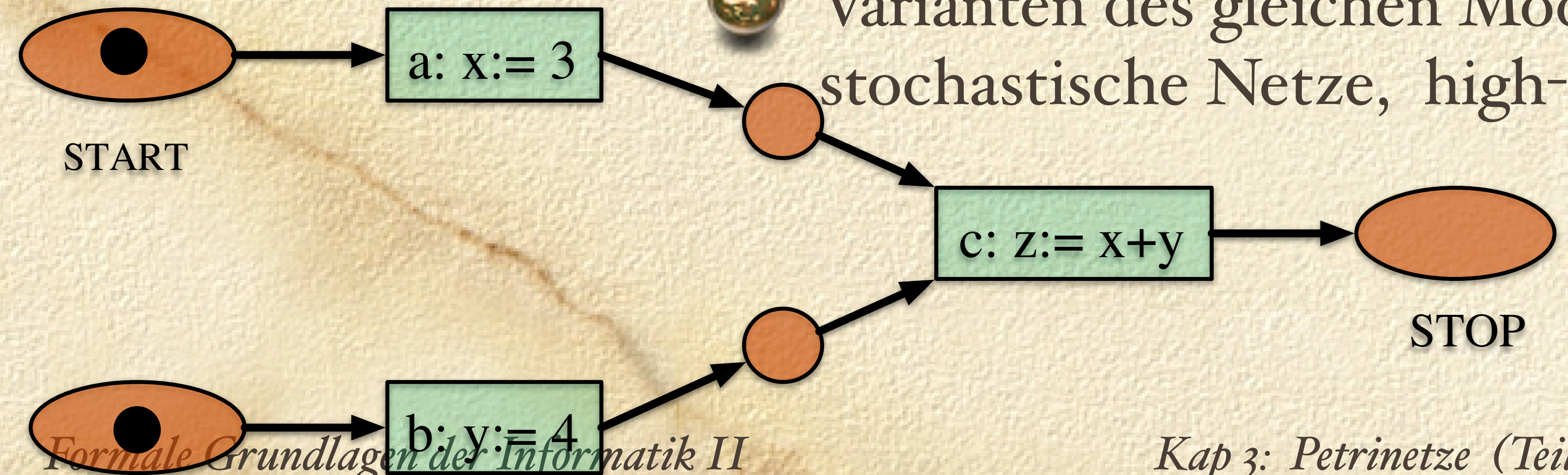
Kapitel 3

Petrinetze

Allgemeine Eigenschaften von Petrinetzen

- graphische und äquivalente algebraische/textuelle Darstellung
- (formal abgesicherte) Algorithmen für die Analyse
- Abstraktion und hierarchische Strukturen
- hoch entwickelte Theorie der Nebenläufigkeit (concurrency)
- Rechnerwerkzeuge für Editieren, Simulation und Analyse
- siehe z.B. TGI-Tool RENEW http://www.renew.de/
- Universalität in Anwendbarkeit (Anwendungen in fast allen Gebieten)
- Varianten des gleichen Modellierungskonzeptes (Zeit-Netze, stochastische Netze, high-level, objektorientiert, ...)



Historie der Petrinetze

Drei Ansätze zur Einführung von Petrinetzen:

- Entwicklung aus Programm-Kode
- Kommunizierende Automaten
- von einfachen zu höheren Netzen

