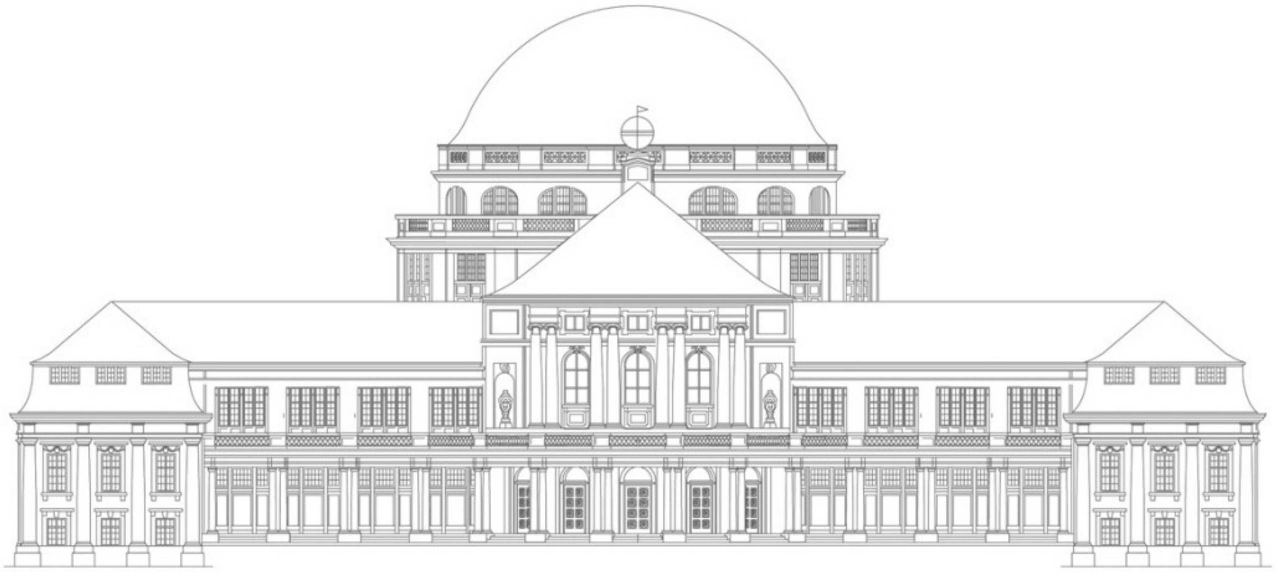
Seminarvortrag zum Thema

ω-Automaten

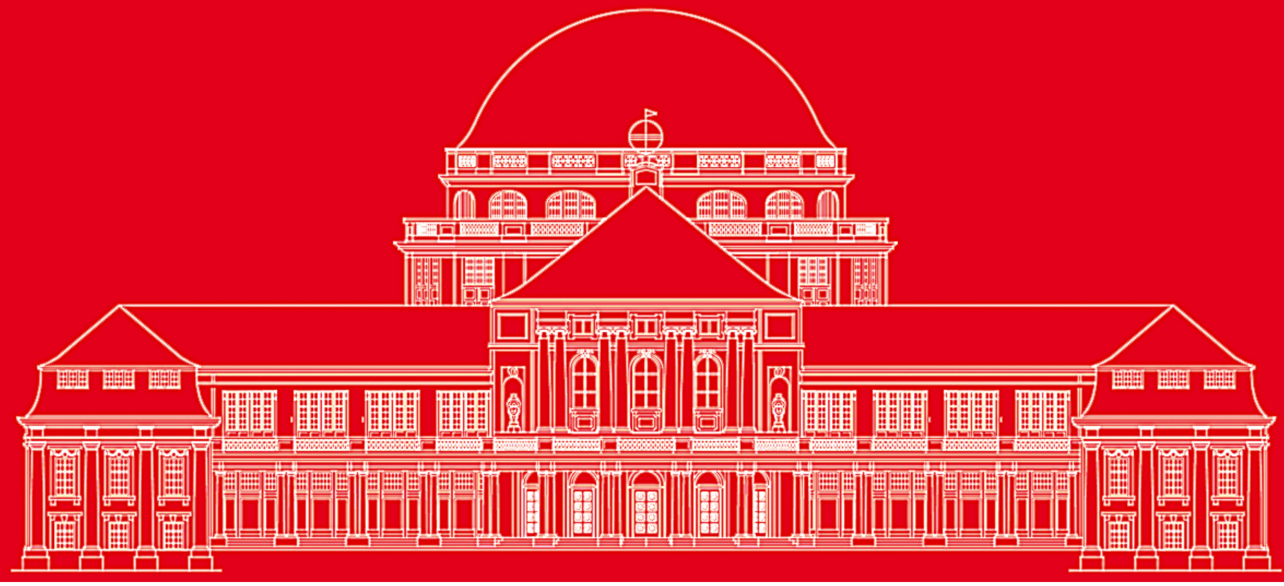


Simon Kostede & Markku Lammerz

Aufbau des Vortrags:

- Einleitung
- Büchi-Automaten
    - Nichtäquivalenz zwischen NBA und DBA
- Muller-Automaten
- Rabing-&Streett-Automaten
- Transformationsverfahren
- Komplexität von Transformationsverfahren
- Zusammenfassung & Diskussion

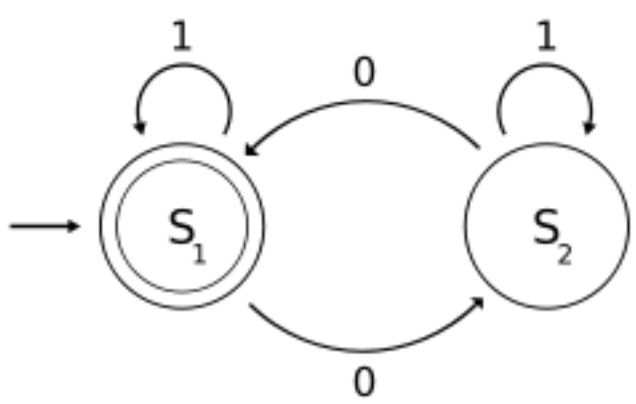
Einleitung



Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Deterministic Final Automaton

- DFA
  - Endlicher Zustandsautomat
  - Akzeptiert endliche Wörter der Regulären Sprache
  - Beispiel:

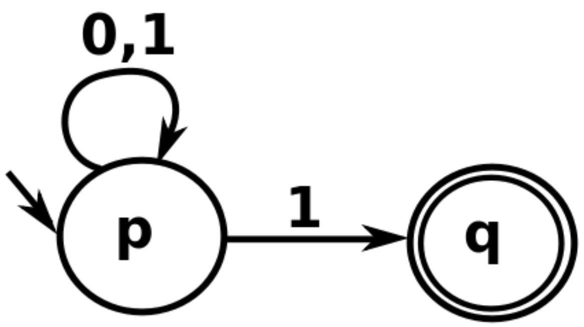


$Q = \{S_1, S_2\}$
$\Sigma = \{0, 1\}$
$q_0 = S_1$
$F = \{S_1\}$

$$1^*(\ 0\ (1^*)\ 0\ (1^*)\ )^*$$

Non-Deterministic Final Automaton

- NFA
  - Im Gegensatz zum DFA gibt es bei den Zustandsübergängen mehrere gleichwertige nicht eindeutige Möglichkeiten
  - Beispiel:



$Q = \{p, q\}$
$\Sigma = \{0, 1\}$
$q_0 = p$
$F = \{q\}$

$(0|1)^*1$

  - Ein NFA kann in einen DFA transformiert werden

Akzeptanzbedingung von DFA und NFA

Definition 5.2.3 *Ein endlicher Automat* $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *akzeptiert* $w \in \Sigma^*$*, falls* $\delta(q_0, w) \in F$. *D.h., der Automat akzeptiert* $w \in \Sigma^*$*, wenn er, gestartet im Zustand* q_0*, sich in einem Zustand aus* F *befindet, nachdem er alle Eingabesymbolen gelesen hat.*

Quelle: Endliche Automaten, FG-TI, Universität Paderborn

Einleitung

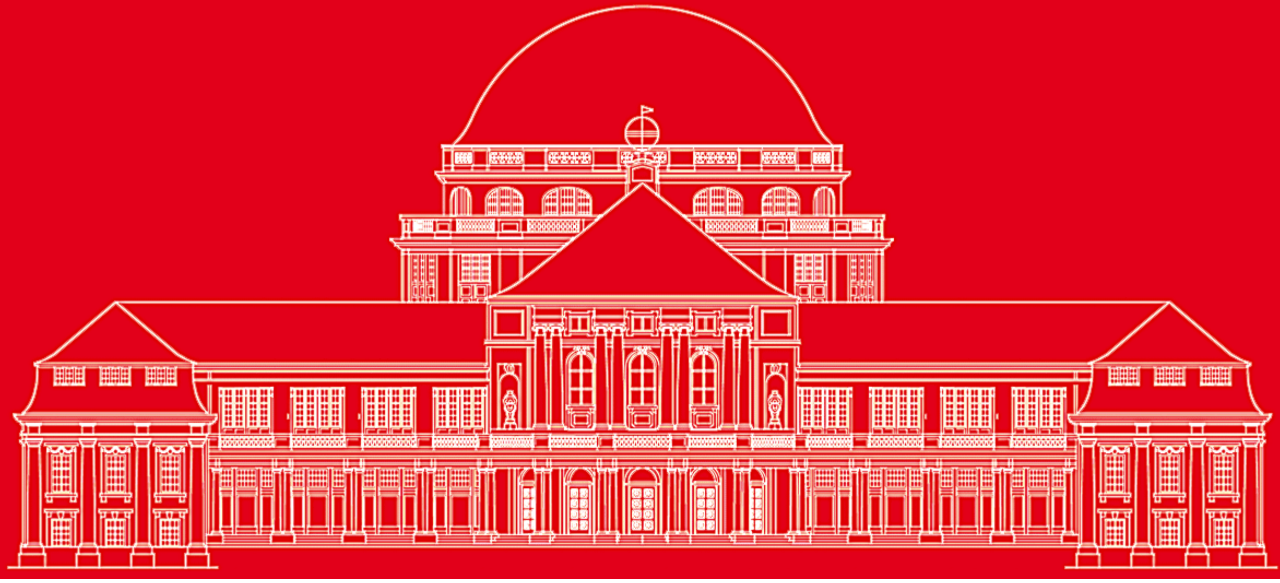
- Bisher: Automaten mit endlichen Eingaben
- Jetzt: Erweiterung für unendliche Eingaben

- Daraus ergibt sich folgende Frage:

Wann wird ein unendliches Wort akzeptiert?

UHH Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

ω-Automaten



Simon Kostede & Markku Lammerz

Allgemeine Notationen:

$\omega := \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ *(Menge nicht negativer Ganzzahlen)*

$\sum$ *(Endliches Alphabet)*

$\sum^*$ *(Menge endlicher Wörter über Σ)*

$\sum^\omega$ *(Menge unendlicher Wörter über Σ)*

$$Inf(\alpha) = \left\{ a \epsilon \sum \mid \forall i \exists j > i \alpha(j) = a \right\}$$

$$Occ(\alpha) = \left\{ a \epsilon \sum \mid \exists i \alpha(i) = a) \right\}$$

Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Büchi Automaten

Simon Kostede & Markku Lammerz

Nicht deterministischer Büchi-Automaten (Notation)

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_I, F)$$

Q Menge der Zuständen von A

Σ Eingabealphabet von A

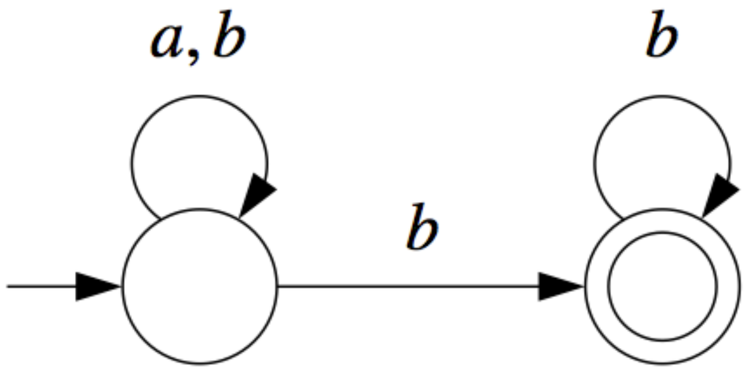
δ Untermenge von Q × Σ × Q (Zustandsübergänge von A)

q_1 Startzustände

F Endzustände

Nicht deterministische Büchi-Automaten

- Akzeptanzbedingung (Def. 1.3) $\mathrm{Inf}(\varrho) \cap F \neq \emptyset$
- Akzeptiert wenn einer der Endzustände unendlich oft besucht wird
- Theorem 1.5: (Büchi-)Automaten akzeptieren die Sprachen der ω-Kleene Hülle der regulären Sprachen
- Beispiel für L = (a + b) * b^{ω}



