.12 gibt es eine $\lessdot$-Kette $\beta = (\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots)$ mit $\mathrm{Set}(\beta) = L_{i+1}$. Da $y_i \in L_{i+1}$, gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$, so daß $b_m = y_i$. Wir wissen $\forall n \in \mathbb{Z} : n < m \Rightarrow b_n < b_m$ und daher $\forall n \in \mathbb{Z} : n < m \Rightarrow \exists a \in L : b_n < a$, weil $b_m \in L$. Umformung ergibt $\forall n \in \mathbb{Z} : (\neg \exists a \in L : b_n < a) \Rightarrow n \geq m$.
Wenn es ein $a \in L$ gäbe mit $z_{i+1} < a$, dann auch $y_i < a$. Aber Formel 5.4 impliziert nun $a \; co \; x_i$ im Widerspruch zu $x_i < a$. Also $\neg \exists a \in L : z_{i+1} < a$. Weil $z_{i+1} \in L_{i+1}$, folgt daraus $\exists n \in \mathbb{Z} : \neg \exists a \in L : b_n < a$.

Sei $p = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid \neg\exists a \in L : b_n < a\}$, dann gilt $m < p$. Sei $x_{i+1} = b_p$ und $w_{i+1} = b_{p-1}$. $b_m < b_p$, also $y_i < x_{i+1}$. $b_m \leq b_{p-1}$, also $y_i \leq w_{i+1}$. Per Konstruktion von p gilt $\neg\exists a \in L : x_{i+1} < a$ und $\exists a \in L : w_{i+1} < a$.
$\neg\exists a \in L : x_{i+1} < a$ und Satz 5.12 implizieren sofort $x_{i+1} \notin L$.
Mit $\exists a \in L : w_{i+1} < a$ wählen wir $u_{i+1} \in L$, so daß $w_{i+1} < u_{i+1}$. Aus $\neg\exists a \in L : x_{i+1} < a$ folgt $\neg x_{i+1} < u_{i+1}$. Aus $u_{i+1} \in L$ und $x_{i+1} \notin L$ folgt $x_{i+1} \neq u_{i+1}$. Wäre $u_{i+1} < x_{i+1}$, dann $w_{i+1} < u_{i+1} < x_{i+1}$ im Widerspruch zu $w_{i+1} = b_{p-1} \lessdot b_p = x_{i+1}$. Insgesamt $\neg x_{i+1}\ \underline{li}\ u_{i+1}$.
Aber $w_{i+1} < u_{i+1}$ und daher $w_{i+1}\ \underline{li}\ u_{i+1}$, also $\neg\underline{li}[w_{i+1}] \subseteq \underline{li}[x_{i+1}]$. Es folgt $\neg w_{i+1}\ P\ x_{i+1}$. Lemma 4.66 führt mit $w_{i+1} \lessdot x_{i+1}$ zu $w_{i+1}\ im\ x_{i+1}$. Es bleibt nur $x_{i+1}\ P\ w_{i+1}$ als Möglichkeit, also $\underline{li}[x_{i+1}] \subsetneq \underline{li}[w_{i+1}]$.
Angenommen $x_k < w_{i+1}$ für $k \leq i$, dann steht $x_k < w_{i+1} < u_{i+1} \in L$ im Widerspruch zu Formel 5.2.
Angenommen $w_{i+1} \leq x_k$ für $k \leq i$. Formel 5.3 ergibt $y_k \in L$. Formel 5.4 führt zu $y_k\ co\ x_k$. Und Formel 5.5 besagt schließlich $y_k \leq y_i$. $y_i \leq w_{i+1}$ wurde oben gezeigt. Insgesamt steht $y_k \leq y_i \leq w_{i+1} \leq x_k$ im Widerspruch zu $y_k\ co\ x_k$.
Also ist $\forall 1 \leq k \leq i : x_k\ co\ w_{i+1}$. Mit $x_{i+1}\ P\ w_{i+1}$ folgt $\forall 1 \leq k \leq i : x_k\ co\ x_{i+1}$. Als Induktionsschritt für Formel 5.1 ergibt sich

$$\forall 1 \leq k \leq i+1 : x_k\ \underline{co}\ x_{i+1}.$$

Formel 5.2 erhalten wir für $j = i + 1$ aus der Konstruktion von x_{i+1}:

$$\neg\exists a \in L : x_{i+1} < a.$$

$L \cap \underline{co}[x_{i+1}] \neq \varnothing$ wegen Satz 2.110. Wir wählen $y_{i+1} \in L \cap \underline{co}[x_{i+1}]$. Mit Sicherheit können wir also wie in Formel 5.3 garantieren, daß

$$y_{i+1} \in L.$$

Wir wissen $\neg\exists a \in L : x_{i+1} < a$. Mit $x_{i+1} \notin L$ ergibt sich sogar $\forall a \in L : \neg x_{i+1} \leq a$. Angenommen es gibt ein $a \in L$ mit $y_{i+1} \leq a$ und $a < x_{i+1}$. Dann $y_{i+1} < x_{i+1}$ im Widerspruch zu $y_{i+1}\ \underline{co}\ x_{i+1}$. Also $\forall a \in L : y_{i+1} \leq a \Rightarrow (\neg a < x_{i+1})$. Kombiniert ergibt sich die zu Formel 5.4 analoge Aussage

$$\forall a \in L : y_{i+1} \leq a \Rightarrow a\ co\ x_{i+1}.$$

$\forall 1 \leq k < i+1 : y_k\ \underline{li}\ y_{i+1}$, weil $\forall 1 \leq k < i+1 : \{y_k, y_{i+1}\} \subseteq L$. Angenommen $y_{i+1} \leq y_k$ für ein $k < i+1$, dann $y_{i+1} \leq y_k \leq y_i < x_{i+1}$ im Widerspruch zu $y_{i+1}\ \underline{co}\ x_{i+1}$. Als letzter Teil des Induktionsschlusses haben wir damit auch

$$\forall 1 \leq k < i+1 : y_k < y_{i+1}.$$

Dies beendet den Induktionsbeweis, die Konstruktion kann in Abbildung 5.1 noch einmal nachvollzogen werden. Wir setzen jetzt

$$C' = \bigcup_{1 \leq i} \{x_i\}.$$

Weil $\forall j \geq 1 : \forall 1 \leq k \leq j : x_k\ \underline{co}\ x_j$ gemäß Formel 5.1, ist C' eine $\underline{co}$-Klique und kann zu einem Schnitt $C \supseteq C'$ erweitert werden. Sei $v \in L \cap C$, was auf Grund von Axiom KDI definiert ist.
Wegen Satz 5.12 gibt es eine $\lessdot$-Kette $\alpha = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$ mit $\mathrm{Set}(\alpha) = L$. Es ist $v, y \in L$, also gibt es $q, r \in \mathbb{Z}$, so daß $y_1 = a_q$ und $v = a_r$.
Die Menge $\{a_q, a_{q+1}, \ldots, a_r\}$ endlich, aber die Menge $\{y_1, y_2, \ldots\}$ ist unendlich, weil nach Formel 5.5 keine zwei y_j identisch sind. Es gibt also ein $s \geq 1$, so daß $y_s \notin \{a_q, a_{q+1}, \ldots, a_r\}$.

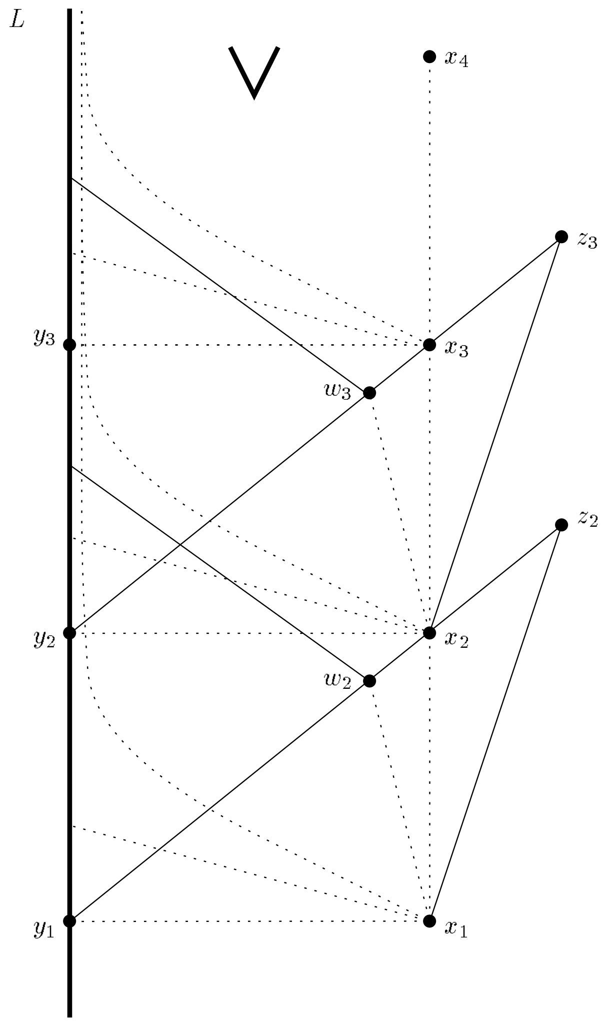


Abbildung 5.1: Konstruktion von x_i und y_i aus Satz 5.17

Aber somit gibt es auch ein $t \in \mathbb{Z}$, so daß $a_t = y_s$. Zwangsläufig $t < q \vee t > r$. Wäre $t < q$, dann ist $y_s = a_t < a_q = y_1$ im Widerspruch zu Formel 5.5. Also $t > r$. Per Konstruktion ist $y_s < x_{s+1}$, folglich $v = a_r < a_t = y_s < x_{s+1}$ oder $v\ li\ x_{s+1}$. Dies steht im Widerspruch zu $\{v, x_{s+1}\} \subseteq C$, also $Fin(L \cap \underline{co}[x])$. $\square$

Der letzte Satz entspricht $\boxed{\text{EEN}}$. Besonders interessant bei diesem Beweis ist das Zusammenspiel der Axiome KDI und ZSS, die jedes für sich keine Endlichkeitsbedingung erzwingen.

5.2.5 Induzierte Dichte

Geht es auch ohne K-Dichte? Wir betrachten dazu nur azyklische Strukturen, die episodenendlich sind, da die dazu passenden Halbordnungen recht leicht K-dicht werden. Wir nehmen an:

$\boxed{\text{LUE}}$ $\boxed{\text{EEN}}$

$\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LCT}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$

$\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{VST}}$ $\boxed{\text{DIS}}$ $\boxed{\text{SYM}}$ $\boxed{\text{IRR}}$

Alle diese Axiome waren im vorhergegangenen System gültig, also ist dies System höchstens so stark wie jenes. Wir werden sogar sehen, daß beide Systeme gleichmächtig sind, und beweisen dazu zunächst, daß sich $\boxed{\text{IMK}}$ aus den Axiomen ergibt.

Satz 5.18 $\boxed{\text{Basis}}\boxed{\text{LKO}}\boxed{\text{EEN}}\boxed{\text{LUE}}$ $im_X^* = X \times X$.

Beweis Sei $a, b \in X$ beliebig gewählt. Es gibt eine Linie L_a mit $a \in L_a$, diese Linie ist unendlich gemäß Axiom LUE. Da $L_a \cap \underline{co}[b]$ wegen Axiom EEN endlich ist, ist $L_a - \underline{co}[b] \neq \emptyset$. Sei nun $c \in L_a - \underline{co}[b]$, dann ist $c\ li\ b$, und es gibt eine Linie L_b mit $b, c \in L_b$. Mit Axiom LKO erhalten wir $a\ im_X^*\ c$ und $b\ im_X^*\ c$. Damit ist $a\ im_X^*\ b$, wie im Satz behauptet. □

So ausgestattet erhalten wir $\boxed{\text{KOH}}$ mit Satz 4.17. Wir werden jetzt zunächst zeigen, daß jede Linie höchstens einen Endpunkt hat. Dies ist als Zwischenergebnis leider notwendig, bevor wir später die K-Dichte zeigen können, aus der ja folgt, daß es überhaupt keine Endpunkte gibt.

Lemma 5.19 $\boxed{\text{Basis}}\boxed{\text{LOR}}\boxed{\text{LKO}}\boxed{\text{LUE}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall x, y \in L : (|im[x] \cap L| = |im[y] \cap L| = 1) \Rightarrow (x = y)$.

Beweis Sei $L \in \text{Lines}$ und $x, y \in L$, wobei $|im[x] \cap L| = 1$ und $|im[y] \cap L| = 1$. Nehmen wir für einen Widerspruchsbeweis an, daß $x \neq y$.

Wegen Axiom LKO gibt es eine $im|_L$-Kette $\alpha = (x = a_0, a_1, \ldots, a_n = y)$ ohne Wiederholungen, die x und y verbindet und für die $\text{Set}(\alpha) \subseteq L$ gilt. Wegen $x \neq y$ ist $n \geq 1$. Da $Fin(\text{Set}(\alpha))$, aber $\neg Fin(L)$ wegen Axiom LUE, gibt es ein $z \in L$ mit $z \notin \text{Set}(\alpha)$. Wegen Axiom LKO gibt es nun eine $im|_L$-Kette $\beta = (x = b_0, b_1, \ldots, b_m = z)$ und außerdem ein i, so daß $b_i \in \text{Set}(\alpha)$ und $b_{i+1} \notin \text{Set}(\alpha)$.

Da $b_i \in \text{Set}(\alpha)$ ist $b_i = a_j$ für ein j. Es gilt $a_j\ im\ b_{i+1}$ und $b_{i+1} \in L$.

Fall 1: $j = 0$. Da $a_1, b_{i+1} \in im[a_0] \cap L$ und $a_1 \neq b_{i+1}$ wegen $b_{i+1} \notin \text{Set}(\alpha)$ ist $|im[x] \cap L| = |im[a_0] \cap L| \neq 1$.

Fall 2: $0 < j < n$. Es ist $a_{j-1}, a_{j+1}, b_{i+1} \in im[a_j] \cap L$ und $a_{j-1} \neq a_{j+1} \neq b_{i+1} \neq a_{j-1}$, weil $b_{i+1} \notin \text{Set}(\alpha)$ und weil α keine Wiederholungen enthält. Also $a_{j-1}\ li\ a_{j+1}\ li\ b_{i+1}\ li\ a_{j-1}$ im Widerspruch zu Axiom LOR.

Fall 3: $j = n$. Da $a_{n-1}, b_{i+1} \in im[a_n] \cap L$ und $a_{n-1} \neq b_{i+1}$ wegen $b_{i+1} \notin \text{Set}(\alpha)$ ist $|im[y] \cap L| = |im[a_n] \cap L| \neq 1$.

Es ergibt sich stets ein Widerspruch, also $x = y$. □

Der folgende Satz ist eine Art starker N-Dichte.

Lemma 5.20 $\boxed{\text{Basis}}\boxed{\text{KAA}}\boxed{\text{LOR}}\boxed{\text{LKO}}\boxed{\text{EKO}}\boxed{\text{LUE}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall x, y \in X : x\ \underline{co}\ y \Rightarrow L \cap \underline{co}[x] \cap \underline{co}[y] \neq \emptyset$.

Beweis Wir nehmen nun für einen Beweis durch Widerspruch an, daß $L \cap \underline{co}[x] \cap \underline{co}[y] = \emptyset$ und $x\ \underline{co}\ y$ für passende $x, y \in X$ und $L \in \text{Lines}$.

Offensichtlich ist $L \cap \underline{co}[x] \neq \emptyset$, weil sonst x der Linie hinzugefügt werden könnte, und L keine maximale $\underline{li}$-Klique wäre. Aus demselben Grund ist $L \cap \underline{co}[y] \neq \emptyset$.

Für $x = y$ folgt der Satz trivial, weil sich dann $L \cap \underline{co}[x] \cap \underline{co}[y] = L \cap \underline{co}[x] \neq \emptyset$ ergibt. Daher können wir annehmen, daß $x\ co\ y$. Falls $x \in L$, gilt $x \in L \cap \underline{co}[x] \cap \underline{co}[y]$, und wieder folgt der Satz trivial. Also betrachten wir im folgenden $x, y \notin L$, weswegen $L \cap \underline{co}[x] = L \cap co[x]$ und $L \cap \underline{co}[y] = L \cap co[y]$.

Auf Grund von Lemma 5.19 gibt es höchstens einen Endpunkt und somit ist entweder $L \cap co[x]$ oder $L \cap co[y]$ frei von Endpunkten. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $L \cap co[x]$ frei von Endpunkten.

$(L - co[y]) \cup \{y\}$ ist eine $\underline{li}$-Klique und kann zu einer Linie $L' \in \text{Lines}$ erweitert werden. Weil $L \cap \underline{co}[x] \cap \underline{co}[y] = \emptyset$, gilt $L \cap \underline{co}[x] \subseteq L - \underline{co}[y] \subseteq L'$. Sei $z \in L \cap co[x]$, dann ist $z \in L'$.

Sei $E = L' \cap \underline{co}[x]$ eine Episode. Wegen $x\ co\ z$ gilt $x \notin L'$, also $E = L' \cap co[x]$. Sicher $z \in E$. $y \in E$ gemäß $y \in L'$ und $y\ co\ x$. Nach Axiom EKO ist $(im|_E)^*_E = E \times E$, also gibt es $\alpha = (z = a_0, \ldots, a_n = y) \in \text{Ketten}(im|_E)$. Es gilt $\text{Set}(\alpha) \subseteq E \subseteq L' \cap co[x]$.
Es ist $a_0 = z \in L$ und $a_n = y \notin L$, also gibt es ein $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, so daß $a_i \in L$ und $a_{i+1} \notin L$. Wäre $a_i\ P\ a_{i+1}$, dann $L \subseteq \underline{li}[a_i] \subseteq \underline{li}[a_{i+1}]$. $a_{i+1} \notin L$ erlaubt ein Verschärfung zu $L \subseteq li[a_{i+1}]$ im Widerspruch mit Satz 2.110. Also $a_{i+1}\ P\ a_i$.
Wegen Axiom LKO gibt es ein $u \in L \cap im[a_i]$. Aber $a_i \in L \cap co[x]$, also ist a_i kein Endpunkt und es gibt auch $v \in L \cap im[a_i]$ mit $u \neq v$. Mit $u, v \in L$ ergibt sich $u\ li\ v$. Axiom KAA ergibt $u\ P\ a_i$ und $v\ P\ a_i$. Nun führt $x\ co\ a_i$ zu $x\ co\ u$. $u \in L \cap co[x] \subseteq L'$ und $a_{i+1} \in E \subseteq L'$, also $u\ \underline{li}\ a_{i+1}$. $u \in L$ und $a_{i+1} \notin L$ ergibt $u \neq a_{i+1}$. Es bleibt $u\ li\ a_{i+1}$ und analog dazu $v\ li\ a_{i+1}$. Dies gibt einen Widerspruch mit Axiom LOR für $a_{i+1}\ li\ u\ li\ v\ li\ a_{i+1}$ und $\{u, v, a_{i+1}\} \subseteq im[a_i]$. □

Lemma 5.21 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\forall L \in \text{Lines} : \forall a, b, c \in L : \forall \delta = (a = d_0, \ldots, d_m = b) \in \text{Ketten}(im|_L) : \forall \epsilon = (a = e_0, \ldots, a_n = c) \in \text{Ketten}(im|_L) : (c \notin \text{Set}(\delta) \wedge b \notin \text{Set}(\varepsilon) \wedge Einf(\delta) \wedge Einf(\varepsilon) \wedge m \geq 1 \wedge n \geq 1) \Rightarrow d_1 \neq e_1$.

Beweis Seien $L, a, b, c, \delta, \varepsilon$ nach den Voraussetzungen des Lemmas gegeben. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m \leq n$, ansonsten könnten wir δ und ε vertauschen.
Angenommen $d_1 = e_1$. Wegen $b \notin \text{Set}(\varepsilon)$ gilt $d_m = b \neq e_m$, also $m \neq 1$, und mit $m \geq 1$ haben wir $m > 1$ und $n > 1$.
Sei $i = \min\{j \in \{1, \ldots, m-1\} \mid d_j = e_j \wedge d_{j+1} \neq e_{j+1}\}$, dann $d_i = e_i$ und $d_{i+1} \neq e_{i+1}$. Wegen $Einf(\delta)$ ist $d_{i-1} \neq d_{i+1}$. Analog dazu $e_{i-1} \neq e_{i+1}$.
Mit $\{d_{i-1}, d_{i+1}, e_{i+1}\} \subseteq L$ ergibt sich jetzt $d_{i-1}\ li\ d_{i+1}\ li\ e_{i+1}\ li\ e_{i-1} = d_{i-1}$. Aber dies steht im Widerspruch zu Axiom LOR, da $\{d_{i-1}, d_{i+1}, e_{i+1}\} \subseteq im[d_i] = im[e_i]$. □

Lemma 5.22 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LUE}}$ $\neg\exists a, b, c, x, y, z \in X : a\ \underline{li}\ b\ \underline{li}\ c\ \underline{li}\ a \wedge a\ li\ x \wedge b\ li\ y \wedge c\ li\ z \wedge x\ \underline{co}\ y\ \underline{co}\ z\ \underline{co}\ x \wedge b\ co\ x\ co\ c \wedge a\ co\ y\ co\ c \wedge a\ co\ z\ co\ b$.

