Rekursion und Abstraktion

Bislang wurden nur Prozesse endlicher Länge spezifiziert. Unendliche Prozesse, wie z.B. der Prozess *ababab*... mit dem Transitionssystem von Abb. 2 werden durch Rekursion definiert.

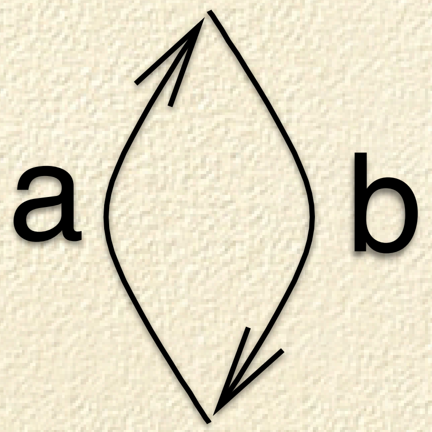


Abbildung 2: Transitionssystem für abab...

Konkret geschiet dies z.B. durch das folgende *rekursive Gleichungssystem* :

$$\begin{array}{rcl} X & = & aY \\ Y & = & bX \end{array}$$

Dabei sind X und Y *Rekursionsvariable*, die zwei Zustände des Prozesses representieren.

Definition 5.23 *Eine* **rekursive Spezifikation** *ist eine Menge von Gleichungen der Form:*

$$\begin{aligned} X_1 &= t_1(X_1, \ldots, X_n) \\ &\vdots \\ X_n &= t_n(X_1, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} X &= aY \\ Y &= bX \end{aligned}}$$

wobei $t_i(X_1, \ldots, X_n)$ Prozessterme des Kalküls ACP mit (möglichen) freien Variablen $X_1, \ldots, X_n$ sind.

Definition 5.24 *Prozesse* $p_1, \ldots, p_n$ *werden als eine* Lösung *einer rekursiven Spezifikation*

$$\{X_i = t_i(X_1, \ldots, X_n) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

modulo Bisimulations-Äquivalenz bezeichnet, falls $p_i \underline{\leftrightarrow} t_i(p_1, \ldots, p_n)$ *for* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *gilt.*

Bemerkung:

Mit den Prozessen $p_1, \ldots, p_n$ sind hier ihre Prozessgraphen gemeint. Damit dann der Ausdruck $t_i(p_1, \ldots, p_n)$ Sinn ergibt, verstehen wir die Operationen $+$ und $\cdot$ auch als Operationen auf Prozessgraphen.

Definition 5.24 *Prozesse* $p_1, \ldots, p_n$ *werden als eine* Lösung *einer rekursiven Spezifikation*

$$\{X_i = t_i(X_1, \ldots, X_n) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

modulo Bisimulations-Äquivalenz bezeichnet, falls $p_i \underline{\leftrightarrow} t_i(p_1, \ldots, p_n)$ *for* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *gilt.*

Definition 5.24 *Prozesse* $p_1, \ldots, p_n$ *werden als eine* Lösung *einer rekursiven Spezifikation*

$$\{X_i = t_i(X_1, \ldots, X_n) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

modulo Bisimulations-Äquivalenz bezeichnet, falls $p_i \leftrightarrow t_i(p_1, \ldots, p_n)$ *for* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *gilt.*

Wir wollen, dass Lösungen eindeutig bezüglich Bisimulations-Äquivalenz sind, d.h. falls $p_1, \ldots, p_n$ und $q_1, \ldots, q_n$ zwei solche Lösungen sind, dann erwarten wir $p_i \leftrightarrow q_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Dies muss aber nicht für jede Spezifikation der Fall sein.

Beispiel 5.14

a) $X = X$ hat alle Prozesse als Lösung

Beispiel 5.14

a) $X = X$ hat alle Prozesse als Lösung

b) Alle Prozesse p mit $p \xrightarrow{a} \surd$ sind Lösungen von der rekursiven Spezifikation $\{X = a + X\}$.

Beispiel 5.14

a) $X = X$ hat alle Prozesse als Lösung

b) Alle Prozesse p mit $p \xrightarrow{a} \surd$ sind Lösungen von der rekursiven Spezifikation $\{X = a + X\}$.

Beispiel:

Beispiel 5.14

a) $X = X$ hat alle Prozesse als

denn für X = a + x + y gilt:
a + x + y = a + (a + x + y)

b) Alle Prozesse p mit $p \xrightarrow{a} \surd$ sind Lösungen von der rekursiven Spezifikation $\{X = a + X\}$.

Beispiel:

denn für X = a + x + y gilt:
a + x + y = a + (a + x + y)

Beispiel 5.14

a) $X = X$ hat alle Prozesse als

b) Alle Prozesse p mit $p \xrightarrow{a} \surd$ sind Lösungen von der rekursiven Spezifikation $\{X = a + X\}$.

c) Alle nichtterminierende Prozesse sind Lösungen von der rekursiven Spezifikation $\{X = Xa\}$.

Wednesday, January 5, 2011

Beispiel:

denn für X = a + x + y gilt:
a + x + y = a + (a + x + y)

Beispiel 5.14

a) $X = X$ hat alle Prozesse als

b) Alle Prozesse p mit $p \xrightarrow{a} \surd$ sind Lösungen von der rekursiven Spezifikation $\{X = a + X\}$.

c) Alle nichtterminierende Prozesse sind Lösungen von der rekursiven ifikation $\{X = Xa\}$.

denn für X = bbbb... gilt:
X = X a

Beispiel:

Beispiel 5.14

a) $X = X$ hat alle Prozesse als

denn für X = a + x + y gilt:
a + x + y = a + (a + x + y)

b) Alle Prozesse p mit $p \xrightarrow{a} \surd$ sind Lösungen von der rekursiven Spezifikation $\{X = a + X\}$.

c) Alle nichtterminierende Prozesse sind Lösungen von der rekursiven ifikation $\{X = Xa\}$.

denn für X = bbbb... gilt:
X = X a

X z.B. definiert
durch X = b X

Wednesday, January 5, 2011

d) $\{X = aY, Y = bX\}$ hat als einzige Lösung $\{X \underline{\leftrightarrow} abab\ldots\}$ und $\{Y \underline{\leftrightarrow} baba\ldots\}$.

d) $\{X = aY, Y = bX\}$ hat als einzige Lösung $\{X \underline{\leftrightarrow} abab\ldots\}$ und $\{Y \underline{\leftrightarrow} baba\ldots\}$.

e) $\{X = Y, Y = aX\}$ hat als einzige Lösung $\{X \underline{\leftrightarrow} aaaa\ldots\}$ und $\{Y \underline{\leftrightarrow} aaaa\ldots\}$.

"Einzig" bzw. "zwei verschiedene" ist hier jeweils modulo Bisimulation zu verstehen.

Definition 5.26 *Eine rekursive Spezifikation*

$$\{X_i = t_i(X_1, \ldots, X_n) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

heißt geschützt (guarded) *falls die rechten Seiten ihrer Gleichungen in folgende Form*

$$a_1 \cdot s_1(X_1, \ldots, X_n) + \cdots + a_k \cdot s_k(X_1, \ldots, X_n)$$
$$+ b_1 + \cdots + b_\ell$$

überführt werden können, indem die Axiome des Kalküls ACP benutzt werden.

überführt werden können, indem die Axiome des Kalküls ACP benutzt werden. Außerdem dürfen bei dieser Umformung Variable einer Rekursionsgleichung durch die entsprechende rechte Seite ersetzt werden.

überführt werden können, indem die $\boxed{\textit{Axiome}}$ *des Kalküls ACP benutzt werden. Außerdem dürfen bei dieser Umformung Variable einer* $\boxed{\textit{Rekursionsgleichung}}$ *durch die entsprechende rechte Seite ersetzt werden.*

Eine rekursive Spezifikation ist genau dann $\boxed{\text{eindeutig}}$ (modulo Bisimulation), wenn sie geschützt ist. Z.B. sind einige der rekursiven Spezifikationen von Beispiel 5.25 nicht geschützt.

