faire Schaltregel ⇒ *faires Verhalten*

?

lokales Verhalten ⇒ *globales Verhalten*

?

Definition 3.9 *Ein S/T-Netz*[5] $\mathcal{N} = \langle S, T, F, W, \mathbf{m}_0 \rangle$ *hat ein* faires Verhalten, *oder verhält sich* fair *(behaves fairly), wenn in jeder unendlichen Schaltfolge* $w \in \boxed{F_\omega(\mathcal{N})}$ *jede Transition* $t \in T$ *unendlich oft vorkommt. Dabei bedeutet* $\boxed{F_\omega(\mathcal{N})} := \{w = a_1 a_2 a_3 \cdots \in T^\omega | \forall i \in Nat^+ : a_1 a_2 a_3 \cdots a_i \in FS(\mathcal{N})\}$ *(Definition von* $FS(\mathcal{N})$ *siehe Definition 2.9 auf Seite 46).*

Wir vergleichen die wichtigen Begriffe der Lebendigkeit und Fairness.

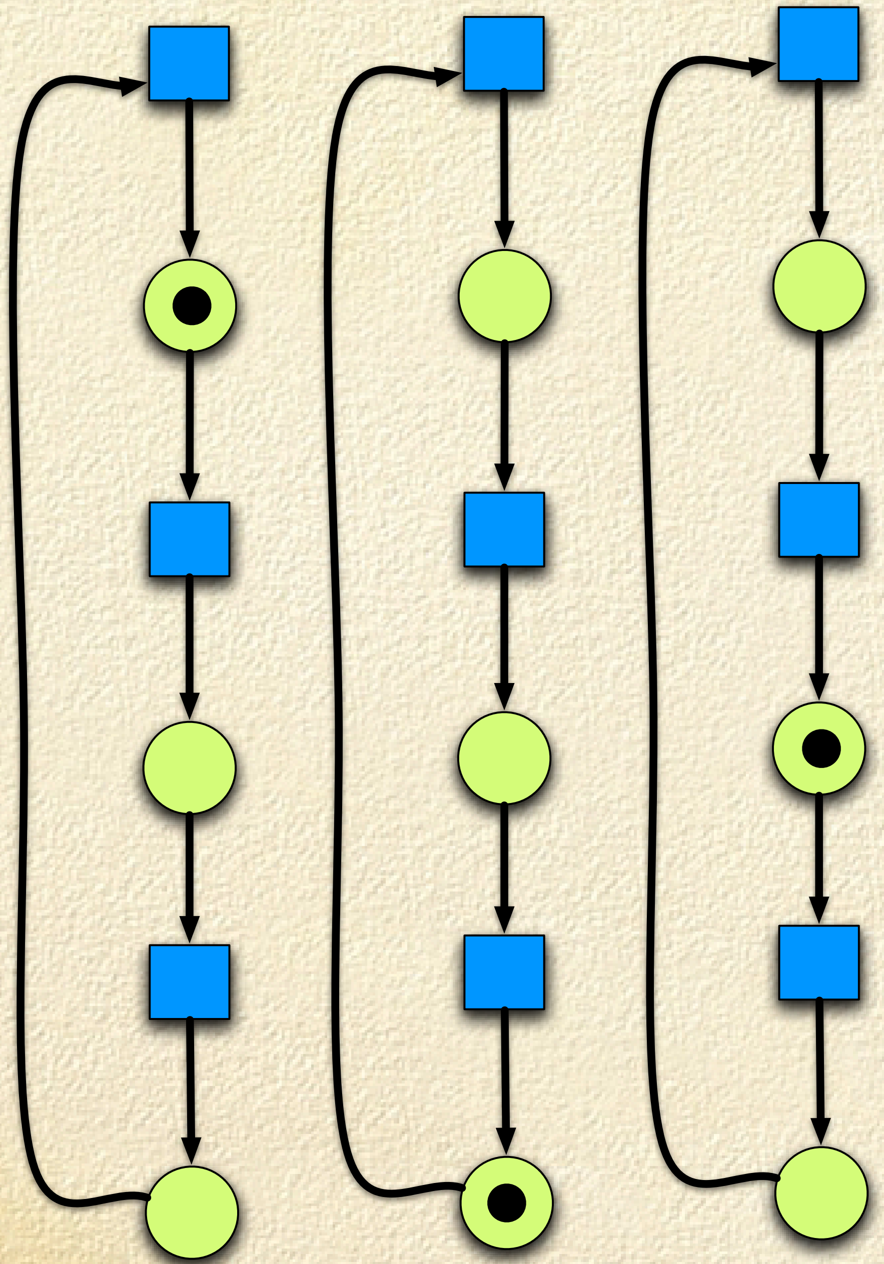
a) Lebendigkeit bedeutet Freiheit von *unvermeidbaren* partiellen Verklemmungen.

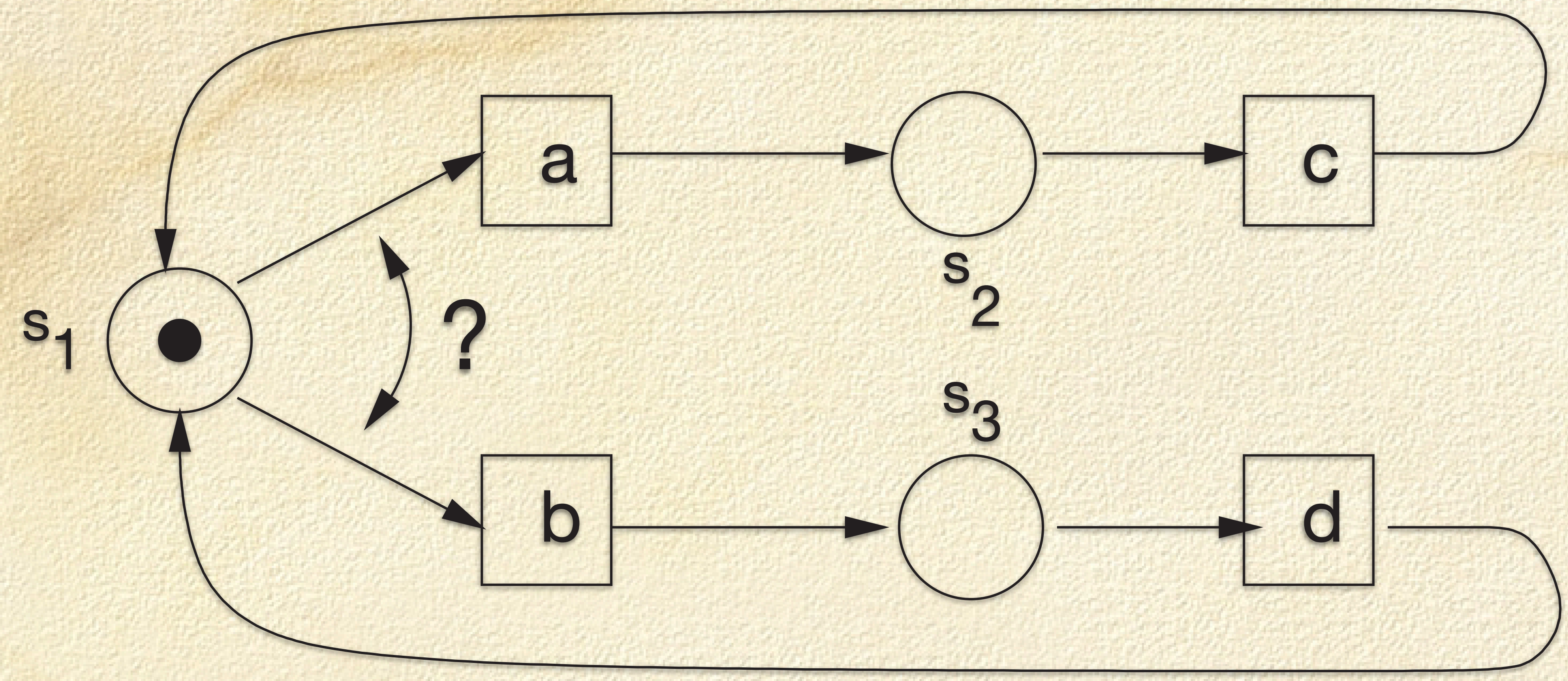
b) Fairness bedeutet Freiheit von *faktischen* partiellen Verklemmungen.