Beweis Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, daß $a, b, c, x, y, z \in X$ mit den angegebenen Eigenschaften existieren. Man beachte, daß die Voraussetzungen bezüglich der Paare (a, x), (b, y) und (c, z) vollkommen symmetrisch sind.
$a\ co\ y$ und $b\ li\ y$ ergibt $a \neq b$. Analog dazu $b \neq c$ und $c \neq a$. Also $a\ li\ b\ li\ c\ li\ a$. $a\ li\ x$ und $a\ co\ y$ ergibt $x \neq y$. Analog dazu $y \neq z$ und $z \neq x$. Also $x\ co\ y\ co\ z\ co\ x$.
$\{a, b, c\} \in \text{Kliquen}(\underline{li})$, also gibt es $L \in \text{Lines}$ mit $\{a, b, c\} \subseteq L$. Wegen $x\ co\ b$ gilt $x \notin L$, analog dazu $y \notin L$ und $z \notin L$. Sei $E = L \cap \underline{co}[y]$, dann auch $E = L \cap co[y]$. Analog dazu $D = L \cap \underline{co}[z] = L \cap co[z]$ und $F = L \cap \underline{co}[x] = L \cap co[x]$, dann sind D, E und F Episoden. Es gilt $\{a, b\} \subseteq D$, $\{a, c\} \subseteq E$ und $\{b, c\} \subseteq F$.
Unter Verwendung von Axiom EKO suchen wir uns drei Ketten $\delta = (a = d_0, \ldots, d_m = b) \in \text{Ketten}(im|_D)$, $\varepsilon = (a = e_0, \ldots, e_n = c) \in \text{Ketten}(im|_E)$ und $\phi = (b = f_0, \ldots, f_q = c) \in \text{Ketten}(im|_F)$, so daß $Einf(\delta)$, $Einf(\varepsilon)$ und $Einf(\phi)$. Da $\text{Set}(\delta) \subseteq D \subseteq co[z]$ und $z\ li\ c$, gilt $c \notin \text{Set}(\delta)$. Ähnlich ergibt sich $b \notin \text{Set}(\varepsilon)$ und $a \notin \text{Set}(\phi)$. Wegen $a \neq b$ ist $m \geq 1$, wegen $a \neq c$ ist $n \geq 1$, und wegen $b \neq c$ ist $q \geq 1$.
Nach Lemma 5.21 ergibt sich nun $d_1 \neq e_1$. Wir wenden Lemma 5.21 für die umgekehrten Ketten ε und ϕ erneut an und erhalten $e_{n-1} \neq f_{q-1}$. Für die Kette ϕ und die umgekehrte Kette δ ergibt sich $d_{m-1} \neq f_1$. Sei

$$\alpha = (d_0, d_1, \ldots, d_{m-1}, d_m = f_0, f_1, \ldots, f_{q-1}, f_q = e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1, e_0 = d_0)$$

und $A = \text{Set}(\alpha)$, dann $A \subseteq L$. $\text{Set}(\delta) \subseteq L$ und $Einf(\delta)$ ergibt $\text{WP}(\delta) = \varnothing$. Analog dazu $\text{WP}(\varepsilon) = \varnothing$ und $\text{WP}(\phi) = \varnothing$. Aus $d_1 \neq e_1$ ergibt sich $d_1\ li\ e_1$. Es gilt auch $e_{n-1}\ li\ f_{q-1}$ und $d_{m-1}\ li\ f_1$, also insgesamt $\text{AWP}(\alpha) = \varnothing$.

Dies läßt sich umformen zu $\forall u \in A : |im[u] \cap A| \geq 2$. Jetzt sind die Voraussetzungen für Lemma 4.32 erfüllt, also gilt $A = L$. Aber $Fin(L)$ steht im Widerspruch zu Axiom LUE. □

Jetzt können wir die K-Dichte herleiten.

Satz 5.23 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{EEN}}$ $\boxed{\text{LUE}}$ $\forall C \in \text{Cuts} : \forall L \in \text{Lines} : C \cap L \neq \emptyset$.

Beweis Seien C und L für einen Widerspruchsbeweis so gewählt, daß $C \cap L = \emptyset$. Wegen Axiom EEN ist $\forall x \in X : Fin(L \cap \underline{co}[x])$, also auch $\forall x, y \in C : Fin(L \cap \underline{co}[x] \cap \underline{co}[y])$. Wegen Axiom NTR ist $C \neq \emptyset$. Wir wählen nun $x, y \in C$ so, daß $|L \cap \underline{co}[x] \cap \underline{co}[y]|$ minimal wird. Nach Lemma 5.20 ist $L \cap \underline{co}[x] \cap \underline{co}[y] \neq \emptyset$. Wir wählen $c \in L \cap \underline{co}[x] \cap \underline{co}[y]$. Wegen $c \notin C$ gibt es $z \in C$ mit $c \; li \; z$.
Wäre $L \cap \underline{co}[z] \cap \underline{co}[y] \subseteq \underline{co}[x]$, dann $L \cap \underline{co}[z] \cap \underline{co}[y] \subseteq L \cap \underline{co}[x] \cap \underline{co}[y]$. $c \in L \cap \underline{co}[x] \cap \underline{co}[y]$ und $c \notin L \cap \underline{co}[z] \cap \underline{co}[y]$ ergibt dann $|L \cap \underline{co}[z] \cap \underline{co}[y]| < |L \cap \underline{co}[x] \cap \underline{co}[y]|$ im Widerspruch zur Minimalitätsbedingung für x und y. Also $\neg L \cap \underline{co}[z] \cap \underline{co}[y] \subseteq \underline{co}[x]$. Analog dazu ergibt sich $\neg L \cap \underline{co}[z] \cap \underline{co}[x] \subseteq \underline{co}[y]$.
Es gibt also $a \in L \cap \underline{co}[z] \cap \underline{co}[y]$ mit $a \notin \underline{co}[x]$ und $b \in L \cap \underline{co}[z] \cap \underline{co}[x]$ mit $b \notin \underline{co}[y]$. Es muß gelten $a \; li \; x$ und $b \; li \; y$. $c \; li \; z$ wurde schon früher gezeigt. Wegen $x, y, z \notin L$ gilt $a \neq z$, $b \neq z$, $a \neq y$, $c \neq y$, $b \neq x$ und $c \neq x$. Insgesamt bleibt nur $a \; co \; z$, $b \; co \; z$, $a \; co \; y$, $c \; co \; y$, $b \; co \; x$ und $c \; co \; x$. $\{x, y, z\} \subseteq C$ ergibt $x \; \underline{co} \; y \; \underline{co} \; z \; \underline{co} \; x$. $\{a, b, c\} \subseteq L$ ergibt $a \; \underline{li} \; b \; \underline{li} \; c \; \underline{li} \; a$.
Das heißt, die Elemente $a, b, c, x, y, z \in X$ erfüllen genau die Bedingung, die in Lemma 5.22 ausgeschlossen wird. Widerspruch. □

Also gilt $\boxed{\text{KDI}}$ und somit auch $\boxed{\text{NDI}}$. Damit können wir Korollar 4.87 anwenden und gelangen zu $\boxed{\text{KOR}}$ und können uns in unseren Betrachtungen auf orientierbare Strukturen beschränken.

Lemma 5.24 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LUE}}$
$\forall F \in \text{Orient} : F^+ \subseteq li$.

Beweis Sei $x \; F^+ \; y$, dann gibt es eine F-Kette $\alpha = (x = a_0, a_1, \ldots, a_n = y)$ mit $n \geq 1$. Wegen $F \subseteq im$ ist α ein im-Kette. Wegen $F \circ F \subseteq li$ gilt $|\text{WP}(\alpha)| = 0$, und mit Lemma 4.84 folgt $x = a_0 \; li \; a_n = y$. □

Satz 5.25 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LUE}}$ $\forall F \in \text{Orient} : li = F^+ \cup (F^{-1})^+$.

Beweis Mit Lemma 5.24 und Lemma 5.7. □

Korollar 5.26 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EKO}}$ $\boxed{\text{LUE}}$ $\boxed{\text{KOR}}$ $\text{Order} \neq \emptyset$.

Beweis Mit Axiom KOR wählen wir eine konsistente Orientierung F und setzen $< = F^+$. Per Konstruktion ist $<$ transitiv.
Wegen Satz 5.25 gilt $li = F^+ \cup (F^{-1})^+ = (< \cup >)$. Wegen Axiom DIS ist $<$ irreflexiv und damit auch antisymmetrisch. Also $(<) \in \text{Order}$. □

Der letzte Satz entspricht $\boxed{\text{OBS}}$. Damit haben wir alle Axiome aus dem „Ordnungsbasierten System" hergeleitet.

Satz 5.27 $\boxed{\text{Basis}}$ $\boxed{\text{NTR}}$ $\boxed{\text{COI}}$ $\boxed{\text{KAA}}$ $\boxed{\text{IMK}}$ $\boxed{\text{LOR}}$ $\boxed{\text{LFO}}$ $\boxed{\text{KDI}}$ $\boxed{\text{NDI}}$ $\boxed{\text{LKO}}$ $\boxed{\text{EEN}}$ $\boxed{\text{LUE}}$
$\forall (<) \in \text{Order} : \forall x, y \in X : x \; co \; y \Rightarrow \exists u, v \in X : u < x < v \wedge u < y < v$.

Beweis Sei $(<) \in \text{Order}$. Seien $x, y \in X$ beliebig gewählt, jedoch $x \; co \; y$.
Wir wählen eine Linie $L \in \text{Lines}$ mit $x \in L$. Wegen Satz 5.12 gibt es eine $\lessdot$-Kette $\alpha = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$ mit $\text{Set}(\alpha) = L$. Es gibt ein $i \in \mathbb{Z}$, das $x = a_i$ erfüllt.
Wegen Axiom EEN gibt es ein $j \in \mathbb{Z}$ mit $j > i$, so daß $y \; li \; a_j$, weil sonst $\{a_i, a_{i+1}, \ldots\} \subseteq L \cap \underline{co}[y]$ im Widerspruch zu $Fin(L \cap \underline{co}[y])$. Es ergibt sich $x < a_j$ und folglich auch $y < a_j$.

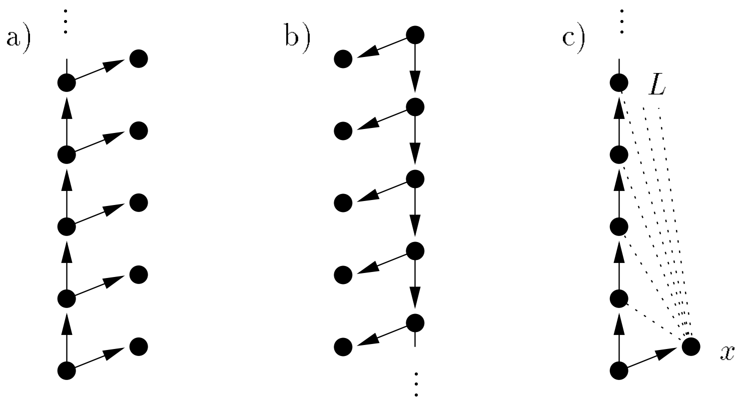


Abbildung 5.2: Kammeinbettung

Analog finden wir auch ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $a_k < x$ und $a_k < y$. Der Satz ergibt sich für $u = a_k$ und $v = a_j$. □

Also gilt $\boxed{\text{ZSS}}$, das heißt, daß alle Axiome des ZSS-Systems erfüllt sind. Die beiden Systeme sind also äquivalent.

5.2.6 Kausalordnungen

Die Axiomensysteme aus den letzten beiden Abschnitten liefern dieselbe Theorie, die Klasse ihrer Modelle scheint also in gewisser Weise natürlich zu sein. Diese Klasse wird jetzt mit Hilfe von Halbordnungen charakterisiert, genauer gesagt mit einer speziellen Klasse von Halbordnungen, die in [BF88] als *occurrence posets* bezeichnet werden, was hier mit Kausalordnungen übersetzt werden soll.

Definition 5.28 [Kausalordnung]
Eine Halbordnung $(X, <)$ heißt Kausalordnung genau dann, wenn es Mengen $B \subseteq X$ und $E \subseteq X$ gibt, so daß

$$X \neq \varnothing \tag{Nichttrivialität, 5.6}$$

$$B \cap E = \varnothing, \tag{Disjunktheit, 5.7}$$

$$B \cup E = X, \tag{Vollständigkeit, 5.8}$$

$$\forall b \in B : |{\bullet}b| \leq 1 \geq |b{\bullet}|, \tag{Unverzweigtheit, 5.9}$$

$$\lessdot \subseteq (B \times E) \cup (E \times B), \tag{Alternation, 5.10}$$

$$< = \lessdot^{+} \tag{Kombinatorische Ordnung, 5.11}$$

gilt. *co*, *li* und die anderen Objekte der Theorie der Nebenläufigkeit seien wie gewohnt von $(X, <)$ abgeleitet. ◊

Es wird hier die Konvention übernommen, die beiden Menge, in die X zerfällt, mit B und E zu bezeichnen. E wird daher ab jetzt *nicht* mehr für die Bezeichnung von Episoden reserviert. Es wird dadurch jedoch nicht zu Unklarheiten kommen, gegebenenfalls wird der Buchstabe M für die Menge $L \cap \underline{co}[x]$ verwendet.

In den vorigen Abschnitten fiel auf, welche entscheidende Rolle die K-Dichte beim Beweis der Episodenendlichkeit spielte und wie wichtig andererseits die Episodenendlichkeit für die Gültigkeit der K-Dichte ist. Dieser Zusammenhang ist besser zu verstehen, wenn man das folgende Resultat aus [BF88] kennt.

Theorem 5.29 (Best/Fernández) Sei $(X,<)$ eine Kausalordnung. $(X,<)$ ist K-dicht genau dann, wenn keine der Ordnungsstrukturen aus den Abbildungen 5.2a oder 5.2b in $(X,<)$ einbettbar ist. □

Damit ist klar, daß eine Verletzung der K-Dichte auch automatisch eine unendliche Episode impliziert.

Satz 5.30 $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : \mathit{Fin}(L \cap co[x]) \Rightarrow (X,<)$ ist K-dicht.
Beweis Angenommen, $(X,<)$ ist nicht K-dicht, dann ist nach Theorem 5.29 ein Kamm in $(X,<)$ einbettbar. Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, die Struktur aus Abbildung 5.2a sei in $(X,<)$ einbettbar, dann ist insbesondere auch die Unterstruktur aus Abbildung 5.2c in $(X,<)$ einbettbar. Wir erkennen dort eine Kette, die sich zu einer Linie $L \in \text{Lines}$ erweitern läßt, und ein Element x. Man sieht sofort $\neg \mathit{Fin}(L \cap \underline{co}[x])$. □

Das Konzept einer Kammeinbettung ist aufwendig zu formalisieren. Da wir hier nur das Ergebnis aus Satz 5.30 benötigen, wollen wir uns dieser Mühe nicht unterziehen.

Diesen Satz können wir jetzt bei der Gestaltung unserer Charakterisierung ausnutzen, bei der wir uns auf das absolut notwendige Minimum an Voraussetzungen beschränken wollen. Sei für den Rest dieses Unterabschnitts $(X,<)$ eine Kausalordnung mit der Partition $X = B \cup E$, für die wir außerdem die folgenden Bedingungen fordern:

$$\forall x,y \in X : x \neq y \Rightarrow ({\bullet}x \neq {\bullet}y \vee x{\bullet} \neq y{\bullet}), \qquad \text{(Irreduzibilität, 5.12)}$$

$$\forall x \in X : \exists y,z \in X : y < x < z, \qquad \text{(Fortsetzbarkeit, 5.13)}$$

$$\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : \mathit{Fin}(L \cap co[x]), \qquad \text{(Episodenendlichkeit, 5.14)}$$

$$\forall e \in E : |{\bullet}e| \neq 1 \neq |e{\bullet}|. \qquad \text{(Transitionsverzweigtheit, 5.15)}$$

Da li und co von $<$ abgeleitet sind, erfüllt die zugehörige Nebenläufigkeitsstruktur automatisch die Axiome $\boxed{\text{DIS}}$, $\boxed{\text{SYM}}$, $\boxed{\text{VST}}$ und $\boxed{\text{OBS}}$. Aus Formel 5.14 entnimmt man unmittelbar die Gültigkeit von $\boxed{\text{EEN}}$. Wie wir zu Beginn des Kapitels in Satz 5.30 gesehen haben, gilt $\boxed{\text{KDI}}$ wegen Axiom EEN.

Lemma 5.31 $\forall x \in X : {\bullet}x \neq \emptyset \neq x{\bullet}$. □

Lemma 5.32 $\forall e \in E : |{\bullet}e| \geq 2 \leq |e{\bullet}|$. □

Lemma 5.33 $\forall L \in \text{Lines} : \neg \mathit{Fin}(L)$.
Beweis Sei $L \in \text{Lines}$. Mit Formel 5.6 ergibt sich $L \neq \emptyset$. L ist durch $<$ total geordnet. Angenommen $\mathit{Fin}(L)$, dann existiert $x = \min_< L$. Nach 5.13 gibt es ein $y \in X$ mit $y < x$. Aber damit $\forall z \in L : y < x$, also ist L keine maximale $\underline{li}$-Klique. Widerspruch. □

Die letzte Aussage ist gerade $\boxed{\text{LUE}}$ und impliziert daher $\boxed{\text{NTR}}$.

Wir beobachten, daß die hier angenommene Definition von Irreduzibilität anders ist, als wir es von den Nebenläufigkeitsstrukturen gewohnt sind. Die unmittelbare Nachbarschaft soll sich unterscheiden, jedoch kann daraus nicht unmittelbar gefolgert werden, daß Axiom LII oder Axiom COI gelten muß.

Satz 5.34 $\forall x \in X : \forall y \in X : x \neq y \Rightarrow li[x] \neq li[y]$.
Beweis Seien $x,y \in X$ gegeben, wobei $x \neq y$. Wenn $x \; li \; y$, dann ist wegen $\neg y \; li \; y$ automatisch $li[x] \neq li[y]$.
Betrachten wir daher nun den Fall $x \; co \; y$. Nach der Voraussetzung der Irreduzibilität ist ${\bullet}x \neq {\bullet}y \vee x{\bullet} \neq y{\bullet}$.

Fall 1: $\exists z \in X : z \lessdot x \wedge \neg z \lessdot y$. Es ist $z \; li \; x$. Wenn $\neg z \; li \; y$, dann gilt der Satz sicher. Wir betrachten also nur $z \; li \; y$. Mit $z < x$ und $x \; co \; y$ gelangen wir zu $z < y$.

Weil nun $\neg z \lessdot y$, gibt es ein $v \in X$ mit $z < v < y$. $v < x$ ist unmöglich wegen $z < v$ im Widerspruch zu $z \lessdot x$. $x < v$ ist unmöglich wegen $v < y$ und $x\ co\ y$. Daher $\neg x\ li\ v$, was mit $v\ li\ y$ bedeutet, daß $li[x] \neq li[y]$.

Fall 2: $\exists z \in X : z \lessdot y \wedge \neg z \lessdot x$. Analog zum vorigen Fall.

Fall 3: $\exists z \in X : z \gtrdot x \wedge \neg z \gtrdot y$. Analog zum vorigen Fall.

Fall 4: $\exists z \in X : z \gtrdot y \wedge \neg z \gtrdot x$. Analog zum vorigen Fall.

Die drei nicht behandelten Fälle entsprechen dem ersten bis auf Symmetrie. $\square$

Damit wissen wir immerhin, daß $\boxed{\text{LII}}$ gilt. Um auch $\boxed{\text{COI}}$ zu zeigen, muß jedoch mehr Mühe aufgewendet werden.

Lemma 5.35 $\forall b \in B : \forall e \in E : b < e \Rightarrow (\exists y \in X : b\ co\ y \wedge y < e)$.

Beweis Seien $b \in B$ und $e \in E$ mit $b < e$ nach der Voraussetzung gegeben. Es gibt ein z mit $b \lessdot z$, wir fixieren dieses. Es gilt $z \in E$ und $z \leq e$. Nun gibt es $y \in B$ mit $y \neq b$ und $y \lessdot z$, folglich $b\ co\ y$. Da $z \leq e$, gilt $y < e$. $\square$

Lemma 5.36 $\forall x \in E : \forall e \in E : x < e \Rightarrow (\exists v \in E : \exists n \in \mathbb{N} : (x \lessdot^n v) \wedge (v \leq e) \wedge (\forall m > n : \neg x \lessdot^m v))$.

Beweis Seien $x \in E$ und $e \in E$ mit $x < e$ nach der Voraussetzung gegeben. Wir nehmen für einen Widerspruchsbeweis an, daß $\forall v \in E : \forall n \in \mathbb{N} : (\neg x \lessdot^n v) \vee (\neg v \leq e) \vee (\exists m > n : x \lessdot^m v)$. Wir konstruieren jetzt in einer Induktion eine unendliche Menge paarweise geordneter Elemente zwischen e und x.

Anfang: $i = 0$, $a_0 = e$. Es gilt $a_0 \leq e \wedge a_0 > x \wedge a_0 \in E$.

Hypothese: $a_i \leq e \wedge a_i > x \wedge a_i \in E$.

