

Algorithmen und Datenstrukturen

Kapitel 4

Neue Datenstrukturen,
besseres (?) Sortieren
(Teil 3)

Frank Heitmann

heitmann@informatik.uni-hamburg.de

4. November 2015

Heaps als Warteschlangen

Heaps können genutzt werden, um effiziente Prioritätswarteschlangen zu implementieren. Das Ziel ist es die wichtigen Operationen

- $\text{Maximum}(S)$
- $\text{ExtractMax}(S)$
- $\text{Insert}(S, x)$
- $\text{IncreaseKey}(S, x, k)$

in $O(\log n)$ Zeit zu realisieren.

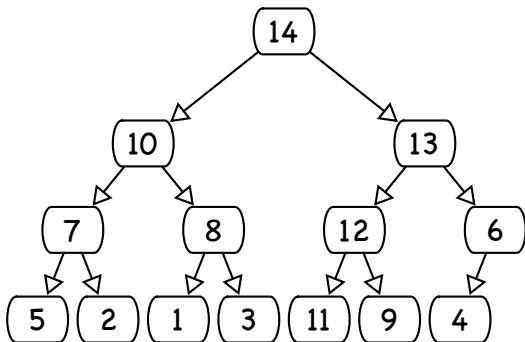
Heaps als Warteschlangen

Heaps können genutzt werden, um effiziente Prioritätswarteschlangen zu implementieren. Das Ziel ist es die wichtigen Operationen

- $\text{Maximum}(S)$
- $\text{ExtractMax}(S)$
- $\text{Insert}(S, x)$
- $\text{IncreaseKey}(S, x, k)$

in $O(\log n)$ Zeit zu realisieren.

Maximum und ExtractMax - Die Idee



Maximum und ExtractMax - Pseudocode

Algorithmus 1 HeapMaximum(A)

1: **return** $A[1]$

Algorithmus 2 HeapExtractMax(A)

1: **if** heap-größe[A] < 1 **then** error
2: $max = A[1]$
3: $A[1] = A[\text{heap-größe}[A]]$
4: heap-größe[A] = heap-größe[A] - 1
5: MaxHeapify($A, 1$)
6: **return** max

Beispiel folgt später...

Maximum und ExtractMax - Pseudocode

Algorithmus 3 HeapMaximum(A)

1: **return** $A[1]$

Algorithmus 4 HeapExtractMax(A)

1: **if** heap-größe[A] < 1 **then** error
2: $max = A[1]$
3: $A[1] = A[\text{heap-größe}[A]]$
4: heap-größe[A] = heap-größe[A] - 1
5: MaxHeapify($A, 1$)
6: **return** max

Beispiel folgt später...

Insert/Increase - Idee und Pseudocode

Die Idee von HeapInsert ist das neue Element einfach ganz rechts im Array (im Baum ganz rechts in der untersten Ebene) anzufügen und es dann im Baum nach 'oben' wandern zu lassen, bis es an der richtigen Stelle ist. (Dies ist sehr ähnlich zu der MaxHeapify Operation.)

Algorithmus 5 HeapIncreaseKey(A, i, key)

```
1: if  $key < A[i]$  then  
2:   Error  
3: end if  
4:  $A[i] = key$   
5: while  $i > 1 \ \&\& \ A[Vater(i)] < A[i]$  do  
6:   swap( $A[i], A[Vater(i)]$ )  
7:    $i = Vater(i)$   
8: end while
```

Insert/Increase - Idee und Pseudocode

Die Idee von HeapInsert ist das neue Element einfach ganz rechts im Array (im Baum ganz rechts in der untersten Ebene) anzufügen und es dann im Baum nach 'oben' wandern zu lassen, bis es an der richtigen Stelle ist. (Dies ist sehr ähnlich zu der MaxHeapify Operation.)

Algorithmus 6 HeapIncreaseKey(A, i, key)

- 1: **if** $key < A[i]$ **then**
 - 2: Error
 - 3: **end if**
 - 4: $A[i] = key$
 - 5: **while** $i > 1 \ \&\& \ A[Vater(i)] < A[i]$ **do**
 - 6: $swap(A[i], A[Vater(i)])$
 - 7: $i = Vater(i)$
 - 8: **end while**
-

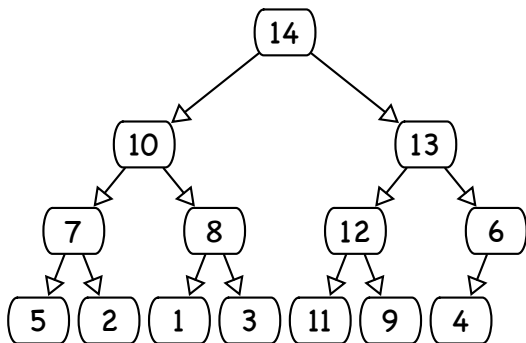
Insert/Increase - Idee und Pseudocode

Die Idee von HeapInsert ist das neue Element einfach ganz rechts im Array (im Baum ganz rechts in der untersten Ebene) anzufügen und es dann im Baum nach 'oben' wandern zu lassen, bis es an der richtigen Stelle ist. (Dies ist sehr ähnlich zu der MaxHeapify Operation.)