Definition 3.10 *Es sei $\mathcal{N} = \langle S, T, F, W, \mathbf{m}_0 \rangle$ ein S/T-Netz.*

a) $\mathcal{N}$ *schaltet* produktiv *oder* verschleppungsfrei *oder* nach der verschleppungsfreien Schaltregel *(finite delay property), wenn*

$$\forall t \in T \; \forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}) \; \neg\exists w \in T^{\omega} : \mathbf{m} \xrightarrow{w} \wedge t \textit{ ist bei } w \textit{ permanent aktiviert } \wedge |w|_t = 0$$



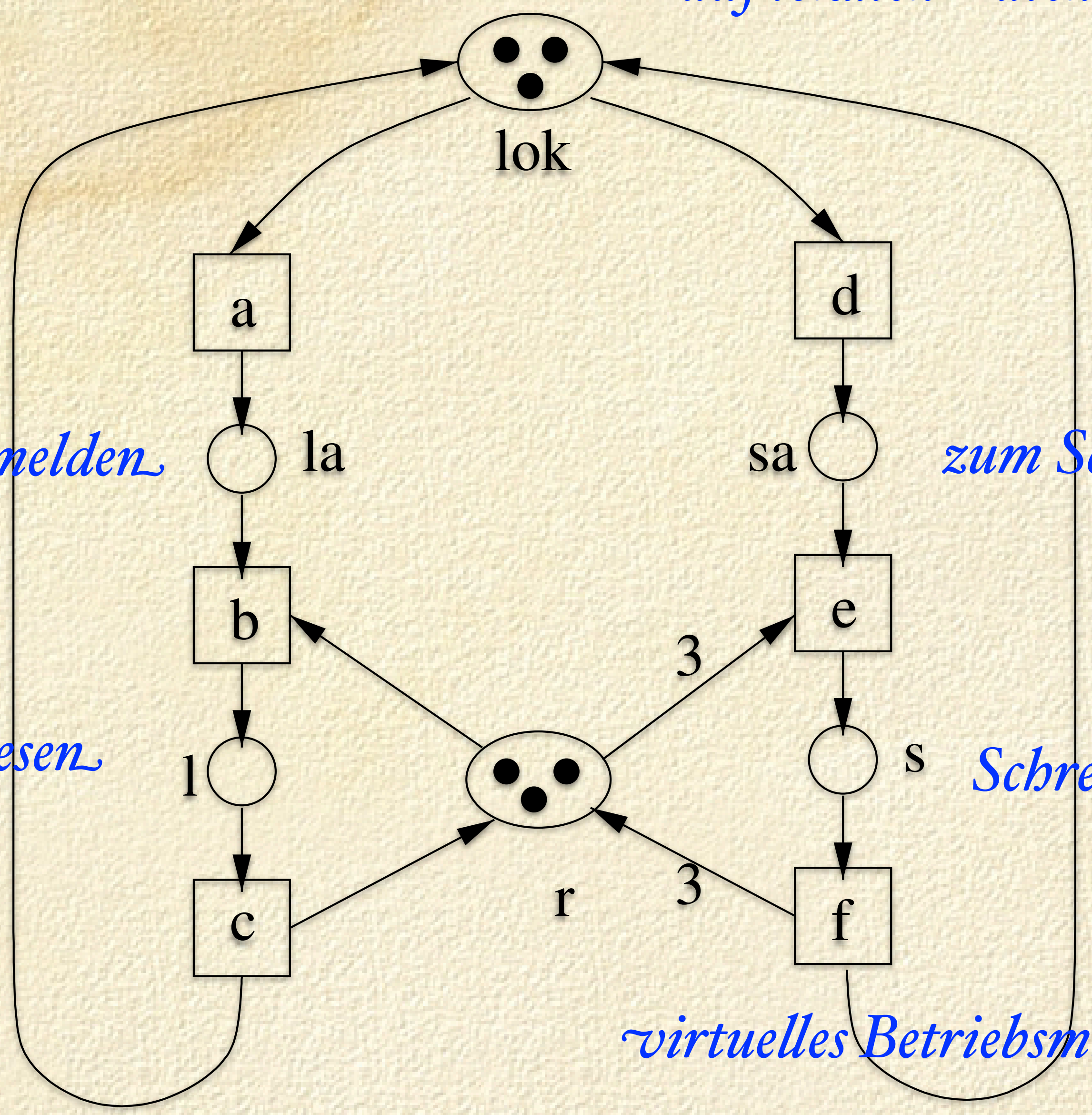


b) $\mathcal{N}$ *schaltet* fair, *oder* nach der fairen Schaltregel *(fair firing rule)*, *wenn*

$$\forall t \in T\ \forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N})\ \neg\exists w \in T^{\omega} : \mathbf{m} \xrightarrow{w} \wedge\ t \textit{ ist bei } w \textit{ unendlich oft aktiviert } \wedge |w|_t = 0$$

3.4.2 Netzinvarianten

“Leser-Schreiber-Problem”