Von i nach $i+1$: Wegen $x < a_i$ gibt es eine $\lessdot$-Kette $\beta = (x = b_0, b_1, \ldots, b_n = a_i)$ mit $n \geq 1$. Wegen $x \in E \wedge a_i \in E$ ist n gerade, daher $n \geq 2$. Nun können wir die Fallvoraussetzung mit $v = a_i$ anwenden, und erhalten wegen $x \lessdot^n a_i$ und $a_i \leq e$, daß $\exists m > n : x \lessdot^m a_i$. Sei m passend gewählt, dann gilt $m > 2$.
Wir können daher eine $\lessdot$-Kette $\gamma = (x = c_0, c_1, \ldots, c_m = a_i)$ finden. Wegen $x \in E \wedge a_i \in E$ ist m gerade, daher $m \geq 4$. Sei $a_{i+1} = c_2$, dann $a_{i+1} = c_2 < c_m = a_i$ und auch $a_{i+1} < e$. Ferner $a_{i+1} > x$ und $a_i \in E$.

Sei $A = \{a_i \mid i > 0\}$, dann $\neg Fin(A)$. Es gilt $\forall a \in A : x < a < e$. Wir wählen eine beliebige $\lessdot$-Kette $\delta = (x = d_0, d_1, \ldots, d_l = e)$. Sei $L \in$ Lines mit $A \subseteq L$. Wegen der Episodenendlichkeit ist $\bigcup_{0<j<l} L \cap \underline{co}[d_j]$ endlich, also ist auch $A \cap \bigcup_{0<j<l} \underline{co}[d_j]$ endlich.
Weil A aber unendlich ist, ist $A - \bigcup_{0<j<l} \underline{co}[d_j] \neq \emptyset$, also gibt es ein $a_i \in A$, so daß $a_i \notin \bigcup_{0<j<l} \underline{co}[d_j] \neq \emptyset$. Es gilt nun $\forall 0 < j < l : a_i\ li\ d_j$. Mit $d_0 < a_i < d_l$ ergibt sich daraus die Existenz eines j mit $d_j < a_i$ und $\neg d_{j+1} < a_i$. Aus $a_i\ li\ d_{j+1}$ ergibt sich damit $d_j < a_i < d_{j+1}$ im Widerspruch zu $d_j \lessdot d_{j+1}$. $\square$

Lemma 5.37 $\forall x \in E : \forall e \in E : x < e \Rightarrow (\exists y \in X : x\ co\ y \wedge y < e)$.

Beweis Seien $x \in E$ und $e \in E$ mit $x < e$ nach der Voraussetzung gegeben. Aus Lemma 5.36 folgt direkt $\exists v \in E : \exists n \in \mathbb{N} : (x \lessdot^n v) \wedge (v \leq e) \wedge (\forall m > n : \neg x \lessdot^m v)$. Das bedeutet, daß es eine längste $\lessdot$-Kette von x zu einem Element $v \leq e$ gibt. Sei $\alpha = (x = a_0, a_1, \ldots, a_n = v)$ eine solche Kette. Wegen $x \in E$ folgt $a_2 \in E$ und daher gibt es ein $y \lessdot a_2$ mit $y \neq a_1$.
Wäre $x > y$, dann $y < x < a_2$ im Widerspruch zu $y \lessdot a_2$. Also $\neg x > y$.
Wäre $x < y$, dann gibt es eine $\lessdot$-Kette $\beta = (x = b_0, b_1, \ldots, b_l = y)$ mit $l \geq 1$. Aber für $l > 1$ widerspricht dies der Maximalität von α, folglich $l = 1$. $x \lessdot a_1$ und $x \lessdot y$ ergibt $\bullet a_1 = \{x\} = \bullet y$. Gleichzeitig gilt aber auch $a_1 \bullet = \{a_2\} = y \bullet$ im Widerspruch zu $a_1 \neq y$ und Formel 5.12. Also $\neg x < y$.

$x = y$ ist unmöglich wegen $x \in E \wedge y \in B$, also insgesamt $x \; co \; y$.
Mit $y \lessdot a_2 \leq a_n = v \leq e$ folgt zusätzlich $y < e$. y erfüllt die Bedingungen, die im Lemma gefordert werden. □

Lemma 5.38 $\forall x \in X : \forall e \in E : x < e \Rightarrow (\exists y \in X : x \; co \; y \wedge y < e)$.
Beweis Mit Lemma 5.35 und Lemma 5.37. □

Lemma 5.39 $\forall x \in X : \forall z \in X : (x < z \wedge \neg x \lessdot z) \Rightarrow (\exists y \in X : x \; co \; y \wedge y < z)$.
Beweis Sei $x \in X$ und $z \in X$ mit $x < z$ und $\neg x \lessdot z$. Für den Fall $z \in E$ ergibt sich der Satz als eine Abschwächung von Lemma 5.38, wir betrachten also nur noch den Fall $z \in B$. Wegen $x < z$ gibt es eine $\lessdot$-Kette $\alpha = (x = a_0, a_1, \ldots, a_n = z)$. $\neg x \lessdot z$ führt zu $n \geq 2$ und somit $a_0 < a_{n-1}$. Da $a_n \in B$, ist $a_{n-1} \in E$. Damit können wir Lemma 5.38 anwenden, wobei wir ein $y \in X$ mit $a_0 \; co \; y$ und $y < a_{n-1}$ erhalten. Dies kann umgeformt werden zu $x \; co \; y$ und $y < a_n = z$. □

Die folgenden Lemmata können analog zu den eben vorgestellten bewiesen werden, es wird lediglich $<$ mit $>$ vertauscht.

Lemma 5.40 $\forall b \in B : \forall e \in E : b > e \Rightarrow (\exists y \in X : y \; co \; b \wedge y > e)$. □

Lemma 5.41 $\forall x \in X : \forall z \in X : (x > z \wedge \neg x \gtrdot z) \Rightarrow (\exists y \in X : x \; co \; y \wedge y > z)$. □

Wir können jetzt wieder einen Satz beweisen, der einen Zusammenhang zur Theorie der Nebenläufigkeit herstellt.

Satz 5.42 $\forall x \in X : \forall z \in X : x \neq z \Rightarrow co[x] \neq co[z]$.
Beweis Seien $x, z \in X$ gegeben, wobei $x \neq z$.

Fall 1: $x \; co \; z$. Da $x \in co[z]$ und $x \notin co[x]$, folgt der Satz trivial.

Fall 2: $x < z \wedge \neg x \lessdot z$. Mit Lemma 5.39 erhalten wir die Existenz eines y mit $x \; co \; y \wedge y < z$. Insbesondere gilt $\neg y \; co \; z$, daher $y \in co[x]$ und $y \notin co[z]$.

Fall 3: $x > z \wedge \neg x \gtrdot z$. Analog zu Fall 2 unter Verwendung von Lemma 5.41.

Fall 4: $x \lessdot z \wedge x \in B$. Es folgt $z \in E$. Mit Lemma 5.35 bei $b = x$ und $e = z$ erhalten wir die Existenz eines y mit $y \; co \; x \wedge y < z$, also $\neg y \; co \; z$.

Fall 5: $x \lessdot z \wedge x \in E$. Es folgt $z \in B$. Mit Lemma 5.40 bei $b = z$ und $e = x$ erhalten wir die Existenz eines y mit $y \; co \; z \wedge y > x$, also $\neg y \; co \; x$.

Fall 6: $x \gtrdot z \wedge x \in B$. Es folgt $z \in E$. Mit Lemma 5.40 bei $b = x$ und $e = z$ erhalten wir die Existenz eines y mit $y \; co \; x \wedge y > z$, also $\neg y \; co \; z$.

Fall 7: $x \gtrdot z \wedge x \in E$. Es folgt $z \in B$. Mit Lemma 5.35 bei $b = z$ und $e = x$ erhalten wir die Existenz eines y mit $y \; co \; z \wedge y < x$, also $\neg y \; co \; x$.

Wegen $x \neq z$ sind dies alle Fälle. □

Dieser Satz entspricht $\boxed{\text{COI}}$, und mit $\boxed{\text{LII}}$ haben wir nun auch $\boxed{\text{IRR}}$. Jetzt können wir erste Aussagen über die Objekte P und im machen, die ja wie gewöhnlich mit Hilfe von $\underline{li}$ definiert sind.

Lemma 5.43 $\forall x \in X : \forall z \in X : (\neg x \lessdot z \wedge \neg z \lessdot x) \Rightarrow \neg x \; im \; z$.
Beweis Wir betrachten beliebige $x, z \in X$ mit $\neg x \lessdot z$ und $\neg z \lessdot x$.

Fall 1: $x \; \underline{co} \; z$. Per Definition von im gilt $\neg x \; im \; z$.

Fall 2: $x < z$. Lemma 5.39 beweist die Existenz eines y_1 mit $x \; co \; y_1$ und $y_1 < z$. $z \; \underline{li} \; y_1$ und daher $\neg z \; P \; x$.

Natürlich ist $z > x$, also können wir – unter Vertauschung der Variablen x und z – Lemma 5.41 anwenden und erhalten ein y_2 mit $z\ co\ y_2$ und $x < y_2$. $x\ \underline{li}\ y_2$ und daher $\neg x\ P\ z$. Also $\neg x\ im\ z$.

Fall 3: $z < x$. Analog zum vorigen Fall.

Damit gilt das Lemma in allen Fällen. □

Lemma 5.44 $\forall x \in B : \forall z \in X : x \lessdot z \Rightarrow x\ P\ z$.
Beweis Sei $x \in B$ und $z \in X$, wobei $x \lessdot z$. Es folgt $z \in E$. Wegen Satz 5.42 ist $\underline{li}[x] \neq \underline{li}[z]$. Es bleibt zu zeigen $\underline{li}[x] \subseteq \underline{li}[z]$. Sei dazu $y\ \underline{li}\ x$.

Fall 1: $y \leq x$. Per Transitivität $y < z$, also $y\ \underline{li}\ z$.

Fall 2: $x < y$. Es gibt eine $\lessdot$-Kette $\alpha = (x = a_0, a_1, \ldots, a_n = y)$. Es ist $x = a_0 \lessdot a_1$ und $a_1 \leq a_n = y$. Wegen $|x\bullet| = 1$ und $\{a_1, z\} \subseteq x\bullet$ gilt $a_1 = z$. Folglich $z \leq y$ und auch $z\ \underline{li}\ y$.

Also $\forall y \in \underline{li}[x] : y \in \underline{li}[z]$. □

Lemma 5.45 $\forall x \in B : \forall z \in X : x \gtrdot z \Rightarrow x\ P\ z$.
Beweis Analog zum vorigen Lemma. □

Lemma 5.46 $\forall x \in X : \forall z \in X : (x \lessdot z \vee z \lessdot x) \Rightarrow x\ im\ z$.
Beweis Wir betrachten beliebige $x, z \in X$, wobei $x \lessdot z \vee z \lessdot x$

Fall 1: $x \in B \wedge x \lessdot z$. Lemma 5.44 beweist $x\ P\ z$.

Fall 2: $x \in B \wedge x \gtrdot z$. Lemma 5.45 beweist $x\ P\ z$.

Fall 3: $x \in E \wedge x \lessdot z$. Es ergibt sich $z \in B$ und mit Hilfe von Lemma 5.45 erhalten wir $z\ P\ x$.

Fall 4: $x \in E \wedge x \gtrdot z$. Es ergibt sich $z \in B$ und mit Hilfe von Lemma 5.44 erhalten wir $z\ P\ x$.

Also $x\ im\ z$. □

Satz 5.47 $\forall x \in X : \forall z \in X : (x \lessdot z \vee x \gtrdot z) \Leftrightarrow x\ im\ z$.
Beweis Mit Lemma 5.43 und Lemma 5.46. □

Damit haben wir gezeigt, daß im als Relation der unmittelbaren Nachbarschaft wirklich mit der symmetrischen Ergänzung der unmittelbaren Nachfolgerrelation übereinstimmt.

Satz 5.48 $P^2 = \emptyset$.
Beweis Angenommen, es gibt $x, y, z \in X$ mit $x\ P\ y$ und $y\ P\ z$, dann gilt per Definition von P auch $x\ P\ z$. Es gilt also $x\ im\ y\ im\ z\ im\ x$.
Da $\lessdot \subseteq B \times E \cup E \times B$, gilt nach Satz 5.47, daß $im \subseteq B \times E \cup E \times B$. Damit führt aber $x \in B$ zu $y \in E$, $z \in B$ und $x \in E$, Widerspruch. Ähnlich führt $x \in E$ zu $y \in B$, $z \in E$ und $x \in B$, auch hier entsteht ein Widerspruch mit $B \cap E = \emptyset$. □

Die betrachtete Klasse von Halbordnungen erzeugt also Nebenläufigkeitsstrukturen, die $\boxed{\text{KAA}}$ erfüllen.

Wir wollen nun die Axiome zur lokalen Orientierbarkeit herleiten, dies ist jedoch nicht mehr schwer, nachdem die Konsistenz von im mit $\lessdot$ und $\gtrdot$ bewiesen wurde.

Lemma 5.49 $\forall x \in X : \forall a, b \in im[x] : (a \lessdot x \Leftrightarrow b \lessdot x) \Leftrightarrow (a\ \underline{co}\ b)$.
Beweis Sei $x \in X$ beliebig und $a, b \in im[x]$.

Fall 1: $a \lessdot x \wedge b \lessdot x$. $a < b$ widerspricht $b < x$ und $a \lessdot x$, $b < a$ widerspricht $a < x$ und $b \lessdot x$, also $a\ \underline{co}\ b$.

Fall 2: $a \lessdot x \wedge \neg b \lessdot x$. Es folgt $b \gtrdot x$, also $a < x < b$ und $\neg a\ \underline{co}\ b$.

Fall 3: $\neg a \lessdot x \wedge b \lessdot x$. Es folgt $a \gtrdot x$, also $b < x < a$ und $\neg a\ \underline{co}\ b$.

Fall 4: $\neg a \lessdot x \wedge \neg b \lessdot x$. Es folgt $a \gtrdot x \wedge b \gtrdot x$. $a > b$ widerspricht $b > x$ und $a \gtrdot x$, $b > a$ widerspricht $a > x$ und $b \gtrdot x$, also $a\ \underline{co}\ b$.

Die Fälle decken alle Möglichkeiten ab. □

Satz 5.50 $\forall x \in X : (co|_{im[x]})^2 \subseteq \underline{co}|_{im[x]}$.
Beweis Sei $x \in X$ beliebig und $a, b, c \in im[x]$ mit $a\ co\ b\ co\ c$. Lemma 5.49 führt zu $a \lessdot x \Leftrightarrow b \lessdot x$, $b \lessdot x \Leftrightarrow c \lessdot x$ und $(a \lessdot x \Leftrightarrow c \lessdot x) \Leftrightarrow (a\ \underline{co}\ c)$. Die ersten beiden Terme ergeben $a \lessdot x \Leftrightarrow c \lessdot x$, also $a\ \underline{co}\ c$ gemäß dem letzten Term. □

Satz 5.51 $\forall x \in X : (li|_{im[x]})^2 \subseteq \underline{co}|_{im[x]}$.
Beweis Sei $x \in X$ beliebig und $a, b, c \in im[x]$ mit $a\ li\ b\ li\ c$. Lemma 5.49 führt zu $\neg(a \lessdot x \Leftrightarrow b \lessdot x)$, $\neg(b \lessdot x \Leftrightarrow c \lessdot x)$ und $(a \lessdot x \Leftrightarrow c \lessdot x) \Leftrightarrow (a\ \underline{co}\ c)$. Die ersten beiden Terme ergeben $a \lessdot x \Leftrightarrow c \lessdot x$, also $a\ \underline{co}\ c$ gemäß dem letzten Term. □

Satz 5.52 $\forall x \in X : \mathrm{id}_{im[x]} \subseteq (li|_{im[x]})^2$.
Beweis Sei $x \in X$ beliebig und $a \in im[x]$. Es gibt $b, c \in im[x]$ mit $b \lessdot x$ und $c \gtrdot x$ nicht notwendigerweise verschieden von a. Wenn $a \lessdot x$, dann $a\ li\ c$ und $c\ li\ a$, also $a\ (li|_{im[x]})^2\ a$. Wenn dagegen $a \gtrdot x$, dann $a\ li\ b$ und $b\ li\ a$, und wiederum folgt $a\ (li|_{im[x]})^2\ a$. □

Damit erfüllen die Strukturen auch $\boxed{\text{LCT}}$, $\boxed{\text{LOR}}$ und $\boxed{\text{LFO}}$.

Satz 5.53 $\forall x, y \in X : \exists a, b \in X : a < x < b \wedge a < y < b$.
Beweis Seien $x, y \in X$ gegeben. Es gilt $\forall z \in X : {\bullet}z \neq \emptyset \neq z{\bullet}$.

Fall 1: $x < y$. Wir wählen $a \in {\bullet}x$ und $b \in y{\bullet}$.

Fall 2: $y < x$. Wir wählen $a \in {\bullet}y$ und $b \in x{\bullet}$.

Fall 3: $x\ co\ y$. Wir können eine beidseitig unendliche $\lessdot$-Kette $\alpha = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$ mit $a_0 = x$ finden.
Set(α) ist eine $\underline{li}$-Klique, also gibt es ein $L \in$ Lines mit Set$(\alpha) \subseteq L$. Nun ist $Fin(L \cap \underline{co}[y])$, also gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\neg y\ \underline{co}\ a_i$ und ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\neg a_{-j}\ \underline{co}\ y$.
Aus $x = a_0 < a_i$ und $x\ co\ y$ und $y\ li\ a_i$ ergibt sich $y < a_i$. Aus $a_{-j} < a_0 = x$ und $x\ co\ y$ und $a_{-j}\ li\ y$ ergibt sich $a_{-j} < y$. Wir setzen $a = a_{-j}$ und $b = a_i$.

In jedem Fall $a < x < b \wedge a < y < b$. □

Satz 5.54 $im^*_X = X \times X$.
Beweis Seien $x, y \in X$. Wenn $x < y$, dann ist $x \lessdot^*_X y$, also auch $x\ im^*_X\ y$. Gleichermaßen folgt aus $y < x$, daß $x\ im^*_X\ y$.
Wir betrachten also nur noch den Fall $x\ co\ y$. Gemäß dem vorigen Satz gibt es $b \in X$ mit $x < b$ und $y < b$. Also $x\ im^*_X\ b$ und $y\ im^*_X\ b$. Kombiniert ist $x\ im^*_X\ y$ gültig. □

Dies entspricht $\boxed{\text{IMK}}$. Wir können jetzt aus Satz 4.17 schließen, daß $\boxed{\text{KOH}}$ gilt.

Satz 5.55 $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : M = L \cap \underline{co}[x] \Rightarrow (im|_M)^*_M = M \times M$.
Beweis Sei $L \in$ Lines und $x \in X$ beliebig. Wir setzen $M = L \cap \underline{co}[x]$, dann ist M endlich wegen Formel 5.14. Da $M \subseteq L$, ist M durch $<$ total geordnet und wir können eine $<$-Kette $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ finden mit Set$(\alpha) = M$.
Angenommen, es gibt ein $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i < n$ und $\neg a_i \lessdot a_{i+1}$, dann gibt es ein $b \in X$, so daß $a_i < b < a_{i+1}$. $b \notin M$, weil a_i und a_{i+1} in α unmittelbar aufeinander folgen.

Fall 1: $b \in L$. Wegen $b \notin M$ ergibt sich $b\ li\ x$. Aber es steht $b < x$ mit $a_i < b$ im Widerspruch zu $a_i\ \underline{co}\ x$, und $x < b$ widerspricht $b < a_{i+1}$ samt $a_{i+1}\ \underline{co}\ x$.

Fall 2: $b \notin L$. Es gibt ein $c \in L$ mit $b\ co\ c$, ansonsten wäre die Linie nicht maximal. $c \leq a_i$ widerspricht $a_i < b$ und $c\ co\ b$, ebenso entfällt $a_{i+1} \leq c$, also $a_i < c < a_{i+1}$. Nun ist $x < c$ unmöglich wegen $c < a_{i+1}$ und $x\ \underline{co}\ a_{i+1}$, und $c < x$ entfällt wegen $a_i < c$ und $x\ \underline{co}\ a_i$, also $c\ \underline{co}\ x$ und somit $c \in M$. Dies ist aber unmöglich, weil a_i und a_{i+1} in α unmittelbar aufeinander folgen.

Also tritt in jedem Fall ein Widerspruch ein, und es ist $a_i \lessdot a_{i+1}$ für alle i und α ist eine $\lessdot$-Kette. Weil aber $(\lessdot) \subseteq im$ gemäß Lemma 5.46, ist α auch eine im-Kette, also ist $M = \mathrm{Set}(\alpha)$ im-kohärent. □

Somit haben wir $\boxed{\text{EKO}}$, und Satz 4.10 führt zu $\boxed{\text{LKO}}$. Damit sind alle Axiome des Systems der induzierten Dichte erfüllt.

Wir beachten insbesondere, welche wichtige Rolle die Irreduzibilität in den Beweisen gespielt hat. Sie entspricht recht genau dem Prinzip der Extensionalität, das in der Mengenlehre gefordert wird: Wenn sich zwei Objekte in ihren Beziehungen zu anderen Elementen gleich verhalten, dann sind sie gleich.

5.2.7 D-Stetigkeit und Episodenendlichkeit

Die folgenden Beweise beschäftigen sich ausschließlich mit Halbordnungen, trotzdem sind sie für die Theorie der Nebenläufigkeit so wichtig, daß sie in diese Arbeit aufgenommen wurden. Zudem erlauben sie wichtige Einblicke in den neu eingeführten Begriff einer Episode.

