Formale Grundlagen der Informatik 3
Kapitel 3

Aussagenlogik
Natürliche Deduktion

Frank Heitmann
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

26. Oktober und 9. November 2015

Idee und Ursprung

- Wie werden "Beweise im täglichen Leben" geführt?
- Wie verläuft die Argumentation bei mathematischen Beweisen?

Natürliche Deduktionssysteme sind eine *Familie* von Beweistechniken, mit denen solche Beweise formalisiert werden sollen.

Ziel

Wir möchten

- aus gegebenen Formeln
- durch Anwenden von (syntaktischen) Regeln
- andere Formeln *ableiten* können

Notation:

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$$

Die ϕ_i sind die Prämissen, ψ ist die Konklusion.

Vorgehen

- Wir entwickeln nun einen Kalkül, der eine Menge von *Regeln* enthält, mit denen jeweils eine Schlussfolgerung (*Konklusion*) aus einer Menge von Voraussetzungen (*Prämissen*) gezogen werden darf.
- Für jeden Junktor führen wir Einführungs- und Löschregeln ein.

Ziel

Das Ziel ist ein Satz der Art

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi \text{ gdw. } \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \models \psi$$

Sneak Peek

$$\frac{A \land B}{A}$$

Inferenzregeln

Eine Inferenzregel schreiben wir in der Form

$$\frac{A_1, \ldots, A_n}{B}$$

Die A_i sind dabei die *Prämissen*, B die *Konklusion*.

Definition (Ableitung)

Wenn das Muster $A_1, \ldots, A_n$ in einer Formelmenge M vorliegt, d.h. wenn es eine Substitution *sub* gibt derart, dass gilt $sub(\{A_1, \ldots, A_n\}) \subseteq M$, dann ist $sub(B)$ aus M (in einem Schritt) ableitbar:

$$M \vdash sub(B)$$

Beweise und Theoreme

- Ein *Beweis* von ψ unter den Prämissen $\phi_1, \ldots \phi_n$ ist eine Folge von abgeleiteten Formeln, mit denen man von den ursprünglichen Prämissen ausgehend, durch Regelanwendung letztendlich zur Konklusion ψ gelangt. Wir schreiben dies als eine *Sequenz*

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \ \vdash \ \psi$$

- Ein *Theorem* ist eine Formel, die ohne Prämissen bewiesen werden kann, also $\vdash \psi$

Anmerkungen

Anmerkungen

1. Die Menge M ist bei uns hier meist die Menge der bisher abgeleiteten Formeln (zuzüglich der Prämissen und manchmal zuzüglich der Annahmen).
2. Obige Definition deckt den Fall von Regeln, die Annahmen enthalten, nicht gut ab. Wir kommen darauf später zu sprechen.
3. Die Regeln müssen mit Bedacht gewählt werden, will man nicht beliebigen Unsinn ableiten können! (Und insb. auch, wenn man wieder einen korrekten und vollständigen Kalkül haben will!)
4. Die Erstellung eines Beweises/einer Sequenz selbst ist dann ein teils kreativer Akt. Es ist also nicht bei jedem Schritt möglich diesen zu berechnen.

Inferenzregeln (Konjunktion)

- **Konjunktions-Einführung**

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B} \; (\wedge i)$$

Wenn $A \wedge B$ bewiesen werden soll, genügt es, sowohl A als auch B zu beweisen.

- **Konjunktions-Elimination**

$$\frac{A \wedge B}{A} \; (\wedge e_1) \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B} \; (\wedge e_2)$$

Wenn A bewiesen werden soll, genügt es $A \wedge B$ zu beweisen. Analog für B...

Zur Anwendung

Wichtige Anmerkungen

1. Für die A, B usw. in den Regeln können *beliebige Formeln substitutiert* werden, um die Regel anzuwenden. (Daher geben die Regeln *Muster* vor.) Wir sehen dies gleich in den Beispielen.
2. Im Allgemeinen gibt es mehr als einen Beweis (gemeint ist jetzt die wiederholte Benutzung der Regeln, die ja ein Beweis der letzten Formel sind).

Beispiel

Beispiel

Wir zeigen

$$A \wedge B, C \vdash B \wedge C$$

1	$A \wedge B$	Prämisse
2	C	Prämisse
3	B	$\wedge e_2$, 1
4	$B \wedge C$	$\wedge_i$, 3, 2

Beispiel

Beispiel

Wir zeigen (nochmal)

$$A \land B, C \vdash B \land C$$

in anderer Notation:

$$\cfrac{\cfrac{A \land B}{B}\,(\land e_2) \qquad C}{B \land C}\,(\land i)$$

Anmerkung

Die erste, lineare Schreibweise benötigt Verweise auf die benutzten Zeilen, ermöglicht aber gleich eine bessere Sichtweise auf eingeführte Annahmen. Wir benutzen daher i.A. die lineare Schreibweise.

Inferenzregeln (Doppelte Negation)

- **Doppelte Negation**

$$\frac{\neg\neg A}{A}\ (\neg\neg e) \qquad\qquad \frac{A}{\neg\neg A}\ (\neg\neg i)$$

Anmerkung

Die Regel $(\neg\neg i)$ ist später eigentlich nicht nötig, da sie aus den anderen abgeleitet werden kann, d.h. ohne sie hat man bereits ein vollständiges und korrektes Kalkül der Natürlichen Deduktion für die Aussagenlogik. Sie macht die Beweise aber kürzer (man müsste sie sonst stets durch ihre Herleitung ersetzen).