starting from program code

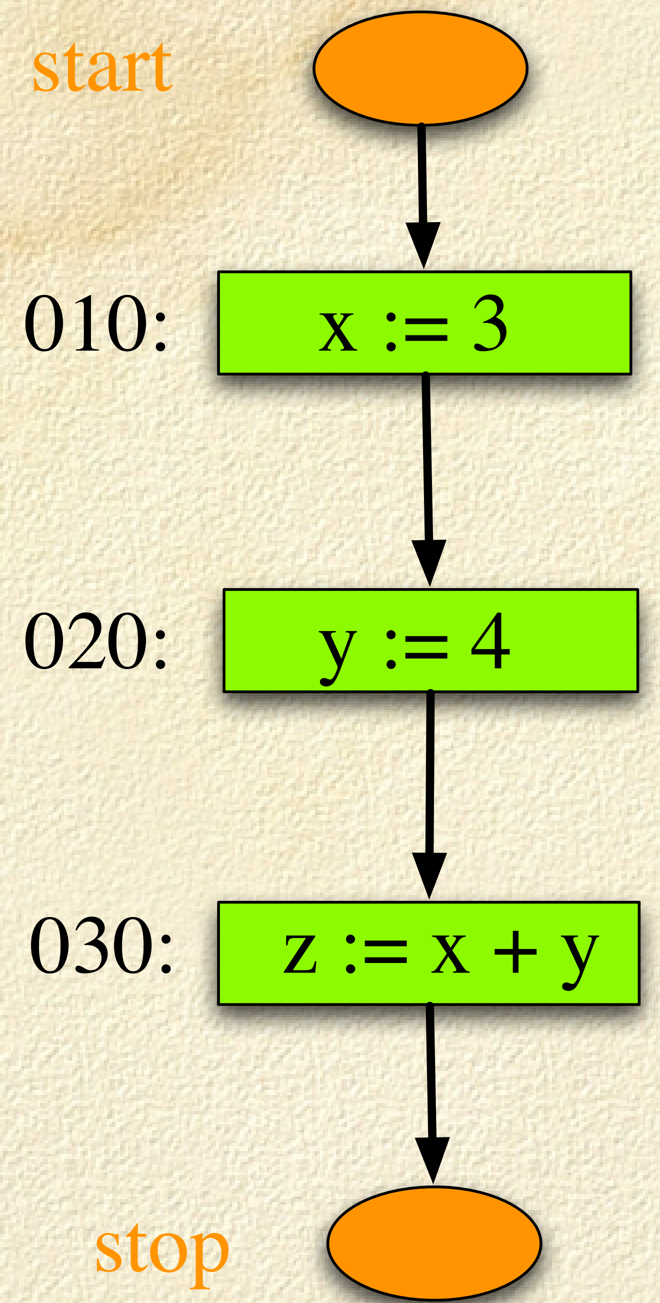
start

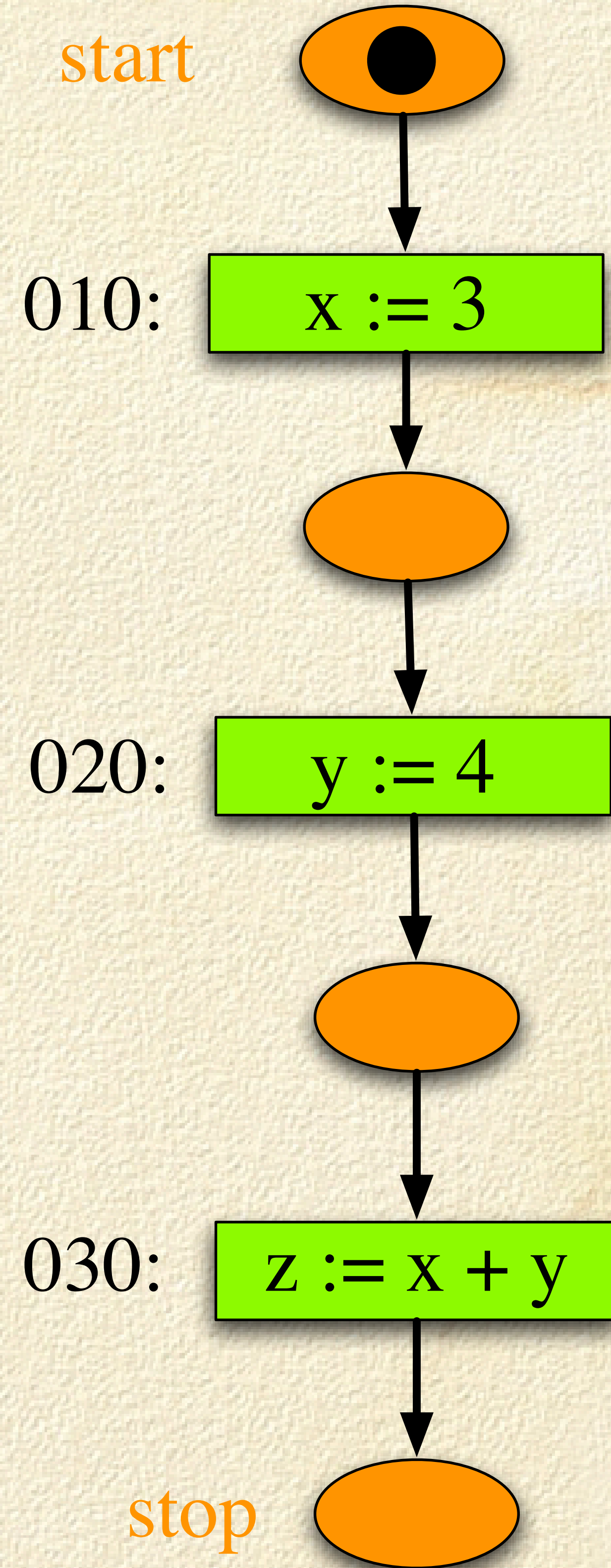
010: x := 3

020: y := 4

030: z := x + y

stop





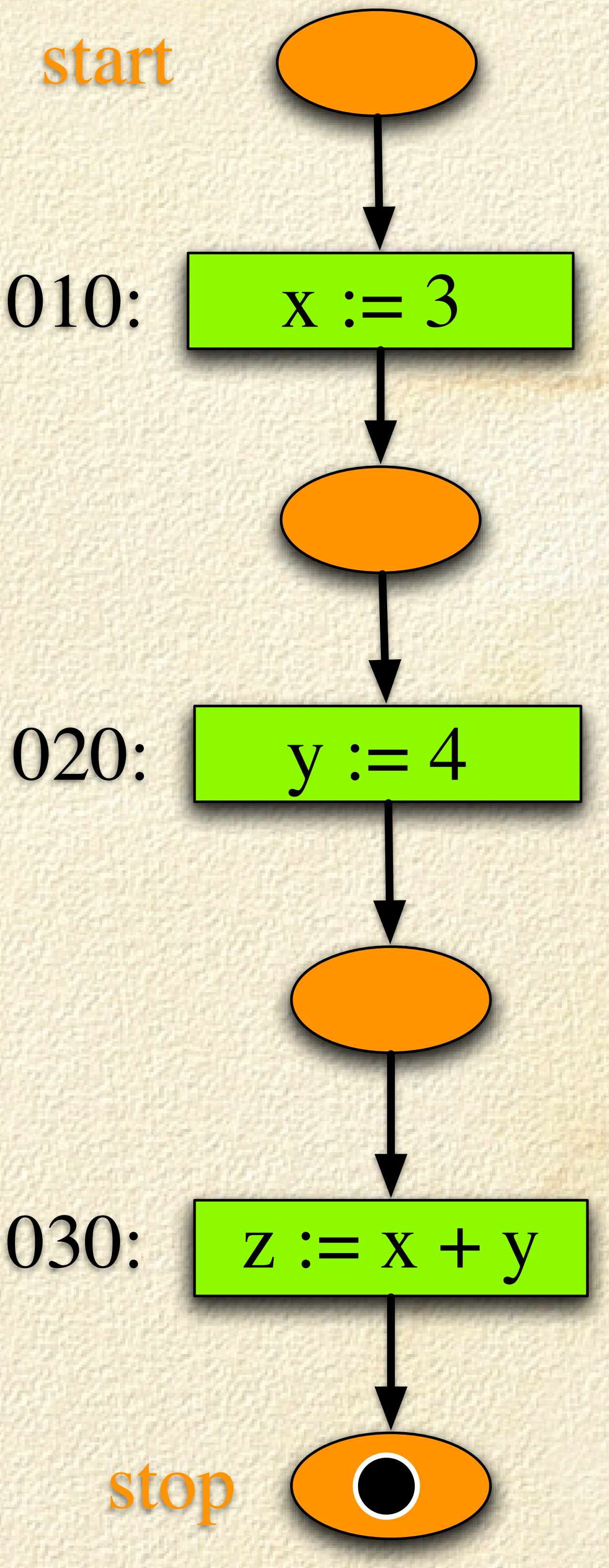
start

010: x := 3

