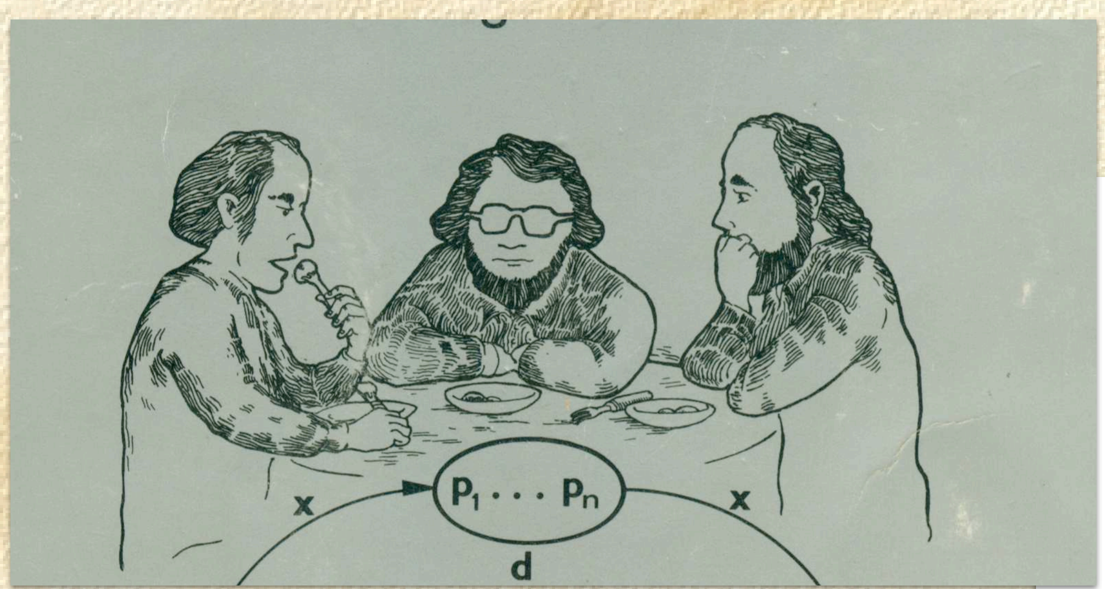
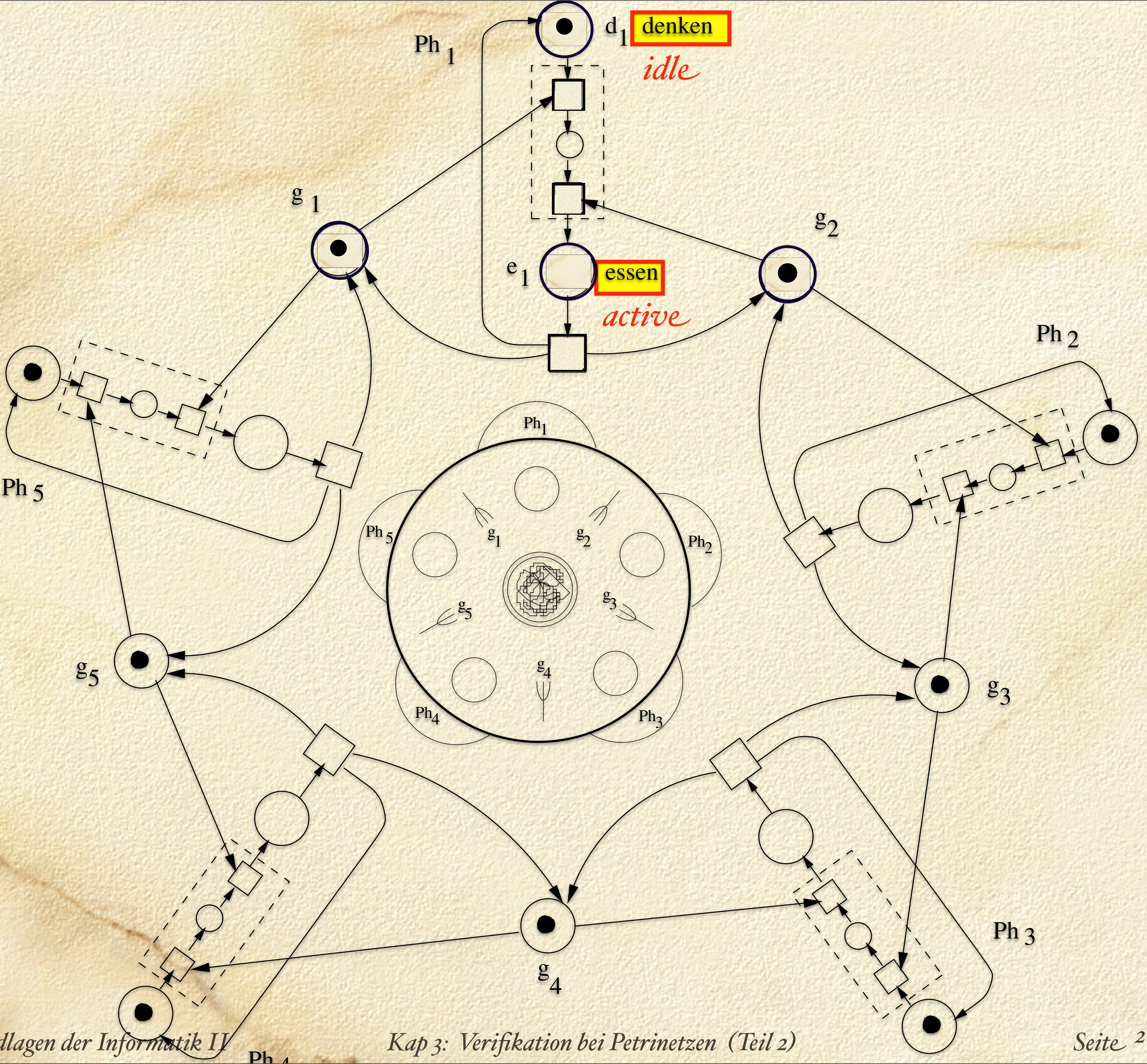
3.4 Fairness und Netzinvarianten



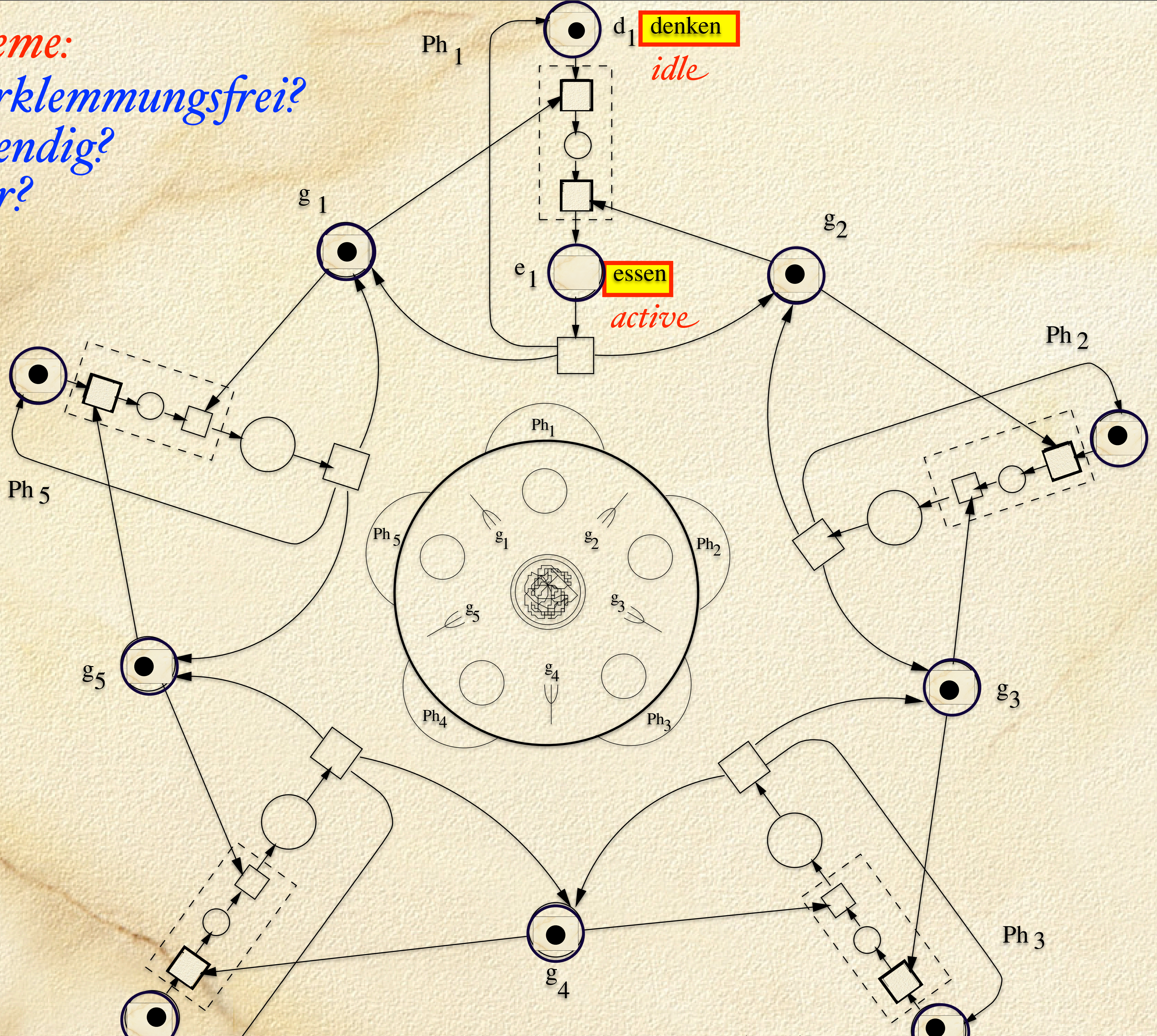

Ph 1
d 1
denken
idle
e 1
essen
active
g 1
g 2
Ph 2
Ph 5
g 5
g 3
g 4
Ph 3
Ph 4
Ph1
Ph2
Ph3
Ph4
Ph5
g1
g2
g3
g4
g5

Probleme:

verklemmungsfrei?