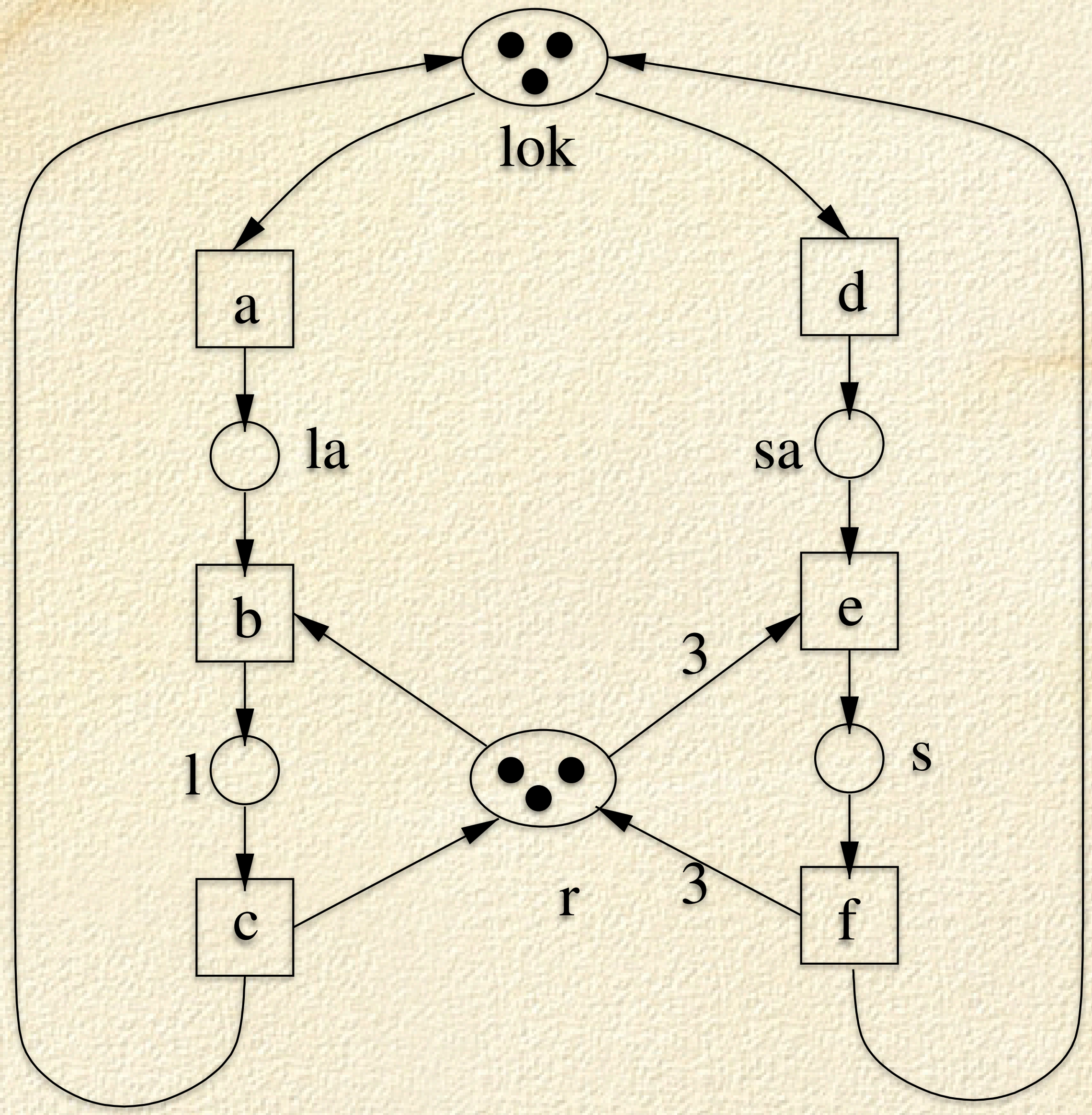


Die Auftragsbescheibungen können z. B. so beschaffen sein, dass folgende serielle Prozesse ablaufen :

1.) *a a d e f b b c c a*

2.) *a d a e f b c a b c*

3.) *d a a e f b b c a c*



Spezifikation:

Für alle erreichbaren Markierungen $\mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N})$ soll also gelten:

a)	$\mathbf{m}(s) > 0 \to \mathbf{m}(l) = 0$
b)	$\mathbf{m}(s) \leq 1$
c)	$\mathbf{m}(l) > 0 \to \mathbf{m}(s) = 0$

$\Leftarrow$

- $i_1 : \quad lok + la + sa + l + s = n$
- $i_2 : \quad l + r + n \cdot s = n$

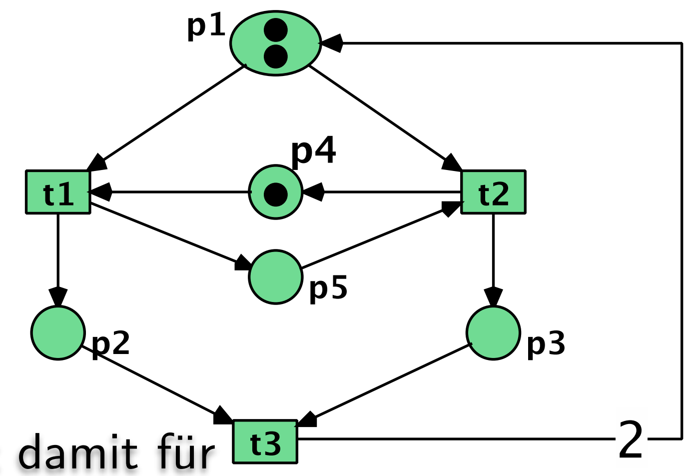
Präsenzaufgabe 7.2:

1. Betrachte das folgende P/T-Netz $N_1 = (P, T, F, W, m_0)$. Zeige per Induktion über die Schaltfolgenlänge, dass eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ existiert, so für alle erreichbaren Markierungen m die folgende Beziehung gilt:

$$m(p_1) + m(p_2) + m(p_3) = c$$

Bestimme auch die Konstante c.

	-1	+1
-1	-1	+2



Lösung: Induktion über die Länge der Schaltfolge w in $m_0 \xrightarrow{w} m$.

Induktionsanfang für $w = \epsilon$. Dann ist $m = m_0$ und $m(p_1) + m(p_2) + m(p_3) = c$ gilt damit für $c = 2$.

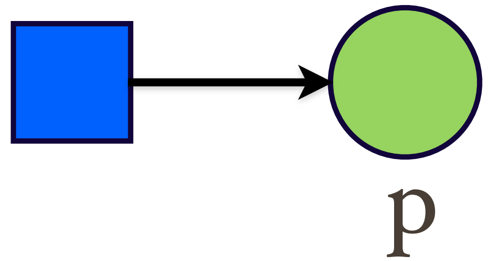
Induktionssschritt für $m_0 \xrightarrow{w} m \xrightarrow{t} m'$. Induktionsannahme: Für alle w der Länge n mit $m_0 \xrightarrow{w} m$ gilt bereits $m(p_1) + m(p_2) + m(p_3) = 2$.

Fallunterscheidung für t in $m \xrightarrow{t} m'$:

(a) $t = t_1$.