020: y := 4

030: z := x + y

stop



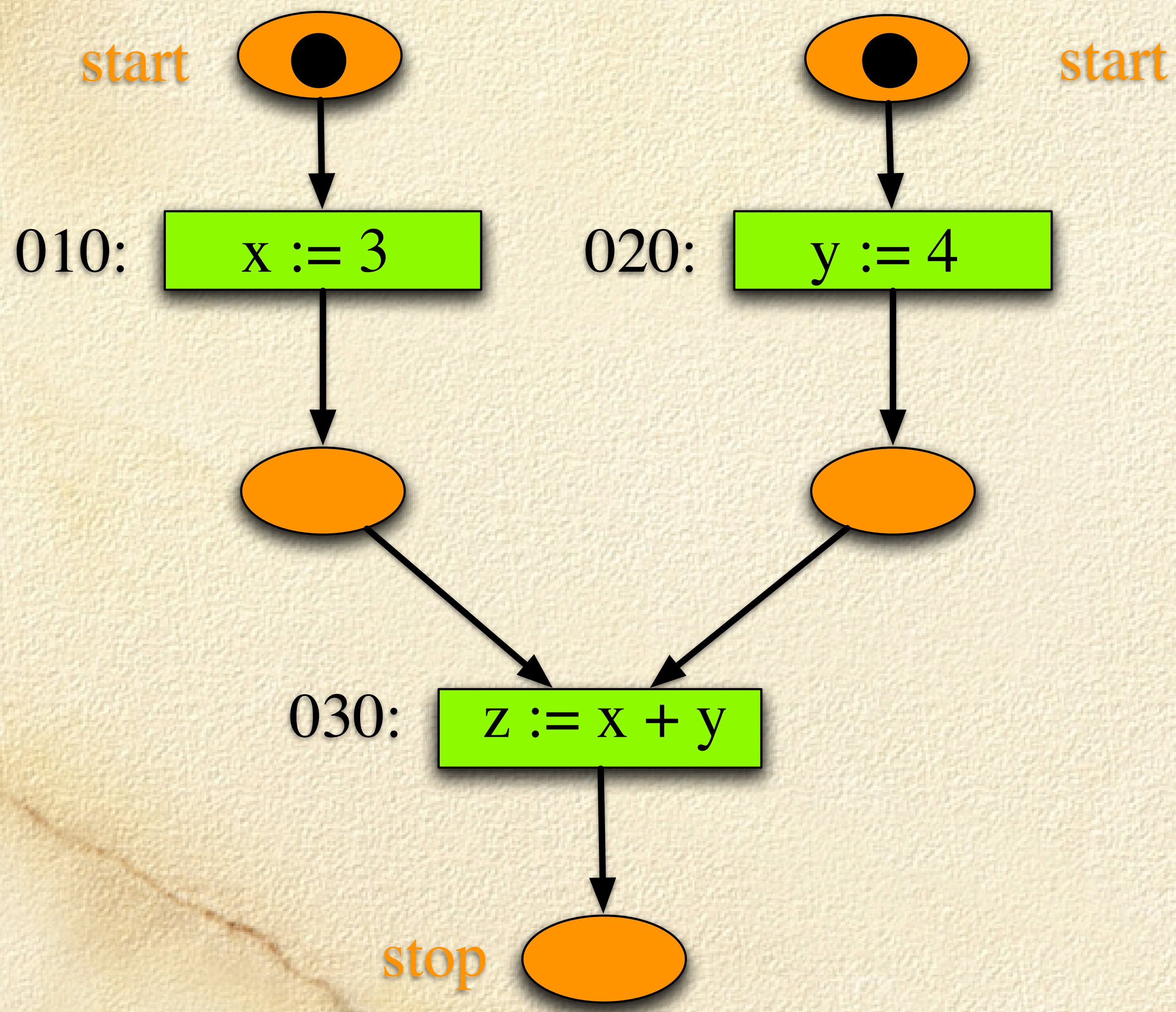
start

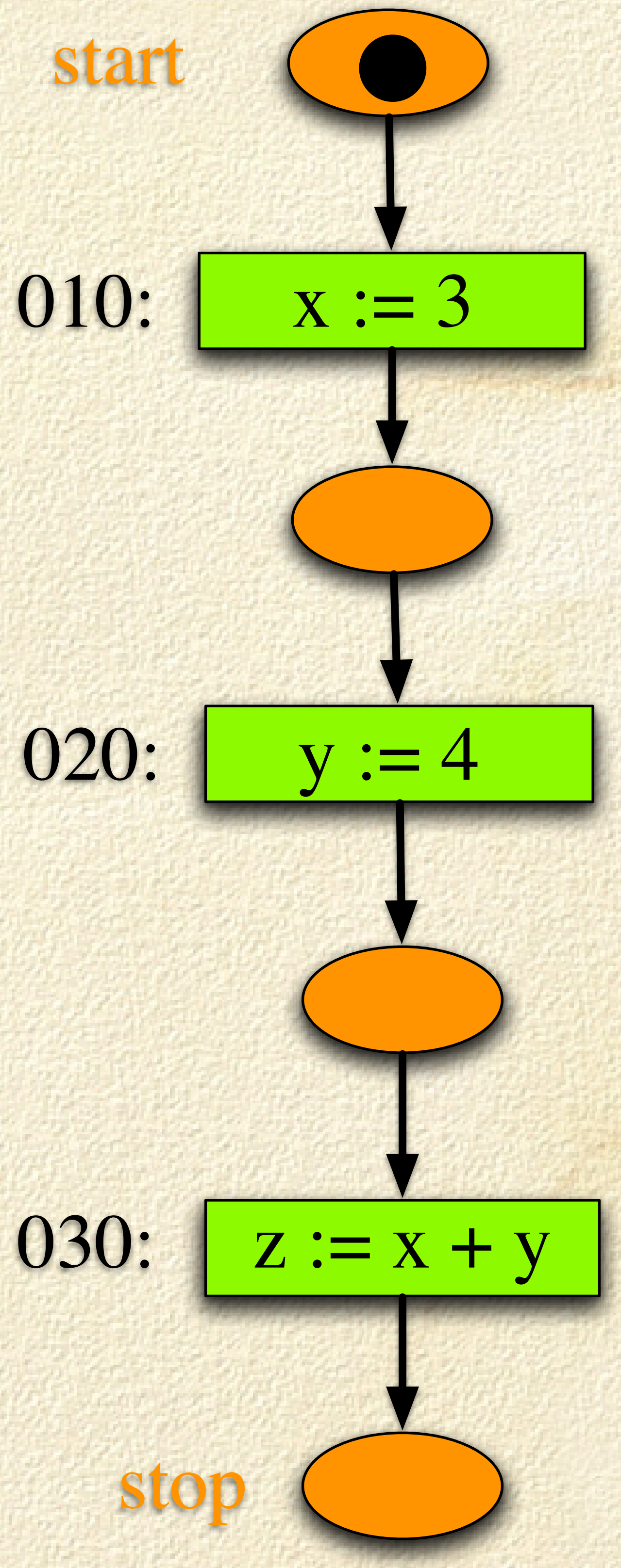
010: x := 3

020: y := 4

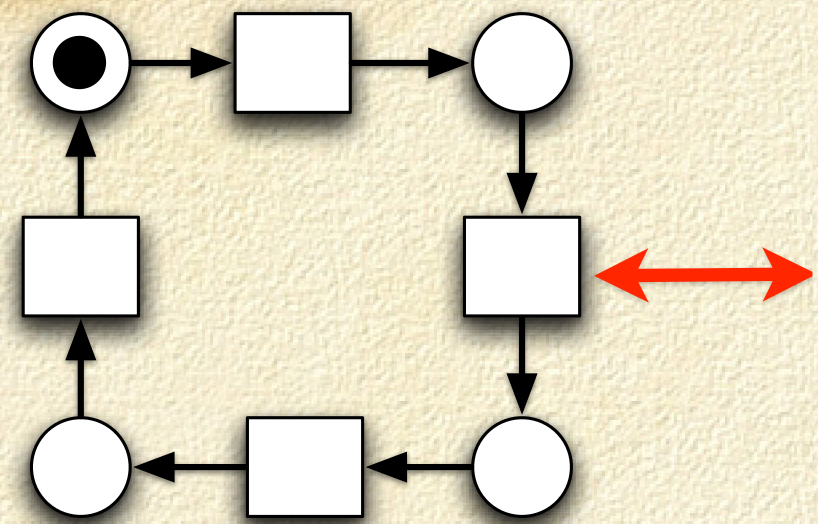
030: z := x + y