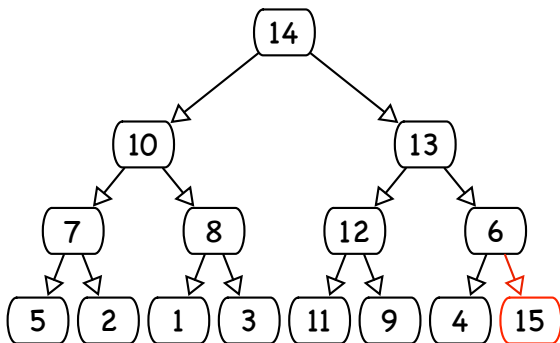
Algorithmus 7 HeapInsert(A , key)

- 1: heap-größe[A] = heap-größe[A] + 1
 - 2: $A[\text{heap-größe}[A]] = -\infty$
 - 3: HeapIncreaseKey(A , heap-größe[A], key)
-

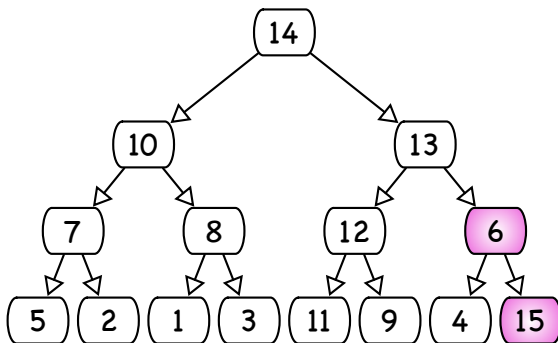
MaxHeapInsert - Beispiel



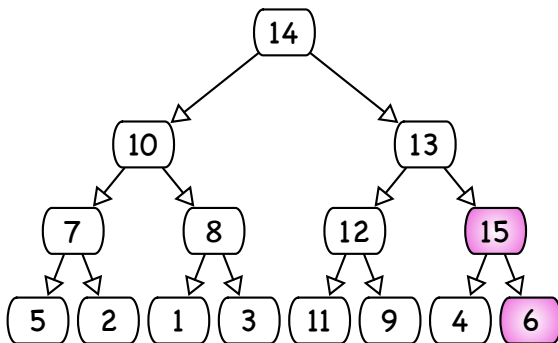
MaxHeapInsert - Beispiel



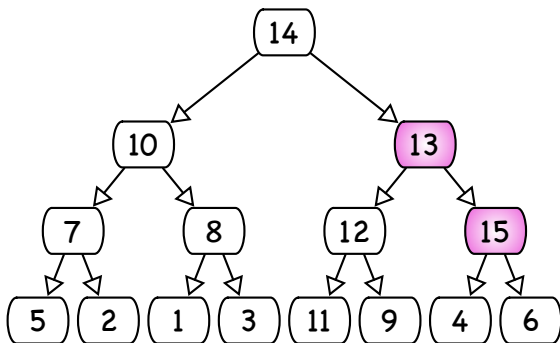
MaxHeapInsert - Beispiel



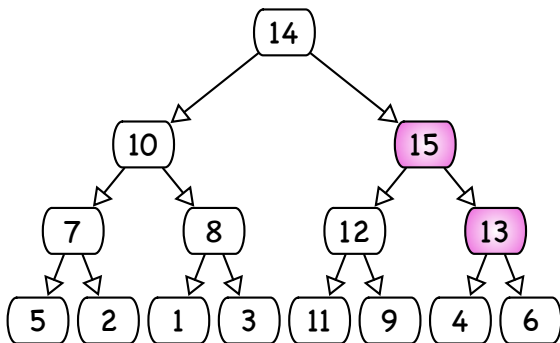
MaxHeapInsert - Beispiel



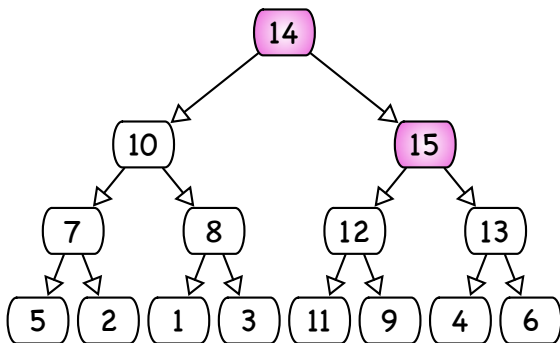
MaxHeapInsert - Beispiel