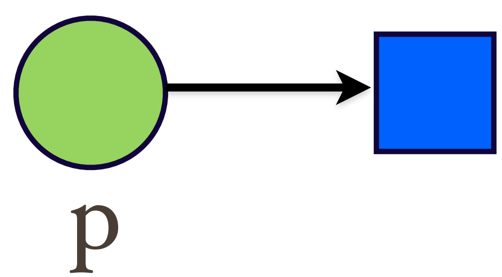
$$\begin{aligned}
& m'(p_1) + m'(p_2) + m'(p_3) \\
= \; & (m(p_1) - W(p_1, t_1) + W(t_1, p_1)) \\
& +(m(p_2) - W(p_2, t_1) + W(t_1, p_2)) \\
& +(m(p_3) - W(p_3, t_1) + W(t_1, p_3)) \\
= \; & (m(p_1) - 1) + (m(p_2) + 1) + m(p_3) \\
= \; & m(p_1) + m(p_2) + m(p_3) = 2
\end{aligned}$$

2. Beweise: Sei N ein beliebiges lebendiges P/T-Netz mit $T \neq \emptyset$. Jeder Platz, der nicht isoliert ist, wird in mindestens einer erreichbaren Markierung markiert.



(a) Wenn ${}^\bullet p$ nicht leer ist, dann existiert eine Transition t, die Marken auf p erzeugt. Da das Netz lebendig ist, kann t immer wieder schalten, erzeugt also immer wieder Marken auf p.

(b) Bleibt anderfalls also nur ${}^\bullet p$ leer und $p^\bullet$ nicht leer zu betrachten, d.h. es gibt keine Transitionen, die etwas hinein legt, aber eine Transition t, die etwas heruas nimmt. Da t lebendig ist, kann t immer wieder zum Schalten gebracht werden. Dies ist aber unmöglich, da initial nur endlich viele Marken auf p liegen und keine neu hinzukommen. Dieser Fall kann also nicht vorkommen.

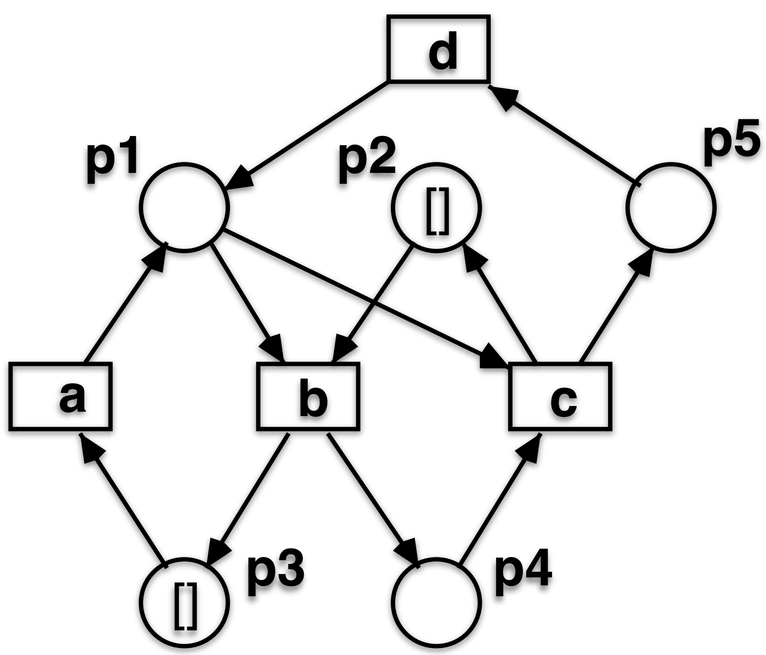


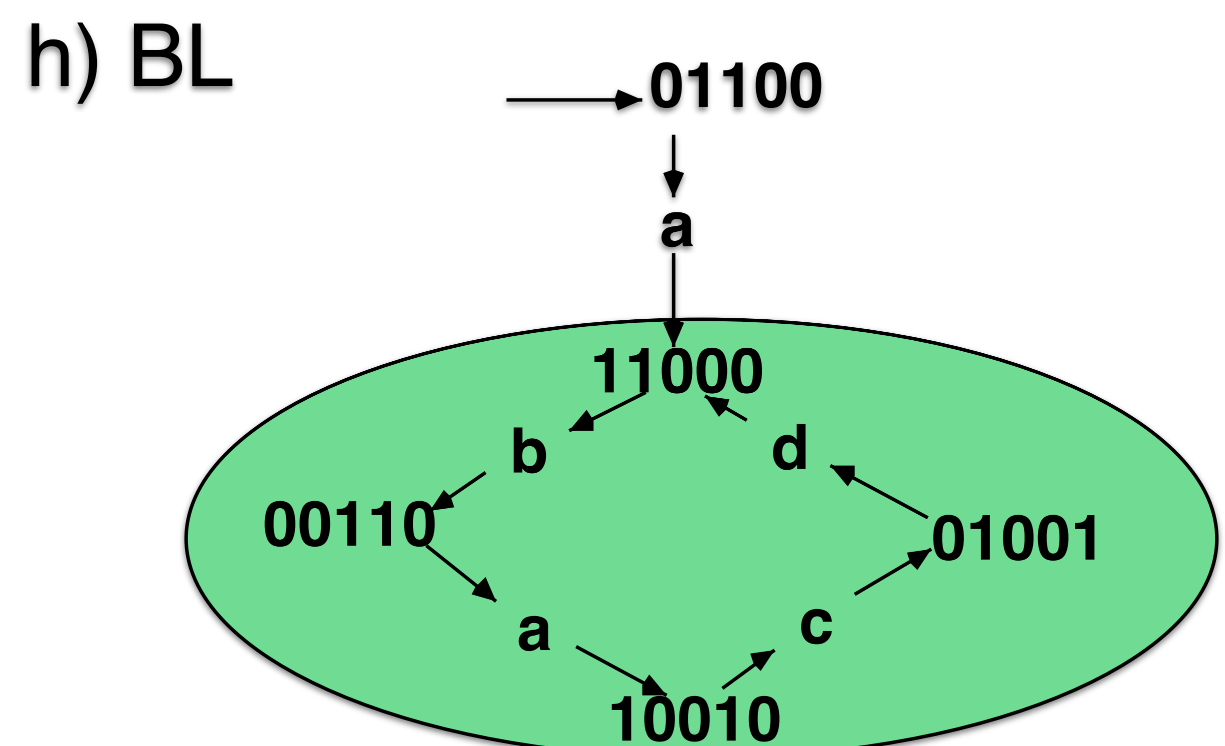
Präsenzaufgabe 7.1:

1. Konstruiere den Erreichbarkeitsgraphen nach Algorithmus 3.1 für das folgende Netz.
2. Teste mit einem geeigneten Algorithmus aus Kapitel 3, ob die Initialmarkierung ein Rücksetzzustand ist (Reversibilität). Gib ggf. die SZKs und die terminalen SZKs an.
3. Ist Reversibilität eine Markierungs- oder Lebendigkeitsinvarianz? Gib das dazugehörige Prädikat $\pi(m)$ an!

Lösung: Es handelt sich um das $BL\bar{R}$-Beispiel aus dem Skript.