Beispiel 5.27 Sei $\gamma(a,b) \equiv c$ und $\gamma(b,b) \equiv c$.
$\{X{=}Y \| Z,\ Y{=}Z + a,\ Z{=}bZ\}$ ist geschützt, denn:

Beispiel 5.27 Sei $\gamma(a,b) \equiv c$ und $\gamma(b,b) \equiv c$.
$\{X{=}Y \| Z,\ Y{=}Z + a,\ Z{=}bZ\}$ ist geschützt, denn:

- $Z{=}bZ$ hat schon die gewünschte Form.

Beispiel 5.27 Sei $\gamma(a, b) \equiv c$ und $\gamma(b, b) \equiv c$.
$\{X{=}Y \| Z,\ Y{=}Z + a,\ Z{=}bZ\}$ ist geschützt, denn:

- $Z{=}bZ$ hat schon die gewünschte Form.
- $Y{=}Z + a$ wird transformiert, indem Z durch bZ ersetzt wird.

Beispiel 5.27 Sei $\gamma(a,b) \equiv c$ und $\gamma(b,b) \equiv c$.
$\{X{=}Y\|Z,\ Y{=}Z+a,\ Z{=}bZ\}$ ist geschützt, denn:

- $Z{=}bZ$ hat schon die gewünschte Form.
- $Y{=}Z+a$ wird transformiert, indem Z durch bZ ersetzt wird.
- $X{=}Y\|Z$ wird transformiert, indem Y durch $bZ+a$ und Z durch bZ ersetzt wird und der so erhaltene Term $(bZ+a)\|bZ$ mittels der Axiome transformiert wird:

$$(bZ+a)\|bZ$$

Beispiel 5.27 Sei $\gamma(a,b) \equiv c$ und $\gamma(b,b) \equiv c$.
$\{X{=}Y\|Z,\ Y{=}Z+a,\ Z{=}bZ\}$ ist geschützt, denn:

- $Z{=}bZ$ hat schon die gewünschte Form.
- $Y{=}Z+a$ wird transformiert, indem Z durch bZ ersetzt wird.
- $X{=}Y\|Z$ wird transformiert, indem Y durch $bZ+a$ und Z durch bZ ersetzt wird und der so erhaltene Term $(bZ+a)\|bZ$ mittels der Axiome transformiert wird:

$$\begin{aligned}
& (bZ+a)\|bZ \\
= \ & (bZ+a) \mathbin{⌊\!⌊} bZ + bZ \mathbin{⌊\!⌊} (bZ+a) + (bZ+a)|bZ \\
= \ & bZ \mathbin{⌊\!⌊} bZ + a \mathbin{⌊\!⌊} bZ + bZ \mathbin{⌊\!⌊} (bZ+a) + bZ|bZ + a|bZ \\
= \ & b(Z\|bZ) + abZ + b(Z\|(bZ+a)) + c(Z\|Z) + cZ
\end{aligned}$$

Definition 5.28 *Für eine geschützte rekursive Spezifikation E:*

$$\{X_i = t_i(X_1, \ldots, X_n) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

soll nun

$$\langle X_i | E \rangle \qquad\qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$$

die Lösung X_i in E bedeuten.

Transitionsregeln für Rekursion

$$\frac{t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle) \xrightarrow{v} \surd}{\langle X_i|E\rangle \xrightarrow{v} \surd}$$

$$\frac{t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle) \xrightarrow{v} y}{\langle X_i|E\rangle \xrightarrow{v} y}$$

d.h.: $\langle X_i|E\rangle$ übernimmt das Verhalten von $t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle)$:

Transitionsregeln für Rekursion

$\boxed{\langle X_i | E \rangle =}$

$$\frac{t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle) \xrightarrow{v} \surd}{\langle X_i|E\rangle \xrightarrow{v} \surd}$$

$$\frac{t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle) \xrightarrow{v} y}{\langle X_i|E\rangle \xrightarrow{v} y}$$

d.h.: $\langle X_i|E\rangle$ übernimmt das Verhalten von $t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle)$:

Transitionsregeln für Rekursion

$$\boxed{\langle X_i|E\rangle =} \quad \frac{t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle) \xrightarrow{v} \surd}{\langle X_i|E\rangle \xrightarrow{v} \surd}$$

$$\boxed{\langle X_i|E\rangle =} \quad \frac{t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle) \xrightarrow{v} y}{\langle X_i|E\rangle \xrightarrow{v} y}$$

d.h.: $\langle X_i|E\rangle$ übernimmt das Verhalten von $t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle)$:

Beispiel 5.29 Sei E die geschützte rekursive

Spezifikation $\{X{=}aY,\ Y{=}bX\}$. Der Prozessgraph von $\langle X|E\rangle$ ist:

$$\begin{tikzcd} \langle X|E\rangle \arrow[d, bend left, "a"] \\ \langle Y|E\rangle \arrow[u, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

Beispiel 5.29 Sei E die geschützte rekursive Spezifikation $\{X{=}aY,\ Y{=}bX\}$. Der Prozessgraph von $\langle X|E\rangle$ ist:

$$\begin{tikzcd}
\langle X|E\rangle \arrow[d, bend left, "a"] \\
\langle Y|E\rangle \arrow[u, bend left, "b"]
\end{tikzcd}$$

Wir leiten her: $\langle X|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle$:

Wir leiten her: $\langle X|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle$:

$\{X = aY,\ Y = bX\}$

$$\begin{tikzcd}
\langle X|E\rangle \arrow[d, bend left, "a"] \\
\langle Y|E\rangle \arrow[u, bend left, "b"]
\end{tikzcd}$$

Wir leiten her: $\langle X|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle$:

$$a \xrightarrow{a} \surd \qquad\qquad \frac{}{v \xrightarrow{v} \surd}$$

$\{X{=}aY,\ Y{=}bX\}$

$$\begin{tikzcd} \langle X|E\rangle \arrow[d, bend left, "a"] \\ \langle Y|E\rangle \arrow[u, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

Wir leiten her: $\langle X|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle$:

$$\{X{=}aY,\ Y{=}bX\}$$

$$\begin{tikzcd} \langle X|E\rangle \arrow[d, bend left, "a"] \\ \langle Y|E\rangle \arrow[u, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

$$a \xrightarrow{a} \surd \qquad \frac{}{v \xrightarrow{v} \surd}$$

$$a \cdot \langle Y|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle \qquad \frac{x \xrightarrow{v} \surd}{x \cdot y \xrightarrow{v} y} \qquad v := a, \quad x := a, \quad y := \langle Y|E\rangle$$

$$\{X = aY,\ Y = bX\}$$

$$\begin{tikzcd} \langle X|E\rangle \arrow[d, bend left, "a"] \\ \langle Y|E\rangle \arrow[u, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

Wir leiten her: $\langle X|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle$:

$$a \xrightarrow{a} \surd \qquad \frac{}{v \xrightarrow{v} \surd}$$

$$a \cdot \langle Y|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle \qquad \frac{x \xrightarrow{v} \surd}{x \cdot y \xrightarrow{v} y} \qquad v := a, \quad x := a, \quad y := \langle Y|E\rangle$$

$$\langle X|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle \qquad \frac{a \cdot \langle Y|E\rangle \xrightarrow{v} y}{\langle X|E\rangle \xrightarrow{v} y} \qquad v := a, \quad y := \langle Y|E\rangle$$