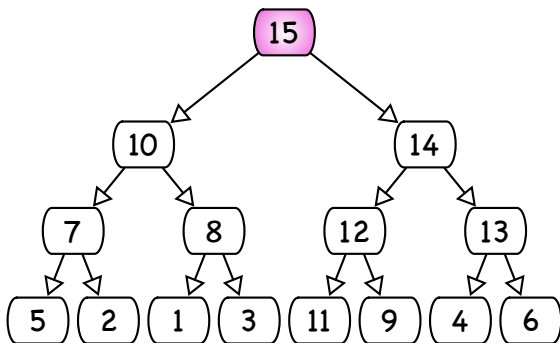
MaxHeapInsert - Beispiel



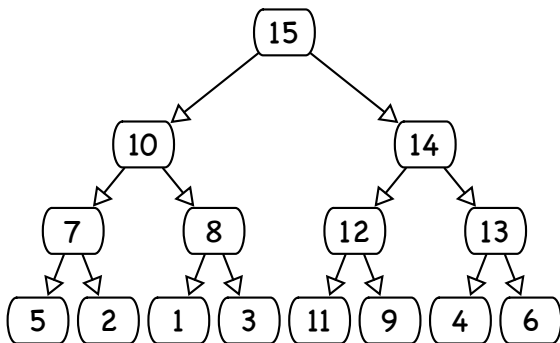
MaxHeapInsert - Beispiel



MaxHeapInsert - Beispiel



MaxHeapInsert - Beispiel



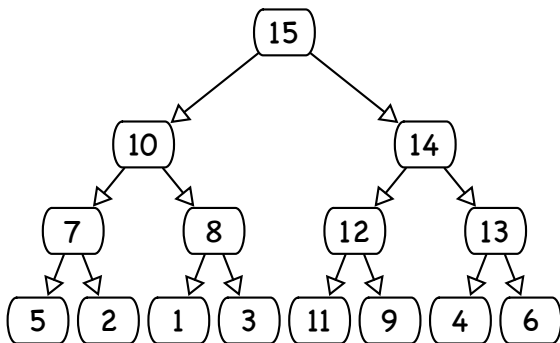
ExtractMax

Und jetzt noch ein Beispiel für HeapExtractMax ...

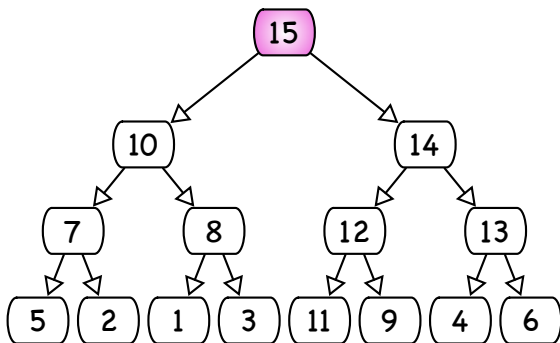
Algorithmus 8 HeapExtractMax(A)

- 1: **if** heap-größe[A] < 1 **then** error
 - 2: $max = A[1]$
 - 3: $A[1] = A[\text{heap-größe}[A]]$
 - 4: heap-größe[A] = heap-größe[A] - 1
 - 5: MaxHeapify($A, 1$)
 - 6: **return** max
-