[h=$BL\bar{R}$] Der RG-Graph ist endlich. Die terminale SZK enthält alle Transitionen. Die Initialmarkierung ist von keiner anderen Markierung aus erreichbar, daher ist N nicht reversibel.





- $i_1 : \quad lok + la + sa + l + s = n$
- $i_2 : \quad l + r + n \cdot s = n$

Definition 3.13 *Es sei* $\mathcal{N} = \langle S, T, F, W, \mathbf{m}_0 \rangle$ *ein S/T-Netz mit* $S = \{s_1, \ldots, s_p\}$*. Eine Gleichung der Form* $\boxed{\sum_{i=1}^{p} k_i \cdot \mathbf{m}(s_i) = k}$ *mit* $k_i, k \in \mathbb{Z}$ *heißt S-Invarianten-Gleichung*[6]*, wenn sie für alle in* $\mathcal{N}$ *erreichbaren Markierungen* $\mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N})$ *gilt. Abkürzend wird sie auch als* $\boxed{\sum_{i=1}^{p} k_i \cdot s_i = k}$ *geschrieben.*

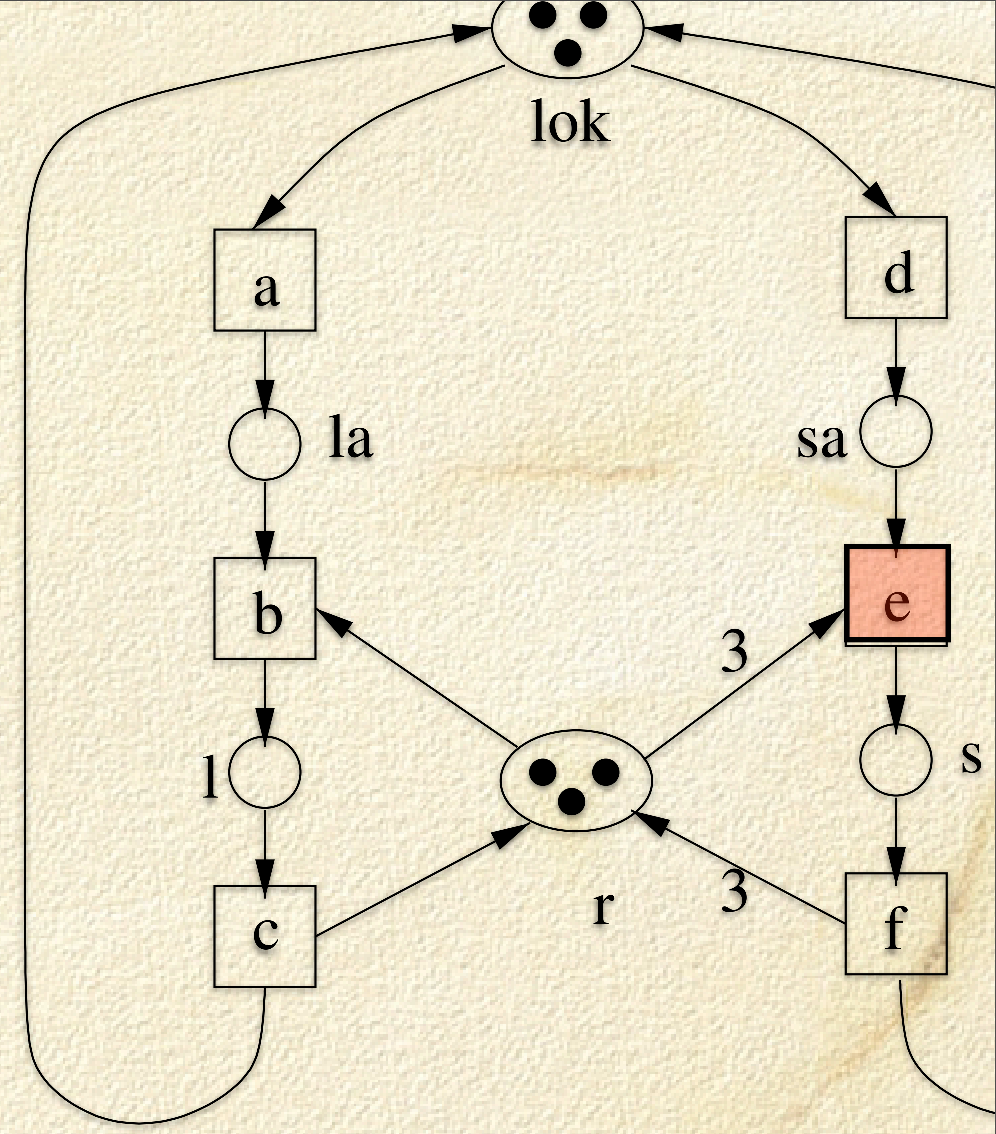
Inzidenzmatrix $\Delta_{\mathcal{N}}$

Wirkungsmatrix

$$\Delta_{\mathcal{N}}(t)(s) = -\widetilde{W}(s,t) + \widetilde{W}(t,s)$$

$- \widetilde{W}(\bullet, e) + \widetilde{W}(e, \bullet)$

$\mathcal{N}$	a	b	c	d	e	f
lok	-1	0	1	-1	0	1
la	1	-1	0	0	0	0
sa	0	0	0	1	-1	0
l	0	1	-1	0	0	0
s	0	0	0	0	1	-1
r	0	-1	1	0	$-n$	n



$(\mathbf{m}_1 \xrightarrow{t} \mathbf{m}_2)$, *dann gilt:*

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_1 + \Delta_{\mathcal{N}}(t)$$

Satz 3.16 *(Lautenbach)*
Es sei M' die Transponierte einer Matrix M und $\underline{0} \in \mathbb{Z}^{|T|}$ der Nullvektor. Ist $\mathcal{N} = \langle S, T, F, W, \mathbf{m}_0 \rangle$ ein S/T-Netz mit Inzidenzmatrix $\Delta_{\mathcal{N}}$ und $i \in \mathbb{Z}^{|S|}$ eine ganzzahlige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\Delta'_{\mathcal{N}} \cdot i = \underline{0}$$

dann gilt $i' \cdot \mathbf{m} = i' \cdot \mathbf{m}_0$ für alle erreichbaren Markierungen $\mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N})$.

Beweis:
(durch Indukion über $\mathbf{R}(\mathcal{N})$):
Die Behauptung ist trivial für $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$.