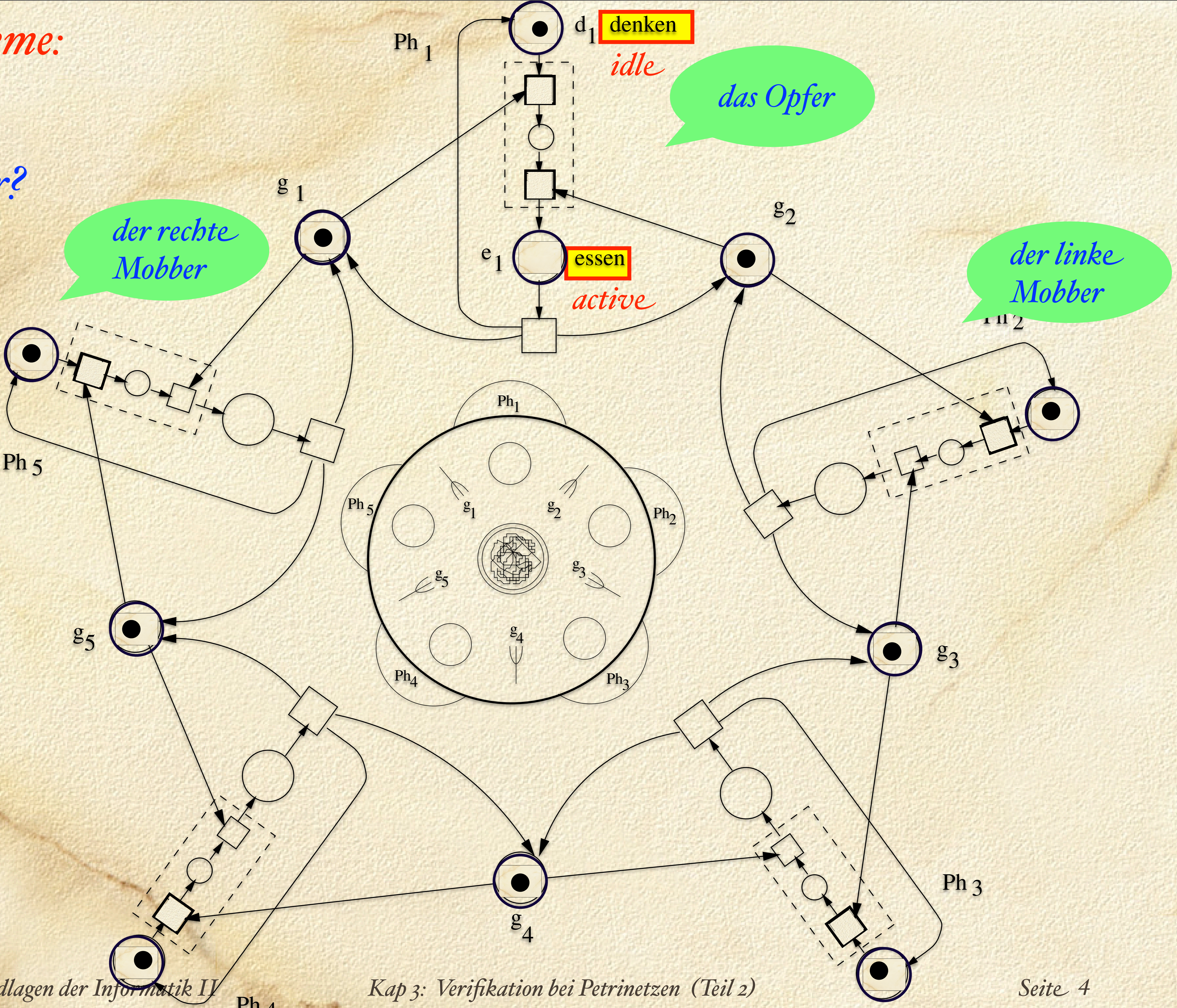
lebendig?

fair?



Probleme:

fair?



faire Schaltregel ➡ *faires Verhalten*

?

lokales Verhalten ➡ *globales Verhalten*

?

Definition 3.9 *Ein S/T-Netz*[5] $\mathcal{N} = \langle S, T, F, W, \mathbf{m}_0 \rangle$ *hat ein* faires Verhalten, *oder verhält sich* fair *(behaves fairly), wenn in jeder unendlichen Schaltfolge* $w \in F_\omega(\mathcal{N})$ *jede Transition* $t \in T$ *unendlich oft vorkommt. Dabei bedeutet* $F_\omega(\mathcal{N}) := \{w = a_1a_2a_3\cdots \in T^\omega | \forall i \in Nat^+ : a_1a_2a_3\cdots a_i \in FS(\mathcal{N})\}$ *(Definition von* $FS(\mathcal{N})$ *siehe Definition 2.9 auf Seite 46).*

Wir vergleichen die wichtigen Begriffe der Lebendigkeit und Fairness.

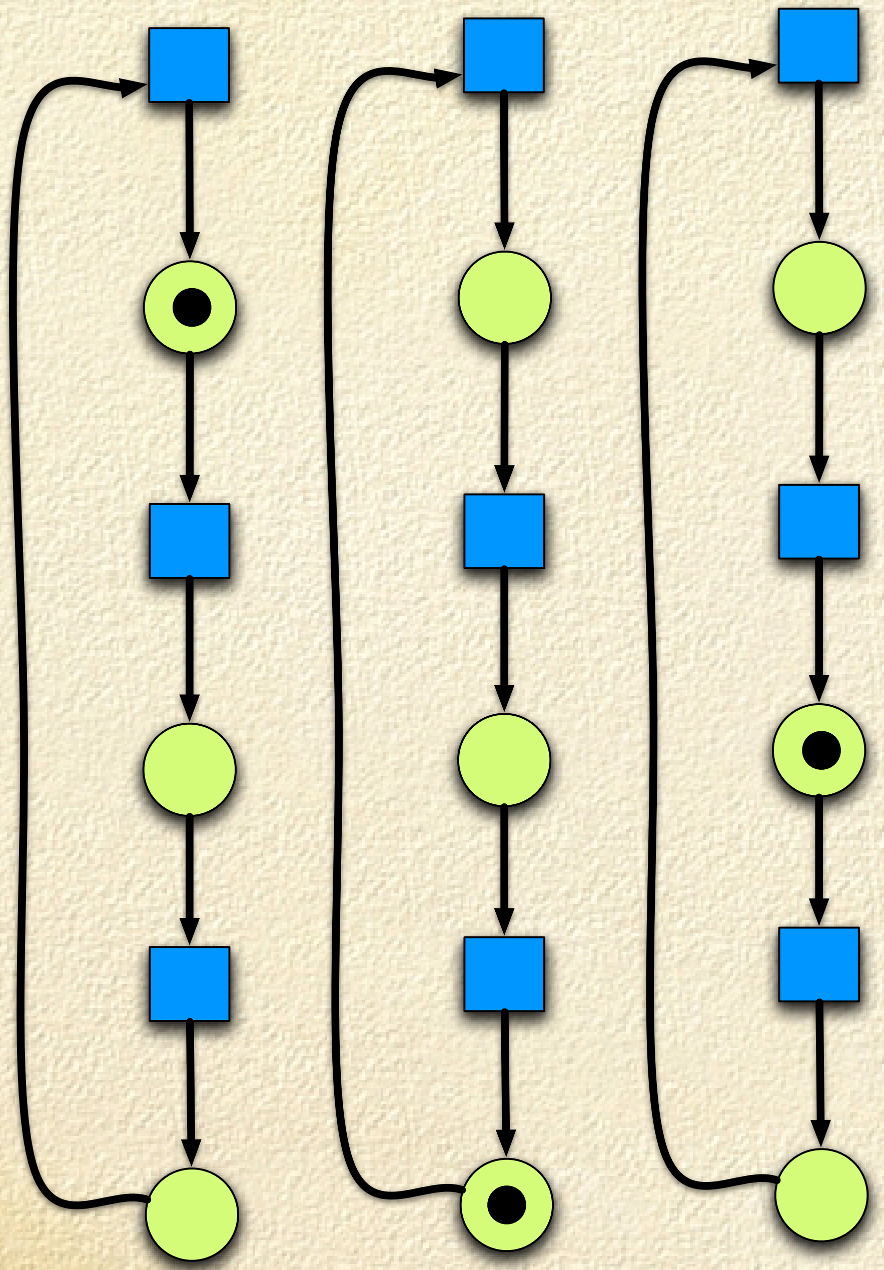
a) Lebendigkeit bedeutet Freiheit von *unvermeidbaren* partiellen Verklemmungen.