Beispiele

Beispiele

1. $A, \neg\neg(B \wedge C) \vdash \neg\neg A \wedge C$
2. $(A \wedge B) \wedge C, D \wedge E \vdash B \wedge D$

Inferenzregeln (Implikation)

- **Implikations-Einführung und -Elimination**

$$\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \Rightarrow B}\,(\Rightarrow i) \qquad\qquad \dfrac{A \qquad A \Rightarrow B}{B}\,(\Rightarrow e)$$

Die [] bei der Regel zur Implikationseinführung deutet eine *Annahme* an. Die Formel A wird also angenommen und unter dieser Annahme wird B bewiesen. Gelingt dies, darf $A \Rightarrow B$ abgeleitet werden. Eine alternative Schreibweise nutzt Boxen in der linearen Schreibweise.

Wichtige Anmerkung

Wichtige Anmerkung

Eine Formel kann nur dann in einem Beweis benutzt werden, wenn die Formel *vorher* eingeführt (oder bewiesen) wurde und wenn sie nicht unter einer Annahme eingeführt wurde und diese Annahme bereits "verbraucht" wurde, d.h. wenn in obiger Notation die Regel mit der die Annahme eingeführt wurde benutzt wurde oder in der Box-Notation, wenn die Box geschlossen wurde.

Beispiele

Beispiele

1. $(A \wedge B) \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
2. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \Rightarrow C$
3. $A \Rightarrow B \vdash (A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge C)$

Inferenzregeln (Disjunktion)

- **Disjunktions-Einführung**

$$\frac{A}{A \vee B}\ (\vee i_1) \qquad\qquad \frac{B}{A \vee B}\ (\vee i_2)$$

Wenn $A \vee B$ bewiesen werden soll, genügt es A zu beweisen (bzw. B).

- **Diskunktions-Elimination**

$$\frac{A \vee B \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\ (\vee e)$$

Wenn C bewiesen werden soll und C aus A <u>und</u> aus B beweisbar ist, dann genügt es $A \vee B$ zu beweisen.

Beispiel (1/2)

Beispiel (1)

$$P \Rightarrow Q, R \Rightarrow S \;\vdash\; (P \vee R) \Rightarrow (Q \vee S)$$

Beispiel (2/2)

$$\dfrac{\dfrac{[P \vee R]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{P \Rightarrow Q \qquad [P]^1}{Q}\,(\Rightarrow e)}{Q \vee S}\,(\vee i_1) \qquad \dfrac{\dfrac{R \Rightarrow S \qquad [R]^1}{S}\,(\Rightarrow e)}{Q \vee S}\,(\vee i_2)}{Q \vee S}\,(\vee e, [1])}{(P \vee R) \Rightarrow (Q \vee S)}\,(\Rightarrow i, [2])$$

Eine Ableitung/ein Beweis ist ein *Baum* mit Axiomen oder Annahmen an den Blättern und der bewiesenen Formel als Wurzel. Die inneren Knoten sind jeweils aus ihren Kindern durch Anwendung *einer* Inferenzregel hervorgegangen. Es gibt keine Zyklen. Alternativ: Box-Variante.

Beispiele

Beispiele

1. $A \vee B \vdash B \vee A$
2. $B \Rightarrow C \vdash (A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)$
3. $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Inferenzregeln (Negation)

- **Negations-Einführung und -Elimination**

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg A}\,(\neg i) \qquad\qquad \dfrac{A \qquad \neg A}{\bot}\,(\neg e)$$

Beispiele

Beispiele

1. $A \Rightarrow B, A \Rightarrow \neg B \vdash \neg A$

Inferenzregeln (Bottom)

- **Bottom-Elimination**

$$\frac{\perp}{A}\,(\perp e)$$

Die $\perp$-Regel bricht mit dem sonst vorherrschenden Einführungs- und Eliminations-Schemata.

Beispiele

Beispiele

1. $\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$

Abgeleitete Inferenzregeln

Weitere neben $\neg\neg i$ abgeleitete Inferenzregeln:

- **Modus Tollens und Law of the excluded middle**

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad \neg B}{\neg A}\,(MT) \qquad\qquad \frac{}{A \vee \neg A}\,(LEM)$$

- **Proof by contradiction (PBC)**

$$\begin{array}{c} [\neg A] \\ \vdots \\ \bot \\ \hline A \end{array}\,(PBC)$$

Ausblick

Nun haben wir zunächst nur eine Ansammlung von Regeln (einen Kalkül). Wir wollen zeigen, dass wir mit diesem Kalkül sinnvoll arbeiten können, d.h. wir wollen zeigen

1. Wenn $F_1, \ldots, F_n \vdash G$, dann $F_1, \ldots, F_n \models G$. (Korrektheit)
2. Wenn $F_1, \ldots, F_n \models G$, dann $F_1, \ldots, F_n \vdash G$. (Vollständigkeit)

Dies machen wir jetzt und/oder nächstes Mal ...

Übungsaufgabe

Übungsaufgaben

1. Obige Beweise noch mal angucken/führen
2. $(A \wedge \neg B) \Rightarrow C, \neg C, A \vdash B$
3. $\vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
4. Überlegen, wie der Korrektheits- und der Vollständigkeitsbeweis gehen könnte.

Literatur

Literatur

In der Literatur kann man viele Varianten des heute vorgestellten Kalküls finden. Die heutige Vorlesung orientierte sich am ersten Kapitel in dem Buch *Logic for Computer Science* von M. Huth und M. Ryan (Cambridge, 2. Auflage, 2004).

Literaturhinweis

Eingeführt wurden natürliche Deduktionssysteme von Gerhard Gentzen. Nachzulesen z.B. in *Investigations into logical deduction*, in *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, M. E. Szabo (Hrsg.), North-Holland Publishing Company, 1969. Die ursprüngliche Arbeit ist aus dem Jahre 1935.