Deterministischer Büchi-Automaten (Notation)

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_I, F)$$

Q Menge der Zuständen von A

Σ Eingabealphabet von A

δ Untermenge von Q × Σ × Q (Zustandsübergänge von A)

q_1 Startzustände

F Endzustände

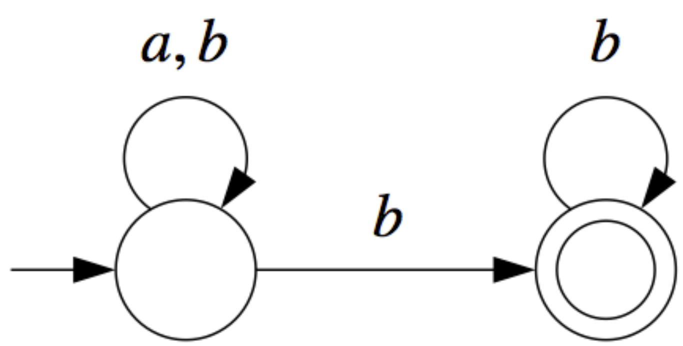
Deterministische Büchi-Automaten

- Eingeschränkt in Akzeptanzmöglichkeiten
- Menge der akzeptierten Sprachen eines DBAs ist echt kleiner als die eines NBAs
- Der NBA ist nicht überführbar in einen Deterministische Büchi-Automat (DBA)
  - Beispiel: DBA akzeptiert nicht $L = (a + b) * b^{\omega}$
- DBA ist nicht gegenüber der Komplementbildung abgeschlossen

Nichtäquivalenz zwischen NBA und DBA

- Beweis: $L = (a + b)^* b^\omega$ kann nicht Akzeptiert werden
  - *A* würde auch mit einem endlichen Präfix der Länge n_0 akzeptieren
  - daher auch $b^{n0}\, a\, b^\omega$
  - daher auch mit dem Präfix $b^{n0}\, a\, b^{n1}$
  - weiterhin auch $b^{n0}\, a\, b^{n1}\, a\, b^{n2}\, a \ldots$
  - wodurch *A* durch einen F Zustand passiert, vor jedem Buchstaben *a*, was nicht akzeptiert werden sollte

- NBA:



$L = (a + b)^* b^\omega$

Muller Automaten

Simon Kostede & Markku Lammerz

Muller-Automaten (Notation)

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_I, \mathcal{F})$$

Q Menge der Zuständen von A

Σ Eingabealphabet von A

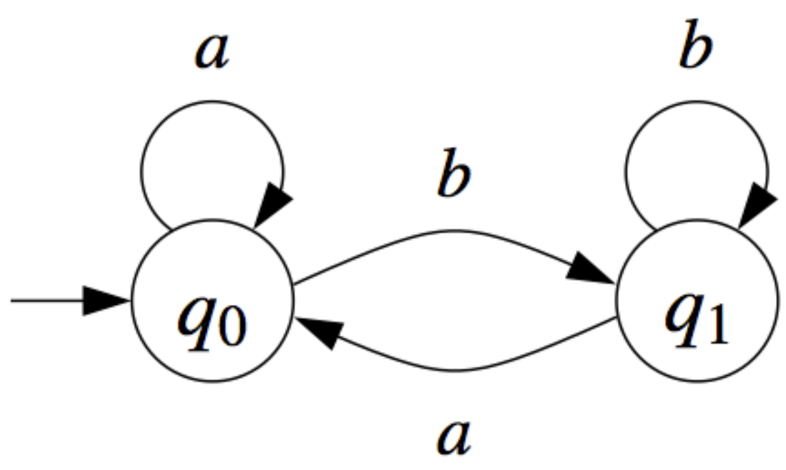
δ Untermenge von Q × Σ × Q (Zustandsübergänge von A)

