FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Aufgabenblatt 10: Prozeßalgebra: BPA, Normalformen

Präsenzaufgabe 10.1: Betrachten Sie die folgenden Prozessausdrücke:

$$\begin{aligned} t_1 &= a((b+b)d) + (ab)c + (ab)(d+d) \\ t_2 &= (ab + (a+a)b)(d+d) + a(bc) \end{aligned}$$

1. Konstruieren Sie für die Prozessausdrücke jeweils den Prozessgraphen!
2. Identifizieren Sie alle bisimilaren Knoten in den beiden Prozessgraphen.
3. Sind t_1 und t_2 bisimilar?
4. Konstruieren Sie für t_2 aus der vorigen Präsenzaufgabe die Ableitungen so vieler Zustandsübergänge mit der Aktion a wie möglich! Geben Sie die jeweils verwendete Ableitungsregel und die Variableninstanziierung an!

Präsenzaufgabe 10.2: BPA-Algebren. In der Vorlesung wird jeder BPA-Term t durch das ihm zugeordnete Transitionssystem $TS(t)$ interpretiert. Dies ist aber natürlich nur eine Möglichkeit.

1. Angenommen wir interpretieren Prozessterme nicht durch Prozessgraphen, sondern durch die rationalen Zahlen, wobei $x + y$ wie üblich die Summe und $x \cdot y$ das Produkt beschreibt. Anstelle von Bisimilarität verwenden wir die arithmetische Gleichheit der ausgerechneten Ausdrücke.

   Ist diese Algebra $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ auch eine BPA-Algebra, d.h. gelten alle Axiome des BPA-Kalküls?
2. Angenommen wir interpretieren BPA-Terme t (ähnlich wie bei regulären Ausdrücken) als Teilmengen von A^*: Jede atomare Aktion $a \in A$ wird als die Menge $M_a := \{a\}$ interpretiert, der Term $x + y$ als die Vereinigung $M_x \cup M_y$ und $x \cdot y$ als das Komplexprodukt $M_x \circ M_y$.

   Ist diese Algebra $(2^{A^*}, \cup, \circ)$ auch eine BPA-Algebra?
3. Ist der BPA-Kalkül vollständige Axiomatisierung der Gleicheit $=$ in der Algebra $(2^{A^*}, \cup, \circ)$?

Übungsaufgabe 10.3:

von 6

1. Konstruiere den Prozeßgraphen zu $t_3 = (a + a)(bd + b(c + c))$.
2. Konstruieren Sie die Normalform zu t_3. Geben Sie die verwendeten Reduktionsregeln explizit an!
3. Beweisen Sie im BPA-Kalkül, dass $t_3 = t_4$ für $t_4 = a((b + b)d + (b + b)c)$ gilt. Geben Sie die verwendeten Axiome/Schlußregeln an.
4. Beweisen Sie, dass $t_3 = t_5$ für $t_5 = (((a + a)b)d) + a(bc)$ *nicht* gilt.
5. Beweise: Für jeden BPA-Term t ist der Prozessgraph zu t endlich.

Übungsaufgabe 10.4: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der BPA-Kalkül sowohl vollständig (Satz 5.10: $t_1 \underline{\leftrightarrow} t_2 \Longrightarrow t_1 = t_2$) als auch korrekt ist (Satz 5.8: $t_1 = t_2 \Longrightarrow t_1 \underline{\leftrightarrow} t_2$). Sie können dies verweden, um Folgendes zu zeigen:

von 6

1. Zeigen Sie, dass zwei Terme t und t', deren Normalformen AC-äquivalent sind, bisimilar sind (formal: $n(t) =_{AC} n(t') \implies t \underline{\leftrightarrow} t'$).
2. Zeigen Sie, dass zwei Terme, deren Normalformen nicht AC-äquivalent sind, nicht bisimilar sind (formal: $n(t) \neq_{AC} n(t') \implies t \not\underline{\leftrightarrow} t'$). Geben Sie dazu folgende Teilbeweise an:
   - Erzeugen der Normalform $n(t)$ erhält die Gleichheit: $t_1 = t_2 \Longrightarrow n(t_1) = n(t_2)$.
   - Normalformen zeichnen sich aus, dass nur noch Umformungen mit AC möglich sind: $n(t_1) = n(t_2) \iff n(t_1) =_{AC} n(t_2)$
   - Mithilfe der ersten beiden Teilbeweise lässt sich nun die Behauptung zeigen.
3. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass jeder BPA-Term genau eine Normalform hat (modulo AC), und dass die nichtdeterministische Wahl der Reduktionsregel keine Auswirkung auf das Endergebnis hat.

   Wir wollen uns das an einem Beispiel klarmachen, indem wir das Transitionssystem konstruieren, das alle möglichen Reduktionen von $t = (a((b + (b + c))d))$ enthält. Geben Sie bei jeder Reduktion die verwendete Reduktionsregel (inkl. der Substitution) an.

   Zeigen Sie, dass dieses Transitionssystem genau einen Zustand besitzt, aus dem keine Kante mehr führt und dass dieser die Normalform ist. Verwenden sie *keine* Klammersparregeln.

   Hinweis: Terme, die AC-äquivalent sind, sollen als *ein* Knoten dargestellt werden. Führen Sie dennoch in diesem Knoten sämtliche äquivalenten Terme auf, damit Sie keine Reduktionsmöglichkeit übersehen.