Wir leiten her: $\langle X|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle$:

$$\{X = \boxed{aY},\ Y = bX\}$$

$$\begin{tikzcd} \langle X|E\rangle \arrow[d, bend left, "a"] \\ \langle Y|E\rangle \arrow[u, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

$$a \xrightarrow{a} \surd \qquad \frac{}{v \xrightarrow{v} \surd}$$

$$a \cdot \langle Y|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle \qquad \frac{x \xrightarrow{v} \surd}{x \cdot y \xrightarrow{v} y} \qquad v := a, \quad x := a, \quad y := \langle Y|E\rangle$$

$$\langle X|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle \qquad \frac{\boxed{a \cdot \langle Y|E\rangle} \xrightarrow{v} y}{\langle X|E\rangle \xrightarrow{v} y} \qquad v := a, \quad y := \langle Y|E\rangle$$

$\{\boxed{X} = \boxed{aY},\ Y = bX\}$

$$\begin{tikzcd} \langle X|E\rangle \arrow[d, bend left, "a"] \\ \langle Y|E\rangle \arrow[u, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

Wir leiten her: $\langle X|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle$:

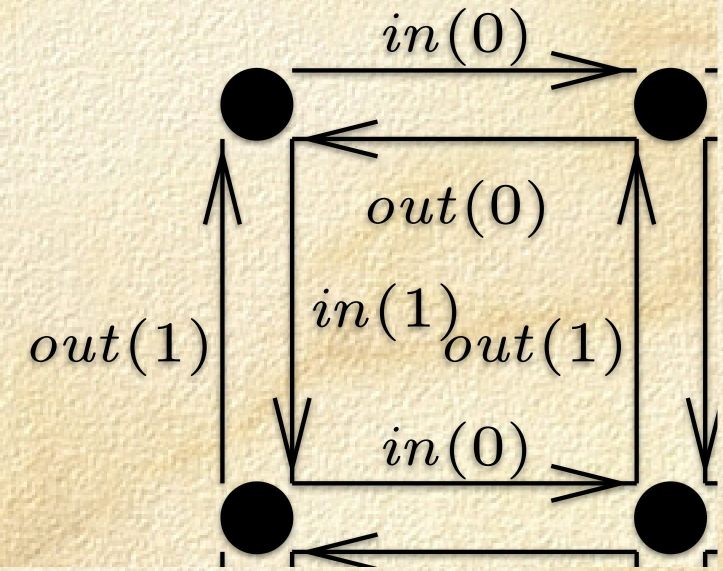
$$a \xrightarrow{a} \surd \qquad \frac{}{v \xrightarrow{v} \surd}$$

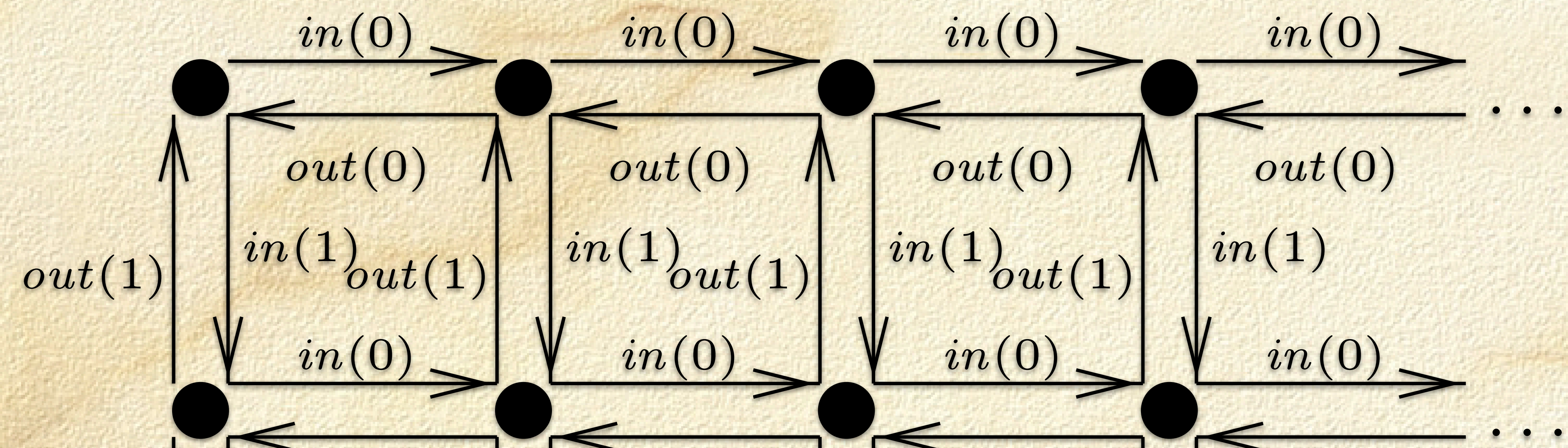
$$a \cdot \langle Y|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle \qquad \frac{x \xrightarrow{v} \surd}{x \cdot y \xrightarrow{v} y} \qquad v := a, \quad x := a, \quad y := \langle Y|E\rangle$$

$$\langle X|E\rangle \xrightarrow{a} \langle Y|E\rangle \qquad \frac{\boxed{a \cdot \langle Y|E\rangle} \xrightarrow{v} y}{\boxed{\langle X|E\rangle} \xrightarrow{v} y} \qquad v := a, \quad y := \langle Y|E\rangle$$

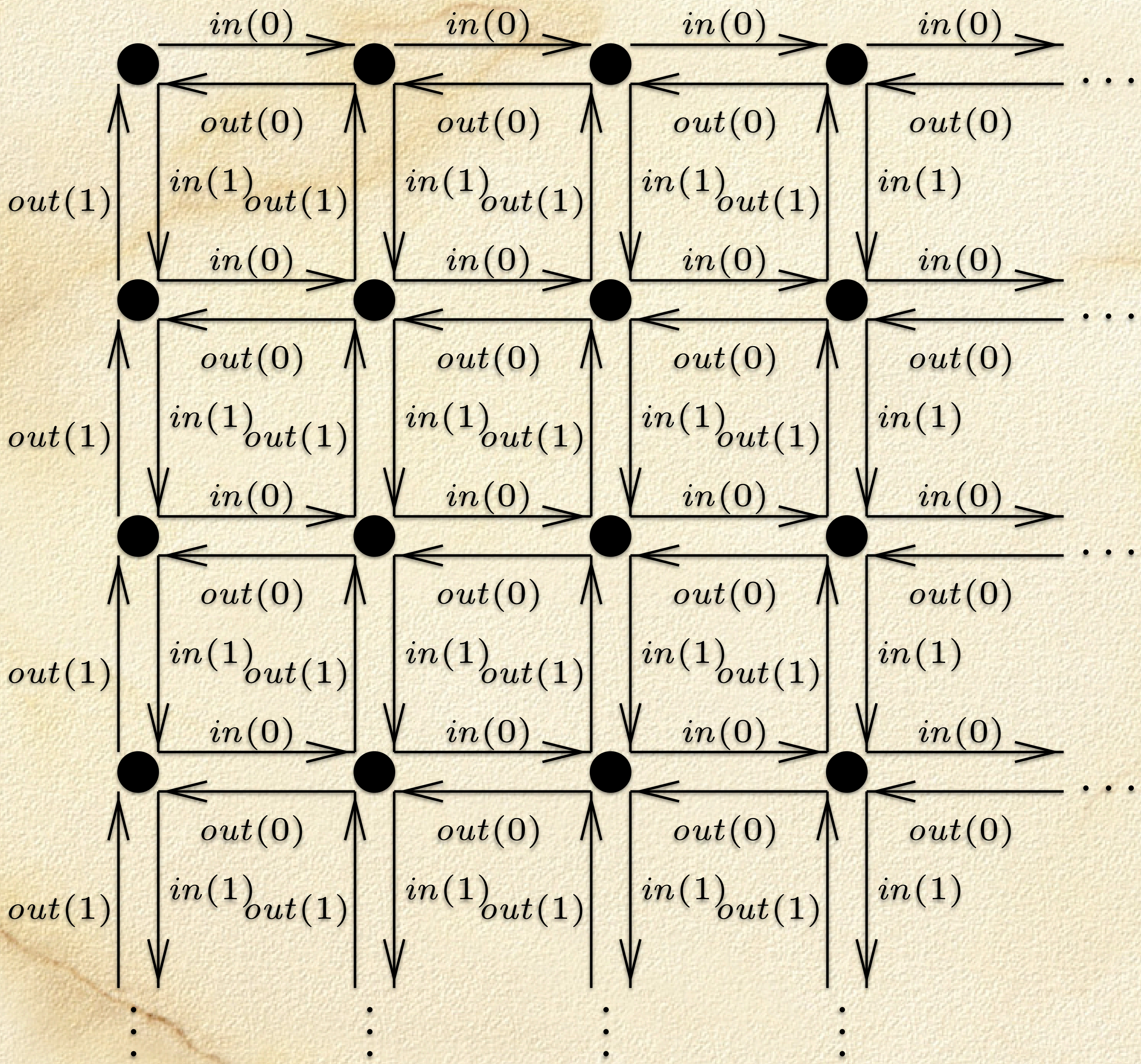
Beispiel 5.31 Multimenge (bag) über $\{0, 1\}$.