q1 Startzustände

F Menge der Mengen der akzeptierenden Zustände

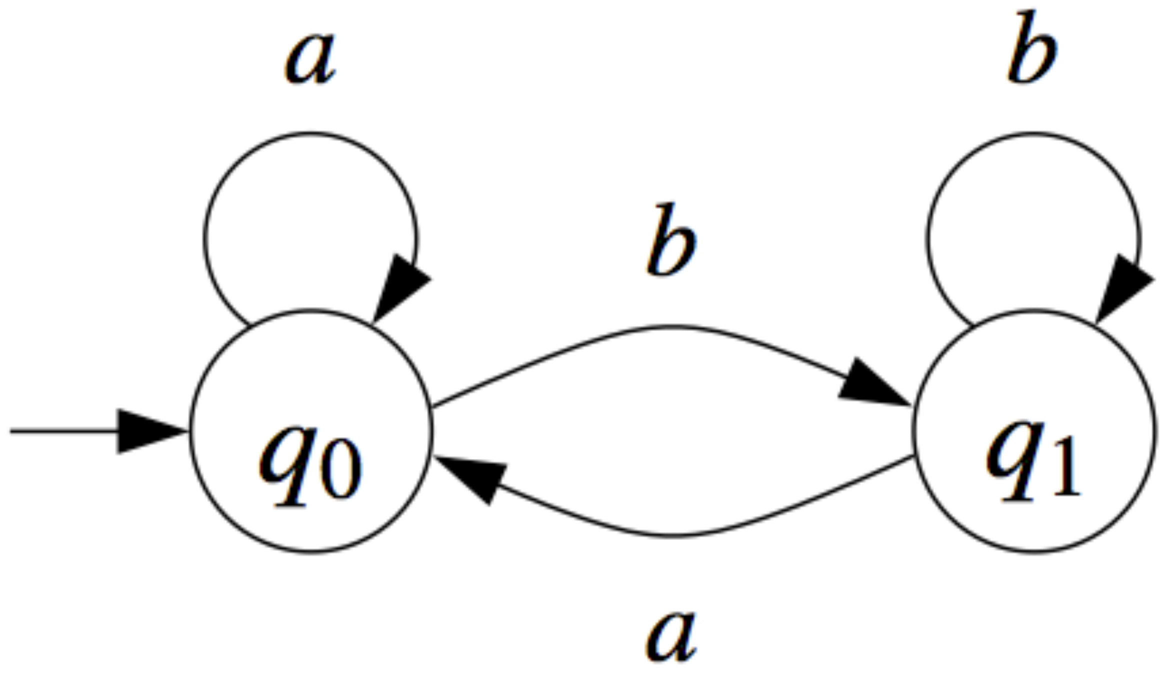
Muller Automaten

- Muller-Automaten haben die gleiche ausdrucksstärke wie Nicht deterministische Büchi-, Rabin- und Streett-Automaten
- Akzeptier wenn: $\mathrm{Inf}(\varrho) \in \mathcal{F}$
  - also Menge der unendlich oft durchlaufenden Zustände genau eine der Mengen in F ist
  - Verschärfte/Präzisere Akzeptanzbedingung gegenüber „Nicht deterministische Büchi-Automaten“ (ab jetzt: NBA)



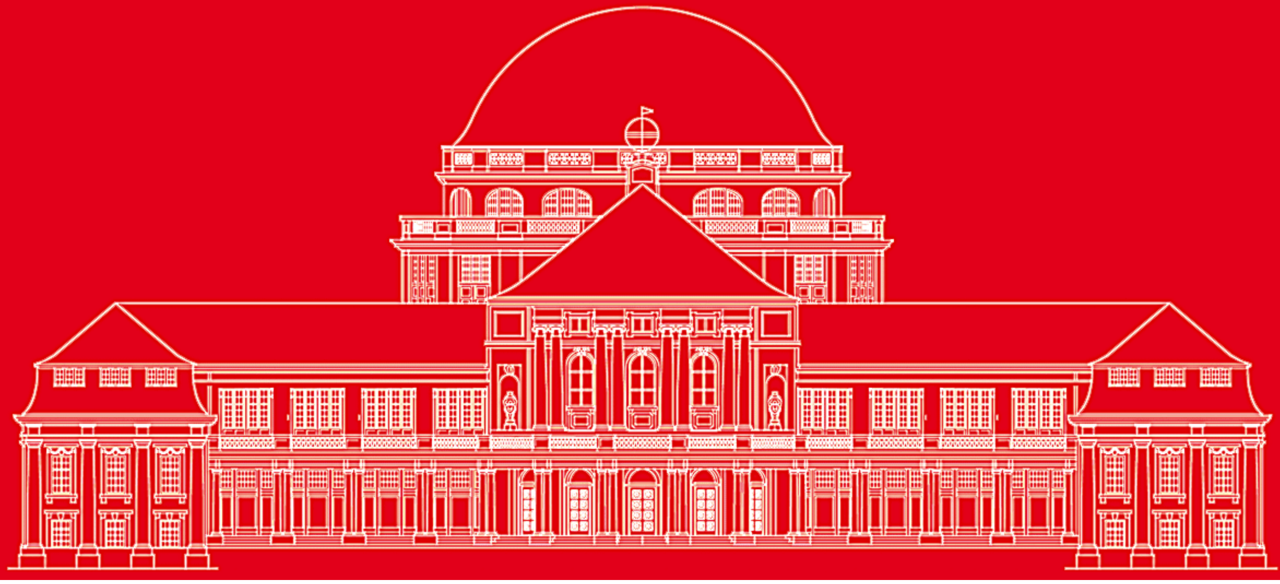
Muller Automaten

- Beispiel L = {a,b}
  - Akzeptieren Wörter die mit a^ω oder $\{ab\}^\omega$ enden
  - $F = \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}\}$



Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Rabin/Streett Automaten



Simon Kostede & Markku Lammerz

Rabin Automaten

- Rabin Akzeptanz
  - Menge an Paarweisen Zuständen
  - $F=|(F_0, E_0),\ldots,(F_m E_m)|$
  - mit F_i und E_i als Menge von Zuständen
  - akzeptiert wird wenn:

$$\exists(E,F) \in \Omega(\mathrm{In}(\varrho) \cap E = \emptyset) \wedge (\mathrm{Inf}(\varrho) \cap F \neq \emptyset).$$

    - ein Paar E, F existiert sodass, in der unendlichen Ausführung Elemente von E nicht auftaucht aber von F

- Transformation von und zu Büchi ohne exponentielle Vergrößerung

Streett Automaten

- Wie bei Rabin Paare von Zustandsmengen
  - $F = |(F_0, E_0), \ldots, (F_m E_m)|$
- Akzeptiert wenn:

$$\forall (E, F) \in \Omega \,.\, (\operatorname{Inf}(\varrho) \cap E \neq \emptyset) \vee (\operatorname{Inf}(\varrho) \cap F = \emptyset)$$