Im vorigen Abschnitt wurde eine Charakterisierung von azyklischen Nebenläufigkeitsstrukturen mit Hilfe von episodenendlichen Kausalordnungen gegeben. Es soll jetzt gezeigt werden, daß diese Strukturen in Form der verallgemeinerten D-Stetigkeit noch eine gänzlich andere auszeichnende Eigenschaft besitzen,

In [Pet80] definiert Petri eine verallgemeinerte Form der Stetigkeit, die von Best und Fernández in [BF88] aufgegriffen und untersucht wird. Es handelt sich hierbei formal um eine Verallgemeinerung des Stetigkeitsbegriffs, wie ihn Dedekind zur Beschreibung der reellen Zahlen eingeführt hat. Letztlich soll die Verallgemeinerung der D-Stetigkeit auf kombinatorische Halbordnungen dazu dienen, auch mit diskreten Strukturen kontinuierliche Vorgänge beschreiben zu können.

In [Pet82] schlägt Petri eine Brücke zwischen D-stetigen Ordnungen und Nebenläufigkeitsstrukturen, die in [BM85] unter besonderer Berücksichtigung von Axiom ZSS genauer untersucht wird. [PS87] und [Smi89] verfolgen dann einen anderen Ansatz, der jedoch hier zugunsten der früheren und besser zu handhabenden Definition übergangen wird.

Sei $(X, <)$ eine Kausalordnung gemäß Definition 5.28.

Definition 5.56 [Dedekind-Schnitte]
Die Elemente der Menge

$$\mathrm{DCuts} := \{A \subseteq X \mid \varnothing \neq A \neq X \wedge \forall a \in A : \forall b \in X : b < a \Rightarrow b \in A\}$$

heißen Dedekind-Schnitte. Weiterhin sei für jeden D-Schnitt $A \in \mathrm{DCuts}$

$$\begin{aligned}
\bar{A} &:= X - A, \\
Obmax(A) &:= \{x \in \max(A) \mid \forall B \in \mathrm{DCuts} : \forall L \in \mathrm{Lines} : \\
&\qquad\qquad x \in \max(B \cap L) \Rightarrow x \in \max(B)\}, \\
Obmin(\bar{A}) &:= \{x \in \min(\bar{A}) \mid \forall B \in \mathrm{DCuts} : \forall L \in \mathrm{Lines} : \\
&\qquad\qquad x \in \min(\bar{B} \cap L) \Rightarrow x \in \min(\bar{B})\}, \\
c(A) &:= Obmax(A) \cup Obmin(\bar{A})
\end{aligned}$$

definiert. ◊

Definition 5.57 [D-Stetigkeit]
$(X,<)$ heißt D-stetig genau dann, wenn $\forall A \in \text{DCuts} : \forall L \in \text{Lines} : |L \cap c(A)| = 1$ gilt. $\Diamond$

Definition 5.58 [Cut-bounded]
$(X,<)$ heißt *cut-bounded* genau dann, wenn $\forall A \in \text{DCuts} : A \subseteq {\downarrow}(\max(A) \cup \min(\bar{A})) \wedge \bar{A} \subseteq {\uparrow}(\max(A) \cup \min(\bar{A}))$. $\Diamond$

In [BF88] findet sich das folgende Resultat:

Theorem 5.59 (Best/Fernández) Sei $(X,<)$ eine Kausalordnung mit der Partition $X = B \cup E$. $(X,<)$ ist D-stetig $\Leftrightarrow$ $(X,<)$ ist K-dicht und *cut-bounded* und $\forall e \in E : |{\bullet}e| \neq 1 \neq |e{\bullet}|$. $\Box$

Dieser Satz stellt eine Charakterisierung der D-Stetigkeit dar, die im folgenden verbessert werden soll.

Lemma 5.60 Sei $<$ eine totale Ordnung auf M und $\neg Fin(M)$, dann gibt es eine einseitig unendliche Kette $\alpha = (a_0, a_1, \ldots)$, so daß α eine $<$-Kette oder eine $>$-Kette ist und $\text{Set}(\alpha) \subseteq M$.

Beweis Wenn es eine unendliche $>$-Kette gibt, dann gilt der Satz offensichtlich. Wenn es keine unendliche $>$-Kette gibt, dann ist $<$ eine unendliche Wohlordnung und beginnt damit vom kleinsten Element aus mit einer unendlichen $<$-Kette. $\Box$

Satz 5.61 $(X,<)$ ist D-stetig $\Rightarrow \forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : Fin(L \cap co[x])$.

Beweis Sei für einen Widerspruchsbeweis $L \in \text{Lines}$ und $x \in X$ so gewählt, daß $\neg Fin(L \cap co[x])$. $L \cap co[x]$ ist durch $<$ total geordnet, weil $L \in \text{Lines}$. Nach Lemma 5.60 gibt es eine unendliche Kette $\alpha = (a_0, a_1, \ldots)$ mit $\text{Set}(\alpha) \subseteq L \cap co[x]$ und α ist entweder eine $<$-Kette oder eine $>$-Kette. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß α eine $<$-Kette ist. Wir treffen nun eine Fallunterscheidung, ob es oberhalb der Kette noch Elemente in X gibt oder nicht.

Fall 1: $\neg\exists v \in X : \forall i \in \mathbb{N} : a_i < v$. Wir haben $\forall a \in L : \exists i \in \mathbb{N} : a < a_i$. Wenn $\exists a \in L : x \leq a$, dann folgt daraus $\exists a \in L : \exists i \in \mathbb{N} : x \leq a < a_i$ im Widerspruch zu $\forall i \in \mathbb{N} : x \; co \; a_i$. Also $\neg\exists a \in L : x \leq a$ oder umgeformt $\forall a \in L : \neg a \geq x$.
Sei $A = \{a \in X \mid a < x \vee a \; co \; x\}$ und $\bar{A} = \{a \in X \mid a \geq x\}$. Es gilt $x \in \bar{A}$ und $L \subseteq A$, also $A \neq \varnothing \neq \bar{A}$. Nun ergibt sich leicht $A \in \text{DCuts}$.
Es ist $L \cap \bar{A} = \varnothing$ und daher auch $L \cap Obmin(\bar{A}) = \varnothing$. Definition 5.57 erfordert dann aber $|L \cap Obmax(A)| = 1$. Sei $z \in L \cap Obmax(A) \subseteq \max(A)$. Wegen $z \in L$ gilt $\exists i \in \mathbb{N} : z < a_i$, dies wird abgeschwächt zu $\exists w \in A : z < w$ im Widerspruch zu $z \in \max(A)$.

Fall 2: $\exists v \in X : \forall i \in \mathbb{N} : a_i < v$. Sei $A = \{w \in X \mid \exists i \in \mathbb{N} : w \leq a_i\}$. $A \in \text{DCuts}$, weil insbesondere nach Fallvoraussetzung $\bar{A} \neq \varnothing$. Weil $(X,<)$ D-stetig ist, ist $L \cap c(A) \neq \varnothing$. Sei $u \in L \cap c(A)$.
Angenommen, $u \in Obmax(A) \subseteq \max(A) \subseteq A$, dann $\exists i \in \mathbb{N} : u \leq a_i$ wegen $u \in A$. Aber nun $\exists i \in \mathbb{N} : u < a_{i+1}$ im Widerspruch zu $u \in \max(A)$. Also $u \notin Obmax(A)$ und folglich $u \in Obmin(\bar{A}) \subseteq \min(\bar{A}) \subseteq \bar{A}$.
Wegen $u \in L$ gilt $\forall i \in \mathbb{N} : a_i \; li \; u$, $\forall i \in \mathbb{N} : a_i < u$ und speziell $a_0 < u$. Da $< = \lessdot^+$ gibt es ein $z \in X$ mit $a_0 \leq z \lessdot u$. Wegen $u \in \min \bar{A}$ ist $z \notin \bar{A}$, also $z \in A$. Nach Konstruktion von A haben wir $\exists i \in \mathbb{N} : z \leq a_i$ und daher auch $\exists i \in \mathbb{N} : z < a_{i+1} < u$ im Widerspruch zu $z \lessdot u$.

Der Widerspruch tritt in beiden Fällen auf. $\Box$

Lemma 5.62 $\forall \alpha = (a_0, a_1, \ldots) \in \omega\text{-Ketten}(<) : \forall y \in X : ((\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : Fin(L \cap co[x])) \wedge (\neg\exists i \in \mathbb{N} : a_i \geq y)) \Rightarrow (\exists i \in \mathbb{N} : a_i \; co \; y)$.

Beweis Seien $\alpha \in \omega$-Ketten($<$) und $y \in X$ gegeben, wobei die beiden Voraussetzungen gelten. Angenommen $\neg\exists i \in \mathbb{N} : a_i \; co \; y$, dann ist dies äquivalent zu $\forall i \in \mathbb{N} : a_i \; \underline{li} \; y$. Mit der Voraussetzung $\neg\exists i \in \mathbb{N} : a_i \geq y$ folgt $\forall i \in \mathbb{N} : a_i < y$.
Aus $< \, = \, \lessdot^+$ können wir die Existenz einer $\lessdot$-Kette $\beta = (a_0 = b_0, b_1, \ldots, b_n = y)$ ableiten. Sei $m = \min\{j \mid 0 \leq j \leq n \wedge \forall i \in \mathbb{N} : a_i < b_j\}$, sicher ist $m > 0$.
Jetzt gilt $\exists i \in \mathbb{N} : \neg a_i < b_{m-1}$ und $\forall i \in \mathbb{N} : a_i < b_m$. Wenn $\exists i \in \mathbb{N} : b_{m-1} \leq a_i$, dann $\exists i \in \mathbb{N} : b_{m-1} \leq a_i < a_{i+1} < b_m$ im Widerspruch zu $b_{m-1} \lessdot b_m$. Damit verstärkt sich unsere Aussage zu $\exists i \in \mathbb{N} : (\neg a_i < b_{m-1}) \wedge (\neg b_{m-1} \leq a_i)$ oder $\exists i \in \mathbb{N} : a_i \; co \; b_{m-1}$.
Wir fixieren i mit $a_i \; co \; b_{m-1}$, dann gilt wegen $Fin(L \cap co[b_{m-1}])$ für eine Linie $L \in$ Lines mit $\mathrm{Set}(\alpha) \subseteq L$, daß $\exists j \in \mathbb{N} : a_j > a_i \wedge a_j \; \underline{li} \; b_{m-1}$. Sei ein j mit dieser Eigenschaft gewählt. $b_{m-1} \leq a_j$ wurde bereits ausgeschlossen, also ist $a_j < b_{m-1}$. Aber nun ergibt sich $a_i < a_j < b_{m-1}$, und dies steht im Widerspruch zu $a_i \; co \; b_{m-1}$.
Also $\exists i \in \mathbb{N} : a_i \; co \; y$. □

Satz 5.63 $(\forall L \in \mathrm{Lines} : \forall x \in X : Fin(L \cap co[x])) \Rightarrow \forall A \in \mathrm{DCuts} : A \subseteq {\downarrow}\max(A)$.
Beweis Sei die Prämisse des Satzes erfüllt. Sei für einen Widerspruchsbeweis $A \in$ DCuts und $x \in A$ mit $x \notin {\downarrow}\max(A)$.
Weil $\forall a \in A : x \leq a \Rightarrow a \notin {\downarrow}\max(A)$ gilt $\forall a_i \in A : x \leq a_i \Rightarrow (\exists a_{i+1} \in A : a_i < a_{i+1})$. Damit können wir eine unendliche $<$-Kette finden, die mit x beginnt, nämlich $\alpha = (x = a_0, a_1, a_2, \ldots)$, wobei $\mathrm{Set}(\alpha) \subseteq A$. Weiterhin gibt es eine Linie L, so daß $\mathrm{Set}(\alpha) \subseteq L$.
Wegen $A \in$ DCuts ist $\bar{A} \neq \emptyset$, und es gibt ein $y \in \bar{A}$. Es gilt $y \notin A$. Per Definition von DCuts haben wir $\neg\exists a \in A : a \geq y$, also insbesondere $\neg\exists i \in \mathbb{N} : a_i \geq y$. Damit können wir Lemma 5.62 anwenden und erhalten $\exists i \in \mathbb{N} : a_i \; co \; y$.
Wir fixieren ein i mit $a_i \; co \; y$. Wegen $Fin(L \cap co[y])$ gibt es ein j mit $a_j > a_i$ und $a_j \; \underline{li} \; y$, was sich unter Anwendung von $y \in \bar{A}$ zu $a_j < y$ verschärfen läßt. $a_i < a_j < y$ ergibt einen Widerspruch mit $a_i \; co \; y$. □

Satz 5.64 $(\forall L \in \mathrm{Lines} : \forall x \in X : Fin(L \cap co[x])) \Rightarrow \forall A \in \mathrm{DCuts} : \bar{A} \subseteq {\uparrow}\min(\bar{A})$.
Beweis Analog zum vorigen Satz mit einem passenden Lemma. □

Satz 5.65 $(\forall L \in \mathrm{Lines} : \forall x \in X : Fin(L \cap co[x])) \Rightarrow (X, <)$ ist *cut-bounded*.
Beweis Mit Satz 5.63, Satz 5.64 und Definition 5.58. □

Jetzt können wir unsere Charakterisierung geben.

Satz 5.66 Sei $(X, <)$ eine Kausalordnung mit der Partition $X = B \cup E$. $(X, <)$ ist D-stetig $\Leftrightarrow \forall L \in \mathrm{Lines} : \forall x \in X : Fin(L \cap co[x]) \wedge \forall e \in E : |{\bullet}e| \neq 1 \neq |e{\bullet}|$.
Beweis Mit Theorem 5.59, Satz 5.61, Satz 5.30 und Satz 5.65. □

Dieser Satz besagt, daß eine Kausalordnung genau dann D-stetig ist, wenn sie episodenendlich ist und kein Element von E genau einen Vorgänger oder genau einen Nachfolger hat.

Die Verbesserung gegenüber dem Resultat aus [BF88] liegt darin, daß die Charakterisierung auf einer einfacheren formalen Grundlage arbeitet, weil der Begriff des D-Schnittes nicht mehr verwendet wird. Es ist damit besser möglich, die Bedeutung der D-Stetigkeit zu beurteilen. Insbesondere können wir jetzt eine Analogie zwischen den Halbordnungen, interpretiert als zeitliche Abläufe, und den reellen Funktionen bilden.

Eine Funktion $y = f(x)$ in den reellen Zahlen ist stetig, wenn für verschwindende, also kleine, Änderungen Δx der freien Variablen x auch die Änderung $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ des Funktionswertes verschwindet.

Der Wertebereich einer Variablen entspricht einer Linie der Halbordnung. Genau wie eine Variable stets irgendeinen Wert ihres Wertebereichs annimmt, gibt es auf der Linie stets einen Punkt, der der Gegenwart entspricht.

Wenn eine Variable auf eine andere abgebildet wird, dann entspricht das dem Vorgang, auf einer Linie den Punkt der Gegenwart zu finden, wenn für eine andere Linie der Punkt der Gegenwart bekannt ist.

In einer D-stetigen Ordnung gibt es, wenn die Gegenwart auf einer Linie bis auf einen endlichen, also kleinen, Bereich festgelegt ist, für eine andere Linie auch nur noch einen endlichen Bereich, der die Gegenwart darstellen kann.

Diese Analogie mag vielleicht eine vage Rechtfertigung für die Bezeichnung „stetig“ sein. Was jedoch D-Stetigkeit mit der von Petri angeführten Dedekindschen Stetigkeit der reellen Zahlen zu tun hat, ist noch immer nicht völlig klar.

Wir verfügen mit den Ergebnissen dieses Abschnitts über insgesamt vier Möglichkeiten, dieselbe Klasse von Strukturen zu charakterisieren, wobei wir leicht noch eine Charakterisierung mit Hilfe von Kausalnetzen finden könnten.

Theorem 5.67 Sei X eine Menge und li sowie co Relationen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (X, li, co) erfüllt die Axiome NTR, VST, DIS, SYM, IRR, KAA, LOR, LFO, LKO, KOH, OBS, KDI und ZSS.
- (X, li, co) erfüllt die Axiome NTR, VST, DIS, SYM, IRR, KAA, LOR, LFO, LKO, EKO, LCT, EEN und LUE.
- Es gibt eine episodenendliche, transitionsverzweigte, fortsetzbare und irreduzible Kausalordnung $<$ auf X mit $li = < \cup <^{-1}$ und $co = X \times X - \underline{li}$.
- Es gibt eine D-stetige, fortsetzbare und irreduzible Kausalordnung $<$ auf X mit $li = < \cup <^{-1}$ und $co = X \times X - \underline{li}$.

Beweis Das Theorem ergibt sich aus der Kombination der bisher erzielten Ergebnisse. $\square$

Kapitel 6

Schluß

„Sag mal“, fragte sie schließlich, „was ist *denn die Zeit eigentlich?“*
„Das hast du doch gerade selbst herausgefunden“, antwortete Meister Hora.
„Nein, ich meine“, erklärte Momo, „die Zeit selbst – sie muß doch irgend etwas sein. Es gibt sie doch. Was ist sie denn wirklich?“
„Es wäre schön“, sagte Meister Hora, „wenn du auch das selbst beantworten könntest.“
Momo überlegte lange.

Michael Ende, in „*Momo*“

Was wir gerade herausgefunden haben

Wir wollen hier die Ergebnisse, die in dieser Arbeit vorgestellt wurden, noch einmal zusammenfassen und bewerten. Danach werden Hinweise auf noch offene Probleme gegeben, die einer weiteren Untersuchung bedürfen.

Die Konstruktionen, die in Kapitel 3 gegeben wurden, ermöglichen es uns in Zukunft, systematisch Beispiele zu erzeugen, was eine entscheidende Voraussetzung für eine praktische Anwendung ist. Obwohl die Konstruktionen schon früher in der einen oder anderen Form verwendet wurden, ist dies die erste zusammenfassende Darstellung, so daß die Konstruktionen nicht ständig wieder aus dünnen Hinweisen rekonstruiert werden müssen.

Für zyklische Systeme stellt sich jedoch das Problem, daß für konstruierte Strukturen keine Eigenschaften a priori garantiert werden können, sondern daß sie durch Computeranalysen hergeleitet werden müssen. Dies ist jedoch extrem zeitaufwendig und für Strukturen jenseits von $|X| \approx 200$ nicht mehr in realistischen Zeiträumen durchzuführen.

Für die azyklischen Systeme konnten die Konstruktionstechniken so weit verschärft werden, daß sich Nebenläufigkeitsstrukturen mit garantierten Eigenschaften generieren lassen. Die erzeugten Systeme enthalten aber nicht mehr Informationen als die der Konstruktion zugrundeliegenden Ordnungen, ja sogar durch die Vernachlässigung der Orientierung streng weniger. Gleichzeitig wird die Struktur aufgebläht, so daß die Übersichtlichkeit sehr leidet. Eine praktische Anwendung wird dadurch zumindest nicht gefördert.

Die Gegenbeispiele, die wir gefunden haben, sind für die Theorie der Nebenläufigkeit auf jeden Fall von entscheidender Wichtigkeit. Wir wissen jetzt, wo noch Probleme auftreten können, und können daher zusätzliche Axiome zu ihrer Vermeidung zu untersuchen. Außerdem ist jetzt klar, daß intensiver nach ungewöhnlichen Strukturen gesucht werden sollte und daß wir nicht mehr ohne weiteres ein gutmütiges Verhalten erwarten dürfen.

Da etliche Gegenbeispiele ein besonders Maß an Breite aufwiesen, klingt es plausibel, dieses Konzept zu formalisieren. Die dabei entstehenden Axiome sind keineswegs als physikalisch fundiert zu betrachten, im Gegenteil. Es ist trotzdem legitim, sie in ein Axiomensystem aufzunehmen, denn sie geben einen Hinweis, daß ab einer gewissen Grenze die Theorie eine andere Qualität gewinnt. Mit der Orientierbarkeit und der Eindeutigkeit der Fallklasse konnten aus den Axiomen der Länge interessante Sätze abgeleitet werden.

Der Endpunktsatz hat die Theorie deutlich vereinfacht. Bisher mußte ein dazu äquivalentes Axiom explizit mitgeführt werden, jetzt können wir uns auf die ohnehin angenommene K-Dichte beschränken. Die Minimalität des 4-Jahreszeiten-Netzes konnte als weitere Folgerung erstmals bewiesen werden.

Der Begriff einer Episode wurde eingeführt und für verschiedene Beweise im Bereich der Kohärenz-, Orientierbarkeits- und Endlichkeitseigenschaften eingesetzt. Die Beziehung zum Begriff der verallgemeinerten Dedekind-Stetigkeit wurde aufgedeckt und kann in Zukunft Beweise in diesem Bereich vereinfachen.

Viele wesentliche Querbeziehungen zwischen den Axiomen wurden aufgedeckt und dazu benutzt, die verschiedenen Axiomensysteme, die bisher aufgestellt wurden, in einem einheitlichen Rahmen zu stellen. Mit den verwendeten Techniken lassen sich auch andere Axiomensysteme fast vollständig auf die Gültigkeit der vorgestellten Axiome hin analysieren.

Die Charakterisierung von azyklischen Nebenläufigkeitsstrukturen mit Hilfe partieller Ordnungen liefert eine weitere Vereinheitlichung der Theorie. Damit ist die Theorie der Nebenläufigkeit für azyklische Strukturen wieder vollständig auf die Theorie der Ordnungen zurückgeführt, und dies ist durchaus kein Schaden, denn diesem Gebiet kam immer eine größere Aufmerksamkeit zu als der Theorie von li und co. Ordnungen sind im allgemeinen auch leichter zu handhaben als Nebenläufigkeitsstrukturen und bieten daher einen besseren Bezug zur Praxis.