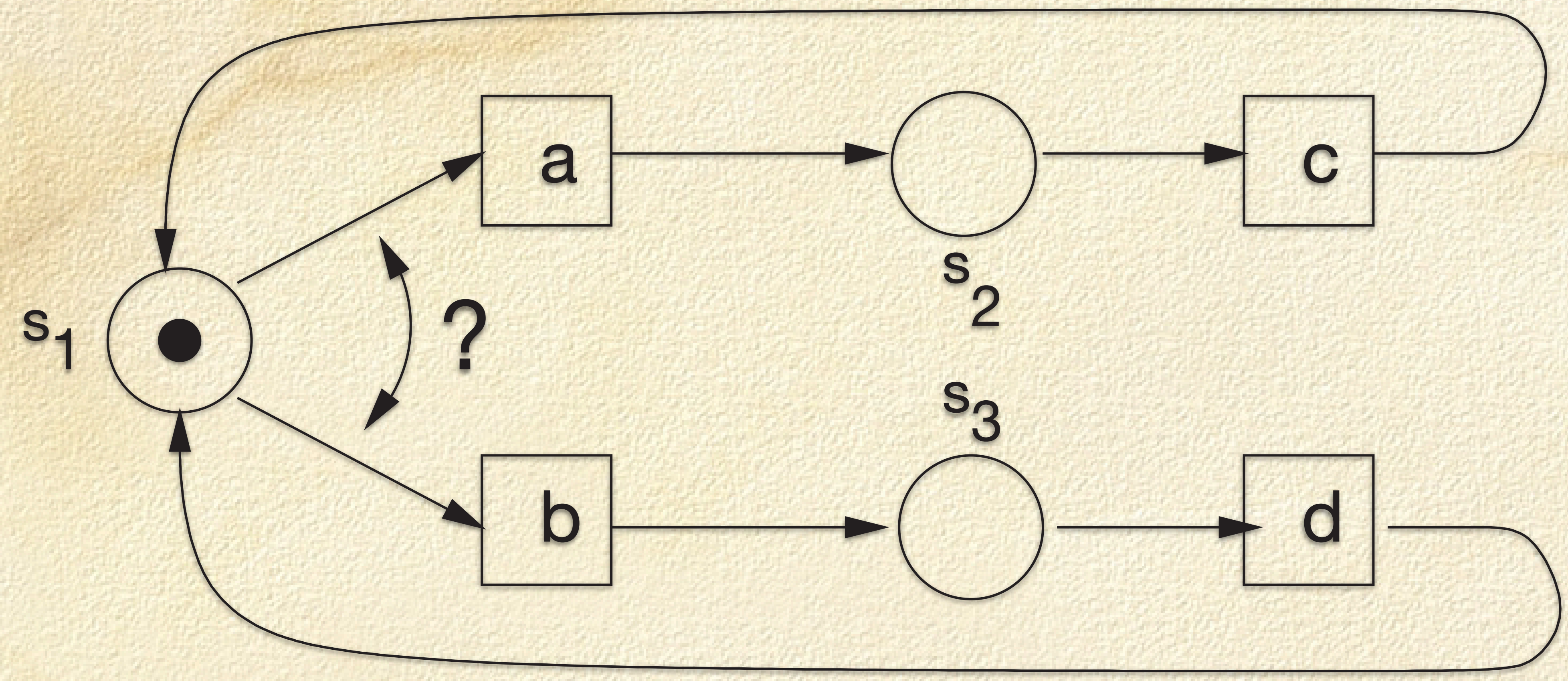
b) Fairness bedeutet Freiheit von *faktischen* partiellen Verklemmungen.

Definition 3.10 *Es sei* $\mathcal{N} = \langle S, T, F, W, \mathbf{m}_0 \rangle$ *ein* S/T*-Netz.*

a) $\mathcal{N}$ *schaltet* produktiv *oder* verschleppungsfrei *oder* nach der verschleppungsfreien Schaltregel *(finite delay property), wenn*

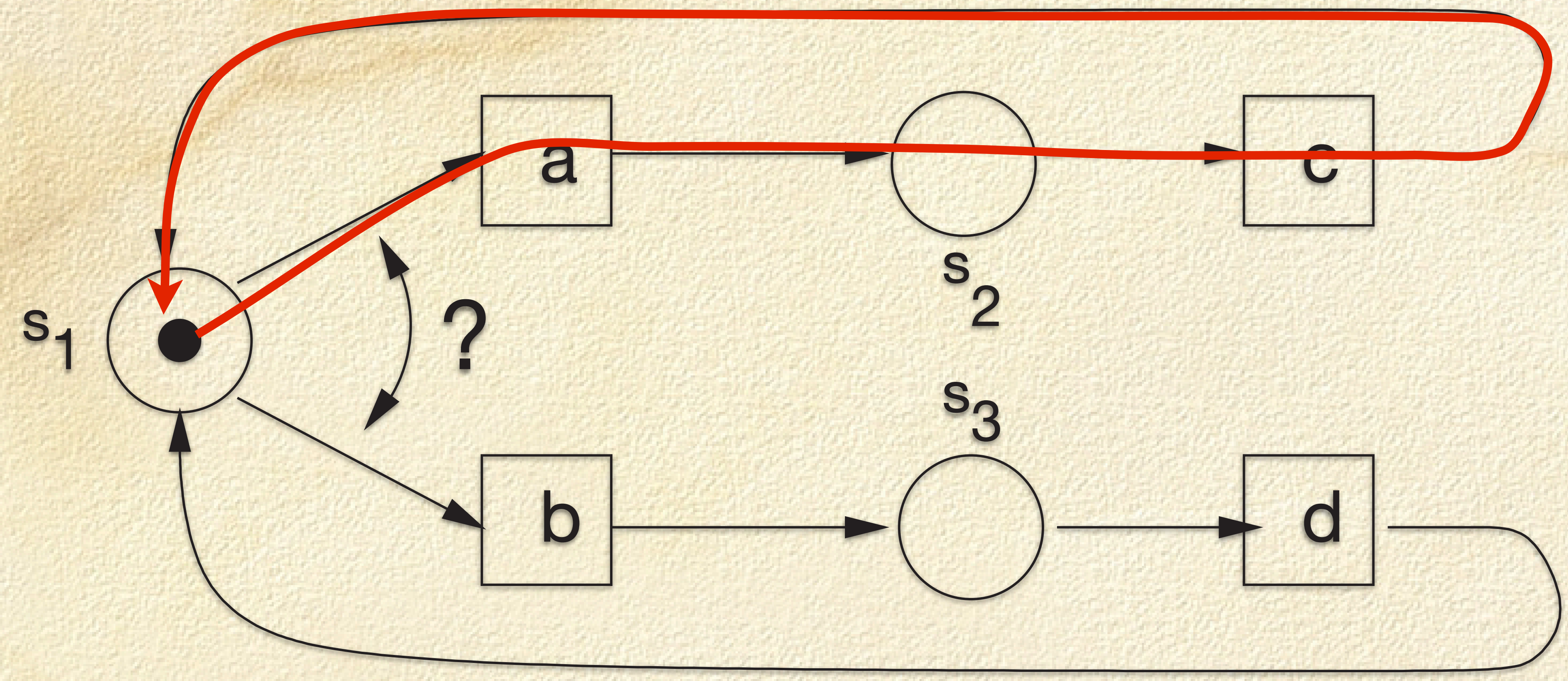
$$\forall t \in T \; \forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}) \; \neg \exists w \in T^{\omega} : \mathbf{m} \xrightarrow{w} \wedge t \textit{ ist bei } w \textit{ permanent aktiviert } \wedge |w|_t = 0$$





b) $\mathcal{N}$ *schaltet* fair, *oder* nach der fairen Schaltregel *(fair firing rule)*, *wenn*

$$\forall t \in T\ \forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N})\ \neg \exists w \in T^\omega : \mathbf{m} \xrightarrow{w} \wedge\ t \textit{ ist bei } w \textit{ unendlich oft aktiviert } \wedge |w|_t = 0$$



a) Das Netz von Abb. 3.11 ist zwar lebendig, hat aber auch unter der verschleppungsfreien Schaltregel kein faires Verhalten (*ac ac* … ist immer noch möglich). Das Netz verhält sich jedoch fair bei der fairen Schaltregel.