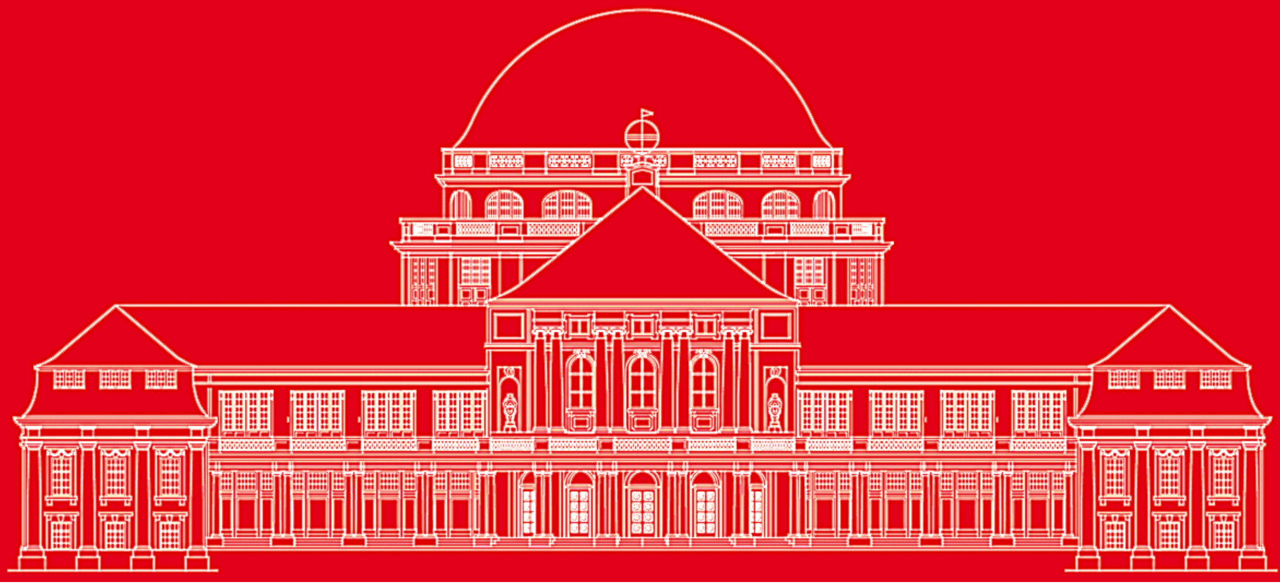
$$\text{if } \operatorname{Inf}(\varrho) \cap F \neq \emptyset \text{ then } \operatorname{Inf}(\varrho) \cap E \neq \emptyset$$

  - ein Zustand aus F unendlich oft besucht wird, dann auch ein Zustand aus E

- Akzeptiert genau dann wenn Rabin nicht akzeptiert (komplement)

Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Transformationsverfahren



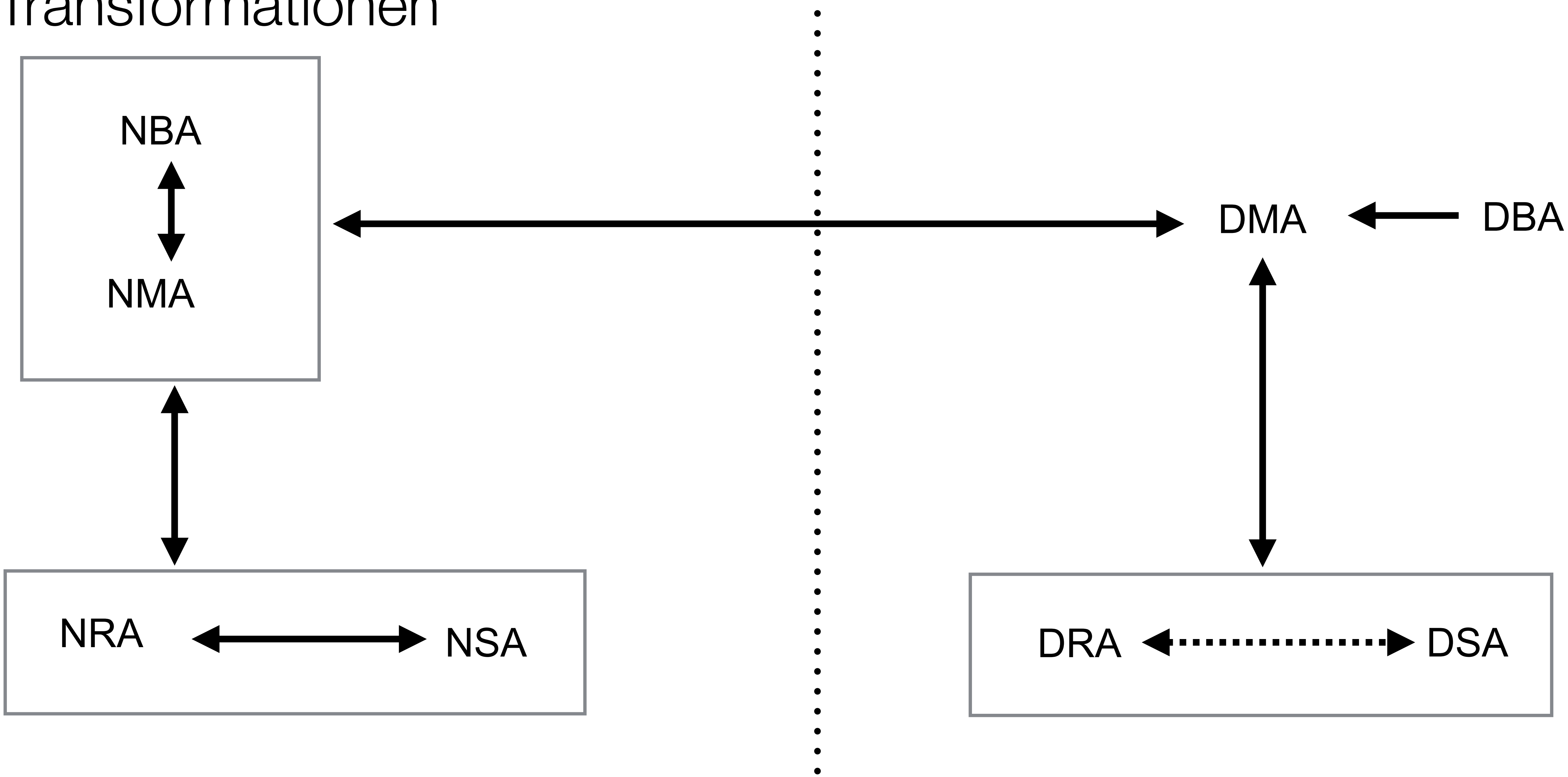
Simon Kostede & Markku Lammerz

Automaten

- Nichtdeterministische Büchi, Muller, Rabin und Streett Automaten haben die gleiche Ausdrucksstärke.
- Sie akzeptieren die gleichen ω-Sprachen, ω-KC(REG) den ω-Kleene Abschluss der regulären Sprachen
  - Gennant reguläre ω-Sprachen, ω-REG (Theorem 1.19)
- Deterministische Muller, Street und Rabin Automaten akzeptieren die gleichen ω-Sprachen.
  - Die Klasse dieser ω-Sprachen ist unterm Komplement abgeschlossen
    - (Theorem 1.24)