Dennoch ist die Theorie nicht wertlos: Was war schließlich ihr der Grund für ihr Erscheinen? Der Wunsch nach einer umfassenden, physikalisch begründeten Theorie der Informationsverarbeitung. Und wenn eines Tages ein physikalisch begründetes Axiomensystems allgemein akzeptiert ist, dann ist es sicher legitim, für die praktische Anwendung auf ein anderes Beschreibungsmittel zu wechseln.

Was wir uns noch überlegen müssen

Es wurde in [Smi89] darauf hingewiesen, daß die Theorie der Nebenläufigkeit auch in anderen Anwendungsbereichen zu sinnvollen Ergebnissen führt, beispielsweise in der Theorie des Messens. Wenn sich hier weitere Ergebnisse erzielen lassen – was allerdings zur Zeit nicht wahrscheinlich ist – dann wäre es eine deutliche Bereicherung für die Theorie der Nebenläufigkeit, insbesondere, wenn dabei Erkenntnisse zu den schwierigen Fragen nach dem Sinn der K-Dichte oder der zyklischen Systeme gewonnen werden.

Gerade zu zyklischen Systemen deutet sich jedoch aus anderer Richtung eine Neuerung an. In [Ste96] wird versucht, die von Petri lediglich angedeutete Idee zyklischer Ordnungen zu formalisieren. Möglicherweise ergibt sich dann eine Klasse von zyklischen Systemen, die genauso natürlich zu charakterisieren ist, wie es für die azyklischen Systeme in dieser Arbeit geschehen ist.

Um wirklich Informationsverarbeitung modellieren zu können, müßte aber irgendwann auch die Relation al berücksichtigt werden, die die Existenz alternativer Entwicklungen im System beschreibt. Diese erweiterte Theorie über (X, co, li, al) ist bisher praktisch unbeachtet geblieben, aus guten Grund auch in dieser Arbeit. Bevor die Theorie als abgeschlossen gelten kann, müßten hier noch deutliche Fortschritte gemacht werden.

Ich will noch einmal zusammenfassen, was es an offenen Problemen in der Theorie der Nebenläufigkeit gibt.

- Welche der neuen Axiome sind physikalisch motivierbar? Sind alle alten Axiome und Definitionen unbedenklich?
- Kann der Begriff einer Episode in weiteren Gebieten sinnvoll eingesetzt werden? Gibt es Bezüge zu Netzen, etwa Sicherheit oder Fairneß?
- Welche wichtigen Eigenschaften von Nebenläufigkeitsstrukturen lassen sich in Polynomialzeit – auf jeden Fall aber schnell – überprüfen? K-Dichte? Eindeutigkeit der Fallklasse? Existenz einer lebendigen Fallklasse? Andere Axiome?
- Genauere Untersuchung der Grenze zwischen langen und zu breiten Strukturen.
- Beweis der Eigenschaften von Zykloiden.
- Wie läßt sich die Relation al in die Theorie einbinden? Sind hierfür die physikalischen Gesetzmäßigkeiten hinreichend geklärt?
- Charakterisierung von azyklischen Nebenläufigkeitsstrukturen durch eine Modal- oder Temporallogik.
- Charakterisierung von zyklischen Nebenläufigkeitsstrukturen durch zyklische Ordnungen.

Die Probleme sind in Art und Umfang sehr unterschiedlich, ich hoffe jedoch, daß sich einige – auch unter Verwendung der neu vorgestellten Techniken – lösen lassen werden.

Danksagung

Ich möchte zuerst und besonders meinen Betreuern, Prof. Dr. Rüdiger Valk und Dr. Dirk Hauschildt, für die Zeit und die Mühe danken, die sie mir bei der Erstellung meiner Arbeit haben zukommen lassen, und für die Anregung, mich mit diesem wenig beachteten, aber hochinteressanten Thema zu beschäftigen.

Dank geht auch an die Mitglieder der Arbeitsgruppe Allgemeine Netztheorie, die mir stets mit Erklärungen, Kritik, LaTeX-Makros, ihrer Privatbibliothek und etlicher Geduld beim Korrekturlesen zur Seite standen und von denen Uwe Fenske, Stefan Haar und Mark-Oliver Stehr genannt sein sollen.

Dem Fachbereich Informatik verdanke ich ungezählte Tage an Rechenzeit, stapelweise Papier und 40 MByte, durch die, zusammen mit der LaTeX-Installation von Reinhard Zierke, diese Arbeit überhaupt erst entstehen konnte.

Ich bin der Studienstiftung des deutschen Volkes für die mir zuteil gewordene Förderung und insbesondere Prof. Dr. Wolf Walter und Jörgen Hopf für ihre persönliche Unterstützung sehr zu Dank verpflichtet.

Unzählige andere könnten genannt werden für das, was sie getan oder freundlicherweise unterlassen haben, hier seien aber nur noch meine Eltern und mein Bruder herausgehoben, als Dank für Verständnis, Ruhe und fünf offene Ohren.

Anhang A

Axiomenverzeichnis

Anhang B

Bibliographie

[Bes80] EIKE BEST. The Relative Strength of K-Density. In W. BRAUER (Hrsg.), „Net Theory and Applications“, Bd. 84 aus „Lecture Notes in Computer Science“, S. 261–275, Berlin (1980). Springer-Verlag.

[BF88] EIKE BEST UND CESAR FERNÁNDEZ. „Nonsequential Processes. A Petri Net View“, Bd. 13 aus „EATCS Monographs on Theoretical Computer Science“. Springer-Verlag, Berlin (1988).

[BK73] COEN BRON UND JOEP KERBOSCH. Finding All Cliques of an Undirected Graph. *Communications of the ACM* **16**(9), 575–577 (1973).

[BM85] EIKE BEST UND AGATHE MERCERON. Concurrency Axioms and D-Continuous Posets. In G. ROZENBERG (Hrsg.), „Advances in Petri Nets 1984“, Bd. 188 aus „Lecture Notes in Computer Science“, S. 32–47. Springer-Verlag (1985).

[GL73] HARTMANN JOCHEN GENRICH UND KURT LAUTENBACH. Synchronisationsgraphen. *Acta Informatica* **2**(2), 143–161 (1973).

[GRS80] RONALD L. GRAHAM, BRUCE L. ROTHSCHILD UND JOEL H. SPENCER. „Ramsey Theory“. Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics. John Wiley & Sons (1980).

[Haa96] STEFAN HAAR. Bänder, Gewebe und Geflechte. Dissertation, Universität Hamburg, Fachbereich Informatik (1996). In Vorbereitung.

[Mül93] HARTMUT MÜLLER. Geschichte und Entwicklung der Concurrency Theorie. Diplomarbeit, Universität Hamburg, Fachbereich Informatik (1993).

[Pet] CARL ADAM PETRI. Nets, Time and Space. Undatierte Vorabversion.

[Pet76] CARL ADAM PETRI. Nicht-sequentielle Prozesse. Arbeitsberichte des IMMD 8, Universität Erlangen Nürnberg (1976).

[Pet80] CARL ADAM PETRI. Concurrency. In W. BRAUER (Hrsg.), „Net Theory and Applications“, Bd. 84 aus „Lecture Notes in Computer Science“, S. 251–276. Springer-Verlag (1980).

[Pet82] CARL ADAM PETRI. State-Transition Structures in Physics and Computation. *International Journal of Theoretical Physics* **21**(12), 979–992 (1982).

[Pet87] Carl Adam Petri. Concurrency Theory. In W. Brauer und G. Rozenberg (Hrsg.), „Petri Nets: Central Models and Their Properties. Advances in Petri Nets 1986, Part I“, Bd. 254 aus „Lecture Notes in Computer Science“, S. 4–24, Berlin (1987). Springer-Verlag.

[Pet89] Carl Adam Petri. Vollständige Signalordnung (Die Mailand-Papiere). Unveröffentlichte Vorlesungsunterlagen, Universität Hamburg, Fachbereich Informatik (1989).

[Pet91] Carl Adam Petri. Zyklische Ordnungen. Unveröffentlichtes Arbeitspapier (1991).

[PS87] Carl Adam Petri und Einar Smith. Concurrency and Continuity. In G. Rozenberg (Hrsg.), „Advances in Petri Nets 1987“, Bd. 266 aus „Lecture Notes in Computer Science“, S. 273–292, Berlin (1987). Springer-Verlag.

[Rei86] Wolfgang Reisig. „Petrinetze – Eine Einführung“. Springer-Verlag, Berlin (1986).

[Smi89] Einar Smith. „Zur Bedeutung der Concurrency-Theorie für den Aufbau hochverteilter Systeme“. Nr. 180 in Berichte der GMD. Oldenbourg, München (1989).

[Ste93] Mark-Oliver Stehr. Physically Motivated Axiomatic Concurrency Theory – A Posetless Approach. Studienarbeit, Universität Hamburg, Fachbereich Informatik (1993).

[Ste94] Mark-Oliver Stehr. Quotients of Concurrency and Causality. Unveröffentlichtes Arbeitspapier (1994).

[Ste96] Mark-Oliver Stehr. Zyklische Ordnungen – Axiome und einfache Eigenschaften. Diplomarbeit, Universität Hamburg, Fachbereich Informatik (1996). In Vorbereitung.

Anhang C

Computeranalyse der Beispiele

Manche Eigenschaften einer Nebenläufigkeitsstruktur lassen sich einfach überprüfen, zum Beispiel Axiom VST oder Axiom SYM. Bereits bei der Berechnung der P-Relation von Hand sind Fehler leicht möglich, und bei der Überprüfung der zugehörigen Axiome, etwa Axiom KAA, kann man schon kein Vertrauen mehr in die Ergebnisse haben. Wenn es um die Überprüfung der K-Dichte geht, scheitert das Vorhaben schon allein an dem zeitlichen Aufwand, der exponentiell mit der Größe der Struktur wächst.

Mit einem Computerprogramm, das von Mark-Oliver Stehr geschrieben und von mir für die Zwecke dieser Arbeit erweitert wurde, lassen sich jedoch noch verhältnismäßig große Strukturen auf die Gültigkeit der Axiome überprüfen. Unter Verwendung eines Algorithmus zur Prüfung der K-Dichte, der von dem in [BK73] beschriebenen Verfahren abgeleitet ist, lassen sich trotz der exponentiellen Laufzeit noch Strukturen bis $|X| \approx 200$ behandeln.

Alle endlichen Beispiele, die in dieser Arbeit genannt wurden, sind mit dem Computer überprüft worden, die Ergebnisse werden hier zusammengestellt.

Da sämtliche Modelle endlich sind, erfüllen sie selbstverständlich die Axiome TEN, REN, SEN, ZEN, LEN und IEN; desgleichen ist Axiom NTR stets offensichtlich. Axiome LUE ist dagegen nie wahr.

Wie sich herausstellt, erfüllen alle Modelle die Axiome KOH und IRR, daher brauchen die Axiome LII, COI, LIK und COK nicht getrennt überprüft werden.

Die Orientierbarkeitsaxiome wie Axiom GAW sind alle im wesentlichen äquivalent zu Axiom KOR. Da letzteres überprüft wird, sind die anderen Axiome nicht getrennt aufgeführt.

C.1 N-Struktur

$X = \{1,2,3,4,5\}$

$co = \{(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,2)\}^{\leftrightarrow}$

$li = \{(2,1),(3,1),(5,1),(5,3),(5,4)\}^{\leftrightarrow}$

$S = \{2,3,4\}$

$T = \{1,5\}$

$P = \{(2,1),(3,1),(3,5),(4,5)\}$

$F = \{(1,2),(1,3),(3,5),(4,5)\}$

$\text{Cuts} = \{\{1,4\},\{2,3,4\},\{2,5\}\}$

$\text{Lines} = \{\{1,2\},\{1,3,5\},\{4,5\}\}$

Es gelten die Axiome VST, DIS, SYM, IRR, KAA, KOH, IMK, LKO, EKO, KDI, NDI, LCT, LOR, KOR und ERL.
Die Axiome LFO, LSL, CIL und KSE gelten nicht.

C.2 4-Jahreszeiten

$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

$co = \{(3,2),(4,3),(5,3),(6,3),(6,5),(7,6),(8,6),(9,6),(9,8),(10,9),(11,9),(12,1),(12,2),(12,3),(12,9),(12,11)\}^{\leftrightarrow}$

$li = \{(2,1),(3,1),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2),(5,4),(6,1),(6,2),(6,4),(7,1),(7,2),(7,3),(7,4),(7,5),(8,1),(8,2),(8,3),(8,4),(8,5),(8,7),(9,1),(9,2),(9,3),(9,4),(9,5),(9,7),(10,1),(10,2),(10,3),(10,4),(10,5),(10,6),(10,7),(10,8),(11,1),(11,2),(11,3),(11,4),(11,5),(11,6),(11,7),(11,8),(11,10),(12,4),(12,5),(12,6),(12,7),(12,8),(12,10)\}^{\leftrightarrow}$

$S = \{2,3,5,6,8,9,11,12\}$

$T = \{1,4,7,10\}$

$P = \{(2,1),(2,4),(3,1),(3,7),(5,4),(5,7),(6,4),(6,10),(8,7),(8,10),(9,1),(9,7),(11,1),(11,10),(12,4),(12,10)\}$

$F = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,7),(4,5),(4,6),(5,7),(6,10),(7,8),(7,9),(8,10),(9,1),(10,11),(10,12),(11,1),(12,4)\}$

$\text{Cuts} = \{\{1,12\},\{2,3,12\},\{3,4\},\{3,5,6\},\{6,7\},\{6,8,9\},\{9,10\},\{9,11,12\}\}$

$\text{Lines} = \{\{1,2,4,5,7,8,10,11\},\{1,2,4,5,7,9\},\{1,2,4,6,10,11\},\{1,3,7,8,10,11\},\{1,3,7,9\},\{4,5,7,8,10,12\},\{4,6,10,12\}\}$

Es gelten die Axiome VST, DIS, SYM, IRR, KAA, KOH, IMK, LKO, EKO, KDI, NDI, LCT, LOR, LFO, KOR, ERL, LSL und CIL.
Axiom KSE gilt nicht.

C.3 6-Jahreszeiten und 2 Stellen

$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$

$co = \{(3,2),(4,3),(5,3),(6,3),(6,5),(7,6),(8,6),(9,6),(9,8),(10,9),(11,9),(12,9),(12,11),(13,12),(14,12),(15,12),(15,14),(16,15),(17,15),(18,1),(18,2),(18,3),(18,15),(18,17),(19,1),(19,2),(19,3),(19,9),(19,11),(19,12),(19,13),(19,14),(19,15),(19,16),(19,17),(19,18),(20,2),(20,3),(20,4),(20,5),(20,6),(20,7),(20,8),(20,9),(20,10),(20,11),(20,12),(20,18),(20,19)\}^{\leftrightarrow}$

$S = \{2,3,5,6,8,9,11,12,14,15,17,18,19,20\}$

$T = \{1,4,7,10,13,16\}$

$P = \{(2,1),(2,4),(3,1),(3,7),(5,4),(5,7),(6,4),(6,10),(8,7),(8,10),(9,7),(9,13),(11,10),(11,13),(12,10),(12,16),(14,13),(14,16),(15,1),(15,13),(17,1),(17,16),(18,4),(18,16),(19,4),(19,10),(20,1),(20,13)\}$

$F = \{(1,2),(1,3),(1,20),(2,4),(3,7),(4,5),(4,6),(5,7),(6,10),(7,8),(7,9),(8,10),(9,13),(10,11),(10,12),(10,19),(11,13),(12,16),(13,14),(13,15),(14,16),(15,1),(16,17),(16,18),(17,1),(18,4),(19,4),(20,13)\}$

$\text{Cuts} = \{\{1,18,19\},\{2,3,18,19,20\},\{3,4,20\},\{3,5,6,20\},\{6,7,20\},\{6,8,9,20\},\{9,10,20\},\{9,11,12,19,20\},\{12,13,19\},\{12,14,15,19\},\{15,16,19\},\{15,17,18,19\}\}$

Lines $= \{\{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17\},\{1,2,4,5,7,8,10,11,13,15\},\{1,2,4,5,7,8,10,12,16,17\},\{1,2,4,5,7,9,13,14,16,17\},\{1,2,4,5,7,9,13,15\},\{1,2,4,6,10,11,13,14,16,17\},\{1,2,4,6,10,11,13,15\},\{1,2,4,6,10,12,16,17\},\{1,3,7,8,10,11,13,14,16,17\},\{1,3,7,8,10,11,13,15\},\{1,3,7,8,10,12,16,17\},\{1,3,7,9,13,14,16,17\},\{1,3,7,9,13,15\},\{1,13,14,16,17,20\},\{1,13,15,20\},\{4,5,7,8,10,11,13,14,16,18\},\{4,5,7,8,10,12,16,18\},\{4,5,7,8,10,19\},\{4,5,7,9,13,14,16,18\},\{4,6,10,11,13,14,16,18\},\{4,6,10,12,16,18\},\{4,6,10,19\}\}$

Es gelten die Axiome VST, DIS, SYM, IRR, KAA, KOH, IMK, LKO, EKO, KDI, NDI, LCT, LOR, LFO, KOR und ERL.
Die Axiome LSL, CIL und KSE gelten nicht.

C.4 Zykloid 2222

$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24\}$

$co = \{(2,1),(5,3),(6,4),(8,7),(9,2),(9,5),(10,2),(10,3),(10,9),(11,1),(11,5),(11,9),(11,10),(12,1),(12,3),(12,9),(12,10),(12,11),(13,5),(13,6),(13,10),(13,12),(14,4),(14,5),(14,10),(14,12),(14,13),(15,6),(15,8),(15,14),(16,6),(16,7),(16,14),(16,15),(17,3),(17,6),(17,9),(17,11),(17,13),(17,14),(18,3),(18,4),(18,9),(18,11),(18,13),(18,14),(18,15),(18,16),(18,17),(19,4),(19,8),(19,13),(19,15),(19,16),(19,17),(20,4),(20,7),(20,13),(20,15),(20,16),(20,17),(20,19),(21,2),(21,8),(21,11),(21,12),(21,16),(21,20),(22,1),(22,8),(22,9),(22,10),(22,16),(22,20),(22,21),(23,2),(23,7),(23,11),(23,12),(23,15),(23,19),(23,21),(23,22),(24,1),(24,7),(24,9),(24,10),(24,15),(24,19),(24,21),(24,22),(24,23)\}^{\leftrightarrow}$

$S = \{9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24\}$

$T = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$P = \{(9,1),(9,3),(10,1),(10,5),(11,2),(11,3),(12,2),(12,5),(13,3),(13,4),(14,3),(14,6),(15,4),(15,7),(16,4),(16,8),(17,4),(17,5),(18,5),(18,6),(19,6),(19,7),(20,6),(20,8),(21,1),(21,7),(22,2),(22,7),(23,1),(23,8),(24,2),(24,8)\}$

$F = \{(1,9),(1,10),(2,11),(2,12),(3,13),(3,14),(4,15),(4,16),(5,17),(5,18),(6,19),(6,20),(7,21),(7,22),(8,23),(8,24),(9,3),(10,5),(11,3),(12,5),(13,4),(14,6),(15,7),(16,8),(17,4),(18,6),(19,7),(20,8),(21,1),(22,2),(23,1),(24,2)\}$

Cuts $= \{\{1,2\},\{1,11,12\},\{1,22,24\},\{2,9,10\},\{2,21,23\},\{3,5\},\{3,10,12\},\{3,17,18\},\{4,6\},\{4,14,18\},\{4,19,20\},\{5,9,11\},\{5,13,14\},\{6,13,17\},\{6,15,16\},\{7,8\},\{7,16,20\},\{7,23,24\},\{8,15,19\},\{8,21,22\},\{9,10,11,12\},\{9,10,22,24\},\{9,11,17,18\},\{10,12,13,14\},\{11,12,21,23\},\{13,14,17,18\},\{13,17,19,20\},\{14,15,16,18\},\{15,16,19,20\},\{15,19,23,24\},\{16,20,21,22\},\{21,22,23,24\}\}$

Lines $= \{\{1,3,4,7,9,13,15,21\},\{1,3,4,8,9,13,16,23\},\{1,3,6,7,9,14,19,21\},\{1,3,6,8,9,14,20,23\},\{1,4,5,7,10,15,17,21\},\{1,4,5,8,10,16,17,23\},\{1,5,6,7,10,18,19,21\},\{1,5,6,8,10,18,20,23\},\{2,3,4,7,11,13,15,22\},\{2,3,4,8,11,13,16,24\},\{2,3,6,7,11,14,19,22\},\{2,3,6,8,11,14,20,24\},\{2,4,5,7,12,15,17,22\},\{2,4,5,8,12,16,17,24\},\{2,5,6,7,12,18,19,22\},\{2,5,6,8,12,18,20,24\}\}$

Es gelten die Axiome VST, DIS, SYM, IRR, KAA, KOH, IMK, LKO, EKO, KDI, NDI, LCT, LOR, LFO, KOR, ERL, LSL und KSE.
Axiom CIL gilt nicht.