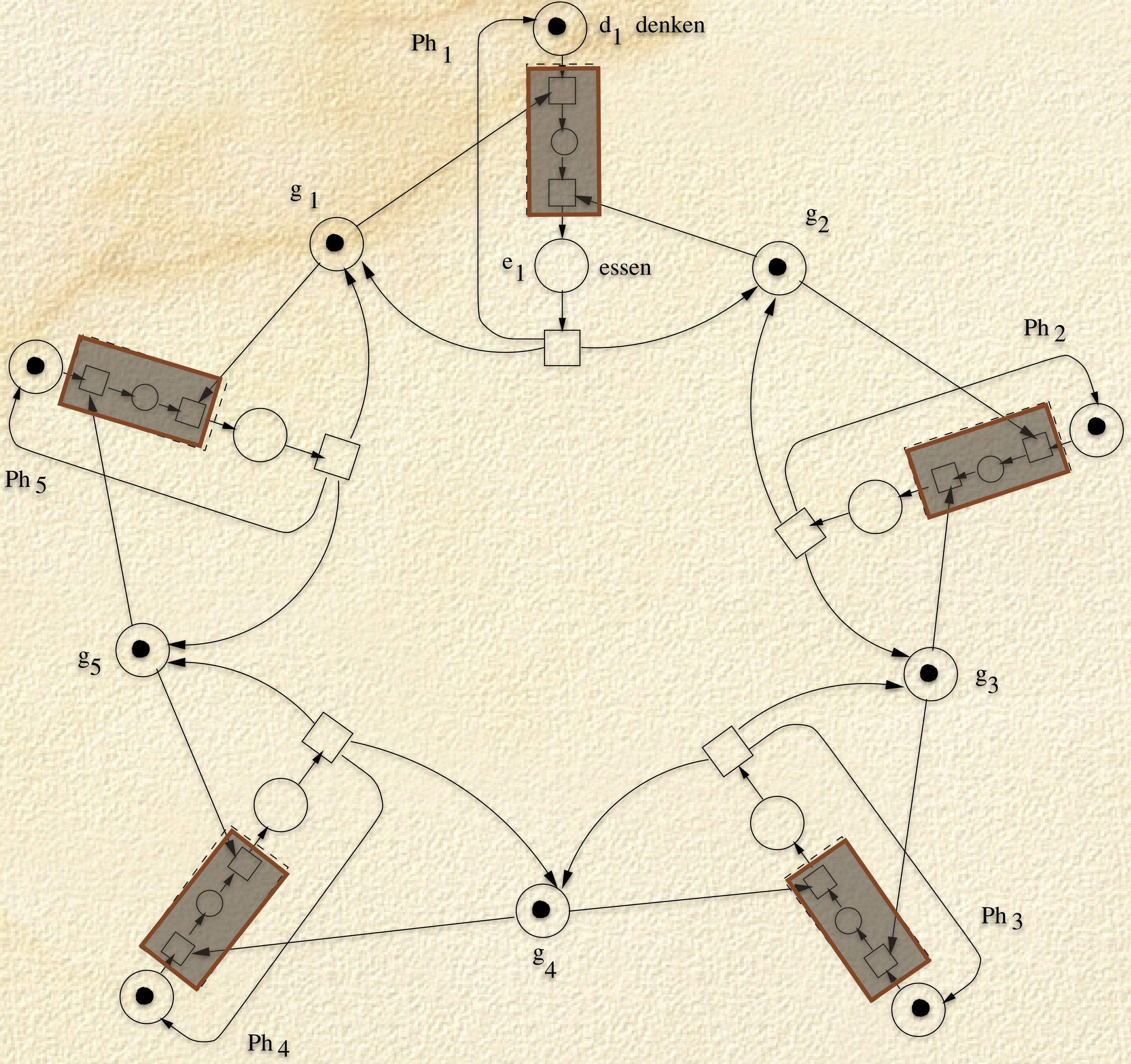
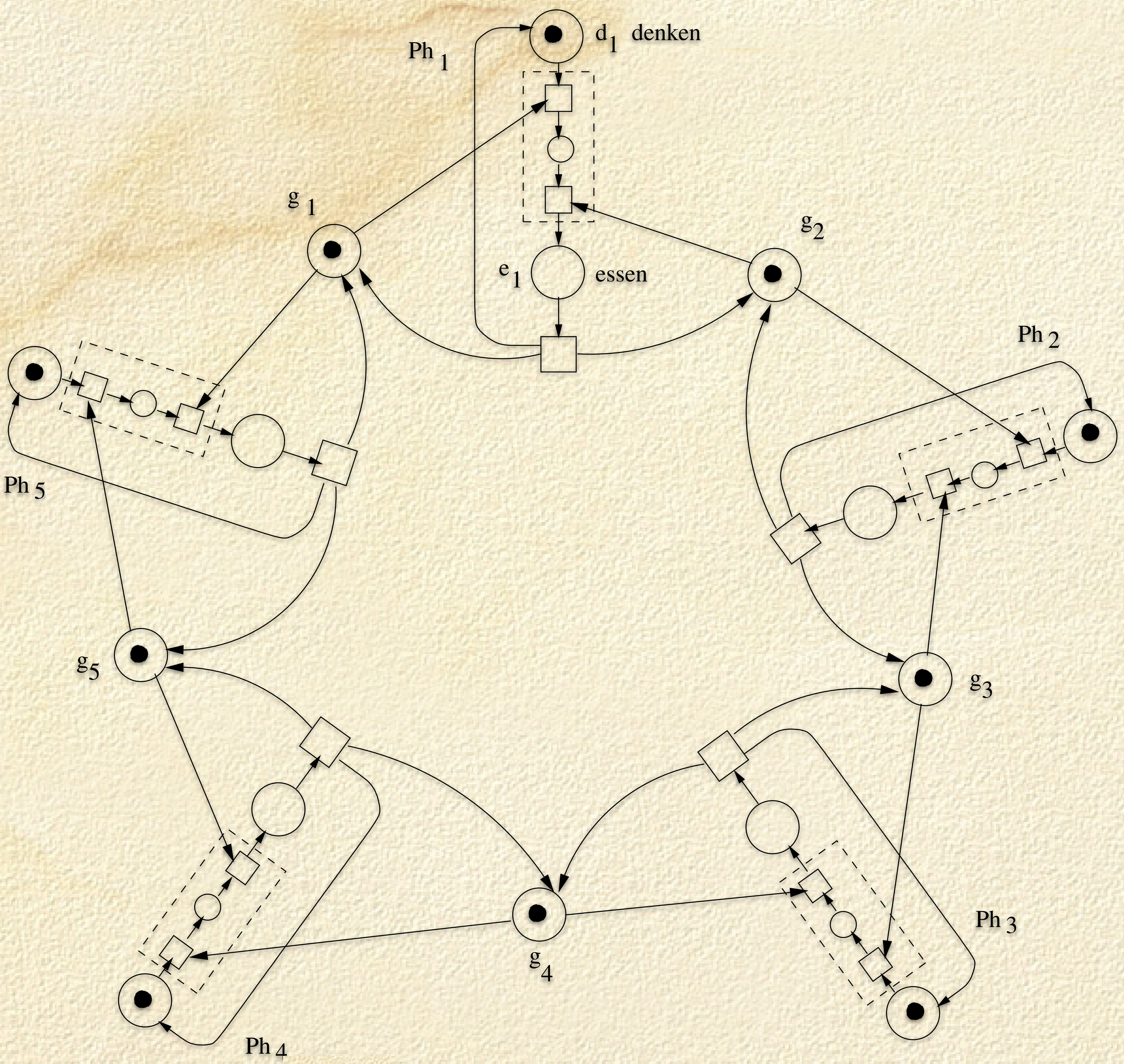


Abbildung 3.11 Die fünf Philosophen als S/T-Netz

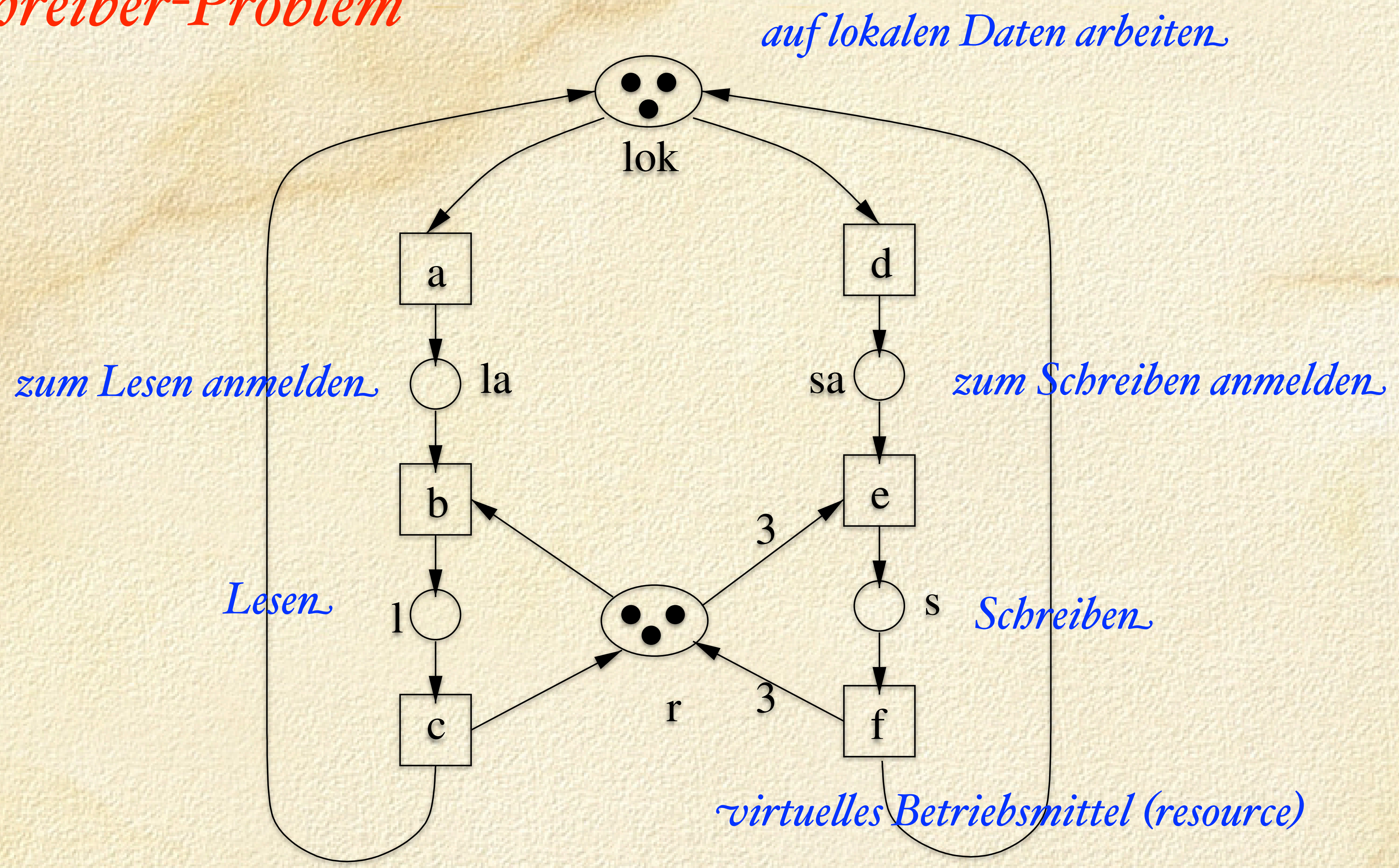
b) Das Netz von Abb 3.11 mit der vergröberten, und daher unteilbaren Transition ist lebendig. Es hat aber weder unter der verschleppungsfreien noch unter der fairen Schaltregel ein faires Verhalten.



c) Das Netz von Abb 3.11 ohne Vergröberung ist nicht lebendig. Unter der fairen Schaltregel hat es jedoch ein faires Verhalten. Verhindert man die Verklemmung durch andere Maßnahmen, z.B. indem man höchstens 4 Philosophen in den Essraum lässt (Abb. 3.13), dann ist das Netz lebendig und fair bei der fairen Schaltregel.