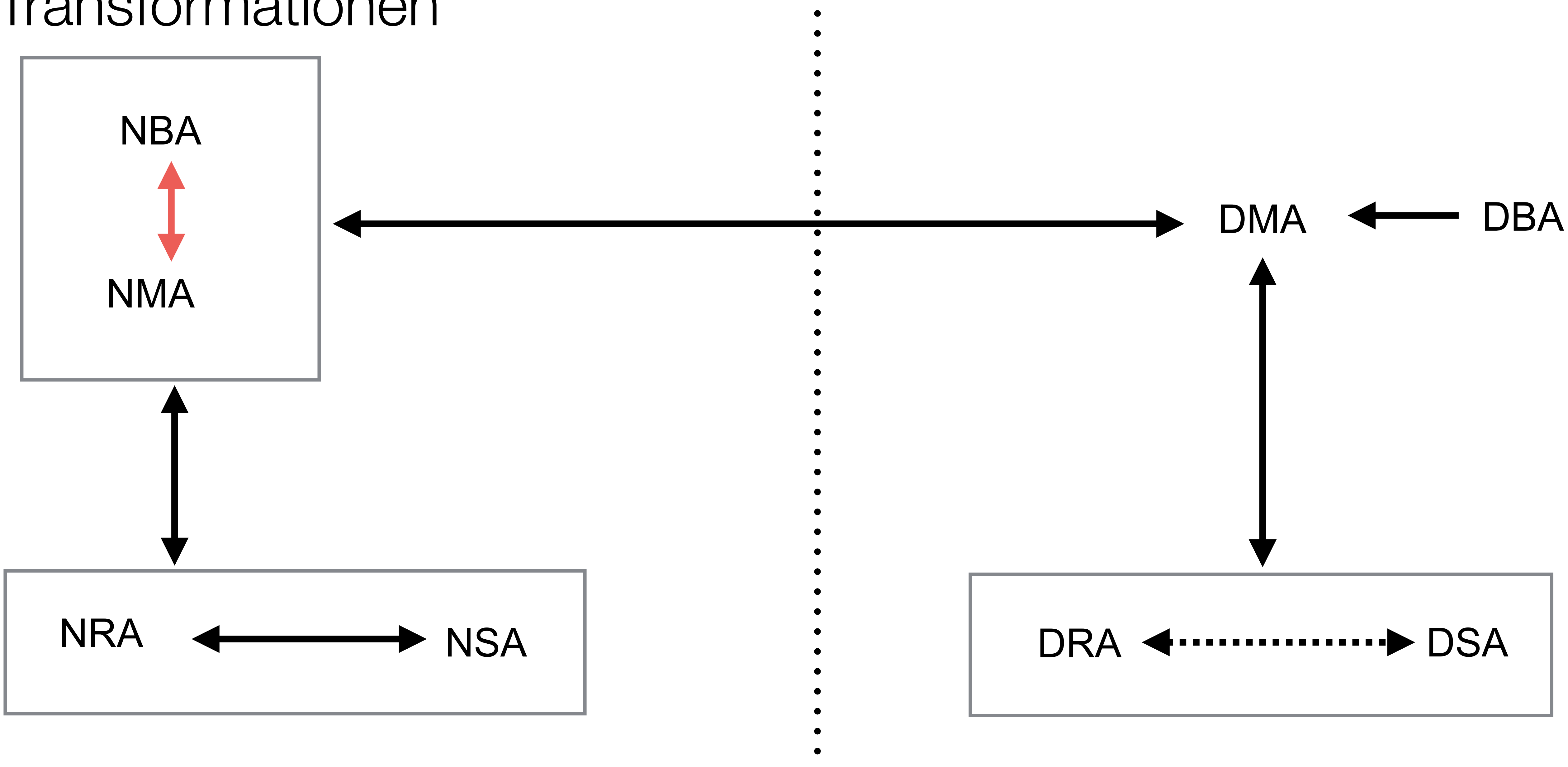
Nichtdeterminismus | Determinus

Transformationen



Nichtdeterminismus | Determinus

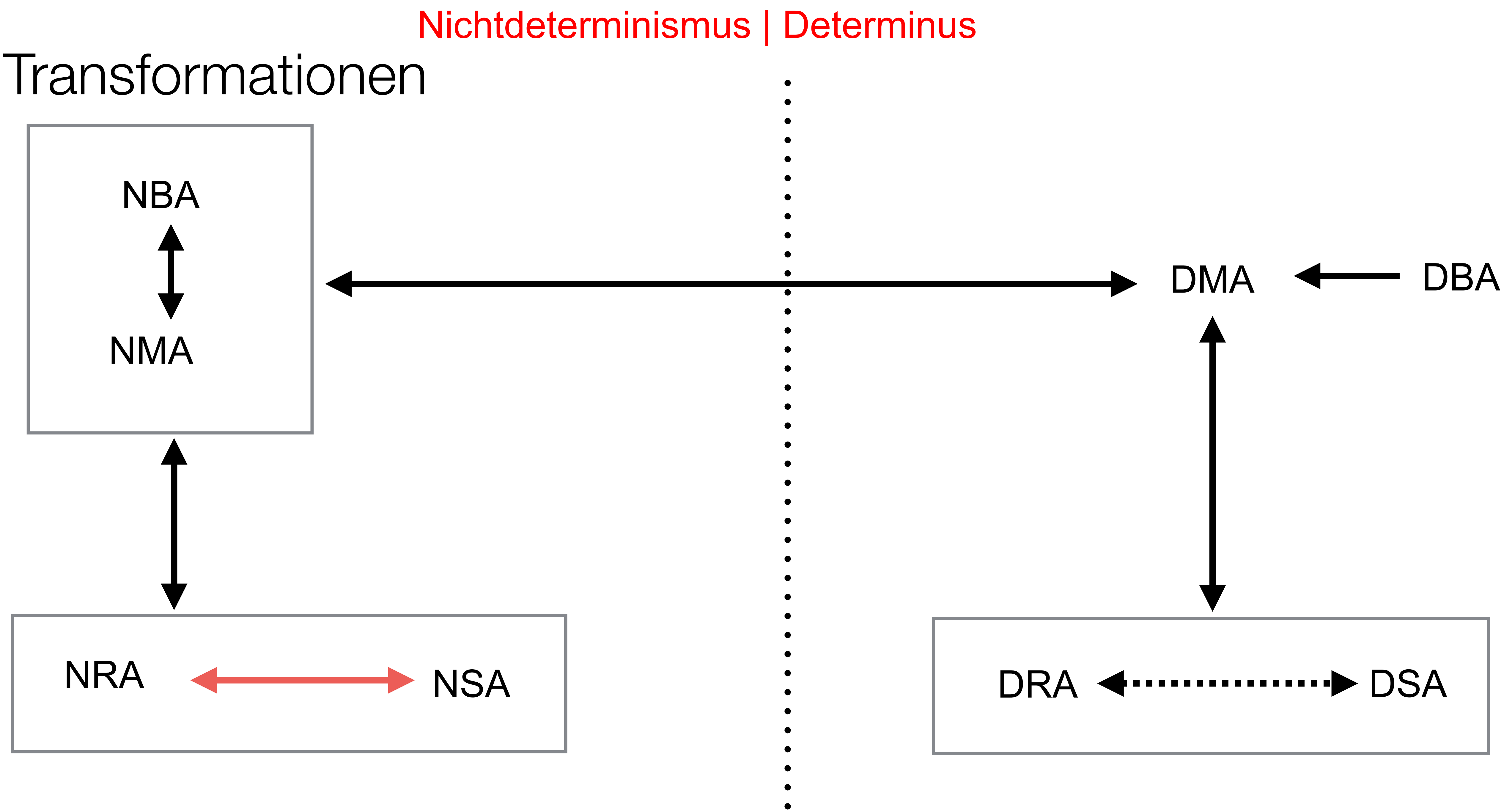
Transformationen



Transformation von NBA in NMA

- Für einen Büchi Automaten
  - $A = (Q, \Sigma, \delta, q_I, F)$ definieren wir die Zustandsmenge $\mathcal{F}$ als die Submenge von Q welche Zustände von F enthält
    - $A' = (Q,\Sigma,\delta,q_I,\mathcal{F})$ with $\mathcal{F} := \{G \in 2^Q \mid G \cap F \neq \varnothing\}$
      - Bilden der Potenzmenge G