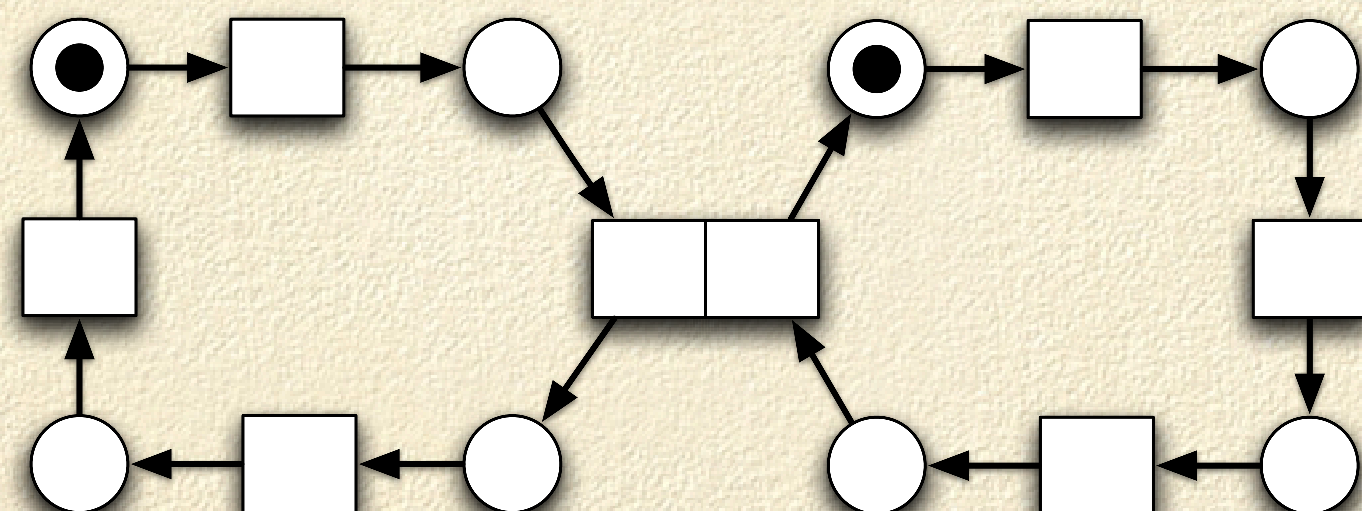
stop





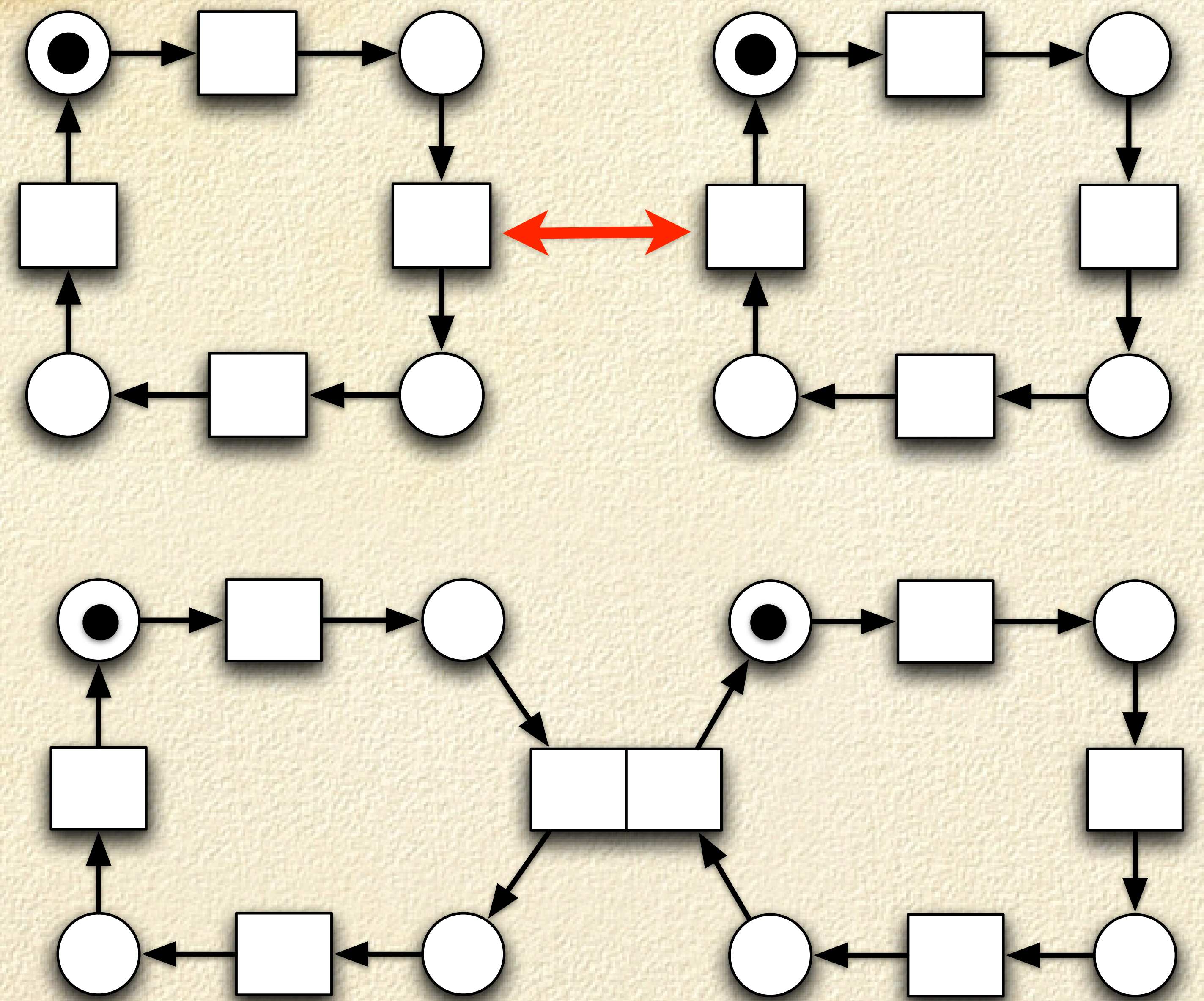
Automat 1 Automat 2



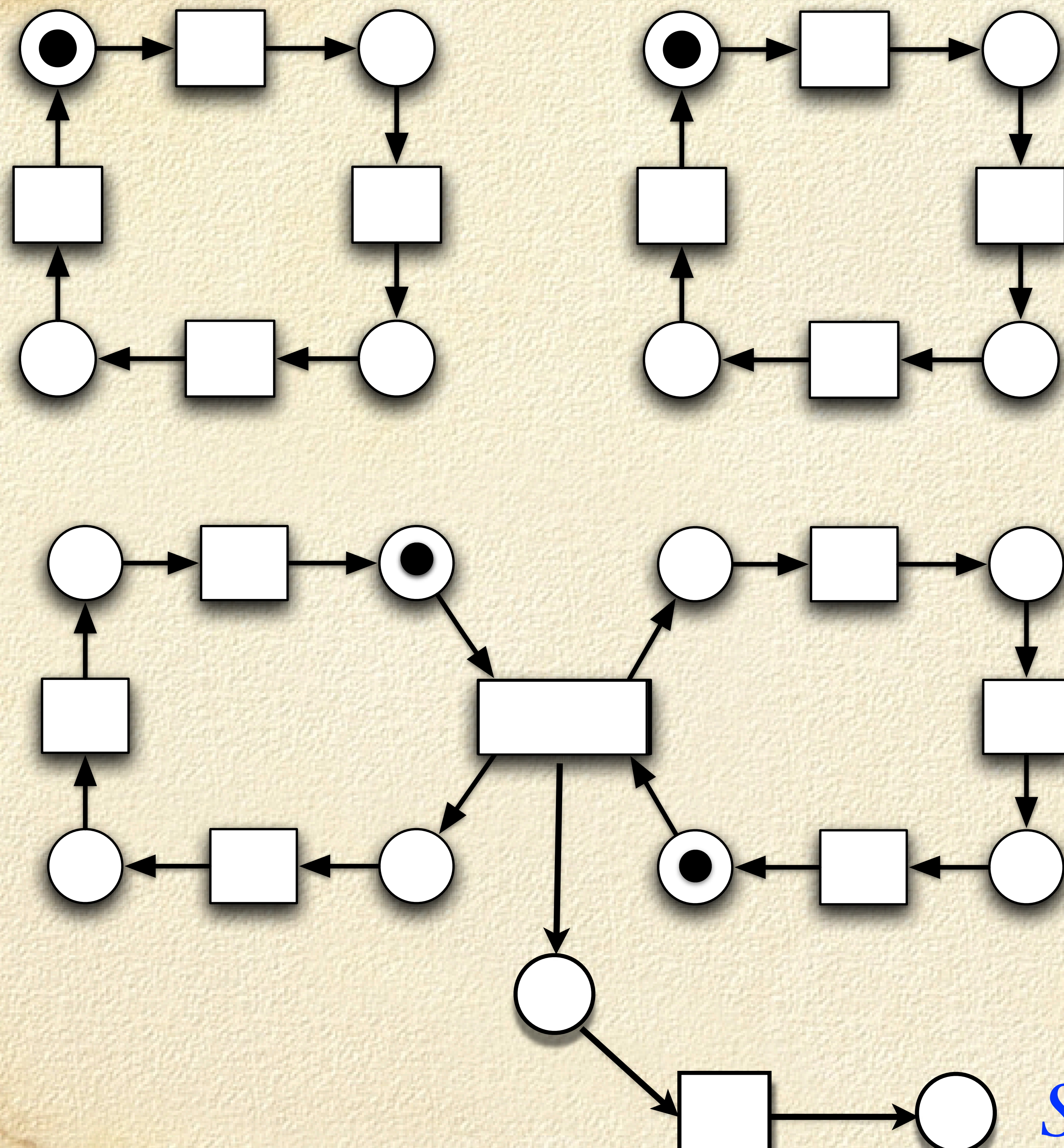


kommunizierende Automaten

Schalten des Netzes



Schalten des Netzes