Induktionsschluss:

$(\mathbf{m}_1 \xrightarrow{t} \mathbf{m}_2)$, *dann gilt:*

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_1 + \Delta_{\mathcal{N}}(t)$$

$$\begin{aligned} i' \cdot \mathbf{m}_2 &= i' \cdot (\mathbf{m}_1 + \Delta_{\mathcal{N}}(t)) \\ &= i' \cdot \mathbf{m}_1 + i' \cdot \Delta_{\mathcal{N}}(t) \\ &= i' \cdot \mathbf{m}_1 \\ &= i' \cdot \mathbf{m}_0 \end{aligned}$$

Definition 3.17 *Jede ganzzahlige Lösung* $i \in \mathbb{Z}^{|S|} \setminus \{\underline{0}\}$ *von* $\Delta_{\mathcal{N}}^{tr} \cdot i = \underline{0}$ *heißt* S-Invarianten-Vektor[8] *des* S/T*-Netzes* $\mathcal{N}$.

tr

$\mathcal{N}$	a	b	c	d	e	f
lok	-1	0	1	-1	0	1
la	1	-1	0	0	0	0
sa	0	0	0	1	-1	0
l	0	1	-1	0	0	0
s	0	0	0	0	1	-1
r	0	-1	1	0	$-n$	n

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$-u + v = 0 \quad \Rightarrow u = v$$

$$-v + x - z = 0 \quad \Rightarrow x = u + z$$

$$\cancel{u - x + z = 0}$$

$$-u + w = 0 \quad \Rightarrow u = v = w$$

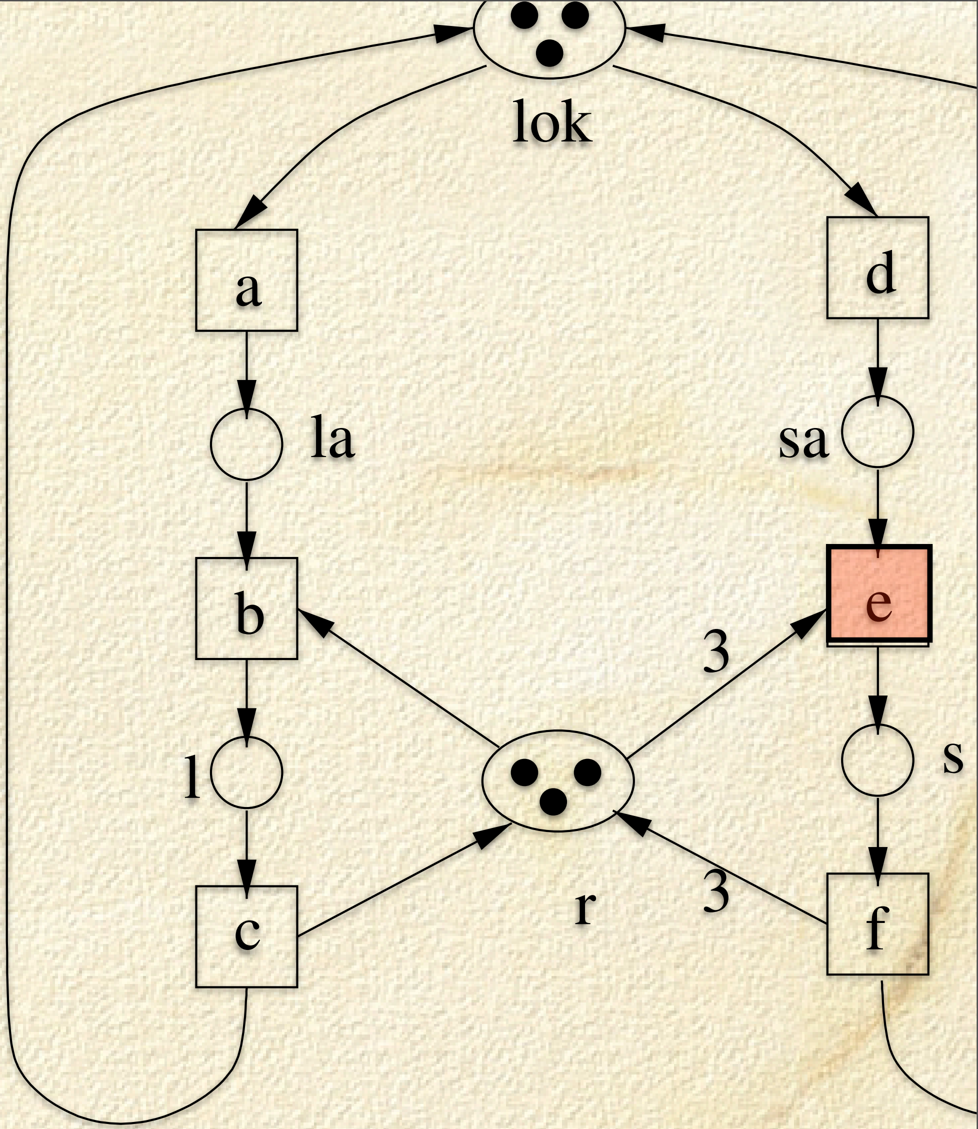
$$\cancel{w + y - n \cdot z = 0}$$

$$u - y + n \cdot z = 0 \quad \Rightarrow y = u + n \cdot z$$

$$\begin{pmatrix} u \\ u \\ u \\ u+z \\ u+nz \\ z \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ n \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $i_1 : \quad lok + la + sa + l + s = n$
- $i_2 : \quad l + r + n \cdot s = n$

- $i_1 : \quad lok + la + sa + l + s = n$
- $i_2 : \quad l + r + n \cdot s = n$



$$\begin{aligned} i'_2 \cdot \mathbf{m} &= 1 \cdot \mathbf{m}(l) + n \cdot \mathbf{m}(s) + 1 \cdot \mathbf{m}(r) = \\ i'_2 \cdot \mathbf{m}_0 &= 1 \cdot \mathbf{m}_0(l) + n \cdot \mathbf{m}_0(s) + 1 \cdot \mathbf{m}_0(r) \\ &= 1 \cdot 0 + n \cdot 0 + 1 \cdot n = n \end{aligned}$$

$\mathcal{N}$	a	b	c	d	e	f		i_1		i_2
lok	-1	0	1	-1	0	1		1		0
la	1	-1	0	0	0	0		1		0
sa	0	0	0	1	-1	0		1		0
l	0	1	-1	0	0	0		1		1
s	0	0	0	0	1	-1		1		n
r	0	-1	1	0	$-n$	n		0		1

Definition 3.17 *Jede ganzzahlige Lösung* $i \in \mathbb{Z}^{|S|} \setminus \{\underline{0}\}$ *von* $\Delta_{\mathcal{N}}^{tr} \cdot i = \underline{0}$ *heißt* S-Invarianten-Vektor[8] *des* S/T*-Netzes* $\mathcal{N}$.

Definition 3.18 *Jede Lösung* $j \in \mathbb{N}^{|T|} \setminus \{\underline{0}\}$ *von* $\Delta_{\mathcal{N}} \cdot j = \underline{0}$ *heißt* T-Invarianten-Vektor *des* S/T*-Netzes* $\mathcal{N}$.

$$\mathbf{m}_1 \xrightarrow{w} \mathbf{m}_2 \qquad w = t_{i_1} \ldots t_{i_k}$$

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_1 + \underbrace{\Delta_{\mathcal{N}}(t_{i_1}) + \Delta_{\mathcal{N}}(t_{i_2}) + \ldots + \Delta_{\mathcal{N}}(t_{i_k})}$$

Wann ist dieser Teil der Nullvektor?