      - Sammeln aller Zustandsmengen aus G, sodass jede Menge einen Endzustand enthält

Transformationen



Komplementbildung bei NRA & NSA

- Durch Nutzung der Definition von NRA & NSA kann das Komplement gebildet werden

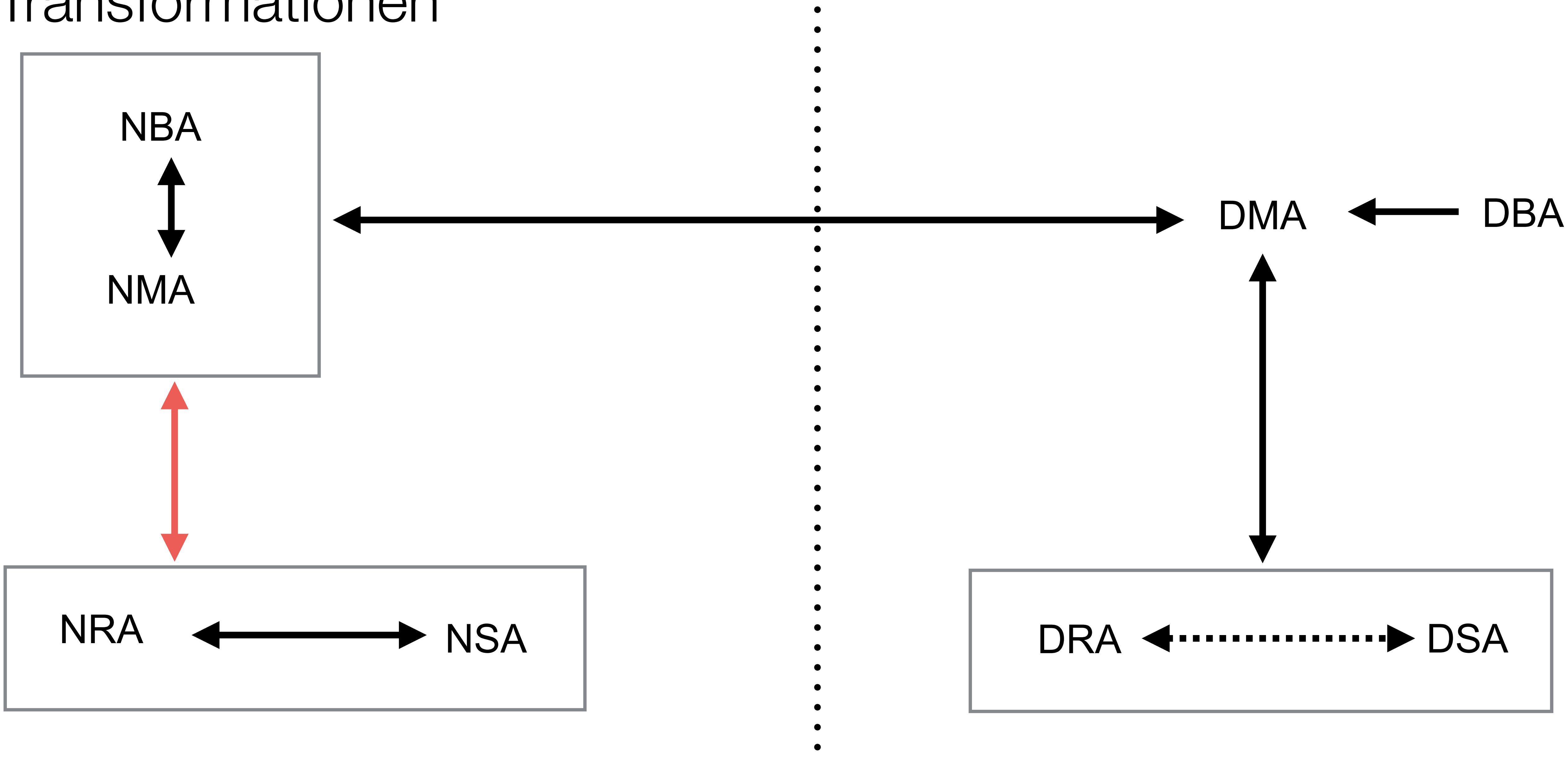
$$\exists(E,F) \in \Omega(\mathrm{In}(\varrho) \cap E = \emptyset) \wedge (\mathrm{Inf}(\varrho) \cap F \neq \emptyset).$$

$$\forall(E,F) \in \Omega\,.\,(\,\mathrm{Inf}(\varrho) \cap E \neq \emptyset) \vee (\,\mathrm{Inf}(\varrho) \cap F = \emptyset)$$