3.4.2 Netzinvarianten

"Leser-Schreiber-Problem"

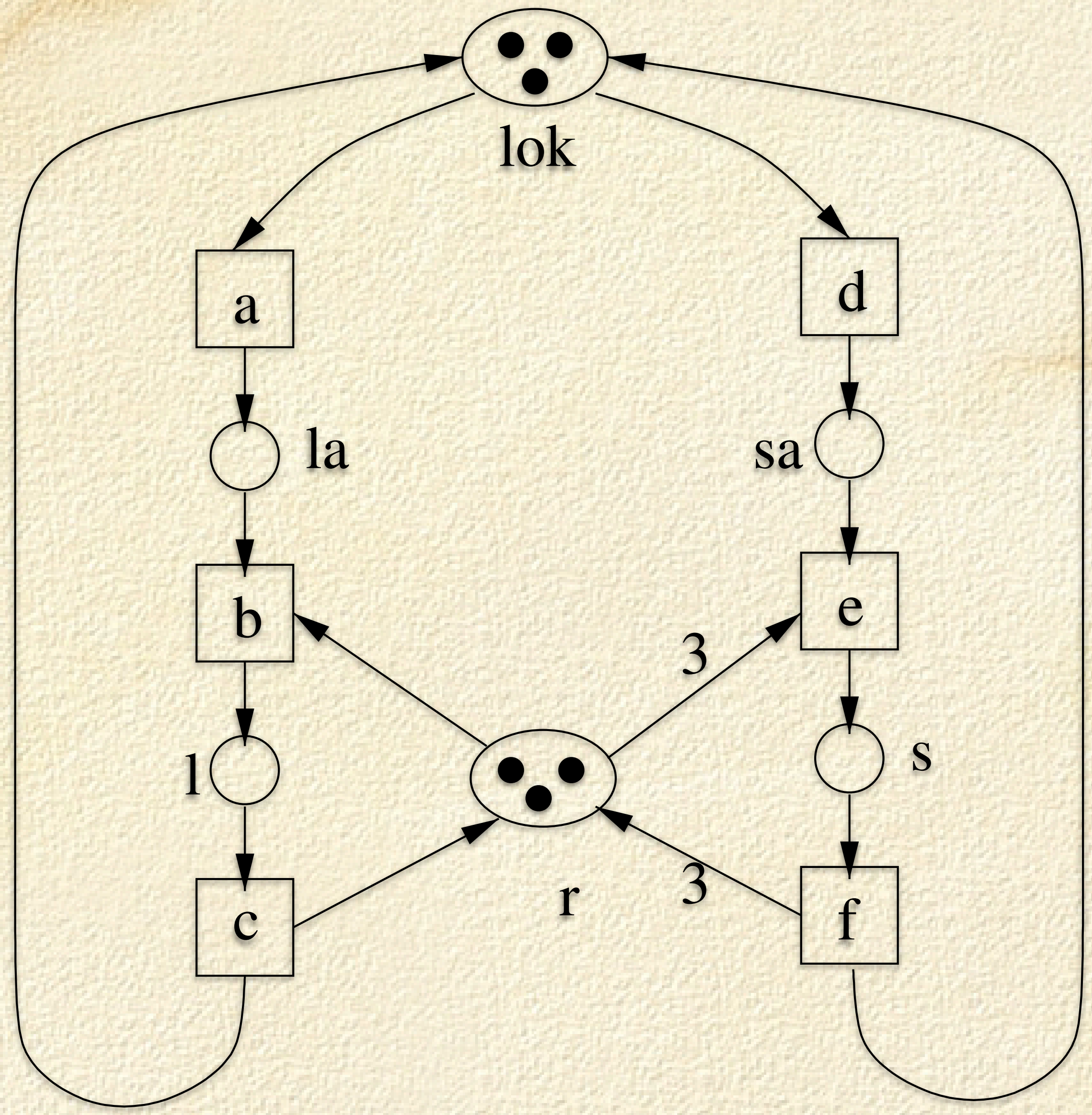


Die Auftragsbescheibungen können z. B. so beschaffen sein, dass folgende serielle Prozesse ablaufen :

1.) *a a d e f b b c c a*

2.) *a d a e f b c a b c*

3.) *d a a e f b b c a c*



Spezifikation:

Für alle erreichbaren Markierungen $\mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N})$ soll also gelten:

a) $\mathbf{m}(s) > 0 \rightarrow \mathbf{m}(l) = 0$

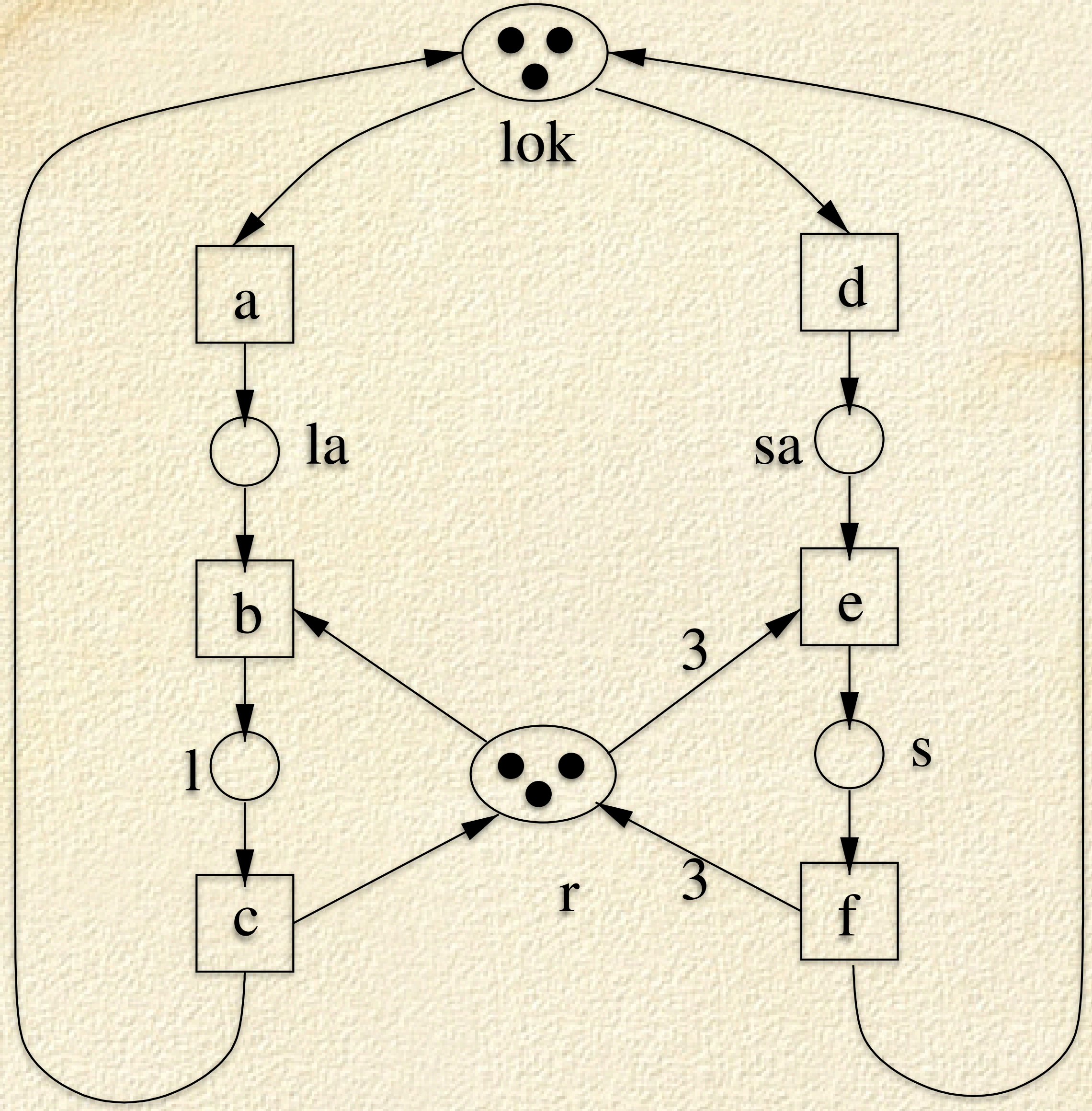
b) $\mathbf{m}(s) \leq 1$

c) $\mathbf{m}(l) > 0 \rightarrow \mathbf{m}(s) = 0$

a) Wenn ein Schreiber schreibt, darf kein Leser lesen

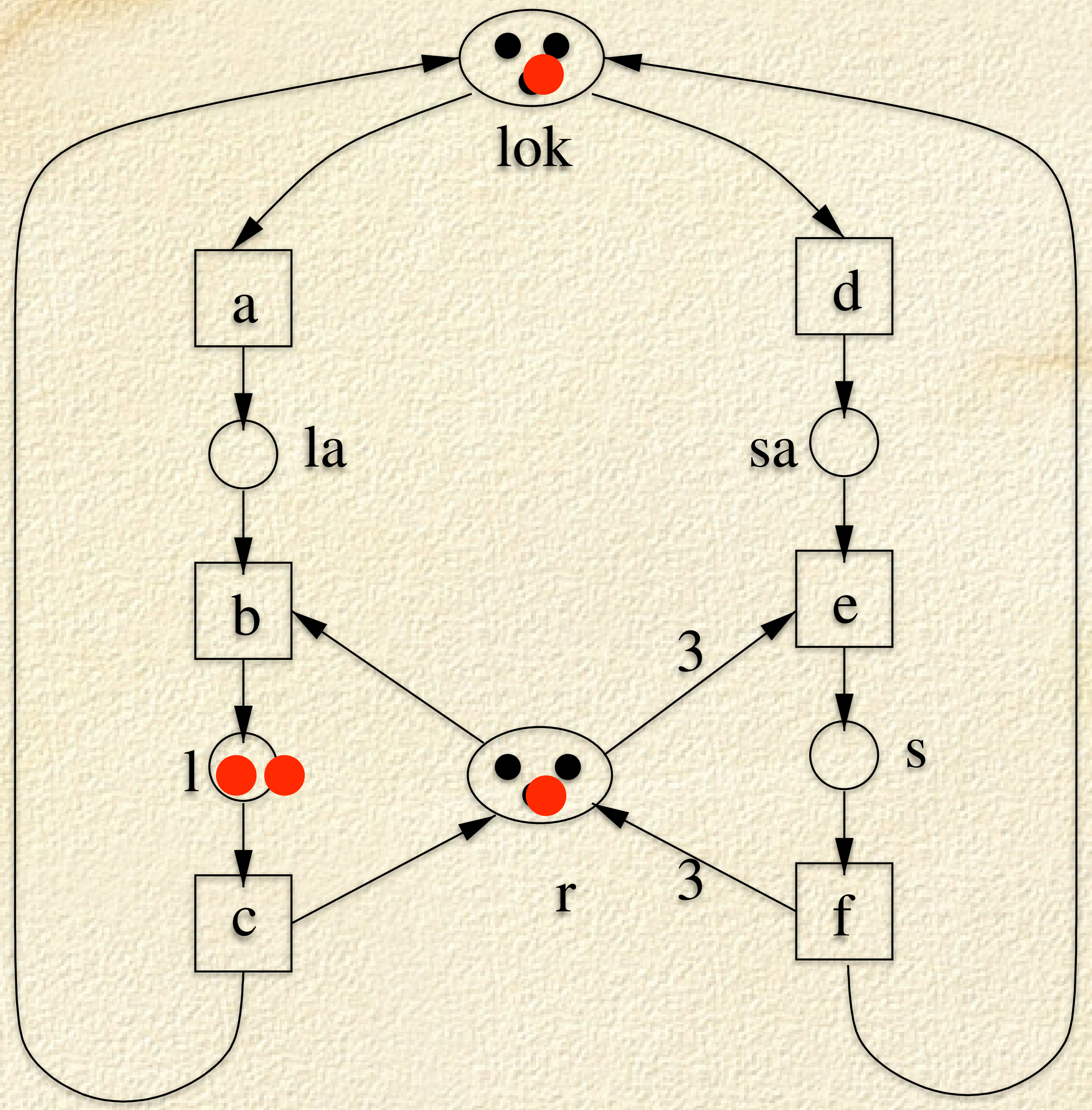
b) Es darf höchstens ein Schreiber schreiben