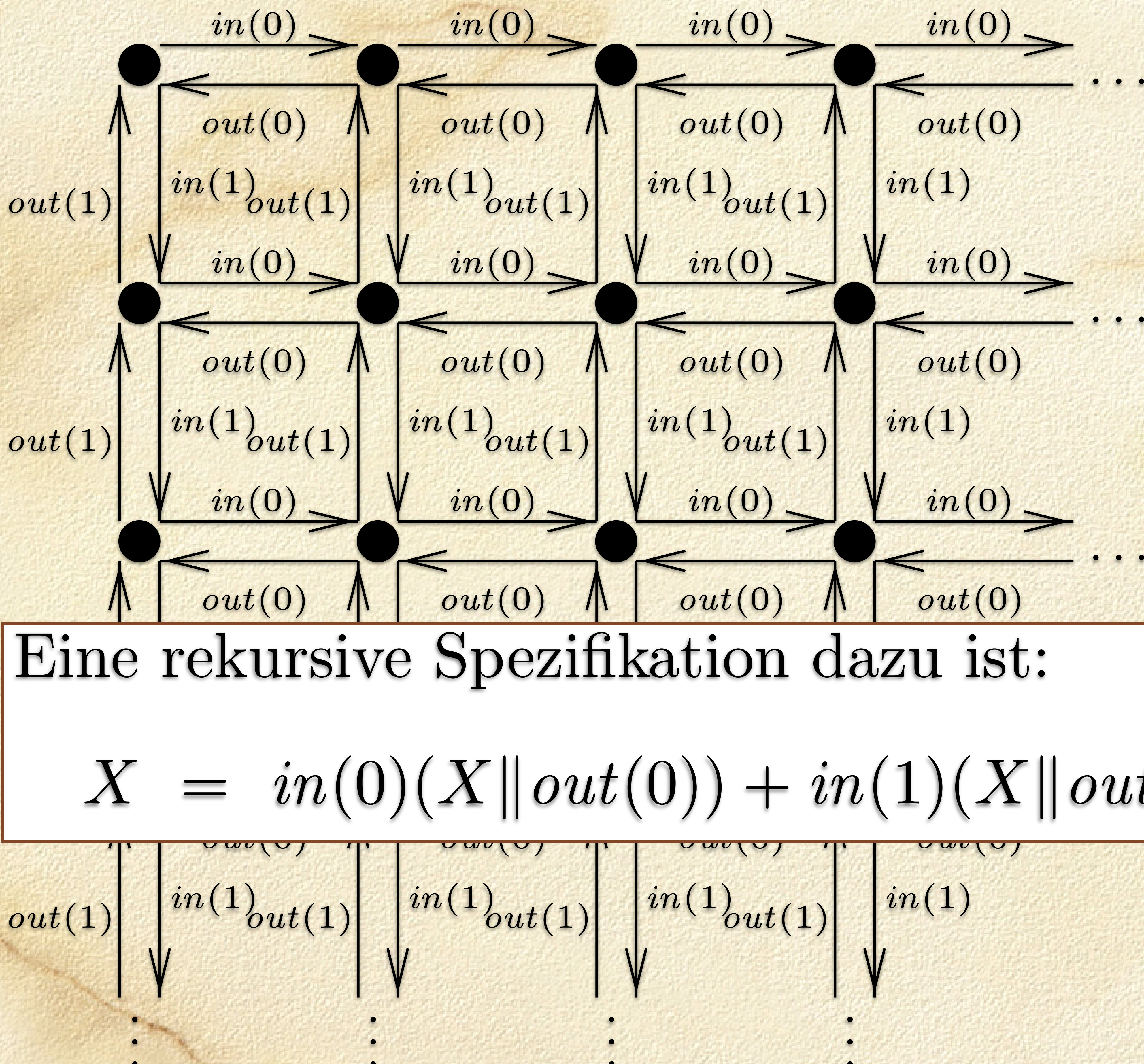
Die Elemente 0 and 1 werden durch $in(0)$ und $in(1)$ in die Multimenge eingefügt und können durch $out(0)$ und $out(1)$ in beliebiger Reihenfolge entfernt werden.


$in(0)$
$out(0)$
$out(1)$
$in(1)$
$out(1)$
$in(0)$



$in(0)$
$in(0)$
$in(0)$
$in(0)$
$\cdots$
$out(0)$
$out(0)$
$out(0)$
$out(0)$
$out(1)$
$in(1)$
$out(1)$
$in(1)$
$out(1)$
$in(1)$
$out(1)$
$in(1)$
$in(0)$
$in(0)$
$in(0)$
$in(0)$
$\cdots$


in(0)
out(0)
in(1)
out(1)
...



Eine rekursive Spezifikation dazu ist:

$$X \;=\; in(0)(X \| out(0)) + in(1)(X \| out(1))$$

Axiome für Rekursion:

Für eine rekursive Spezifikation E

$$\{X_i = t_i(X_1, \ldots, X_n) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

gelte:

Axiome für Rekursion:

Für eine rekursive Spezifikation E

$$\{X_i = t_i(X_1, \ldots, X_n) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

gelte:

Rekursives Definitions Prinzip:

$$\text{RDP} \qquad \langle X_i|E\rangle \;=\; t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle) \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$$

Axiome für Rekursion:

Für eine rekursive Spezifikation E

$$\{X_i = t_i(X_1, \ldots, X_n) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

gelte:

Rekursives Definitions Prinzip:

$$\text{RDP} \qquad \langle X_i|E\rangle \;=\; t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle) \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$$

Spezifikation ➸ *Gleichung*
➸ *Äquivalenz* =

Axiome für Rekursion:

Für eine rekursive Spezifikation E

$$\{X_i = t_i(X_1, \ldots, X_n) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

gelte:

Rekursives Definitions Prinzip:

RDP $\quad \langle X_i|E\rangle \; = \; t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle) \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$

Spezifikation ➻ *Gleichung*
➻ *Äquivalenz =*

Rekursives Spezifikations Prinzip:

RSP $\quad$ Falls $y_i = t_i(y_1, \ldots, y_n)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$,
dann $\quad y_i \; = \; \langle X_i|E\rangle \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$

Axiome für Rekursion:

Für eine rekursive Spezifikation E

$$\{X_i = t_i(X_1, \ldots, X_n) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

gelte:

Rekursives Definitions Prinzip:

RDP $\quad \langle X_i|E\rangle = t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle) \quad (i \in \{1, \ldots, n\})$