C.5 Zykloid 3223

$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39\}$

$co = \{(4,1),(4,2),(5,3),(8,2),(8,5),(9,3),(9,6),(10,7),(11,1),(12,6),(12,10),(13,7),(13,11),(14,4),(14,8),(14,11),(15,2),(15,4),(15,5),(15,11),(15,14),(16,4),(16,5),(16,8),(16,9),(16,15),(17,3),(17,4),(17,8),(17,15),(17,16),(18,5),(18,9),(18,12),(18,17),(19,5),(19,6),(19,9),(19,10),(19,17),(19,18),(20,1),(20,2),(20,3),(20,8),(20,14),(20,15),(20,16),(20,17),(20,18),(20,19),(21,1),(21,2),(21,5),(21,14),(21,15),(21,16),(21,17),(21,20),(22,3),(22,8),(22,9),(22,12),(22,15),(22,16),(22,18),(22,19),(22,21),(23,3),(23,6),(23,8),(23,15),(23,16),(23,18),(23,19),(23,21),(23,22),(24,9),(24,10),(24,12),(24,13),(24,19),(24,23),(25,7),(25,9),(25,12),(25,19),(25,23),(25,24),(26,4),(26,10),(26,11),(26,13),(26,20),(26,21),(26,25),(27,1),(27,10),(27,13),(27,14),(27,15),(27,25),(27,26),(28,2),(28,5),(28,9),(28,14),(28,16),(28,17),(28,20),(28,22),(28,23),(29,2),(29,3),(29,5),(29,6),(29,14),(29,16),(29,17),(29,18),(29,19),(29,20),(29,22),(29,23),(29,24),(29,25),(29,28),(30,3),(30,6),(30,7),(30,12),(30,16),(30,18),(30,19),(30,22),(30,24),(30,25),(30,26),(30,27),(30,28),(31,3),(31,6),(31,10),(31,16),(31,18),(31,19),(31,22),(31,24),(31,25),(31,28),(31,30),(32,1),(32,7),(32,12),(32,13),(32,14),(32,15),(32,19),(32,24),(32,26),(32,27),(32,31),(33,7),(33,11),(33,12),(33,19),(33,24),(33,26),(33,27),(33,31),(33,32),(34,1),(34,4),(34,8),(34,13),(34,14),(34,15),(34,20),(34,21),(34,26),(34,28),(34,29),(34,33),(35,1),(35,2),(35,13),(35,14),(35,15),(35,16),(35,17),(35,26),(35,33),(35,34),(36,6),(36,10),(36,13),(36,18),(36,22),(36,24),(36,25),(36,30),(36,32),(36,33),(37,6),(37,7),(37,10),(37,11),(37,18),(37,22),(37,24),(37,25),(37,26),(37,27),(37,30),(37,32),(37,33),(37,34),(37,35),(37,36),(38,4),(38,7),(38,11),(38,20),(38,21),(38,24),(38,26),(38,27),(38,32),(38,34),(38,35),(38,36),(39,1),(39,2),(39,7),(39,11),(39,14),(39,15),(39,16),(39,17),(39,24),(39,26),(39,27),(39,32),(39,34),(39,35),(39,36),(39,38)\}^{\leftrightarrow}$

$S = \{14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39\}$

$T = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$

$P = \{(14,1),(14,2),(15,1),(15,8),(16,2),(16,3),(17,2),(17,5),(18,3),(18,6),(19,3),(19,12),(20,4),(20,5),(21,4),(21,8),(22,5),(22,6),(23,5),(23,9),(24,6),(24,7),(25,6),(25,10),(26,1),(26,7),(27,7),(27,11),(28,3),(28,8),(29,8),(29,9),(30,9),(30,10),(31,9),(31,12),(32,10),(32,11),(33,10),(33,13),(34,2),(34,11),(35,4),(35,11),(36,7),(36,12),(37,12),(37,13),(38,1),(38,13),(39,4),(39,13)\}$

$F = \{(1,14),(1,15),(2,16),(2,17),(3,18),(3,19),(4,20),(4,21),(5,22),(5,23),(6,24),(6,25),(7,26),(7,27),(8,28),(8,29),(9,30),(9,31),(10,32),(10,33),(11,34),(11,35),(12,36),(12,37),(13,38),(13,39),(14,2),(15,8),(16,3),(17,5),(18,6),(19,12),(20,5),(21,8),(22,6),(23,9),(24,7),(25,10),(26,1),(27,11),(28,3),(29,9),(30,10),(31,12),(32,11),(33,13),(34,2),(35,4),(36,7),(37,13),(38,1),(39,4)\}$

$\mathrm{Cuts} = \{\{1,4,34\},\{1,11,39\},\{1,20,21,34\},\{1,27,32,39\},\{1,34,35,39\},\{2,4,15\},\{2,8,20\},\{2,15,20,21\},\{2,15,35,39\},\{2,20,28,29\},\{3,5,29\},\{3,9,22\},\{3,17,20,29\},\{3,22,23,29\},\{3,22,30,31\},\{4,14,15,34\},\{4,15,16,17\},\{4,26,34,38\},\{5,8,16\},\{5,15,16,21\},\{5,16,28,29\},\{5,18,19,29\},\{6,9,19\},\{6,12,30\},\{6,19,23,29\},\{6,19,30,31\},\{6,30,36,37\},\{7,10,37\},\{7,13,32\},\{7,25,30,37\},\{7,32,33,37\},\{7,32,38,39\},\{8,14,20,34\},\{8,16,17,20\},\{8,16,22,23\},\{9,16,22,28\},\{9,18,19,22\},\{9,19,24,25\},\{10,12,24\},\{10,19,24,31\},\{10,24,36,37\},\{10,26,27,37\},\{11,13,26\},\{11,14,15,39\},\{11,26,33,37\},\{11,26,38,39\},\{12,18,22,30\},\{12,24,25,30\},\{12,24,32,33\},\{13,24,32,36\},\{13,26,27,32\},\{13,26,34,35\},\{14,15,20,21,34\},\{14,15,27,32,39\},\{14,15,34,35,39\},\{14,20,28,29,34\},\{15,16,17,20,21\},\{15,16,17,35,39\},\{15,16,21,22,23\},\{16,17,20,28,29\},\{16,22,23,28,29\},\{16,22,28,30,31\},\{17,18,19,20,29\},\{18,19,22,23,29\},\{18,19,22,30,31\},\{18,22,30,36,37\},\{19,23,24,25,29\},\{19,24,25,30,31\},\{19,24,31,32,33\},\{20,21,26,34,38\},\{24,25,30,36,37\},\{24,32,33,36,37\},\{24,32,36,38,39\},\{25,26,27,30,37\},\{26,27,32,33,37\},\{26,27,32,38,39\},\{26,33,34,35,37\},\{26,34,35,38,39\}\}$

$\mathrm{Lines} = \{\{1,2,3,6,7,14,16,18,24,26\},\{1,2,3,6,10,13,14,16,18,25,33,38\},\{1,2,3,7,12,14,16,19,26,36\},\{1,2,3,12,13,14,16,19,37,38\},\{1,2,5,6,7,14,17,22,24,26\},\{1,2,5,6,10,13,14,17,22,25,33,38\},\{1,2,5,7,9,12,14,17,23,26,31,36\},\{1,2,5,9,10,13,14,17,23,30,33,38\},$

$\{1,2,5,9,12,13,14,17,23,31,37,38\},\{1,3,6,7,8,15,18,24,26,28\},\{1,3,6,8,10,13,15,18,25,28,33,38\},\{1,3,7,8,12,15,19,26,28,36\},\{1,3,8,12,13,15,19,28,37,38\},\{1,7,8,9,12,15,26,29,31,36\},\{1,8,9,10,13,15,29,30,33,38\},\{1,8,9,12,13,15,29,31,37,38\},\{2,3,6,7,11,16,18,24,27,34\},\{2,3,6,10,11,16,18,25,32,34\},\{2,3,7,11,12,16,19,27,34,36\},\{2,5,6,7,11,17,22,24,27,34\},\{2,5,6,10,11,17,22,25,32,34\},\{2,5,7,9,11,12,17,23,27,31,34,36\},\{2,5,9,10,11,17,23,30,32,34\},\{3,4,6,7,8,11,18,21,24,27,28,35\},\{3,4,6,8,10,11,18,21,25,28,32,35\},\{3,4,6,8,10,13,18,21,25,28,33,39\},\{3,4,7,8,11,12,19,21,27,28,35,36\},\{3,4,8,12,13,19,21,28,37,39\},\{4,5,6,7,11,20,22,24,27,35\},\{4,5,6,10,11,20,22,25,32,35\},\{4,5,6,10,13,20,22,25,33,39\},\{4,5,7,9,11,12,20,23,27,31,35,36\},\{4,5,9,10,11,20,23,30,32,35\},\{4,5,9,10,13,20,23,30,33,39\},\{4,5,9,12,13,20,23,31,37,39\},\{4,7,8,9,11,12,21,27,29,31,35,36\},\{4,8,9,10,11,21,29,30,32,35\},\{4,8,9,10,13,21,29,30,33,39\},\{4,8,9,12,13,21,29,31,37,39\}\}$

Es gelten die Axiome VST, DIS, SYM, IRR, KAA, KOH, IMK, LKO, EKO, KDI, NDI, LCT, LOR, LFO, KOR, ERL und LSL.
Die Axiome CIL und KSE gelten nicht.

C.6 Zykloid 2233

$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36\}$

$co = \{(2,1),(5,3),(6,4),(9,7),(10,8),(12,11),(13,2),(13,5),(14,2),(14,3),(14,13),(15,1),(15,5),(15,13),(15,14),(16,1),(16,3),(16,13),(16,14),(16,15),(17,5),(17,6),(17,14),(17,16),(18,4),(18,5),(18,14),(18,16),(18,17),(19,6),(19,9),(19,18),(20,6),(20,7),(20,18),(20,19),(21,3),(21,6),(21,13),(21,15),(21,17),(21,18),(22,3),(22,4),(22,13),(22,15),(22,17),(22,18),(22,19),(22,20),(22,21),(23,4),(23,9),(23,17),(23,19),(23,20),(23,21),(24,4),(24,7),(24,17),(24,19),(24,20),(24,21),(24,23),(25,9),(25,10),(25,20),(25,24),(26,8),(26,9),(26,20),(26,24),(26,25),(27,10),(27,12),(27,26),(28,10),(28,11),(28,26),(28,27),(29,7),(29,10),(29,19),(29,23),(29,25),(29,26),(30,7),(30,8),(30,19),(30,23),(30,25),(30,26),(30,27),(30,28),(30,29),(31,8),(31,12),(31,25),(31,27),(31,28),(31,29),(32,8),(32,11),(32,25),(32,27),(32,28),(32,29),(32,31),(33,2),(33,12),(33,15),(33,16),(33,28),(33,32),(34,1),(34,12),(34,13),(34,14),(34,28),(34,32),(34,33),(35,2),(35,11),(35,15),(35,16),(35,27),(35,31),(35,33),(35,34),(36,1),(36,11),(36,13),(36,14),(36,27),(36,31),(36,33),(36,34),(36,35)\}^{\leftrightarrow}$

$S = \{13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36\}$

$T = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

$P = \{(13,1),(13,3),(14,1),(14,5),(15,2),(15,3),(16,2),(16,5),(17,3),(17,4),(18,3),(18,6),(19,4),(19,7),(20,4),(20,9),(21,4),(21,5),(22,5),(22,6),(23,6),(23,7),(24,6),(24,9),(25,7),(25,8),(26,7),(26,10),(27,8),(27,11),(28,8),(28,12),(29,8),(29,9),(30,9),(30,10),(31,10),(31,11),(32,10),(32,12),(33,1),(33,11),(34,2),(34,11),(35,1),(35,12),(36,2),(36,12)\}$

$F = \{(1,13),(1,14),(2,15),(2,16),(3,17),(3,18),(4,19),(4,20),(5,21),(5,22),(6,23),(6,24),(7,25),(7,26),(8,27),(8,28),(9,29),(9,30),(10,31),(10,32),(11,33),(11,34),(12,35),(12,36),(13,3),(14,5),(15,3),(16,5),(17,4),(18,6),(19,7),(20,9),(21,4),(22,6),(23,7),(24,9),(25,8),(26,10),(27,11),(28,12),(29,8),(30,10),(31,11),(32,12),(33,1),(34,2),(35,1),(36,2)\}$

$\mathrm{Cuts} = \{\{1,2\},\{1,15,16\},\{1,34,36\},\{2,13,14\},\{2,33,35\},\{3,5\},\{3,14,16\},\{3,21,22\},\{4,6\},\{4,18,22\},\{4,23,24\},\{5,13,15\},\{5,17,18\},\{6,17,21\},\{6,19,20\},\{7,9\},\{7,20,24\},\{7,29,30\},\{8,10\},\{8,26,30\},\{8,31,32\},\{9,19,23\},\{9,25,26\},\{10,25,29\},\{10,27,28\},\{11,12\},\{11,28,32\},\{11,35,36\},\{12,27,31\},\{12,33,34\},\{13,14,15,16\},\{13,14,34,36\},\{13,15,21,22\},\{14,16,17,18\},\{15,16,33,35\},\{17,18,21,22\},\{17,21,23,24\},\{18,19,20,22\},\{19,20,23,24\},\{19,23,29,30\},\{20,24,25,26\},\{25,26,29,30\},\{25,29,31,32\},\{26,27,28,30\},\{27,28,31,32\},\{27,31,35,36\},\{28,32,33,34\},\{33,34,35,36\}\}$

Lines $= \{\{1,3,4,7,8,11,13,17,19,25,27,33\},\{1,3,4,7,8,12,13,17,19,25,28,35\},\{1,3,4,7,10,11,$
$13,17,19,26,31,33\},\{1,3,4,7,10,12,13,17,19,26,32,35\},\{1,3,4,8,9,11,13,17,20,27,29,$
$33\},\{1,3,4,8,9,12,13,17,20,28,29,35\},\{1,3,4,9,10,11,13,17,20,30,31,33\},\{1,3,4,9,10,$
$12,13,17,20,30,32,35\},\{1,3,6,7,8,11,13,18,23,25,27,33\},\{1,3,6,7,8,12,13,18,23,25,28,$
$35\},\{1,3,6,7,10,11,13,18,23,26,31,33\},\{1,3,6,7,10,12,13,18,23,26,32,35\},\{1,3,6,8,9,$
$11,13,18,24,27,29,33\},\{1,3,6,8,9,12,13,18,24,28,29,35\},\{1,3,6,9,10,11,13,18,24,30,$
$31,33\},\{1,3,6,9,10,12,13,18,24,30,32,35\},\{1,4,5,7,8,11,14,19,21,25,27,33\},\{1,4,5,7,$
$8,12,14,19,21,25,28,35\},\{1,4,5,7,10,11,14,19,21,26,31,33\},\{1,4,5,7,10,12,14,19,21,$
$26,32,35\},\{1,4,5,8,9,11,14,20,21,27,29,33\},\{1,4,5,8,9,12,14,20,21,28,29,35\},\{1,4,5,$
$9,10,11,14,20,21,30,31,33\},\{1,4,5,9,10,12,14,20,21,30,32,35\},\{1,5,6,7,8,11,14,22,23,$
$25,27,33\},\{1,5,6,7,8,12,14,22,23,25,28,35\},\{1,5,6,7,10,11,14,22,23,26,31,33\},\{1,5,6,$
$7,10,12,14,22,23,26,32,35\},\{1,5,6,8,9,11,14,22,24,27,29,33\},\{1,5,6,8,9,12,14,22,24,$
$28,29,35\},\{1,5,6,9,10,11,14,22,24,30,31,33\},\{1,5,6,9,10,12,14,22,24,30,32,35\},\{2,3,$
$4,7,8,11,15,17,19,25,27,34\},\{2,3,4,7,8,12,15,17,19,25,28,36\},\{2,3,4,7,10,11,15,17,19,$
$26,31,34\},\{2,3,4,7,10,12,15,17,19,26,32,36\},\{2,3,4,8,9,11,15,17,20,27,29,34\},\{2,3,4,$
$8,9,12,15,17,20,28,29,36\},\{2,3,4,9,10,11,15,17,20,30,31,34\},\{2,3,4,9,10,12,15,17,20,$
$30,32,36\},\{2,3,6,7,8,11,15,18,23,25,27,34\},\{2,3,6,7,8,12,15,18,23,25,28,36\},\{2,3,6,$
$7,10,11,15,18,23,26,31,34\},\{2,3,6,7,10,12,15,18,23,26,32,36\},\{2,3,6,8,9,11,15,18,24,$
$27,29,34\},\{2,3,6,8,9,12,15,18,24,28,29,36\},\{2,3,6,9,10,11,15,18,24,30,31,34\},\{2,3,6,$
$9,10,12,15,18,24,30,32,36\},\{2,4,5,7,8,11,16,19,21,25,27,34\},\{2,4,5,7,8,12,16,19,21,$
$25,28,36\},\{2,4,5,7,10,11,16,19,21,26,31,34\},\{2,4,5,7,10,12,16,19,21,26,32,36\},\{2,4,$
$5,8,9,11,16,20,21,27,29,34\},\{2,4,5,8,9,12,16,20,21,28,29,36\},\{2,4,5,9,10,11,16,20,21,$
$30,31,34\},\{2,4,5,9,10,12,16,20,21,30,32,36\},\{2,5,6,7,8,11,16,22,23,25,27,34\},\{2,5,6,$
$7,8,12,16,22,23,25,28,36\},\{2,5,6,7,10,11,16,22,23,26,31,34\},\{2,5,6,7,10,12,16,22,23,$
$26,32,36\},\{2,5,6,8,9,11,16,22,24,27,29,34\},\{2,5,6,8,9,12,16,22,24,28,29,36\},\{2,5,6,9,$
$10,11,16,22,24,30,31,34\},\{2,5,6,9,10,12,16,22,24,30,32,36\}\}$

Es gelten die Axiome VST, DIS, SYM, IRR, KAA, KOH, IMK, LKO, EKO, KDI, NDI, LCT, LOR, LFO, KOR, ERL, LSL, CIL und KSE.

C.7 Zykloid 3333

$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,$
$32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,54\}$

$co = \{(2,1),(5,1),(5,2),(5,3),(6,1),(6,3),(6,4),(7,4),(10,2),(10,3),(10,6),(10,7),(11,3),(11,$
$4),(11,7),(11,8),(12,4),(12,8),(12,9),(13,9),(14,5),(15,7),(15,8),(15,12),(15,13),(16,8),$
$(16,9),(16,13),(16,14),(17,1),(17,9),(17,14),(18,2),(18,13),(18,14),(18,17),(19,2),(19,$
$5),(19,6),(19,10),(19,11),(19,17),(20,2),(20,3),(20,5),(20,6),(20,7),(20,17),(20,19),(21,$
$1),(21,5),(21,6),(21,10),(21,11),(21,18),(21,19),(21,20),(22,1),(22,3),(22,4),(22,5),(22,$
$10),(22,18),(22,19),(22,20),(22,21),(23,5),(23,6),(23,7),(23,10),(23,11),(23,12),(23,20),$
$(23,22),(24,4),(24,5),(24,6),(24,10),(24,11),(24,15),(24,20),(24,22),(24,23),(25,6),(25,$
$7),(25,11),(25,12),(25,15),(25,16),(25,22),(25,24),(26,6),(26,7),(26,8),(26,11),(26,12),$
$(26,13),(26,22),(26,24),(26,25),(27,1),(27,2),(27,3),(27,4),(27,10),(27,14),(27,19),(27,$
$20),(27,21),(27,22),(27,23),(27,24),(27,25),(27,26),(28,1),(28,2),(28,3),(28,6),(28,7),$
$(28,14),(28,19),(28,20),(28,21),(28,22),(28,23),(28,24),(28,27),(29,1),(29,3),(29,4),(29,$
$10),(29,11),(29,15),(29,19),(29,20),(29,21),(29,23),(29,24),(29,25),(29,26),(29,28),(30,$
$1),(30,3),(30,4),(30,7),(30,8),(30,10),(30,19),(30,20),(30,21),(30,23),(30,24),(30,25),$
$(30,26),(30,28),(30,29),(31,4),(31,10),(31,11),(31,12),(31,15),(31,16),(31,20),(31,23),$
$(31,25),(31,26),(31,28),(31,30),(32,4),(32,8),(32,9),(32,10),(32,11),(32,15),(32,20),(32,$
$23),(32,25),(32,26),(32,28),(32,30),(32,31),(33,11),(33,12),(33,13),(33,15),(33,16),(33,$
$17),(33,26),(33,30),(33,32),(34,9),(34,11),(34,12),(34,15),(34,16),(34,18),(34,26),(34,$
$30),(34,32),(34,33),(35,5),(35,12),(35,13),(35,16),(35,17),(35,18),(35,27),(35,28),(35,$
$32),(35,34),(36,2),(36,12),(36,13),(36,14),(36,16),(36,17),(36,21),(36,22),(36,32),(36,$