c) Wenn ein Leser liest, darf kein Schreiber schreiben



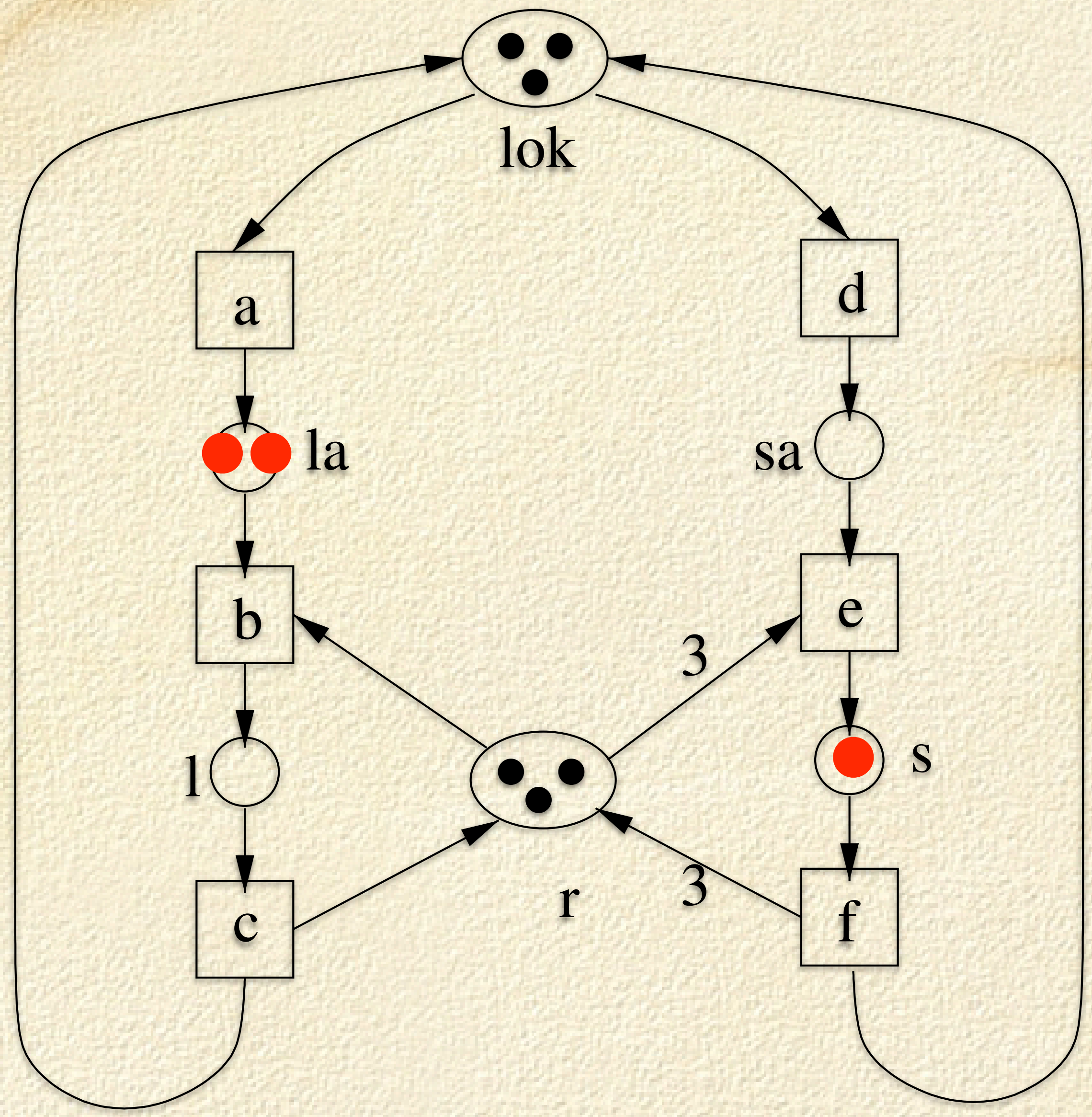
- $i_1: \quad lok + la + sa + l + s = n$
- $i_2: \quad l + r + \underset{3}{n} \cdot s = \underset{3}{n}$

($lok, la, \ldots$ stehen hier abkürzend für $\mathbf{m}(lok), \mathbf{m}(la), \ldots$)



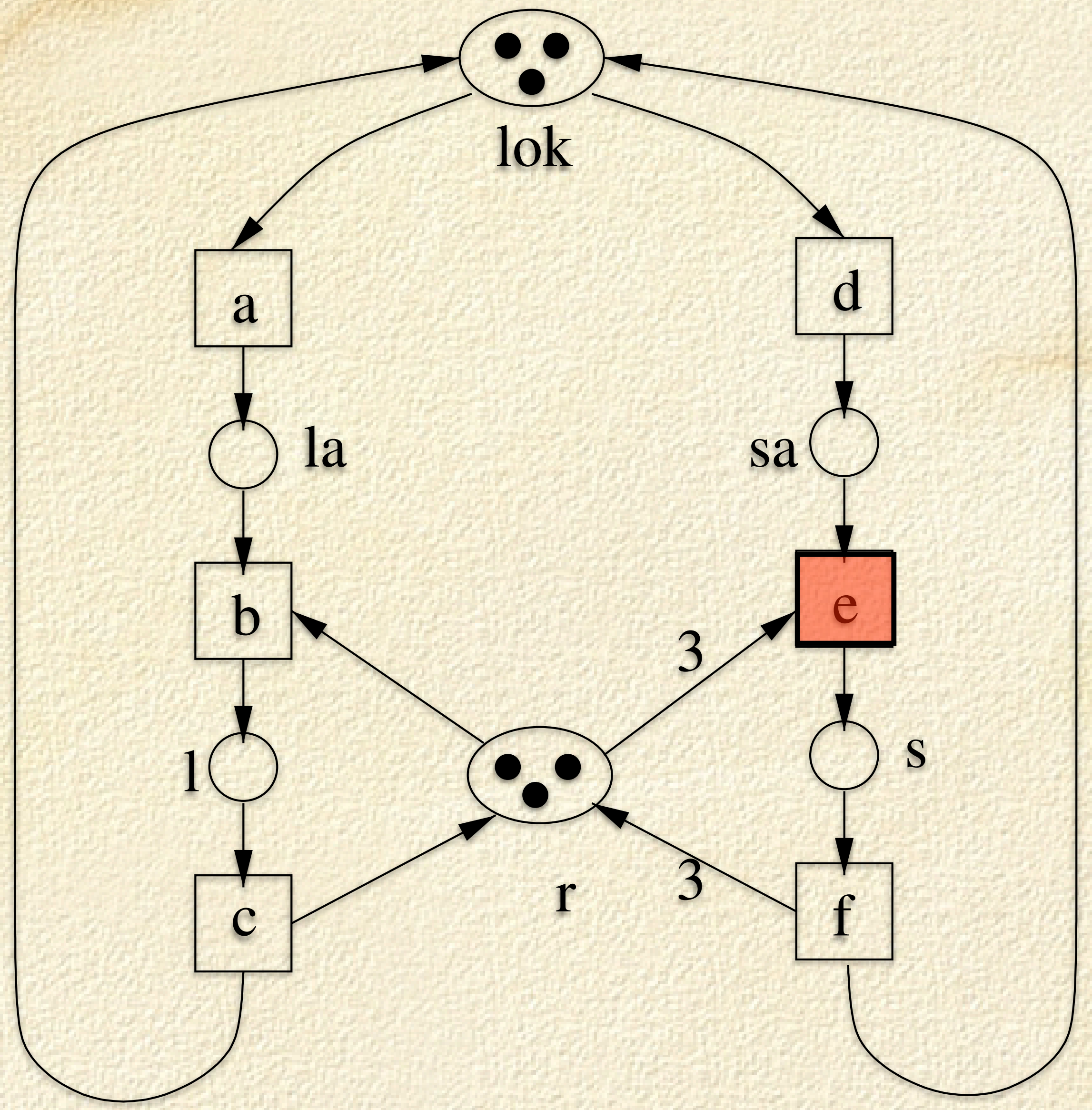
- $i_1: \quad lok + la + sa + l + s = n$
- $i_2: \quad l + r + \underset{3}{n} \cdot s = \underset{3}{n}$

($lok, la, \ldots$ stehen hier abkürzend für $\mathbf{m}(lok), \mathbf{m}(la), \ldots$)



- $i_1: \quad lok + la + sa + l + s = n$
- $i_2: \quad l + r + \underset{3}{n} \cdot s = \underset{3}{n}$