Spezifikation ➻ Gleichung
➻ Äquivalenz =

Rekursives Spezifikations Prinzip:

RSP $\quad$ Falls $y_i = t_i(y_1, \ldots, y_n)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$,
dann $\quad y_i = \langle X_i|E\rangle \quad (i \in \{1, \ldots, n\})$

Spezifikation & Gleichung ➻
neue Lösung

Axiome für Rekursion:

Für eine rekursive Spezifikation E

$$\{X_i = t_i(X_1, \ldots, X_n) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

gelte: $\{X = a\,X\}$

Rekursives Definitions Prinzip:

RDP $\quad \langle X_i|E\rangle = t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle) \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$

Spezifikation ➸ Gleichung
➸ Äquivalenz =

Rekursives Spezifikations Prinzip:

RSP $\quad$ Falls $y_i = t_i(y_1, \ldots, y_n)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$,
dann $\quad y_i = \langle X_i|E\rangle \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$

Spezifikation & Gleichung ➸
neue Lösung

Axiome für Rekursion:

Für eine rekursive Spezifikation E

$$\{X_i = t_i(X_1, \ldots, X_n) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

gelte: $\{X = a\,X\}$

Rekursives Definitions Prinzip:

RDP $\quad \langle X_i|E\rangle = t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle) \quad (i \in \{1, \ldots, n\})$

$\langle X/X = aX\rangle = a\langle X/X = aX\rangle$

Spezifikation ➸ *Gleichung*

➸ *Äquivalenz* =

Rekursives Spezifikations Prinzip:

RSP $\quad$ Falls $y_i = t_i(y_1, \ldots, y_n)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$,
dann $\quad y_i = \langle X_i|E\rangle \quad (i \in \{1, \ldots, n\})$

Spezifikation & Gleichung ➸
neue Lösung

Axiome für Rekursion:

Für eine rekursive Spezifikation E

$$\{X_i = t_i(X_1, \ldots, X_n) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

gelte: $\{X = a\,X\}$

Rekursives Definitions Prinzip:

RDP $\langle X_i|E\rangle \;=\; t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle) \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$

$\langle X/X = aX\rangle = a\langle X/X = aX\rangle$

kurz: $\langle X\rangle = a\langle X\rangle$

Spezifikation ➻ *Gleichung*

➻ *Äquivalenz* =

Rekursives Spezifikations Prinzip:

RSP Falls $y_i = t_i(y_1, \ldots, y_n)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$,
dann $y_i \;=\; \langle X_i|E\rangle \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$

Spezifikation & Gleichung ➻ *neue Lösung*

Axiome für Rekursion:

Für eine rekursive Spezifikation E

$$\{X_i = t_i(X_1, \ldots, X_n) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

gelte: $\{X = a\,X\}$

Rekursives Definitions Prinzip:

RDP $\quad \langle X_i|E\rangle \; = \; t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle) \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$

$\langle X/X = aX\rangle = a\langle X/X = aX\rangle$

kurz: $\langle X\rangle = a\langle X\rangle$

Spezifikation ➸ *Gleichung*

➸ *Äquivalenz* =

Rekursives Spezifikations Prinzip:

RSP $\quad$ Falls $y_i = t_i(y_1, \ldots, y_n)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$,
dann $\quad y_i \; = \; \langle X_i|E\rangle \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$

$\langle \mathrm{Y}\rangle = \mathrm{a}\langle \mathrm{Y}\rangle \;\Rightarrow\; \langle \mathrm{Y}\rangle = \langle \mathrm{X}\rangle$

Spezifikation & Gleichung ➸ *neue Lösung*

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

$$
\begin{aligned}
\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle &\overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle \\
&\overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle) \\
&\overset{\text{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle
\end{aligned}
$$

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

$$\begin{aligned}
\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle &\stackrel{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle \\
&\stackrel{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle) \\
&\stackrel{\text{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle
\end{aligned}$$

RDP $\quad \langle X_i|E\rangle = t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle)$

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

$$\begin{aligned}\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle &\overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle \\ &\overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle) \\ &\overset{\text{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{RDP} \qquad \langle X_i|E\rangle \;=\; t_i(\langle X_1|E\rangle,\ldots,\langle X_n|E\rangle)}$$

Spezifikation ➸
Gleichung

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

$$\begin{aligned}\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle &\overset{\mathrm{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle \\ &\overset{\mathrm{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle) \\ &\overset{\mathrm{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{RDP} \qquad \langle X_i|E\rangle \;=\; t_i(\langle X_1|E\rangle,\ldots,\langle X_n|E\rangle)}$$

Spezifikation ➻
Gleichung

Also gilt mit RSP,

$$\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle \;=\; \langle X \mid X{=}(aa)X\rangle$$

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

$$\begin{aligned}\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle &\overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle \\ &\overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle) \\ &\overset{\text{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle\end{aligned}$$

RDP	$\langle X_i \mid E\rangle = t_i(\langle X_1 \mid E\rangle, \ldots, \langle X_n \mid E\rangle)$

Spezifikation ➸
Gleichung

Also gilt mit RSP,

$$\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle = \langle X \mid X{=}(aa)X\rangle$$

RSP	Falls $y_i = t_i(y_1, \ldots, y_n)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$, dann $y_i = \langle X_i \mid E\rangle \quad (i \in \{1, \ldots, n\})$

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

$$
\begin{aligned}
\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle &\overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle \\
&\overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle) \\
&\overset{\text{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle
\end{aligned}
$$

RDP $\quad \langle X_i|E\rangle = t_i(\langle X_1|E\rangle, \ldots, \langle X_n|E\rangle)$

Spezifikation ➸ Gleichung

Also gilt mit RSP,

$$\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle = \langle X \mid X{=}(aa)X\rangle$$

RSP $\quad$ Falls $y_i = t_i(y_1, \ldots, y_n)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$,
dann $\quad y_i = \langle X_i|E\rangle \quad (i \in \{1, \ldots, n\})$

Spezifikation & Gleichung ➸ neue Lösung

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle &\overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle \\
&\overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle) \\
&\overset{\text{RDP}}{=} a(a(a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle)) \\
&\overset{\text{A5}}{=} ((aa)a)\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle &\overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle \\
&\overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle) \\
&\overset{\text{RDP}}{=} a(a(a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle)) \\
&\overset{\text{A5}}{=} ((aa)a)\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle
\end{aligned}$$

und mit RSP:

$$\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle = \langle Y \mid Y{=}((aa)a)Y\rangle$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle &\overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle \\
&\overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle) \\
&\overset{\text{RDP}}{=} a(a(a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle)) \\
&\overset{\text{A5}}{=} ((aa)a)\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle
\end{aligned}$$

und mit RSP:

$$\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle = \langle Y \mid Y{=}((aa)a)Y\rangle$$

also:

$$\begin{aligned}
\langle X \mid X{=}(aa)X\rangle &= \langle Z \mid Z{=}aZ\rangle \\
&= \langle Y \mid Y{=}((aa)a)Y\rangle
\end{aligned}$$

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

⟨Z|Z=aZ+b⟩

$$
\begin{aligned}
\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle &\overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle \\
&\overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle) \\
&\overset{\text{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle
\end{aligned}
$$

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

$\langle Z | Z = aZ + b \rangle$

$$
\begin{aligned}
\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle &\overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle \\
&\overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle) \\
&\overset{\text{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle
\end{aligned}
$$

$Z = aZ + b$

$$
\begin{tikzcd}
\langle Z \rangle \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "b"'] & \langle Z \rangle \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "b"'] & \langle Z \rangle \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "b"'] & \ldots \\
 & \surd & \surd & \surd
\end{tikzcd}
$$

Achtung!

RSP ist **nicht korrekt** für ungeschützte Rekursion. Beispielsweise ergibt RSP wegen $t = t$ die Gleichung

$$t \;=\; \langle X \mid X{=}X \rangle$$

für alle Prozessterme t.

