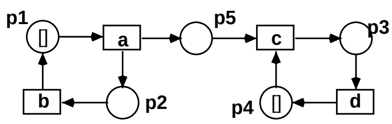
FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Aufgabenblatt 8 : Petrinetze: Invarianten, Überdeckungsgraph

Präsenzaufgabe 8.1: Überprüfe, ob das folgende Netz lebendig ist. Leider ist das Netz unbeschränkt, so dass wir den Algorithmus 3.1 nicht anwenden können, denn der konstruiert nur für beschränkte Netze den kompletten Erreichbarkeitsgraphen. Also muss Lebendigkeit auf anderem Wege nachgewiesen werden.

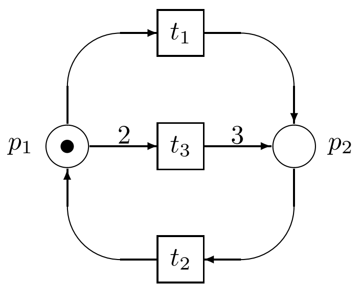


1. Zeige zunächst, dass es Invarianten i_1 und i_2 gibt, aus denen folgende Gleichungen für alle erreichbaren Markierungen m folgen (Bestimme auch die Konstanten c und c'.):

$$m(p_1) + m(p_2) = c \qquad m(p_3) + m(p_4) = c'$$

2. Zeige, dass alle erreichbaren Markierung von der folgenden Form sind: $(1, 0, 1, 0, n)$, $(1, 0, 0, 1, n)$, $(0, 1, 0, 1, n)$ oder $(0, 1, 1, 0, n)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
3. Beweise damit, dass N lebendig ist.
4. Konstruiere den Überdeckungsgraphen.
5. Beschreibe mit eigenen Worten den Hinweis zur Aufgabe 8.4.

Präsenzaufgabe 8.2: Gegeben sei das folgende P/T Netz:



1. Sei i eine S-Invariante des Netzes. Gilt dann für alle erreichbaren Markierungen m die folgende, von i abgeleitete Invariantengleichung?

$$i(p_1) \cdot m(p_1) + i(p_2) \cdot m(p_2) = const.$$

2. Zeige, dass für alle aus der Anfangsmarkierung $m_0 = (1, 0)$ erreichbaren Markierungen die folgende Invariantengleichung gilt:

$$1 \cdot m(p_1) + 1 \cdot m(p_2) = 1 \cdot m_0(p_1) + 1 \cdot m_0(p_2) = 1$$

3. Zeige, dass der zur Gleichung zugehörige Vektor $i = (1, 1)^{tr}$ jedoch *kein* Invariantenvektor ist. Erläutere die Ursachen!

Übungsaufgabe 8.3: Die Implikation im Satz von Lautenbach (Satz 3.25) kann zu einer Äquivalenz verschärft werden, wenn wir Netze ohne tote Transitionen betrachten. Hierbei heißt eine Transition tot, wenn sie von keiner erreichbaren Markierung aktiviert wird. Beweise dazu:

von 6

Sei N ein P/T-Netz ohne tote Transitionen. Gilt für alle erreichbaren Markierungen $m \in R(N, m_0)$ die Gleichung $i^{tr} \cdot m = i^{tr} \cdot m_0$, dann ist i auch eine S-Invariante.

Übungsaufgabe 8.4: Sei N ein P/T Netz und t eine Transition.

von 6

1. Zeige: Es gibt genau dann eine erreichbare Markierung m, die t aktiviert, wenn eine mit t beschriftete Kante im Überdeckungsgraphen existiert.
2. Zeige: Wenn eine Transition t fleißig ist (siehe letztes Blatt), dann existiert im Überdeckungsgraphen ein Kreis, der eine mit t beschriftete Kante enthält.

Hinweis. Sie können folgende Eigenschaft verwenden:

Sei $\bar{m}$ ein Knoten im Überdeckungsgraph, der $\bar{m}(p) = \omega$ für mehrere Plätze p erfüllt, dann ist im P/T Netz stets eine Markierung m erreichbar, die alle diese Plätze gleichzeitig *über jede Schranke n bringt:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in R(N, \bar{m}_0) : m \leq_\omega \bar{m} \land (\forall p \in P : \bar{m}(p) = \omega \Longrightarrow m(p) \geq n)$$

Hierbei besagt $m_1 \leq_\omega m_2$, dass die beiden Markierungen in allen endlichen Markierungen gleich sind:

$$m_1 \leq_\omega m_2 \iff \forall p \in P : m_1(p) = m_2(p) \lor m_2(p) = \omega,$$