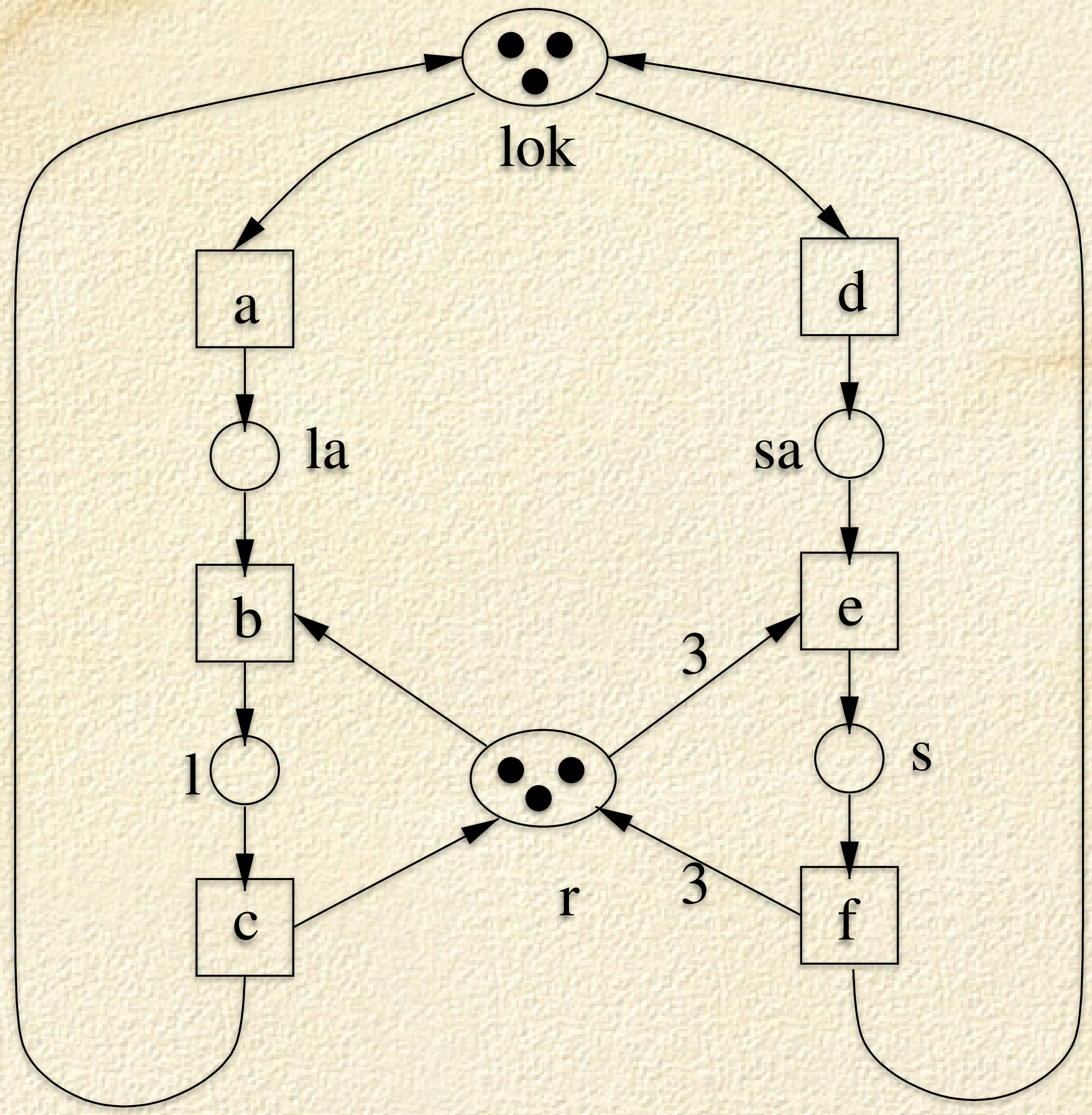
$(lok, la, \ldots$ stehen hier abkürzend für $\mathbf{m}(lok), \mathbf{m}(la), \ldots)$



$$\bullet\ i_1: \quad lok + la + \overset{-1}{sa} + l + \overset{+1}{s} = n$$

$$\bullet\ i_2: \quad l + \underset{-3}{r} + n \cdot \underset{+1}{s} = n$$

($lok, la, \ldots$ stehen hier abkürzend für $\mathbf{m}(lok), \mathbf{m}(la), \ldots$)



Spezifikation:

Für alle erreichbaren Markierungen $\mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N})$ soll also gelten:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{a)} & \mathbf{m}(s) > 0 \rightarrow \mathbf{m}(l) = 0 \\ \text{b)} & \mathbf{m}(s) \leq 1 \\ \text{c)} & \mathbf{m}(l) > 0 \rightarrow \mathbf{m}(s) = 0 \end{array}}$$

$\Leftarrow$

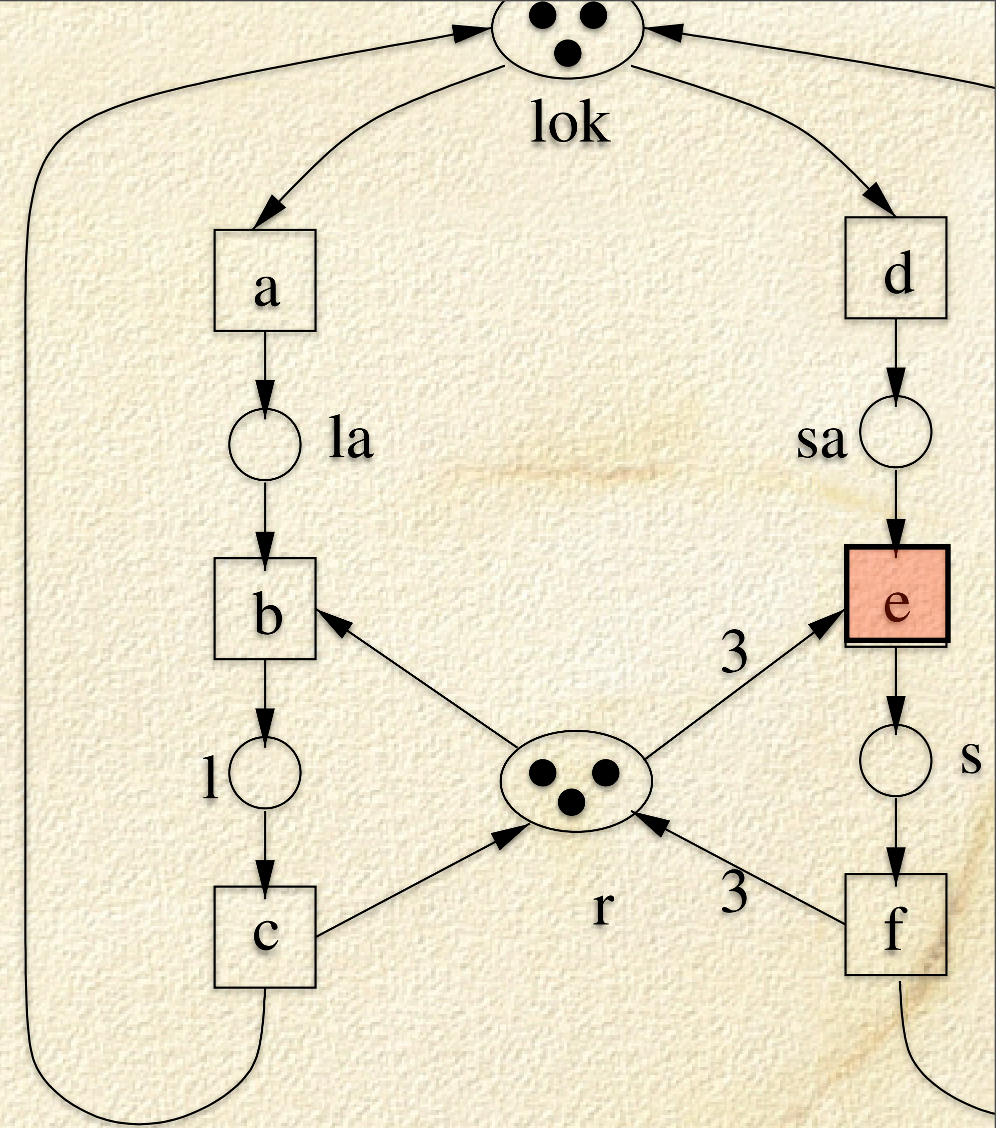
- $i_1 : \quad lok + la + sa + l + s = n$
- $i_2 : \quad l + r + n \cdot s = n$

- $i_1 : \quad lok + la + sa + l + s = n$
- $i_2 : \quad l + r + n \cdot s = n$

Definition 3.13 *Es sei $\mathcal{N} = \langle S, T, F, W, \mathbf{m}_0 \rangle$ ein S/T-Netz mit $S = \{s_1, \ldots, s_p\}$. Eine Gleichung der Form $\boxed{\sum_{i=1}^{p} k_i \cdot \mathbf{m}(s_i) = k}$ mit $k_i, k \in \mathbb{Z}$ heißt S-Invarianten-Gleichung[6], wenn sie für alle in $\mathcal{N}$ erreichbaren Markierungen $\mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N})$ gilt. Abkürzend wird sie auch als $\boxed{\sum_{i=1}^{p} k_i \cdot s_i = k}$ geschrieben.*

Inzidenzmatrix $\Delta_{\mathcal{N}}$

Wirkungsmatrix



$$\Delta_{\mathcal{N}}(t)(s) = -\widetilde{W}(s,t) + \widetilde{W}(t,s)$$

$-\widetilde{W}(\bullet,e)+\widetilde{W}(e,\bullet)$

$\mathcal{N}$	a	b	c	d	e	f
lok	-1	0	1	-1	0	1
la	1	-1	0	0	0	0
sa	0	0	0	1	-1	0
l	0	1	-1	0	0	0
s	0	0	0	0	1	-1
r	0	-1	1	0	$-n$	n

$(\mathbf{m}_1 \xrightarrow{t} \mathbf{m}_2)$, *dann gilt:*

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_1 + \Delta_{\mathcal{N}}(t)$$

Satz 3.16 *(Lautenbach)*
Es sei M' *die Transponierte einer Matrix* M *und* $\underline{0} \in \mathbb{Z}^{|T|}$ *der Nullvektor. Ist* $\mathcal{N} = \langle S, T, F, W, \mathbf{m}_0 \rangle$ *ein* S/T*-Netz mit Inzidenzmatrix* $\Delta_{\mathcal{N}}$ *und* $i \in \mathbb{Z}^{|S|}$ *eine ganzzahlige Lösung des linearen Gleichungssystems*

$$\Delta'_{\mathcal{N}} \cdot i = \underline{0}$$

dann gilt $i' \cdot \mathbf{m} = i' \cdot \mathbf{m}_0$ *für alle erreichbaren Markierungen* $\mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N})$.