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

Variante: {Z=aZ+b}
2. Variante: {Z=aaZ+b}

$\langle Z \rangle$

$$
\begin{aligned}
\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle &\overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle \\
&\overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle) \\
&\overset{\text{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle
\end{aligned}
$$

$\langle Z \rangle = a\langle Z \rangle + b$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\langle Z \rangle & \xrightarrow{a} & \langle Z \rangle & \xrightarrow{a} & \langle Z \rangle & \xrightarrow{a} & \ldots \\
\downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b & & \\
\surd & & \surd & & \surd & &
\end{array}
$$

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

Variante: {Z=aZ+b}
2. Variante: {Z=aaZ+b}

$\langle Z \rangle$

$$\begin{aligned}\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle &\overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle\\ &\overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle)\\ &\overset{\text{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle\end{aligned}$$

$\langle Z \rangle = a\langle Z \rangle + b$

$$\begin{array}{ccccccc}\langle Z\rangle & \xrightarrow{a} & \langle Z\rangle & \xrightarrow{a} & \langle Z\rangle & \xrightarrow{a} & \ldots\\ \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \\ \surd & & \surd & & \surd & & \end{array}$$

$\langle Z \rangle$

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

Variante: $\{Z{=}aZ{+}b\}$
2. Variante: $\{Z{=}aaZ{+}b\}$

$\langle Z \rangle$

$$\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle \overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle \overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle) \overset{\text{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle$$

$$\langle Z \rangle = a\langle Z \rangle + b$$

$$\langle Z \rangle \xrightarrow{a} \langle Z \rangle \xrightarrow{a} \langle Z \rangle \xrightarrow{a} \ldots$$

$$\langle Z \rangle \xrightarrow{b} \surd \qquad \langle Z \rangle \xrightarrow{b} \surd \qquad \langle Z \rangle \xrightarrow{b} \surd$$

$$\langle Z \rangle \xrightarrow{b} \surd$$

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

Variante: {Z=aZ+b}
2. Variante: {Z=aaZ+b}

$\langle Z \rangle$

$$\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle \overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle \overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle) \overset{\text{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle$$

$\langle Z \rangle = a\langle Z \rangle + b$

$$\langle Z \rangle \xrightarrow{a} \langle Z \rangle \xrightarrow{a} \langle Z \rangle \xrightarrow{a} \ldots$$

$$\langle Z \rangle \xrightarrow{b} \surd \qquad \langle Z \rangle \xrightarrow{b} \surd \qquad \langle Z \rangle \xrightarrow{b} \surd$$

$$\langle Z \rangle \xrightarrow{a} \qquad \langle Z \rangle \xrightarrow{b} \surd$$

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

Variante: $\{Z = aZ + b\}$
2. Variante: $\{Z = aaZ + b\}$

$\langle Z \rangle$

$$\langle Z \mid Z = aZ \rangle \overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z = aZ \rangle \overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z = aZ \rangle) \overset{\text{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z = aZ \rangle$$

$\langle Z \rangle = a\langle Z \rangle + b$

$$\begin{tikzcd}
\langle Z \rangle \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & \langle Z \rangle \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & \langle Z \rangle \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & \ldots \\
\surd & \surd & \surd &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\langle Z \rangle \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & \langle aZ \rangle \\
\surd &
\end{tikzcd}$$

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

Variante: $\{Z{=}aZ{+}b\}$
2. Variante: $\{Z{=}aaZ{+}b\}$

$\langle Z \rangle$

$$\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle \overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle \overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle) \overset{\text{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle$$

$\langle Z \rangle = a\langle Z \rangle + b$

$$\begin{array}{ccccccc} \langle Z \rangle & \xrightarrow{a} & \langle Z \rangle & \xrightarrow{a} & \langle Z \rangle & \xrightarrow{a} & \ldots \\ \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b & & \\ \surd & & \surd & & \surd & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \langle Z \rangle & \xrightarrow{a} & \langle aZ \rangle & \xrightarrow{a} & \langle Z \rangle \\ \downarrow b & & & & \\ \surd & & & & \end{array}$$

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

Variante: $\{Z{=}aZ{+}b\}$
2. Variante: $\{Z{=}aaZ{+}b\}$

$\langle Z \rangle$

$$
\begin{aligned}
\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle &\overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle \\
&\overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle) \\
&\overset{\text{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle
\end{aligned}
$$

$\langle Z \rangle = a\langle Z \rangle + b$

$$
\begin{tikzcd}
\langle Z \rangle \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "b"'] & \langle Z \rangle \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "b"'] & \langle Z \rangle \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "b"'] & \ldots \\
 & \surd & \surd & \surd
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\langle Z \rangle \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & \langle aZ \rangle \arrow[r, "a"] & \langle Z \rangle \arrow[d, "b"'] \\
\surd & & \surd
\end{tikzcd}
$$

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

Variante: {Z=aZ+b}
2. Variante: {Z=aaZ+b}

$\langle Z \rangle$

$$\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle \overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle \overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle) \overset{\text{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle$$

$\langle Z \rangle = a\langle Z \rangle + b$

$$\langle Z \rangle \xrightarrow{a} \langle Z \rangle \xrightarrow{a} \langle Z \rangle \xrightarrow{a} \dots$$

$$\langle Z \rangle \xrightarrow{b} \surd$$

$$\langle Z \rangle \xrightarrow{a} \langle aZ \rangle \xrightarrow{a} \langle Z \rangle \xrightarrow{a}$$

$$\langle Z \rangle \xrightarrow{b} \surd$$

Wednesday, January 5, 2011

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

Variante: $\{Z{=}aZ{+}b\}$
2. Variante: $\{Z{=}aaZ{+}b\}$

$\langle Z\rangle$

$$\begin{aligned}\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle &\overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle\\ &\overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle)\\ &\overset{\text{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z{=}aZ\rangle\end{aligned}$$

$$\langle Z\rangle = a\langle Z\rangle + b$$

$$\begin{array}{ccccccc}\langle Z\rangle & \xrightarrow{a} & \langle Z\rangle & \xrightarrow{a} & \langle Z\rangle & \xrightarrow{a} & \ldots\\ \quad\searrow^{b} & & \quad\searrow^{b} & & \quad\searrow^{b} & & \\ & \surd & & \surd & & \surd & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}\langle Z\rangle & \xrightarrow{a} & \langle aZ\rangle & \xrightarrow{a} & \langle Z\rangle & \xrightarrow{a} & \langle aZ\rangle\\ \quad\searrow^{b} & & & & \quad\searrow^{b} & & \\ & \surd & & & & \surd & \end{array}$$

Beispiel 5.33 *(für geschützte Rekursion)*

Variante: $\{Z=aZ+b\}$
2. Variante: $\{Z=aaZ+b\}$

$\langle Z \rangle$

$$\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle \overset{\text{RDP}}{=} a\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle \overset{\text{RDP}}{=} a(a\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle) \overset{\text{A5}}{=} (aa)\langle Z \mid Z{=}aZ \rangle$$

$$\langle Z \rangle = a\langle Z \rangle + b$$

$$\langle Z \rangle \xrightarrow{a} \langle Z \rangle \xrightarrow{a} \langle Z \rangle \xrightarrow{a} \ldots$$

$$b \searrow \quad \surd \qquad b \searrow \quad \surd \qquad b \searrow \quad \surd$$

$$\langle Z \rangle \xrightarrow{a} \langle aZ \rangle \xrightarrow{a} \langle Z \rangle \xrightarrow{a} \langle aZ \rangle \xrightarrow{a} \ldots$$

$$b \searrow \quad \surd \qquad b \searrow \quad \surd$$

Wednesday, January 5, 2011

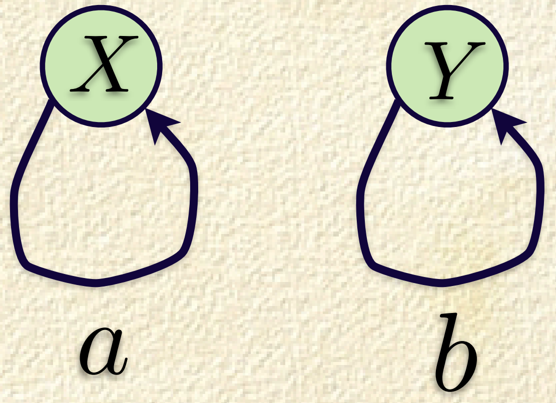
Beispiel: für $\gamma(a,b) \equiv c$ die folgende Ableitung von

$$\partial_{\{a,b\}}(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle) = \; ?$$