- Wenn auf einen NRA die Akzeptanzbedinung eines NSA angewendet wird, Akzeptiert dieser NSA das Komplement des NRAs

Nichtdeterminismus | Determinus

Transformationen

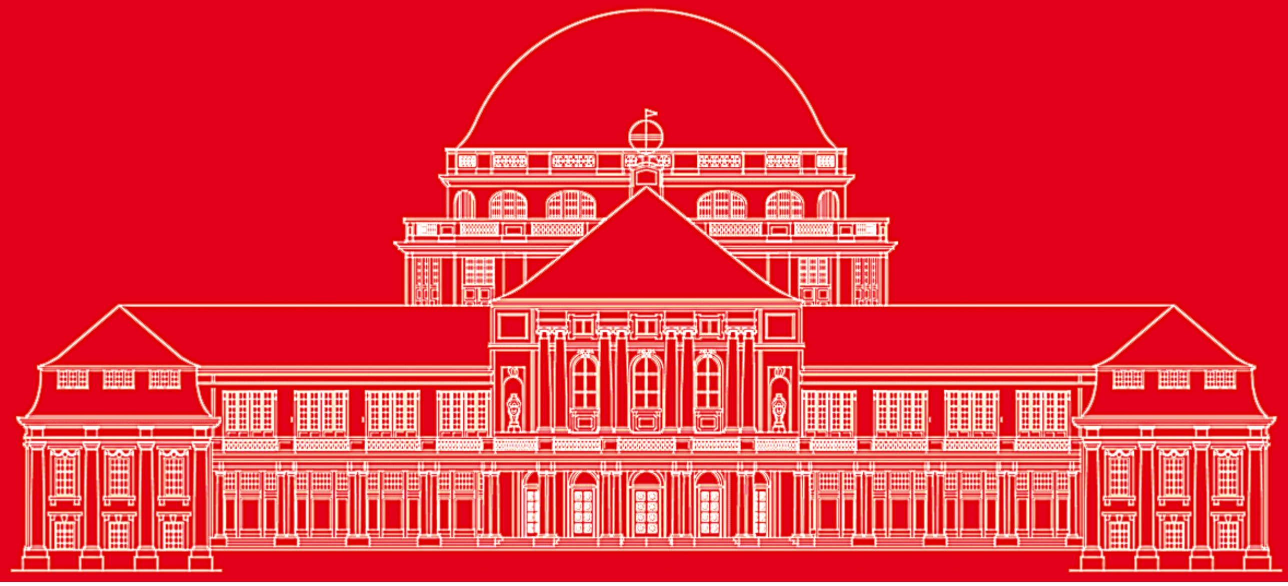


Transformation von Büchi-/Muller- ↔ Rabin-/Streett- Automaten

- Büchi -> Rabin
  - Büchi ist Sonderfall der Rabin-Akzeptanz $\Omega = \{(\emptyset, F)\}$
- Büchi -> Streett
  - Büchi ist Sonderfall der Streett-Akzeptanz $\Omega = \{(F, Q)\}$
- Rabin/Streett -> Muller
  - Alle Zustandsmengen welche die Akzeptanzbedingungen von Rabin bzw. Streett erfüllen in eine Muller-Akzeptanzmenge sammeln

Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Komplexität von Transformationen



Simon Kostede & Markku Lammerz

Komplexität von Transformationen

- Anwendungsbeispiel für die Transformation ist die Komplementbildung und Leerheitstest
  - Beispiel Netzwerkprotokolle
    - Definition in Büchi
    - Transformation in Rabin
    - Komplementbildung durch Transformation in Streett und darauf folgender Leerheitstest
- Obiges Beispiel ist besonders einfach bei Rabin & Streett somit kann Aufwand minimiert werden

Komplexität von Transformationen

- **NBA** -> **NMA**
  - Größe des NMAs |n| (Theorem 1.10)
- **NMA** -> **NBA**
  - Größe des NBAs |≤ n + mn2ⁿ| (Theorem 1.10

Theorem 1.30. *There exists a family of languages* $(L_n)_{n\geq 2}$ *over the alphabet* $\{0, 1, \#\}$ *recognizable by nondeterministic Büchi automata of size* $O(n)$ *such that any equivalent deterministic Rabin automaton must be of size* $n!$ *or larger.*

Komplexität von Transformationen

- Untere Schranke für **NBA** -> **DRA** und **DSA** <-> **DRA**
  - $2^{O(n \log n)}$
- **DMA** -> **DRA**
  - Mit |n * n!| Zuständen im DRA und mit |n| Akzeptanzpaaren
    - (Theorem 1.22)

Komplexität von Transformationen

- Transformation zwischen **DSA** & **DRA** nicht Trivial
  - Führt zu einer Zustandszunahme auf mindestens **n!**

Theorem 1.32 ([114]). *There exists a family of languages* $(L_n)_{n \geq 2}$ *over the alphabet* $\{0, 1\}$ *recognizable by deterministic Streett automata with* $O(n)$ *states and* $O(n)$ *pairs of designated state sets such that any deterministic Rabin automaton accepting* L_n *requires at least* $n!$ *states.*

Komplexität von Transformationen

- Komplexität vieler Transformationen nicht Trivial
- Transformationen oft interessant um Eigenschaften der Automaten auszunutzen
  - z.B. relativ einfache Definition von NBAs
  - z.B. einfache Komplementbildung bei Rabin & Streett

Abschluss

Aufbau des Vortrags:

- Büchi-Automaten
  - Nichtäquivalenz zwischen NBA und DBA
- Muller-Automaten
- Rabin- & Streett-Automaten
- Transformationsverfahren
  - NBA->NMA, NRA<->NSA ...
- Komplexität von Transformationsverfahren

Diskussion & Fragen

ENDE