34), (36, 35), (37, 2), (37, 3), (37, 6), (37, 7), (37, 11), (37, 12), (37, 19), (37, 21), (37, 22), (37, 23), (37, 24), (37, 27), (37, 29), (37, 30), (37, 31), (37, 32), (38, 2), (38, 3), (38, 4), (38, 6), (38, 7), (38, 8), (38, 19), (38, 21), (38, 22), (38, 23), (38, 24), (38, 25), (38, 26), (38, 27), (38, 29), (38, 30), (38, 31), (38, 32), (38, 33), (38, 34), (38, 37), (39, 3), (39, 4), (39, 7), (39, 8), (39, 9), (39, 15), (39, 19), (39, 21), (39, 23), (39, 24), (39, 25), (39, 26), (39, 29), (39, 31), (39, 32), (39, 33), (39, 34), (39, 35), (39, 36), (39, 37), (40, 3), (40, 4), (40, 7), (40, 8), (40, 12), (40, 13), (40, 19), (40, 21), (40, 23), (40, 24), (40, 25), (40, 26), (40, 29), (40, 31), (40, 32), (40, 33), (40, 34), (40, 37), (40, 39), (41, 4), (41, 8), (41, 9), (41, 15), (41, 16), (41, 18), (41, 23), (41, 25), (41, 26), (41, 31), (41, 33), (41, 34), (41, 35), (41, 36), (41, 37), (41, 40), (42, 4), (42, 8), (42, 9), (42, 13), (42, 14), (42, 15), (42, 23), (42, 25), (42, 26), (42, 31), (42, 33), (42, 34), (42, 35), (42, 36), (42, 37), (42, 40), (42, 41), (43, 5), (43, 9), (43, 15), (43, 16), (43, 17), (43, 18), (43, 26), (43, 27), (43, 28), (43, 33), (43, 35), (43, 36), (43, 40), (43, 42), (44, 1), (44, 9), (44, 14), (44, 15), (44, 16), (44, 18), (44, 19), (44, 20), (44, 26), (44, 33), (44, 35), (44, 36), (44, 40), (44, 42), (44, 43), (45, 2), (45, 5), (45, 6), (45, 16), (45, 17), (45, 18), (45, 21), (45, 22), (45, 27), (45, 28), (45, 29), (45, 30), (45, 36), (45, 42), (45, 44), (46, 1), (46, 5), (46, 10), (46, 16), (46, 17), (46, 18), (46, 19), (46, 20), (46, 27), (46, 28), (46, 36), (46, 37), (46, 38), (46, 42), (46, 44), (46, 45), (47, 7), (47, 8), (47, 12), (47, 13), (47, 16), (47, 17), (47, 24), (47, 25), (47, 29), (47, 31), (47, 32), (47, 33), (47, 34), (47, 39), (47, 41), (47, 42), (47, 43), (47, 44), (48, 7), (48, 8), (48, 9), (48, 12), (48, 13), (48, 14), (48, 24), (48, 25), (48, 29), (48, 31), (48, 32), (48, 33), (48, 34), (48, 35), (48, 36), (48, 39), (48, 41), (48, 42), (48, 43), (48, 44), (48, 45), (48, 46), (48, 47), (49, 1), (49, 8), (49, 9), (49, 13), (49, 14), (49, 18), (49, 19), (49, 20), (49, 25), (49, 31), (49, 33), (49, 34), (49, 35), (49, 36), (49, 41), (49, 43), (49, 44), (49, 45), (49, 46), (49, 47), (50, 2), (50, 8), (50, 9), (50, 13), (50, 14), (50, 17), (50, 21), (50, 22), (50, 25), (50, 31), (50, 33), (50, 34), (50, 35), (50, 36), (50, 41), (50, 43), (50, 44), (50, 45), (50, 46), (50, 47), (50, 49), (51, 1), (51, 5), (51, 9), (51, 10), (51, 14), (51, 18), (51, 19), (51, 20), (51, 27), (51, 28), (51, 33), (51, 35), (51, 36), (51, 37), (51, 38), (51, 43), (51, 45), (51, 46), (51, 47), (51, 50), (52, 1), (52, 2), (52, 3), (52, 9), (52, 14), (52, 18), (52, 19), (52, 20), (52, 21), (52, 22), (52, 23), (52, 24), (52, 33), (52, 35), (52, 36), (52, 43), (52, 45), (52, 46), (52, 47), (52, 50), (52, 51), (53, 2), (53, 5), (53, 6), (53, 13), (53, 14), (53, 17), (53, 21), (53, 22), (53, 27), (53, 28), (53, 29), (53, 30), (53, 34), (53, 35), (53, 41), (53, 43), (53, 44), (53, 45), (53, 46), (53, 49), (53, 51), (53, 52), (54, 1), (54, 2), (54, 3), (54, 13), (54, 14), (54, 17), (54, 19), (54, 20), (54, 21), (54, 22), (54, 23), (54, 24), (54, 34), (54, 35), (54, 41), (54, 43), (54, 44), (54, 45), (54, 46), (54, 49), (54, 51), (54, 52), (54, 53)$\}^{\leftrightarrow}$

$S = \{19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54\}$

$T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

$P = \{(19, 1), (19, 3), (20, 1), (20, 10), (21, 2), (21, 3), (22, 2), (22, 6), (23, 3), (23, 4), (24, 3), (24, 7), (25, 4), (25, 8), (26, 4), (26, 15), (27, 5), (27, 6), (28, 5), (28, 10), (29, 6), (29, 7), (30, 6), (30, 11), (31, 7), (31, 8), (32, 7), (32, 12), (33, 8), (33, 9), (34, 8), (34, 13), (35, 9), (35, 14), (36, 9), (36, 18), (37, 4), (37, 10), (38, 10), (38, 11), (39, 11), (39, 12), (40, 11), (40, 15), (41, 12), (41, 13), (42, 12), (42, 16), (43, 13), (43, 14), (44, 13), (44, 17), (45, 1), (45, 14), (46, 2), (46, 14), (47, 9), (47, 15), (48, 15), (48, 16), (49, 16), (49, 17), (50, 16), (50, 18), (51, 2), (51, 17), (52, 5), (52, 17), (53, 1), (53, 18), (54, 5), (54, 18)\}$

$F = \{(1, 45), (1, 53), (2, 46), (2, 51), (3, 19), (3, 21), (4, 23), (4, 37), (5, 52), (5, 54), (6, 22), (6, 27), (7, 24), (7, 29), (8, 25), (8, 31), (9, 33), (9, 47), (10, 20), (10, 28), (11, 30), (11, 38), (12, 32), (12, 39), (13, 34), (13, 41), (14, 35), (14, 43), (15, 26), (15, 40), (16, 42), (16, 48), (17, 44), (17, 49), (18, 36), (18, 50), (19, 1), (20, 1), (21, 2), (22, 2), (23, 3), (24, 3), (25, 4), (26, 4), (27, 5), (28, 5), (29, 6), (30, 6), (31, 7), (32, 7), (33, 8), (34, 8), (35, 9), (36, 9), (37, 10), (38, 10), (39, 11), (40, 11), (41, 12), (42, 12), (43, 13), (44, 13), (45, 14), (46, 14), (47, 15), (48, 15), (49, 16), (50, 16), (51, 17), (52, 17), (53, 18), (54, 18)\}$

Es gelten die Axiome VST, DIS, SYM, IRR, KAA, KOH, IMK, LKO, EKO, NDI, LCT, LOR, LFO, KOR, ERL und LSL.
Die Axiome KDI, CIL und KSE gelten nicht.

C.8 Zykloid 4422

$$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48\}$$

$$li = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(6,2),(6,5),(7,1),(7,2),(7,3),(7,5),(7,6),(8,1),(8,2),(8,3),(8,4),(8,6),(8,7),(9,4),(10,5),(10,9),(11,2),(11,5),(11,6),(11,9),(11,10),(12,2),(12,3),(12,5),(12,6),(12,7),(12,10),(12,11),(13,1),(13,4),(13,8),(13,9),(14,1),(14,5),(14,9),(14,10),(14,13),(15,5),(15,6),(15,9),(15,10),(15,11),(15,13),(15,14),(16,1),(16,3),(16,4),(16,9),(16,10),(16,13),(16,14),(17,1),(17,3),(17,4),(17,7),(17,8),(17,16),(18,1),(18,4),(18,8),(18,13),(18,14),(18,16),(19,2),(19,3),(19,4),(19,7),(19,8),(19,12),(20,2),(20,6),(20,7),(20,8),(20,11),(20,12),(21,1),(21,2),(21,3),(21,4),(21,8),(21,16),(21,17),(21,19),(22,1),(22,2),(22,3),(22,7),(22,8),(22,12),(22,17),(22,19),(23,1),(23,2),(23,3),(23,4),(23,8),(23,13),(23,17),(23,18),(23,19),(23,21),(24,1),(24,3),(24,4),(24,9),(24,13),(24,16),(24,17),(24,18),(24,21),(25,5),(25,6),(25,7),(25,11),(25,12),(25,15),(26,5),(26,10),(26,11),(26,12),(26,14),(26,15),(27,2),(27,5),(27,6),(27,7),(27,8),(27,12),(27,20),(27,25),(28,2),(28,5),(28,6),(28,11),(28,12),(28,15),(28,20),(28,25),(29,1),(29,2),(29,3),(29,6),(29,7),(29,8),(29,17),(29,19),(29,20),(29,22),(29,27),(30,2),(30,3),(30,5),(30,6),(30,7),(30,12),(30,19),(30,20),(30,22),(30,25),(30,27),(31,1),(31,3),(31,4),(31,7),(31,8),(31,13),(31,17),(31,18),(31,21),(31,22),(31,23),(31,29),(32,2),(32,3),(32,4),(32,6),(32,7),(32,8),(32,19),(32,20),(32,21),(32,22),(32,23),(32,27),(32,29),(33,9),(33,10),(33,11),(33,14),(33,15),(33,16),(34,4),(34,9),(34,13),(34,14),(34,15),(34,16),(34,24),(35,5),(35,9),(35,10),(35,11),(35,12),(35,15),(35,26),(35,33),(36,5),(36,9),(36,10),(36,14),(36,15),(36,16),(36,26),(36,33),(37,2),(37,5),(37,6),(37,10),(37,11),(37,12),(37,20),(37,25),(37,26),(37,28),(37,35),(38,5),(38,6),(38,9),(38,10),(38,11),(38,15),(38,25),(38,26),(38,28),(38,33),(38,35),(39,2),(39,3),(39,6),(39,7),(39,11),(39,12),(39,19),(39,20),(39,22),(39,27),(39,28),(39,30),(39,37),(40,5),(40,6),(40,7),(40,10),(40,11),(40,12),(40,25),(40,26),(40,27),(40,28),(40,30),(40,35),(40,37),(41,1),(41,4),(41,8),(41,9),(41,13),(41,16),(41,18),(41,23),(41,24),(41,31),(41,34),(42,1),(42,9),(42,13),(42,14),(42,15),(42,16),(42,18),(42,34),(43,5),(43,9),(43,10),(43,13),(43,14),(43,15),(43,26),(43,33),(43,34),(43,36),(43,42),(44,1),(44,9),(44,10),(44,13),(44,14),(44,16),(44,18),(44,33),(44,34),(44,36),(44,42),(45,5),(45,6),(45,10),(45,11),(45,14),(45,15),(45,25),(45,26),(45,28),(45,35),(45,36),(45,38),(45,43),(46,9),(46,10),(46,11),(46,13),(46,14),(46,15),(46,33),(46,34),(46,35),(46,36),(46,38),(46,42),(46,43),(47,1),(47,3),(47,4),(47,13),(47,14),(47,16),(47,17),(47,18),(47,21),(47,24),(47,41),(47,42),(47,44),(48,4),(48,9),(48,13),(48,14),(48,16),(48,24),(48,33),(48,34),(48,36),(48,41),(48,42),(48,44)\}^{\leftrightarrow}$$

$$S = \{17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48\}$$

$$T = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$$

$$P = \{(17,1),(17,3),(18,1),(18,13),(19,2),(19,3),(20,2),(20,6),(21,3),(21,4),(22,3),(22,7),(23,4),(23,8),(24,4),(24,16),(25,5),(25,6),(26,5),(26,10),(27,6),(27,7),(28,6),(28,11),(29,7),(29,8),(30,7),(30,12),(31,1),(31,8),(32,2),(32,8),(33,9),(33,10),(34,9),(34,13),(35,10),(35,11),(36,10),(36,14),(37,11),(37,12),(38,11),(38,15),(39,2),(39,12),(40,5),(40,12),(41,4),(41,13),(42,13),(42,14),(43,14),(43,15),(44,14),(44,16),(45,5),(45,15),(46,9),(46,15),(47,1),(47,16),(48,9),(48,16)\}$$

$$F = \{(1,17),(1,18),(2,19),(2,20),(3,21),(3,22),(4,23),(4,24),(5,25),(5,26),(6,27),(6,28),(7,29),(7,30),(8,31),(8,32),(9,33),(9,34),(10,35),(10,36),(11,37),(11,38),(12,39),(12,40),(13,41),(13,42),(14,43),(14,44),(15,45),(15,46),(16,47),(16,48),(17,3),(18,13),(19,3),(20,6),(21,4),(22,7),(23,8),(24,16),(25,6),(26,10),(27,7),(28,11),(29,8),(30,12),(31,1),(32,2),(33,10),(34,13),(35,11),(36,14),(37,12),(38,15),(39,2),(40,5),(41,4),(42,14),(43,15),(44,16),(45,5),(46,9),(47,1),(48,9)\}$$

Es gelten die Axiome VST, DIS, SYM, IRR, KAA, KOH, IMK, LKO, EKO, KDI, NDI, LCT, LOR, LFO und KOR.

Die Axiome ERL, LSL, CIL und KSE gelten nicht.

C.9 Fünfeck

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$co = \{(4,1), (4,2), (5,1), (5,2), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (7,1), (7,2), (7,3), (7,4), (8,1), (8,2), (8,3), (8,4), (8,5), (8,6), (9,2), (9,3), (9,4), (9,5), (9,6), (10,2), (10,3), (10,4), (10,5), (10,6), (10,7), (10,8)\}^{\leftrightarrow}$

$li = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,3), (5,3), (5,4), (6,5), (7,5), (7,6), (8,7), (9,1), (9,7), (9,8), (10,1), (10,9)\}^{\leftrightarrow}$

$S = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$T = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$P = \{(2,1), (2,3), (4,3), (4,5), (6,5), (6,7), (8,7), (8,9), (10,1), (10,9)\}$

$\text{Cuts} = \{\{1,4,6,8\}, \{1,4,7\}, \{1,5,8\}, \{2,4,6,8,10\}, \{2,4,6,9\}, \{2,4,7,10\}, \{2,5,8,10\}, \{2,5,9\}, \{3,6,8,10\}, \{3,6,9\}, \{3,7,10\}\}$

$\text{Lines} = \{\{1,2,3\}, \{1,9,10\}, \{3,4,5\}, \{5,6,7\}, \{7,8,9\}\}$

Es gelten die Axiome VST, DIS, SYM, IRR, KAA, KOH, IMK, LKO, EKO, KDI, NDI, LCT und LOR.
Die Axiome LFO, KOR, ERL, LSL, CIL und KSE gelten nicht.

C.10 Kleinsche Flasche

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$

$li = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (6,2), (6,3), (6,5), (7,1), (7,2), (7,3), (7,5), (7,6), (8,1), (8,2), (8,3), (8,4), (8,7), (9,4), (10,5), (10,9), (11,2), (11,5), (11,6), (11,9), (11,10), (12,2), (12,5), (12,6), (12,7), (12,8), (12,10), (12,11), (13,1), (13,4), (13,8), (13,9), (14,1), (14,5), (14,9), (14,10), (14,13), (15,5), (15,6), (15,9), (15,10), (15,11), (15,13), (15,14), (16,1), (16,3), (16,4), (16,9), (16,10), (16,13), (16,14), (17,1), (17,3), (17,4), (17,7), (17,8), (17,16), (18,1), (18,4), (18,8), (18,13), (18,14), (18,16), (19,2), (19,3), (19,4), (19,6), (19,7), (19,8), (20,2), (20,3), (20,6), (20,7), (20,11), (20,12), (20,19), (21,1), (21,2), (21,3), (21,4), (21,8), (21,16), (21,17), (21,19), (22,1), (22,2), (22,3), (22,6), (22,7), (22,8), (22,17), (22,19), (22,20), (23,1), (23,2), (23,3), (23,4), (23,8), (23,13), (23,17), (23,18), (23,19), (23,21), (24,1), (24,3), (24,4), (24,9), (24,13), (24,16), (24,17), (24,18), (24,21), (25,5), (25,6), (25,7), (25,11), (25,12), (25,15), (26,5), (26,10), (26,11), (26,12), (26,14), (26,15), (27,2), (27,3), (27,5), (27,6), (27,7), (27,12), (27,19), (27,20), (27,22), (27,25), (28,2), (28,5), (28,6), (28,11), (28,12), (28,15), (28,20), (28,25), (29,1), (29,2), (29,3), (29,7), (29,8), (29,12), (29,17), (29,19), (29,22), (30,2), (30,5), (30,6), (30,7), (30,8), (30,12), (30,20), (30,25), (30,27), (30,29), (31,1), (31,3), (31,4), (31,7), (31,8), (31,13), (31,17), (31,18), (31,21), (31,22), (31,23), (31,29), (32,2), (32,3), (32,4), (32,7), (32,8), (32,12), (32,19), (32,21), (32,22), (32,23), (32,29), (32,30), (33,9), (33,10), (33,11), (33,14), (33,15), (33,16), (34,4), (34,9), (34,13), (34,14), (34,15), (34,16), (34,24), (35,5), (35,9), (35,10), (35,11), (35,12), (35,15), (35,26), (35,33), (36,5), (36,9), (36,10), (36,14), (36,15), (36,16), (36,26), (36,33), (37,2), (37,5), (37,6), (37,10), (37,11), (37,12), (37,20), (37,25), (37,26), (37,28), (37,35), (38,5), (38,6), (38,9), (38,10), (38,11), (38,15), (38,25), (38,26), (38,28), (38,33), (38,35), (39,2), (39,6), (39,7), (39,8), (39,11), (39,12), (39,20), (39,27), (39,28), (39,29), (39,30), (39,32), (39,37), (40,5), (40,6), (40,7), (40,10), (40,11), (40,12), (40,25), (40,26), (40,27), (40,28), (40,30), (40,35), (40,37), (41,1), (41,4), (41,8), (41,9), (41,13), (41,16), (41,18), (41,23), (41,24), (41,31), (41,34), (42,1), (42,9), (42,13), (42,14), (42,15), (42,16), (42,$

18), (42, 34), (43, 5), (43, 9), (43, 10), (43, 13), (43, 14), (43, 15), (43, 26), (43, 33), (43, 34), (43, 36), (43, 42), (44, 1), (44, 9), (44, 10), (44, 13), (44, 14), (44, 16), (44, 18), (44, 33), (44, 34), (44, 36), (44, 42), (45, 5), (45, 6), (45, 10), (45, 11), (45, 14), (45, 15), (45, 25), (45, 26), (45, 28), (45, 35), (45, 36), (45, 38), (45, 43), (46, 9), (46, 10), (46, 11), (46, 13), (46, 14), (46, 15), (46, 33), (46, 34), (46, 35), (46, 36), (46, 38), (46, 42), (46, 43), (47, 1), (47, 3), (47, 4), (47, 13), (47, 14), (47, 16), (47, 17), (47, 18), (47, 21), (47, 24), (47, 41), (47, 42), (47, 44), (48, 4), (48, 9), (48, 10), (48, 13), (48, 14), (48, 16), (48, 24), (48, 33), (48, 34), (48, 36), (48, 41), (48, 42), (48, 44)$\}^{\leftrightarrow}$

$S = \{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$

$T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$

$P = \{(17, 1), (17, 3), (18, 1), (18, 13), (19, 2), (19, 3), (20, 2), (20, 6), (21, 3), (21, 4), (22, 3), (22, 7), (23, 4), (23, 8), (24, 4), (24, 16), (25, 5), (25, 6), (26, 5), (26, 10), (27, 6), (27, 7), (28, 6), (28, 11), (29, 7), (29, 8), (30, 7), (30, 12), (31, 1), (31, 8), (32, 2), (32, 8), (33, 9), (33, 10), (34, 9), (34, 13), (35, 10), (35, 11), (36, 10), (36, 14), (37, 11), (37, 12), (38, 11), (38, 15), (39, 2), (39, 12), (40, 5), (40, 12), (41, 4), (41, 13), (42, 13), (42, 14), (43, 14), (43, 15), (44, 14), (44, 16), (45, 5), (45, 15), (46, 9), (46, 15), (47, 1), (47, 16), (48, 9), (48, 16)\}$

Es gelten die Axiome VST, DIS, SYM, IRR, KAA, KOH, IMK, LKO, EKO, KDI, NDI, LCT, LOR und LFO.
Die Axiome KOR, ERL, LSL, CIL und KSE gelten nicht.