Beispiel: für $\gamma(a,b) \equiv c$ die folgende

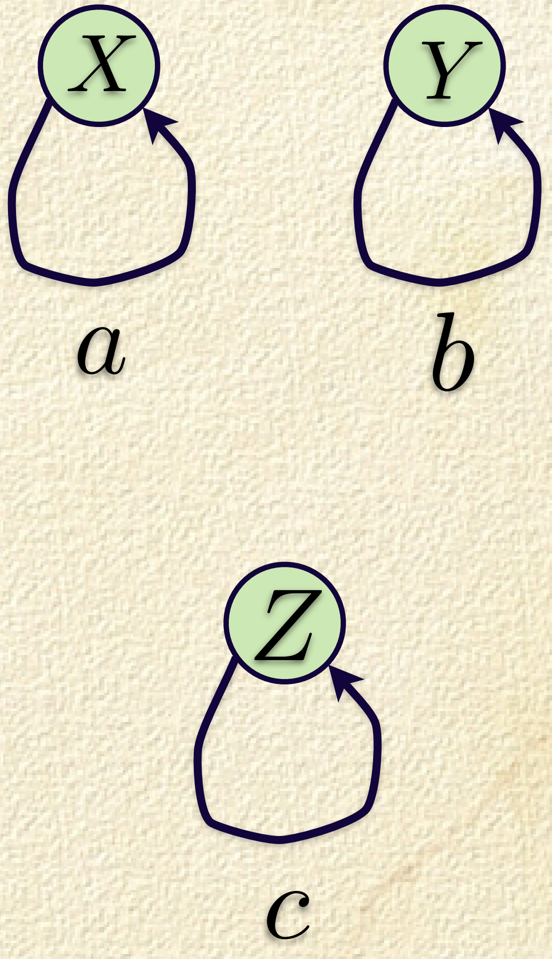
Ableitung von

$$\partial_{\{a,b\}}(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle) = \ ?$$



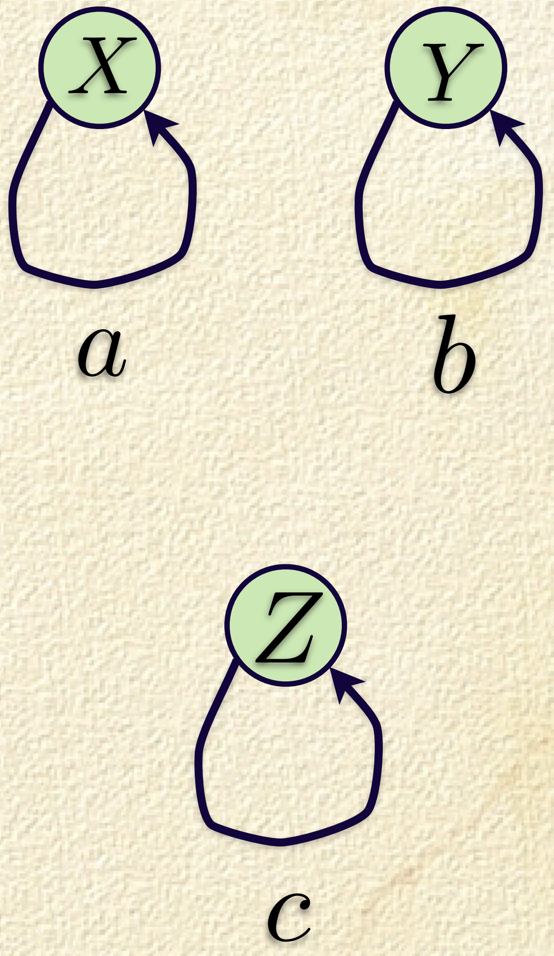
Beispiel: für $\gamma(a,b) \equiv c$ die folgende Ableitung von

$$\partial_{\{a,b\}}(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle) = \ ?$$



Beispiel: Ableitung von für $\gamma(a,b) \equiv c$ die folgende

$$\partial_{\{a,b\}}(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle) = \langle Z \mid Z{=}cZ\rangle$$

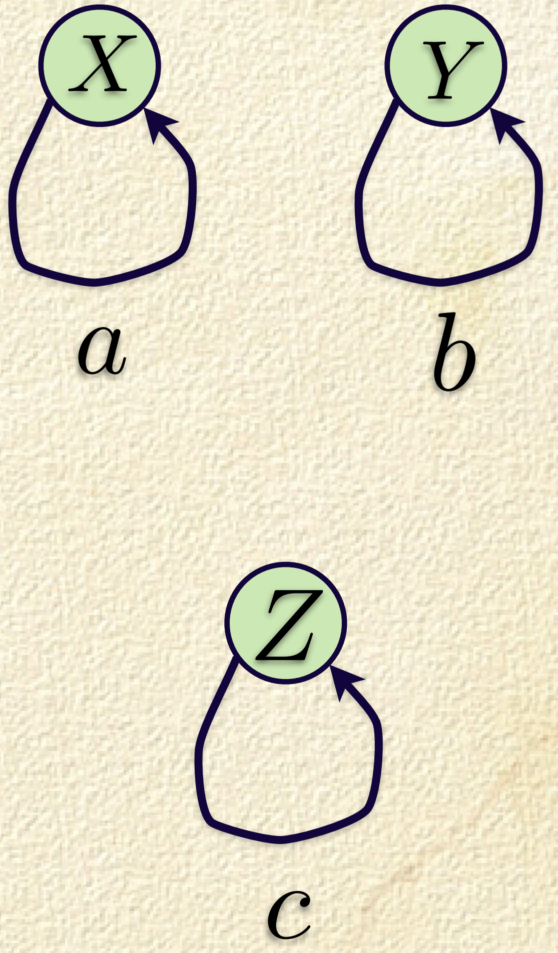


Wednesday, January 5, 2011

Beispiel: Ableitung von $\;$ für $\gamma(a,b) \equiv c$ die folgende

$$\partial_{\{a,b\}}(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle) = \langle Z \mid Z{=}cZ\rangle$$

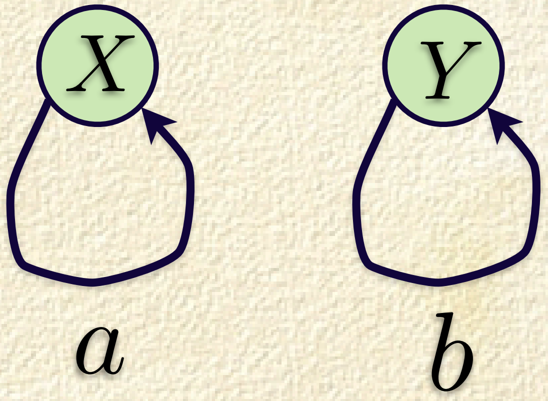
$$\begin{array}{ll} & \langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle \\ = & \langle X \mid X{=}aX\rangle \mathbin{|\!\lfloor} \langle Y \mid Y{=}bY\rangle \\ + & \langle Y \mid Y{=}bY\rangle \mathbin{|\!\lfloor} \langle X \mid X{=}aX\rangle \\ + & \langle X \mid X{=}aX\rangle | \langle Y \mid Y{=}bY\rangle \end{array}$$