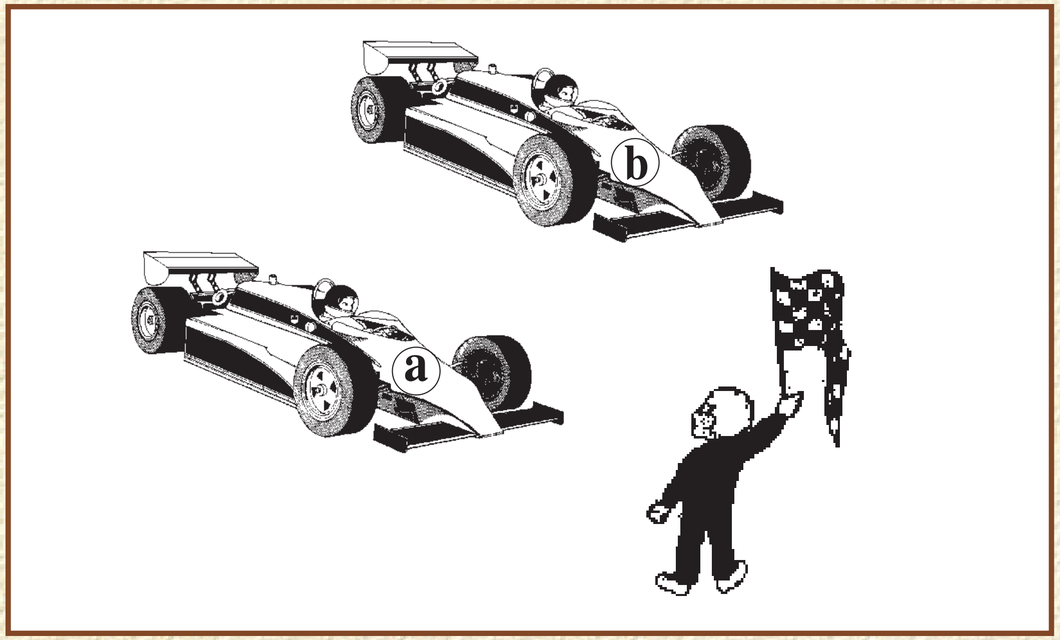


Schalten des Netzes

Einführung der wichtigsten Prinzipien an einem einfachen (3.)Beispiel

- Lokalität
- Nebenläufigkeit
- Graphische und formaltextuelle Darstellung
- von einfachen zu höheren Petrinetzen