Antwort:

falls $\Delta_{\mathcal{N}} \cdot j = \underline{0}$

$$j = \psi(w) := (|w|_{x_1}, |w|_{x_2}, \ldots, |w|_{x_k})$$

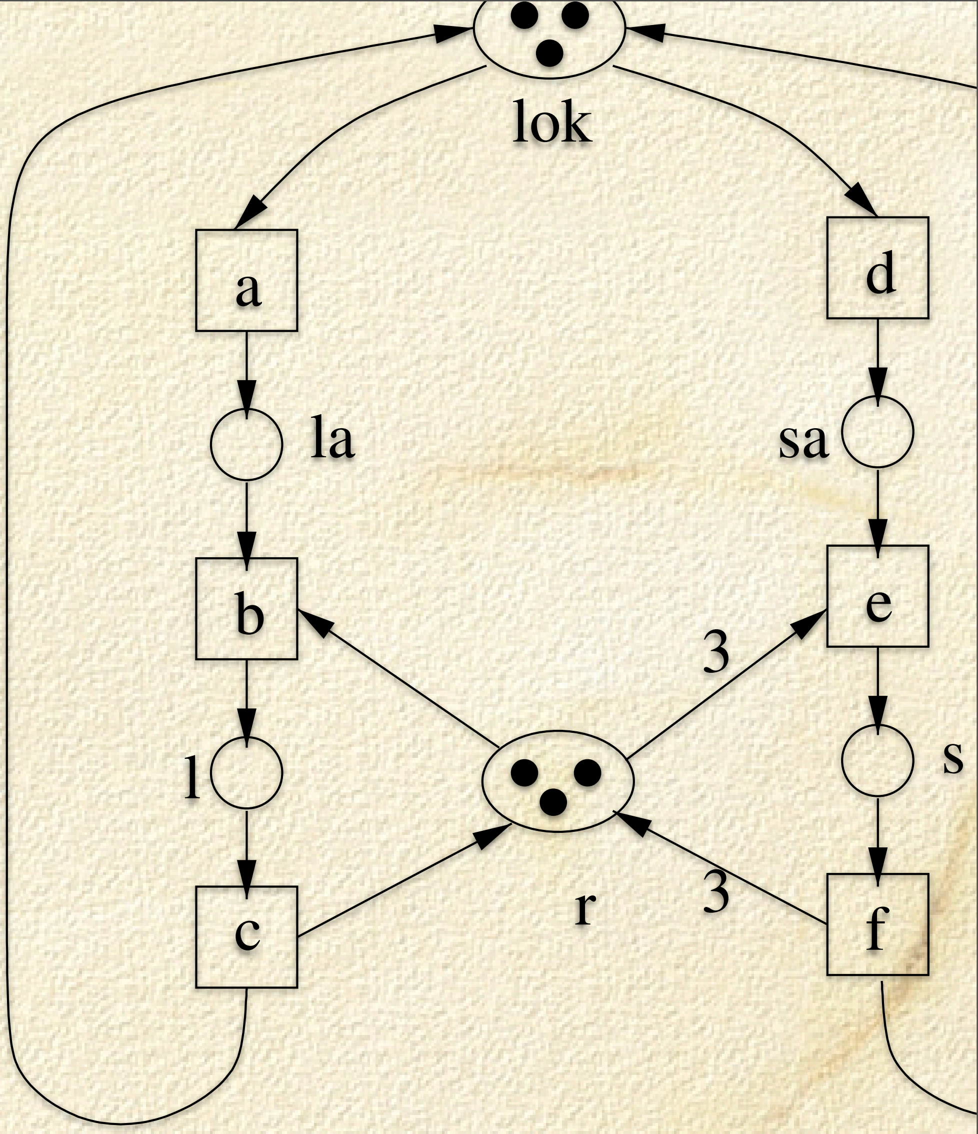
Satz 3.20 *Es seien* $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ *Markierungen und* $w = t_{i_1} \ldots t_{i_k}$ *eine Schaltfolge, die* $\mathbf{m}_1$ *in* $\mathbf{m}_2$ *überführt:* $\mathbf{m}_1 \xrightarrow{w} \mathbf{m}_2$. *Die Markierungen* $\mathbf{m}_1$ *und* $\mathbf{m}_2$ *sind genau dann gleich, wenn es einen T-Invarianten-Vektor* $j \in \mathbb{N}^{|T|}$ *derart gibt, dass jede Transition* $t_i \in T$ *genau* $j(i)$ *mal in* w *vorkommt, d.h.:* $j(i) = \psi(w)(i)$

Beispiel:

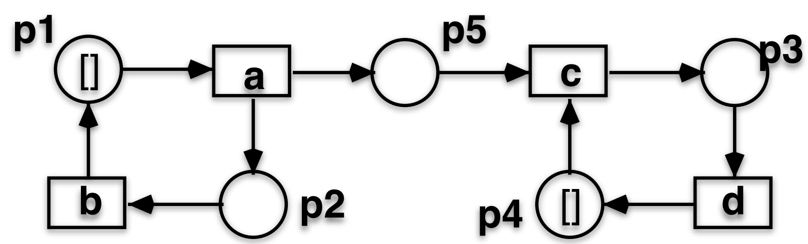
$\mathcal{N}$	a	b	c	d	e	f
lok	-1	0	1	-1	0	1
la	1	-1	0	0	0	0
sa	0	0	0	1	-1	0
l	0	1	-1	0	0	0
s	0	0	0	0	1	-1
r	0	-1	1	0	$-n$	n

1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1

j	3	3	3	2	2	2



Präsenzaufgabe 8.1: Überprüfe, ob das folgende Netz lebendig ist. Leider ist das Netz unbeschränkt, so dass wir den Algorithmus 3.1 nicht anwenden können, denn der konstruiert nur für beschränkte Netze den kompletten Erreichbarkeitsgraphen. Also muss Lebendigkeit auf anderem Wege nachgewiesen werden.