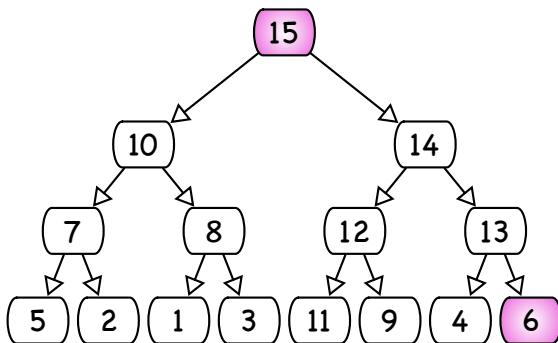
HeapExtractMax - Beispiel



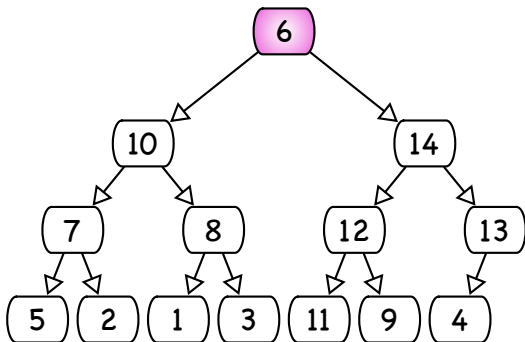
HeapExtractMax - Beispiel



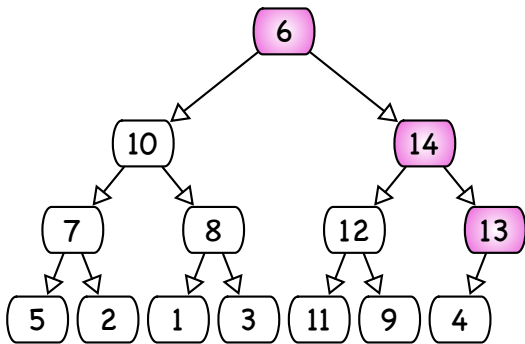
HeapExtractMax - Beispiel



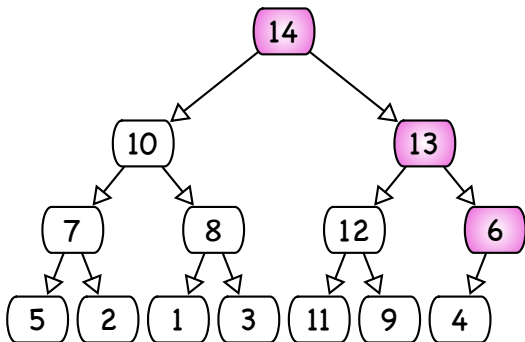
HeapExtractMax - Beispiel



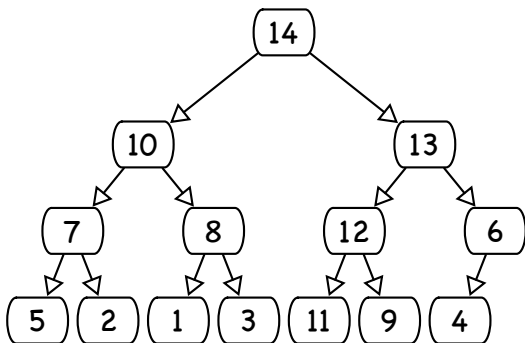
HeapExtractMax - Beispiel



HeapExtractMax - Beispiel



HeapExtractMax - Beispiel



Wiederholung: Prioritätswarteschlangen

- Heaps für Warteschlangen
 - HeapMaximum und HeapExtractMax (letztere nutzt wieder MaxHeapify)
 - HeapIncreaseKey (im Prinzip die 'Umkehrung' von MaxHeapify)
 - HeapInsert (nutzt HeapIncreaseKey)

Heaps als Warteschlange: Die Idee

- Die Idee von HeapInsert ist das neue Element einfach ganz rechts im Array (im Baum ganz rechts in der untersten Ebene) anzufügen und es dann im Baum nach 'oben' wandern zu lassen, bis es an der richtigen Stelle ist. (Dies ist sehr ähnlich zu der MaxHeapify Operation.)
- HeapIncreaseKey arbeitet genauso, fängt aber nicht immer ganz unten/rechts an.
- Maximum und ExtractMax arbeiten im Prinzip wie der Schleifenrumpf von HeapSort. (ExtractMax muss die Heap-Eigenschaft wieder herstellen und nutzt MaxHeapify.)

Warteschlangen: Maximum und ExtractMax

Algorithmus 9 HeapMaximum(A)

1: **return** $A[1]$

Algorithmus 10 HeapExtractMax(A)

1: **if** heap-größe[A] < 1 **then** error
2: $max = A[1]$
3: $A[1] = A[\text{heap-größe}[A]]$
4: heap-größe[A] = heap-größe[A] - 1
5: MaxHeapify($A, 1$)
6: **return** max

Warteschlangen: Increase und Insert

Algorithmus 11 HeapIncreaseKey(A, i, key)

```

1: if  $key < A[i]$  then
2:   Error
3: end if
4:  $A[i] = key$ 
5: while  $i > 1 \ \&\& \ A[Vater(i)] < A[i]$  do
6:    $swap(A[i], A[Vater(i)])$ 
7:    $i = Vater(i)$ 
8: end while

```

Algorithmus 12 HeapInsert(A, key)

```

1:  $heap\text{-}größe[A] = heap\text{-}größe[A] + 1$ 
2:  $A[heap\text{-}größe[A]] = -\infty$ 
3:  $HeapIncreaseKey(A, heap\text{-}größe[A], key)$ 

```

Analysen

Satz

- 1 Die Operationen *HeapMaximum*, *HeapExtractMax*, *HeapIncreaseKey* und *HeapInsert* sind alle korrekt und arbeiten in $O(\log n)$ Zeit. *HeapMaximum* sogar in $\Theta(1)$.

Zur Übung

Genaueres zu den Korrektheitsbeweisen wieder zur Übung oder bei Schwierigkeiten zum Nachlesen im [Cormen].