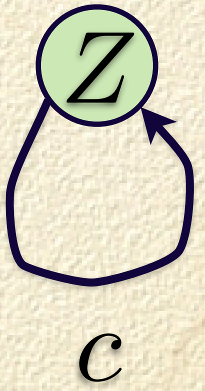


Beispiel: für $\gamma(a,b) \equiv c$ die folgende Ableitung von

$$\partial_{\{a,b\}}(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle) = \langle Z \mid Z{=}cZ\rangle$$

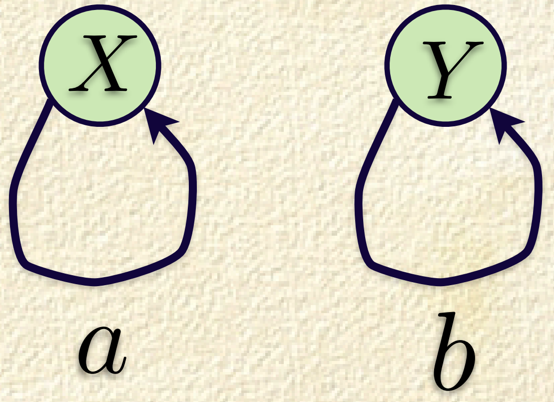
$$\begin{aligned}
& \langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle \\
= \quad & \langle X \mid X{=}aX\rangle \mathbin{\|\!\lfloor} \langle Y \mid Y{=}bY\rangle \\
+ \quad & \langle Y \mid Y{=}bY\rangle \mathbin{\|\!\lfloor} \langle X \mid X{=}aX\rangle \\
+ \quad & \langle X \mid X{=}aX\rangle | \langle Y \mid Y{=}bY\rangle \\
= \quad & a(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle) \\
+ \quad & b(\langle Y \mid Y{=}bY\rangle \| \langle X \mid X{=}aX\rangle) \\
+ \quad & c(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle)
\end{aligned}$$



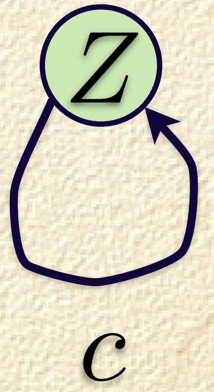


Beispiel: für $\gamma(a,b) \equiv c$ die folgende Ableitung von

$$\partial_{\{a,b\}}(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle) = \langle Z \mid Z{=}cZ\rangle$$



$$\begin{array}{rl}
 & \langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle \\
= & \langle X \mid X{=}aX\rangle \mathbin{|\!\lfloor} \langle Y \mid Y{=}bY\rangle \\
+ & \langle Y \mid Y{=}bY\rangle \mathbin{|\!\lfloor} \langle X \mid X{=}aX\rangle \\
+ & \langle X \mid X{=}aX\rangle | \langle Y \mid Y{=}bY\rangle \\
= & a(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle) \\
+ & b(\langle Y \mid Y{=}bY\rangle \| \langle X \mid X{=}aX\rangle) \\
+ & c(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle)
\end{array}$$



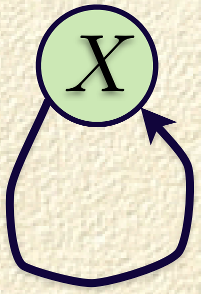
Aus

$$\begin{array}{rl}
 & \partial_{\{a,b\}}(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle) \\
= & c \cdot \partial_{\{a,b\}}(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle)
\end{array}$$

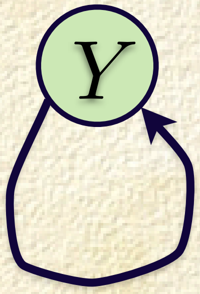
Beispiel: für $\gamma(a,b) \equiv c$ die folgende Ableitung von

$$\partial_{\{a,b\}}(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle) = \langle \mathbf{Z} \mid Z{=}c\mathbf{Z}\rangle$$

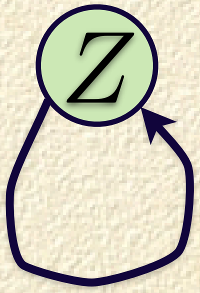
$$\begin{aligned}
& \langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle \\
= \quad & \langle X \mid X{=}aX\rangle \mathbin{\|\!\lfloor} \langle Y \mid Y{=}bY\rangle \\
+ \quad & \langle Y \mid Y{=}bY\rangle \mathbin{\|\!\lfloor} \langle X \mid X{=}aX\rangle \\
+ \quad & \langle X \mid X{=}aX\rangle | \langle Y \mid Y{=}bY\rangle \\
= \quad & a(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle) \\
+ \quad & b(\langle Y \mid Y{=}bY\rangle \| \langle X \mid X{=}aX\rangle) \\
+ \quad & c(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle)
\end{aligned}$$



a



b



c

Aus

$$\begin{aligned}
& \overset{\mathbf{Z}}{\boxed{\partial_{\{a,b\}}(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle}}) \\
= \quad & c \cdot \underset{\mathbf{Z}}{\boxed{\partial_{\{a,b\}}(\langle X \mid X{=}aX\rangle \| \langle Y \mid Y{=}bY\rangle}})
\end{aligned}$$

jedoch:

RSP ist **nicht korrekt** für ungeschützte Rekursion. Beispielsweise ergibt RSP wegen $t = t$ die Gleichung

$$t \;=\; \langle X \,|\, X{=}X \rangle$$

für alle Prozessterme t.

Korrektheit

Theorem 5.42 *Der Kalkül ACP mit* $\boxed{\textit{geschützter}}$ *Rekursion ist korrekt bezüglich Bisimulation:*

$$s = t \;\Rightarrow\; s \mathrel{\underline{\leftrightarrow}} t$$

Allerdings:

***ACP+RSP/RDP ist nicht* vollständig**

(nicht einmal für geschützte Rekursion).

Wir schränken die Form rekursiver Spezifikationen noch weiter ein:

Definition 5.43 *Eine rekursive Spezifikation ist* linear, *wenn ihre rekursiven Gleichungen die folgende Form haben:*

$$X = a_1X_1 + \cdots + a_kX_k + b_1 + \cdots + b_\ell \qquad a_i, b_j \in A$$

Mit dieser Einschränkung erreichen wir Vollständigkeit:

Theorem 5.44 (Vollständigkeit) *Das Kalkül ACP mit den Axiomen RDP und RSP ist eine vollständige Axiomatisierung für Bisimulation.*

Umformung von Spezifikationen

Sei E, E' geschützte rekursive Spezifikationen, wobei E' aus E entsteht, indem die rechten Seiten der Gleichungen folgendermaßen modifiziert werden:

- Die Axiome für ACP mit geschützter Rekursion dürfen benutzt werden.
- Rekursionsvariablen dürfen durch die rechte Seiten ihrer Rekursionsgleichung ersetzt werden.

Dann kann $\langle X|E\rangle = \langle X|E'\rangle$ im Kalkül ACP mit geschützter Rekursion für alle Rekursionsvariablen abgeleitet werden.

Zum Beispiel kann

$$\langle X \mid X{=}aX{+}aX \rangle = \langle X \mid X{=}(aa)X \rangle$$

abgeleitet werden, indem

- erst A3 angewandt wird: $(x + x = x)$,
- dann X durch die rechte Seite aX ersetzt wird,
- und dann zuletzt A5 angewandt wird: $((xy)z = x(yz))$.

$$X{=}aX{+}aX \rightsquigarrow X{=}aX \rightsquigarrow X{=}a(aX) \rightsquigarrow X{=}(aa)X$$