1. Zeige zunächst, dass es Invarianten i_1 und i_2 gibt, aus denen folgende Gleichungen für alle erreichbaren Markierungen m folgen (Bestimme auch die Konstanten c und c'.):

$$m(p_1) + m(p_2) = c \qquad m(p_3) + m(p_4) = c'$$

2. Zeige, dass alle erreichbaren Markierung von der folgenden Form sind: $(1,0,1,0,n)$, $(1,0,0,1,n)$, $(0,1,0,1,n)$ oder $(0,1,1,0,n)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

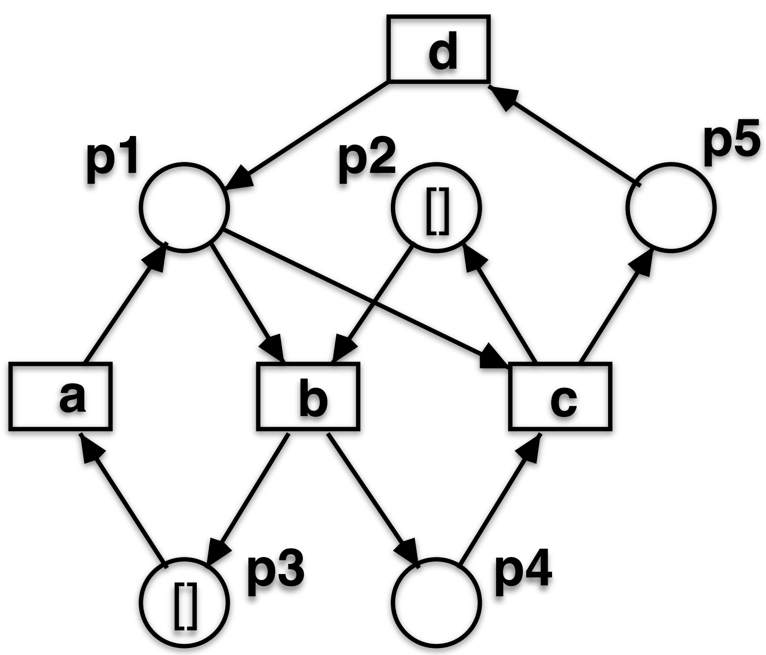
3. Beweise damit, dass N lebendig ist.

Präsenzaufgabe 7.1:

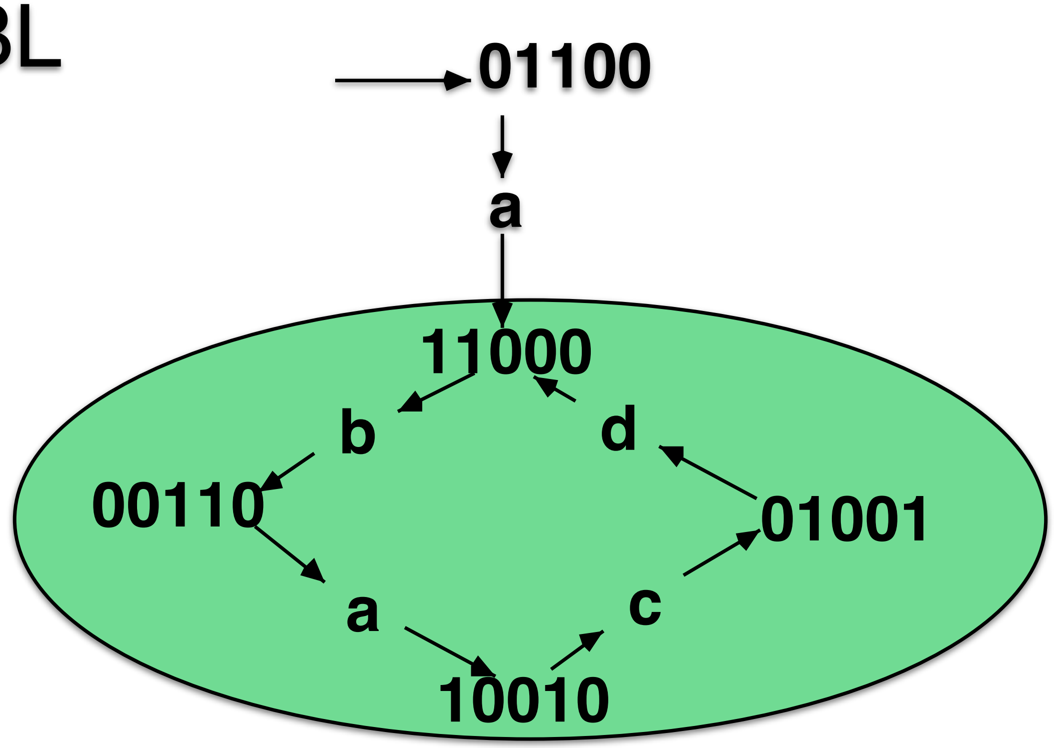
1. Konstruiere den Erreichbarkeitsgraphen nach Algorithmus 3.1 für das folgende Netz.
2. Teste mit einem geeigneten Algorithmus aus Kapitel 3, ob die Initialmarkierung ein Rücksetzzustand ist (Reversibilität). Gib ggf. die SZKs und die terminalen SZKs an.
3. Ist Reversibilität eine Markierungs- oder Lebendigkeitsinvarianz? Gib das dazugehörige Prädikat $\pi(m)$ an!

Lösung: Es handelt sich um das $BL\bar{R}$-Beispiel aus dem Skript.

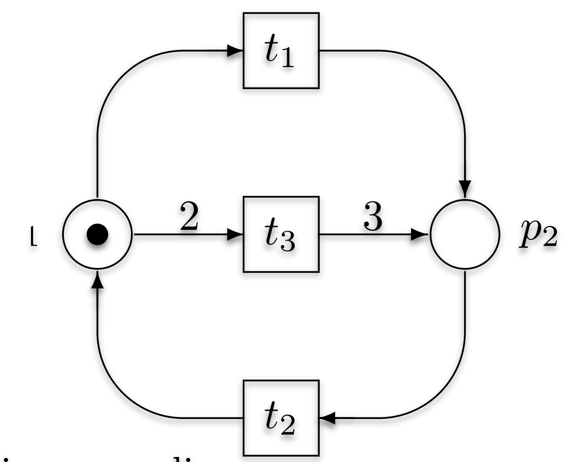
[h=$BL\bar{R}$] Der RG-Graph ist endlich. Die terminale SZK enthält alle Transitionen. Die Initialmarkierung ist von keiner anderen Markierung aus erreichbar, daher ist N nicht reversibel.



h) BL



Präsenzaufgabe 8.2: Gegeben sei das folgende P/T Netz:



1. Sei i eine S-Invariante des Netzes. Gilt dann für alle erreichbaren Markierungen m die folgende, von i abgeleitete Invariantengleichung?

$$i(p_1) \cdot m(p_1) + i(p_2) \cdot m(p_2) = const.$$

Lösung: Ja, dies ist der Satz von Lautenbach.

2. Zeige, dass für alle aus der Anfangsmarkierung $m_0 = (1,0)$ erreichbaren Markierungen die folgende Invariantengleichung gilt:

$$1 \cdot m(p_1) + 1 \cdot m(p_2) = 1 \cdot m_0(p_1) + 1 \cdot m_0(p_2) = 1$$

3. Zeige, dass der zur Gleichung zugehörige Vektor $i = (1,1)^{tr}$ jedoch *kein* Invariantenvektor ist. Erläutere die Ursachen!

Lösung: Mit $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ folgt $\Delta^{tr} i = (0,0,1)^{tr} \neq 0$. Man beachte, dass für dieses Beispiel die Anfangsmarkierung gerade so gewählt ist, dass in keiner erreichbaren Markierung t_3 aktiviert ist. Für eine andere Anfangsmarkierung, z.B. $m = (2,0,0)^{tr}$ ist t_3 aktiviert, und die Invariantengleichung ist ungültig.