Beweis:
(durch Indukion über $\mathbf{R}(\mathcal{N})$):
Die Behauptung ist trivial für $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$.

Induktionsschluss:

$(\mathbf{m}_1 \xrightarrow{t} \mathbf{m}_2)$, *dann gilt:*

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_1 + \Delta_{\mathcal{N}}(t)$$

$$\begin{aligned} i' \cdot \mathbf{m}_2 &= i' \cdot (\mathbf{m}_1 + \Delta_{\mathcal{N}}(t)) \\ &= i' \cdot \mathbf{m}_1 + i' \cdot \Delta_{\mathcal{N}}(t) \\ &= i' \cdot \mathbf{m}_1 \\ &= i' \cdot \mathbf{m}_0 \end{aligned}$$

Definition 3.17 *Jede ganzzahlige Lösung* $i \in \mathbb{Z}^{|S|} \setminus \{\underline{0}\}$ *von* $\Delta_{\mathcal{N}}^{tr} \cdot i = \underline{0}$ *heißt* S-Invarianten-Vektor[8] *des* S/T*-Netzes* $\mathcal{N}$.

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} \mathcal{N} & a & b & c & d & e & f \\ \hline lok & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ la & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sa & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ l & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ r & 0 & -1 & 1 & 0 & -n & n \end{array}\right)^{\mathbf{tr}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$-u + v = 0 \qquad \Rightarrow u = v$$

$$-v + x - z = 0 \qquad \Rightarrow x = u + z$$

$$\cancel{u - x + z = 0}$$

$$-u + w = 0 \qquad \Rightarrow u = v = w$$

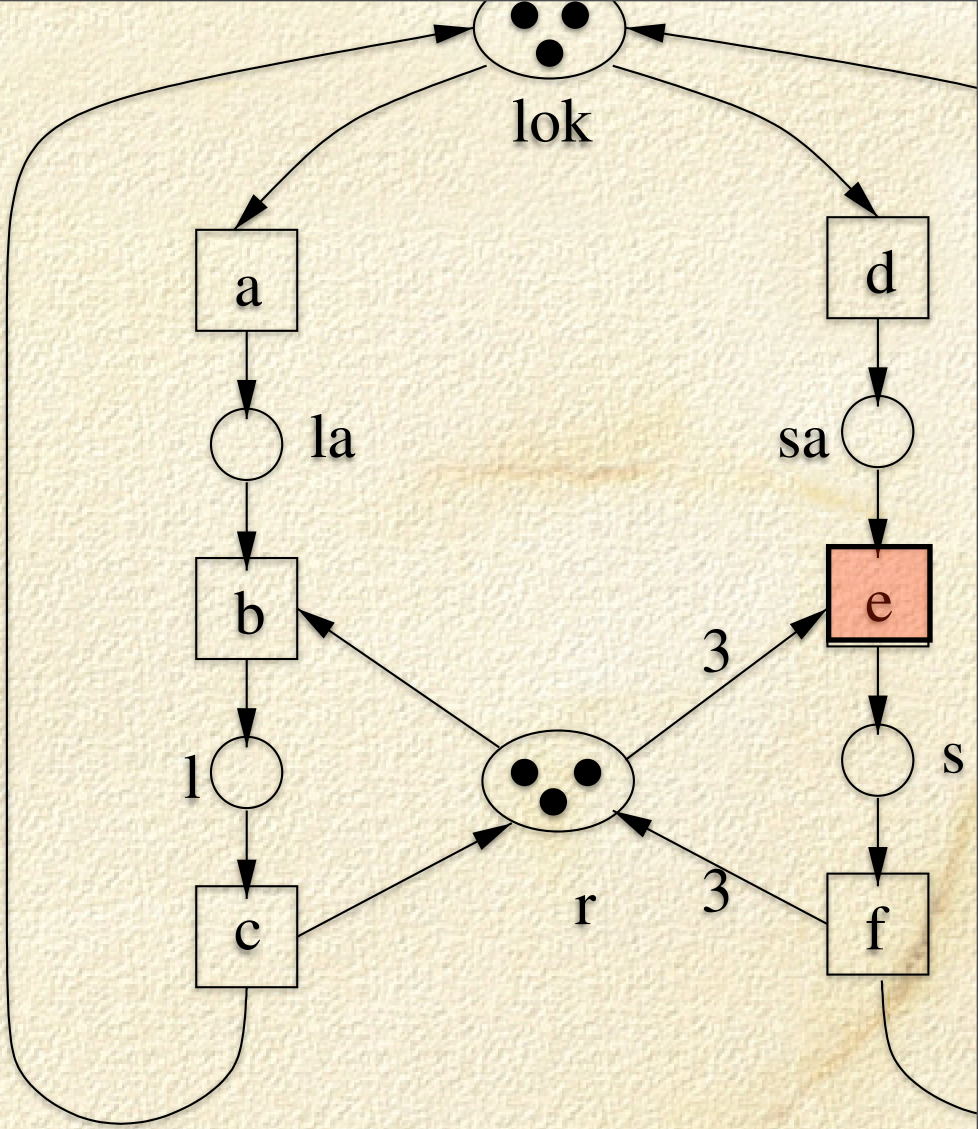
$$\cancel{w + y - n \cdot z = 0}$$

$$u - y + n \cdot z = 0 \qquad \Rightarrow y = u + n \cdot z$$

$$\begin{pmatrix} u \\ u \\ u \\ u+z \\ u+nz \\ z \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ n \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $i_1 : \quad lok + la + sa + l + s = n$
- $i_2 : \quad l + r + n \cdot s = n$

- $i_1: \quad lok + la + sa + l + s = n$
- $i_2: \quad l + r + n \cdot s = n$



$$
\begin{aligned}
i_2' \cdot \mathbf{m} &= 1 \cdot \mathbf{m}(l) + n \cdot \mathbf{m}(s) + 1 \cdot \mathbf{m}(r) = \\
i_2' \cdot \mathbf{m}_0 &= 1 \cdot \mathbf{m}_0(l) + n \cdot \mathbf{m}_0(s) + 1 \cdot \mathbf{m}_0(r) \\
&= 1 \cdot 0 + n \cdot 0 + 1 \cdot n = n
\end{aligned}
$$

$\mathcal{N}$	a	b	c	d	e	f		i_1		i_2
lok	-1	0	1	-1	0	1		1		0
la	1	-1	0	0	0	0		1		0
sa	0	0	0	1	-1	0		1		0
l	0	1	-1	0	0	0		1		1
s	0	0	0	0	1	-1		1		n
r	0	-1	1	0	$-n$	n		0		1

Definition 3.17 *Jede ganzzahlige Lösung* $i \in \mathbb{Z}^{|S|} \setminus \{\underline{0}\}$ *von* $\Delta_{\mathcal{N}}^{tr} \cdot i = \underline{0}$ *heißt* S-Invarianten-Vektor[8] *des* S/T*-Netzes* $\mathcal{N}$.

Definition 3.18 *Jede Lösung* $j \in \mathbb{N}^{|T|} \setminus \{\underline{0}\}$ *von* $\Delta_{\mathcal{N}} \cdot j = \underline{0}$ *heißt* T-Invarianten-Vektor *des* S/T*-Netzes* $\mathcal{N}$.

$$\mathbf{m}_1 \xrightarrow{w} \mathbf{m}_2 \qquad w = t_{i_1} \ldots t_{i_k}$$

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_1 + \underbrace{\Delta_{\mathcal{N}}(t_{i_1}) + \Delta_{\mathcal{N}}(t_{i_2}) + \ldots + \Delta_{\mathcal{N}}(t_{i_k})}$$

Wann ist dieser Teil der Nullvektor?

Antwort:

falls $\Delta_{\mathcal{N}} \cdot j = \underline{0}$

$$j = \psi(w) := (|w|_{x_1}, |w|_{x_2}, \ldots, |w|_{x_k})$$

Definition 3.17 *Jede ganzzahlige Lösung* $i \in \mathbb{Z}^{|S|} \setminus \{\underline{0}\}$ *von* $\Delta_{\mathcal{N}}^{tr} \cdot i = \underline{0}$ *heißt* S-Invarianten-Vektor[8] *des* S/T*-Netzes* $\mathcal{N}$.

$\mathcal{N}$	a	b	c	d	e	f
lok	-1	0	1	-1	0	1
la	1	-1	0	0	0	0
sa	0	0	0	1	-1	0
l	0	1	-1	0	0	0
s	0	0	0	0	1	-1
r	0	-1	1	0	$-n$	n

tr

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$-u + v = 0 \qquad \Rightarrow u = v$$

$$-v + x - z = 0 \qquad \Rightarrow x = u + z$$

$$\cancel{u - x + z = 0}$$

$$-u + w = 0 \qquad \Rightarrow u = v = w$$

$$\cancel{w + y - n \cdot z = 0}$$

$$u - y + n \cdot z = 0 \qquad \Rightarrow y = u + n \cdot z$$

$$\begin{pmatrix} u \\ u \\ u \\ u+z \\ u+nz \\ z \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ n \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $i_1 : \quad lok + la + sa + l + s = n$
- $i_2 : \quad l + r + n \cdot s = n$

Satz 3.20 *Es seien* $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ *Markierungen und* $w = t_{i_1} \dots t_{i_k}$ *eine Schaltfolge, die* $\mathbf{m}_1$ *in* $\mathbf{m}_2$ *überführt:* $\mathbf{m}_1 \xrightarrow{w} \mathbf{m}_2$. *Die Markierungen* $\mathbf{m}_1$ *und* $\mathbf{m}_2$ *sind genau dann gleich, wenn es einen* T*-Invarianten-Vektor* $j \in \mathbb{N}^{|T|}$ *derart gibt, dass jede Transition* $t_i \in T$ *genau* $j(i)$ *mal in* w *vorkommt, d.h.:* $j(i) = \psi(w)(i)$

Beispiel:

$\mathcal{N}$	a	b	c	d	e	f
lok	-1	0	1	-1	0	1
la	1	-1	0	0	0	0
sa	0	0	0	1	-1	0
l	0	1	-1	0	0	0
s	0	0	0	0	1	-1
r	0	-1	1	0	$-n$	n

1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1

j	3	3	3	2	2	2