C.11 Anti-LKO

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$

$co = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (7, 2), (7, 6), (8, 2), (8, 6), (9, 2), (9, 6), (9, 8), (10, 9), (11, 9), (12, 9), (12, 11), (13, 12), (14, 12), (16, 4), (16, 5), (16, 6), (16, 12), (16, 14), (16, 15), (17, 4), (17, 5), (17, 6), (17, 16), (18, 4), (18, 5), (18, 6), (18, 16), (18, 17), (19, 1), (19, 2), (19, 3), (19, 6), (19, 12), (19, 14), (19, 15), (19, 16), (19, 17), (19, 18), (20, 1), (20, 2), (20, 3), (20, 4), (20, 5), (20, 16), (20, 17), (20, 18), (21, 1), (21, 2), (21, 3), (21, 6), (21, 16), (21, 17), (21, 18), (21, 19), (22, 18), (22, 20), (23, 18), (23, 20), (24, 18), (24, 20), (24, 23), (25, 24), (26, 24), (27, 1), (27, 4), (27, 24), (27, 26), (28, 27), (29, 1), (29, 4), (29, 27), (30, 1), (30, 4)\}^{\leftrightarrow}$

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 29\}$

$T = \{7, 10, 13, 15, 22, 25, 28, 30\}$

$P = \{(1, 7), (1, 28), (2, 10), (2, 30), (3, 7), (3, 30), (4, 22), (4, 28), (5, 22), (5, 30), (6, 10), (6, 15), (8, 7), (8, 10), (9, 7), (9, 13), (11, 10), (11, 13), (12, 10), (12, 15), (14, 13), (14, 15), (16, 13), (16, 22), (17, 15), (17, 22), (18, 15), (18, 25), (19, 7), (19, 13), (20, 25), (20, 30), (21, 7), (21, 15), (23, 22), (23, 25), (24, 22), (24, 28), (26, 25), (26, 28), (27, 25), (27, 30), (29, 28), (29, 30)\}$

$F = \{(1, 7), (2, 10), (3, 7), (4, 22), (5, 22), (6, 10), (7, 8), (7, 9), (8, 10), (9, 13), (10, 11), (10, 12), (11, 13), (12, 15), (13, 14), (13, 16), (13, 19), (14, 15), (15, 6), (15, 17), (15, 18), (15, 21), (16, 22), (17, 22), (18, 25), (19, 7), (20, 25), (21, 7), (22, 23), (22, 24), (23, 25), (24, 28), (25, 26), (25, 27), (26, 28), (27, 30), (28, 1), (28, 4), (28, 29), (29, 30), (30, 2), (30, 3), (30, 5), (30, 20)\}$

Cuts $= \{\{1, 2, 3, 4, 5, 20\}, \{1, 2, 3, 6, 19, 21\}, \{1, 4, 27, 29\}, \{1, 4, 30\}, \{2, 6, 7\}, \{2, 6, 8, 9\}, \{4, 5, 16, 17, 18, 20\}, \{6, 16, 17, 18, 19, 21\}, \{9, 10\}, \{9, 11, 12\}, \{12, 13\}, \{12, 14, 16, 19\}, \{15, 16, 19\}, \{18, 20, 22\}, \{18, 20, 23, 24\}, \{24, 25\}, \{24, 26, 27\}, \{27, 28\}\}$

Lines $= \{\{1, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 22, 23, 25, 26, 28\}, \{1, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 22, 24, 28\}, \{1, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 18, 25, 26, 28\}, \{1, 7, 8, 10, 11, 13, 16, 22, 23, 25, 26, 28\}, \{1, 7, 8, 10, 11, 13, 16, 22, 24, 28\}, \{1, 7, 8, 10, 12, 15, 17, 22, 23, 25, 26, 28\}, \{1, 7, 8, 10, 12, 15, 17, 22, 24, 28\}, \{1, 7, 8, 10, 12, 15, 18, 25, 26, 28\}, \{1, 7, 9, 13, 14, 15, 17, 22, 23, 25, 26, 28\}, \{1, 7, 9, 13, 14, 15, 17, 22, 24, 28\}, \{1, 7, 9, 13, 14, 15, 18, 25, 26, 28\}, \{1, 7, 9, 13, 16, 22, 23, 25, 26, 28\}, \{1, 7, 9, 13, 16, 22, 24,$

28}, {2, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30}, {2, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 22, 23, 25, 27, 30}, {2, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 22, 24, 28, 29, 30}, {2, 10, 11, 13, 14, 15, 18, 25, 26, 28, 29, 30}, {2, 10, 11, 13, 14, 15, 18, 25, 27, 30}, {2, 10, 11, 13, 16, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30}, {2, 10, 11, 13, 16, 22, 23, 25, 27, 30}, {2, 10, 11, 13, 16, 22, 24, 28, 29, 30}, {2, 10, 12, 15, 17, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30}, {2, 10, 12, 15, 17, 22, 23, 25, 27, 30}, {2, 10, 12, 15, 17, 22, 24, 28, 29, 30}, {2, 10, 12, 15, 18, 25, 26, 28, 29, 30}, {2, 10, 12, 15, 18, 25, 27, 30}, {3, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30}, {3, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 22, 23, 25, 27, 30}, {3, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 22, 24, 28, 29, 30}, {3, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 18, 25, 26, 28, 29, 30}, {3, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 18, 25, 27, 30}, {3, 7, 8, 10, 11, 13, 16, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30}, {3, 7, 8, 10, 11, 13, 16, 22, 23, 25, 27, 30}, {3, 7, 8, 10, 11, 13, 16, 22, 24, 28, 29, 30}, {3, 7, 8, 10, 12, 15, 17, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30}, {3, 7, 8, 10, 12, 15, 17, 22, 23, 25, 27, 30}, {3, 7, 8, 10, 12, 15, 17, 22, 24, 28, 29, 30}, {3, 7, 8, 10, 12, 15, 18, 25, 26, 28, 29, 30}, {3, 7, 8, 10, 12, 15, 18, 25, 27, 30}, {3, 7, 9, 13, 14, 15, 17, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30}, {3, 7, 9, 13, 14, 15, 17, 22, 23, 25, 27, 30}, {3, 7, 9, 13, 14, 15, 17, 22, 24, 28, 29, 30}, {3, 7, 9, 13, 14, 15, 18, 25, 26, 28, 29, 30}, {3, 7, 9, 13, 14, 15, 18, 25, 27, 30}, {3, 7, 9, 13, 16, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30}, {3, 7, 9, 13, 16, 22, 23, 25, 27, 30}, {3, 7, 9, 13, 16, 22, 24, 28, 29, 30}, {4, 6, 10, 11, 13, 14, 15, 22, 23, 25, 26, 28}, {4, 6, 10, 11, 13, 14, 15, 22, 24, 28}, {4, 6, 10, 12, 15, 22, 23, 25, 26, 28}, {4, 6, 10, 12, 15, 22, 24, 28}, {4, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 25, 26, 28}, {4, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 21, 22, 24, 28}, {4, 7, 8, 10, 11, 13, 19, 22, 23, 25, 26, 28}, {4, 7, 8, 10, 11, 13, 19, 22, 24, 28}, {4, 7, 8, 10, 12, 15, 21, 22, 23, 25, 26, 28}, {4, 7, 8, 10, 12, 15, 21, 22, 24, 28}, {4, 7, 9, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 25, 26, 28}, {4, 7, 9, 13, 14, 15, 21, 22, 24, 28}, {4, 7, 9, 13, 19, 22, 23, 25, 26, 28}, {4, 7, 9, 13, 19, 22, 24, 28}, {5, 6, 10, 11, 13, 14, 15, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30}, {5, 6, 10, 11, 13, 14, 15, 22, 23, 25, 27, 30}, {5, 6, 10, 11, 13, 14, 15, 22, 24, 28, 29, 30}, {5, 6, 10, 12, 15, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30}, {5, 6, 10, 12, 15, 22, 23, 25, 27, 30}, {5, 6, 10, 12, 15, 22, 24, 28, 29, 30}, {5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30}, {5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 25, 27, 30}, {5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 21, 22, 24, 28, 29, 30}, {5, 7, 8, 10, 11, 13, 19, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30}, {5, 7, 8, 10, 11, 13, 19, 22, 23, 25, 27, 30}, {5, 7, 8, 10, 11, 13, 19, 22, 24, 28, 29, 30}, {5, 7, 8, 10, 12, 15, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30}, {5, 7, 8, 10, 12, 15, 21, 22, 23, 25, 27, 30}, {5, 7, 8, 10, 12, 15, 21, 22, 24, 28, 29, 30}, {5, 7, 9, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30}, {5, 7, 9, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 25, 27, 30}, {5, 7, 9, 13, 14, 15, 21, 22, 24, 28, 29, 30}, {5, 7, 9, 13, 19, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30}, {5, 7, 9, 13, 19, 22, 23, 25, 27, 30}, {5, 7, 9, 13, 19, 22, 24, 28, 29, 30}, {6, 10, 11, 13, 14, 15, 20, 25, 26, 28, 29, 30}, {6, 10, 11, 13, 14, 15, 20, 25, 27, 30}, {6, 10, 12, 15, 20, 25, 26, 28, 29, 30}, {6, 10, 12, 15, 20, 25, 27, 30}, {7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 20, 21, 25, 26, 28, 29, 30}, {7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 20, 21, 25, 27, 30}, {7, 8, 10, 11, 13, 19, 20, 25, 26, 28, 29, 30}, {7, 8, 10, 11, 13, 19, 20, 25, 27, 30}, {7, 8, 10, 12, 15, 20, 21, 25, 26, 28, 29, 30}, {7, 8, 10, 12, 15, 20, 21, 25, 27, 30}, {7, 9, 13, 14, 15, 20, 21, 25, 26, 28, 29, 30}, {7, 9, 13, 14, 15, 20, 21, 25, 27, 30}, {7, 9, 13, 19, 20, 25, 26, 28, 29, 30}, {7, 9, 13, 19, 20, 25, 27, 30}}

Es gelten die Axiome VST, DIS, SYM, IRR, KAA, KOH, IMK, KDI, NDI, LCT, LOR, LFO, KOR, ERL, LSL, CIL und KSE.
Die Axiome LKO und EKO gelten nicht.

C.12 Anti-EKO

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$

$co = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (7,2), (7,5), (8,2), (8,5), (9,2), (9,5), (9,8), (10,9), (11,9), (12,9), (12,11), (13,12), (14,12), (16,1), (16,2), (16,3), (16,12), (16,14), (16,15), (17,1), (17,2), (17,3), (17,16), (18,1), (18,2), (18,3), (18,16), (18,17), (19,4), (19,5), (19,6), (19,12), (19,14), (19,15), (19,16), (19,17), (19,18), (20,4), (20,5), (20,6), (20,16), (20,17), (20,18), (20,19), (21,4), (21,5), (21,6), (21,16), (21,17), (21,18), (21,19), (21,20), (22,18), (22,21), (23,18), (23,21), (24,18), (24,21), (24,23), (25,24), (26,24), (27,1), (27,4), (27,24), (27,26), (28,27), (29,1), (29,4), (29,27), (30,1), (30,4)\}^{\leftrightarrow}$

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 29\}$

$T = \{7, 10, 13, 15, 22, 25, 28, 30\}$

$P = \{(1,7), (1,28), (2,10), (2,30), (3,7), (3,30), (4,7), (4,28), (5,10), (5,30), (6,7), (6,30), (8,7), (8,10), (9,7), (9,13), (11,10), (11,13), (12,10), (12,15), (14,13), (14,15), (16,13), (16,22), (17,15), (17,22), (18,15), (18,25), (19,13), (19,22), (20,15), (20,22), (21,15), (21,25), (23,22), (23,25), (24,22), (24,28), (26,25), (26,28), (27,25), (27,30), (29,28), (29,30)\}$

$F = \{(1,7), (2,10), (3,7), (4,7), (5,10), (6,7), (7,8), (7,9), (8,10), (9,13), (10,11), (10,12), (11,13), (12,15), (13,14), (13,16), (13,19), (14,15), (15,17), (15,18), (15,20), (15,21), (16,22), (17,22), (18,25), (19,22), (20,22), (21,25), (22,23), (22,24), (23,25), (24,28), (25,26), (25,27), (26,28), (27,30), (28,1), (28,4), (28,29), (29,30), (30,2), (30,3), (30,5), (30,6)\}$

$\mathrm{Cuts} = \{\{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,16,17,18\}, \{1,4,27,29\}, \{1,4,30\}, \{2,5,7\}, \{2,5,8,9\}, \{4,5,6,19,20,21\}, \{9,10\}, \{9,11,12\}, \{12,13\}, \{12,14,16,19\}, \{15,16,19\}, \{16,17,18,19,20,21\}, \{18,21,22\}, \{18,21,23,24\}, \{24,25\}, \{24,26,27\}, \{27,28\}\}$

$\mathrm{Lines} = \{\{1,7,8,10,11,13,14,15,20,22,23,25,26,28\}, \{1,7,8,10,11,13,14,15,20,22,24,28\}, \{1,7,8,10,11,13,14,15,21,25,26,28\}, \{1,7,8,10,11,13,19,22,23,25,26,28\}, \{1,7,8,10,11,13,19,22,24,28\}, \{1,7,8,10,12,15,20,22,23,25,26,28\}, \{1,7,8,10,12,15,20,22,24,28\}, \{1,7,8,10,12,15,21,25,26,28\}, \{1,7,9,13,14,15,20,22,23,25,26,28\}, \{1,7,9,13,14,15,20,22,24,28\}, \{1,7,9,13,14,15,21,25,26,28\}, \{1,7,9,13,19,22,23,25,26,28\}, \{1,7,9,13,19,22,24,28\}, \{2,10,11,13,14,15,20,22,23,25,26,28,29,30\}, \{2,10,11,13,14,15,20,22,23,25,27,30\}, \{2,10,11,13,14,15,20,22,24,28,29,30\}, \{2,10,11,13,14,15,21,25,26,28,29,30\}, \{2,10,11,13,14,15,21,25,27,30\}, \{2,10,11,13,19,22,23,25,26,28,29,30\}, \{2,10,11,13,19,22,23,25,27,30\}, \{2,10,11,13,19,22,24,28,29,30\}, \{2,10,12,15,20,22,23,25,26,28,29,30\}, \{2,10,12,15,20,22,23,25,27,30\}, \{2,10,12,15,20,22,24,28,29,30\}, \{2,10,12,15,21,25,26,28,29,30\}, \{2,10,12,15,21,25,27,30\}, \{3,7,8,10,11,13,14,15,20,22,23,25,26,28,29,30\}, \{3,7,8,10,11,13,14,15,20,22,23,25,27,30\}, \{3,7,8,10,11,13,14,15,20,22,24,28,29,30\}, \{3,7,8,10,11,13,14,15,21,25,26,28,29,30\}, \{3,7,8,10,11,13,14,15,21,25,27,30\}, \{3,7,8,10,11,13,19,22,23,25,26,28,29,30\}, \{3,7,8,10,11,13,19,22,23,25,27,30\}, \{3,7,8,10,11,13,19,22,24,28,29,30\}, \{3,7,8,10,12,15,20,22,23,25,26,28,29,30\}, \{3,7,8,10,12,15,20,22,23,25,27,30\}, \{3,7,8,10,12,15,20,22,24,28,29,30\}, \{3,7,8,10,12,15,21,25,26,28,29,30\}, \{3,7,8,10,12,15,21,25,27,30\}, \{3,7,9,13,14,15,20,22,23,25,26,28,29,30\}, \{3,7,9,13,14,15,20,22,23,25,27,30\}, \{3,7,9,13,14,15,20,22,24,28,29,30\}, \{3,7,9,13,14,15,21,25,26,28,29,30\}, \{3,7,9,13,14,15,21,25,27,30\}, \{3,7,9,13,19,22,23,25,26,28,29,30\}, \{3,7,9,13,19,22,23,25,27,30\}, \{3,7,9,13,19,22,24,28,29,30\}, \{4,7,8,10,11,13,14,15,17,22,23,25,26,28\}, \{4,7,8,10,11,13,14,15,17,22,24,28\}, \{4,7,8,10,11,13,14,15,18,25,26,28\}, \{4,7,8,10,11,13,16,22,23,25,26,28\}, \{4,7,8,10,11,13,16,22,24,28\}, \{4,7,8,10,12,15,17,22,23,25,26,28\}, \{4,7,8,10,12,15,17,22,24,28\}, \{4,7,8,10,12,15,18,25,26,28\}, \{4,7,9,13,14,15,17,22,23,25,26,28\}, \{4,7,9,13,14,15,17,22,24,28\}, \{4,7,9,13,14,15,18,25,26,28\}, \{4,7,9,13,16,22,23,25,26,28\}, \{4,7,9,13,16,22,24,28\}, \{5,10,11,13,14,15,17,22,23,25,26,28,29,30\}, \{5,10,11,13,14,15,17,22,23,25,27,30\}, \{5,10,11,13,14,15,17,22,24,28,29,30\}, \{5,10,11,13,14,15,18,25,26,28,29,30\}, \{5,10,11,13,14,15,18,25,27,30\}, \{5,10,11,13,16,22,23,25,26,28,29,30\}, \{5,10,11,13,16,22,23,25,27,30\}, \{5,10,11,13,16,22,24,28,29,30\}, \{5,10,12,15,17,22,23,25,26,28,29,30\}, \{5,10,12,15,17,22,23,25,27,30\}, \{5,10,12,15,17,22,24,28,29,30\}, \{5,10,12,15,18,25,26,28,29,30\}, \{5,10,12,15,18,25,27,30\}, \{6,7,8,10,11,13,14,15,17,22,23,25,26,28,29,30\}, \{6,7,8,10,11,13,14,15,17,22,23,25,27,30\}, \{6,7,8,10,11,13,14,15,17,22,24,28,29,30\}, \{6,7,8,10,11,13,14,15,18,25,26,28,29,30\}, \{6,7,8,10,11,13,14,15,18,25,27,30\}, \{6,7,8,10,11,13,16,22,23,25,26,28,29,30\}, \{6,7,8,10,11,13,16,22,23,25,27,30\}, \{6,7,8,10,11,13,16,22,24,28,29,30\}, \{6,7,8,10,12,15,17,22,23,25,26,28,29,30\}, \{6,7,8,10,12,15,17,22,23,25,27,30\}, \{6,7,8,10,12,15,17,22,24,28,29,30\}, \{6,7,8,10,12,15,18,25,26,28,29,30\}, \{6,7,8,10,12,15,18,25,27,30\}, \{6,7,9,13,14,15,17,22,23,25,26,28,29,30\}, \{6,7,9,13,14,15,17,22,23,25,27,30\}, \{6,7,9,13,14,15,17,22,24,28,29,30\}, \{6,7,9,13,14,15,18,25,26,28,29,30\}, \{6,7,9,13,14,15,18,25,27,30\}, \{6,7,9,13,16,22,23,25,26,28,29,30\}, \{6,7,9,13,16,22,23,25,27,30\}, \{6,7,9,13,16,22,24,28,29,30\}\}$

Es gelten die Axiome VST, DIS, SYM, IRR, KAA, KOH, IMK, LKO, KDI, NDI, LCT, LOR, LFO,

KOR, ERL, LSL und CIL.
Die Axiome EKO und KSE gelten nicht.

Anhang D

Darstellungsverzeichnis

Anhang E

Elementare Objekte und Axiome

Hier sind die wichtigsten Definitionen und Axiome für die Theorie der Nebenläufigkeit noch einmal zusammengefaßt, so daß die folgende Seite beim Lesen der Arbeit ausgeklappt als Referenz verwendet werden kann.

Objekte

$$
\begin{aligned}
CS &:= (X, li, co) \\
P &:= \{(x,y) \in X \times X \mid \underline{li}[x] \subsetneq \underline{li}[y]\} \\
im &:= P \cup P^{-1} \\
S &:= \operatorname{dom}(P) \\
T &:= \operatorname{ran}(P) \\
\text{Lines} &:= \text{Kens}(\underline{li}) \\
\text{Cuts} &:= \text{Kens}(\underline{co}) \\
\text{Orient} &:= \{F \subseteq X \times X \mid F \cup F^{-1} = im \wedge F \odot F \subseteq li \wedge \\
&\qquad\qquad F \odot F^{-1} \subseteq \underline{co} \ \wedge F^{-1} \odot F \subseteq \underline{co}\} \\
\text{Order} &:= \{(<) \subseteq X \times X \mid < \text{ ist eine Halbordnung} \wedge \\
&\qquad\qquad (< \cup <^{-1}) = li\} \\
\text{WP}(a_0, \ldots, a_n) &:= \{i \mid 0 < i < n \wedge a_{i-1}\ \underline{co}\ a_{i+1}\} \\
\text{AWP}(a_0, \ldots, a_n) &:= \text{WP}(a_0, \ldots, a_n, a_1)
\end{aligned}
$$

Axiome

Axiom NTR $|X| \geq 2$

Axiom DIS $co \cap li = li \cap \mathrm{id}_X = co \cap \mathrm{id}_X = \varnothing$

Axiom VST $co \cup li \cup \mathrm{id}_X = X \times X$

Axiom SYM $co^{-1} = co$

Axiom LII $\widetilde{li} = \mathrm{id}_X$

Axiom COI $\widetilde{co} = \mathrm{id}_X$

Axiom IRR $\widetilde{co} = \widetilde{li}$

Axiom KAA $P^2 = \varnothing$

Axiom KDI $\forall C \in \text{Cuts} : \forall L \in \text{Lines} : C \cap L \neq \varnothing$

Axiom NDI $\forall a, b, c, d \in X : (c\ co\ b \wedge b\ co\ a \wedge a\ co\ d \wedge a\ li\ c \wedge$
$c\ li\ d \wedge d\ li\ b \Rightarrow \exists e \in X : e\ co\ a \wedge e\ co\ b \wedge e\ li\ c \wedge e\ li\ d)$

Axiom LCT $\forall x \in X : (co|_{im[x]})^2 \subseteq \underline{co}|_{im[x]}$

Axiom LOR $\forall x \in X : (li|_{im[x]})^2 \subseteq \underline{co}|_{im[x]}$

Axiom LFO $\forall x \in X : \mathrm{id}_{im[x]} \subseteq (li|_{im[x]})^2$

Axiom KOR $\text{Orient} \neq \varnothing$

Axiom OBS $\text{Order} \neq \varnothing$

Axiom LIK $li^* = X \times X$

Axiom COK $co^* = X \times X$

Axiom KOH $co^* = li^*$

Axiom IMK $im_X^* = X \times X$

Axiom LKO $\forall L \in \text{Lines} : (im|_L)_L^* = L \times L$

Axiom EKO $\forall L \in \text{Lines} : \forall x \in X : E = L \cap \underline{co}[x] \Rightarrow$
$(im|_E)_E^* = E \times E$

Anhang F

Formalia

Ich erkläre hiermit, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig erstellt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet habe.

....

Ort, Datum   Olaf Kummer