Abbildung 2.1: Start zweier Rennwagen



Bedingungen

p_1: car a; preparing for start

p_2: car a; waiting for start

p_3: car a; running

p_4: ready sign of car a

p_5: start sign for car a

p_6: starter; waiting for ready signs

p_7: starter; start sign given

p_8: ready sign of car b

p_9: start sign for car b

p_{10}: car b; preparing for start

p_{11}: car b; waiting for start

p_{12}: car b; running

Aktionen

t_1: car a; send ready sign

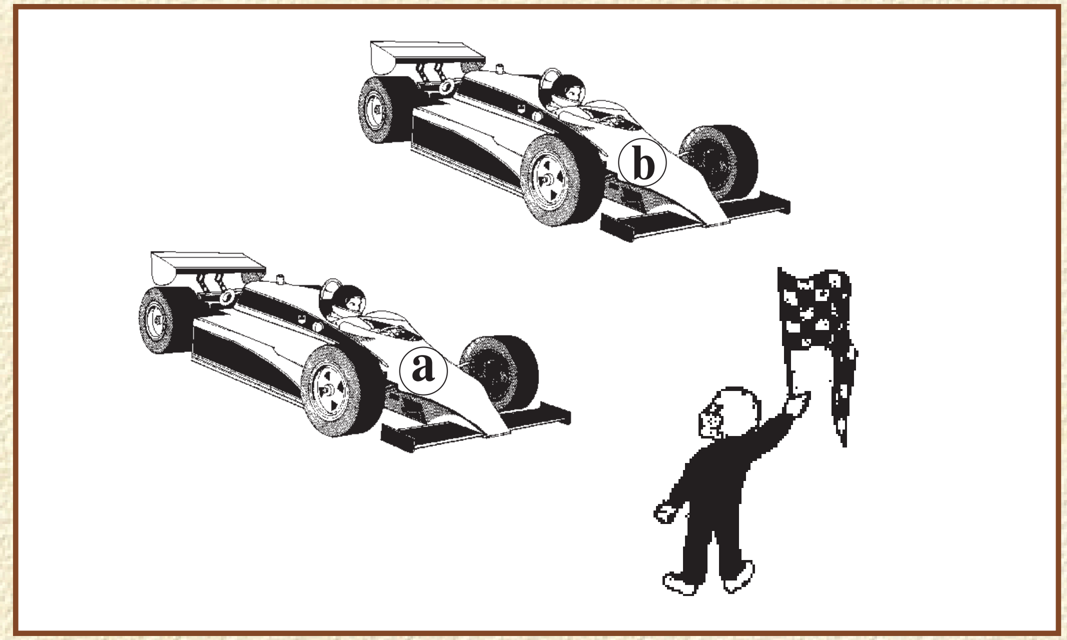
t_2: car a; start race

t_3: starter; give start sign

t_4: car b; send ready sign

t_5: car b; start race

Abbildung 2.1: Start zweier Rennwagen



globaler Zustandsübergang

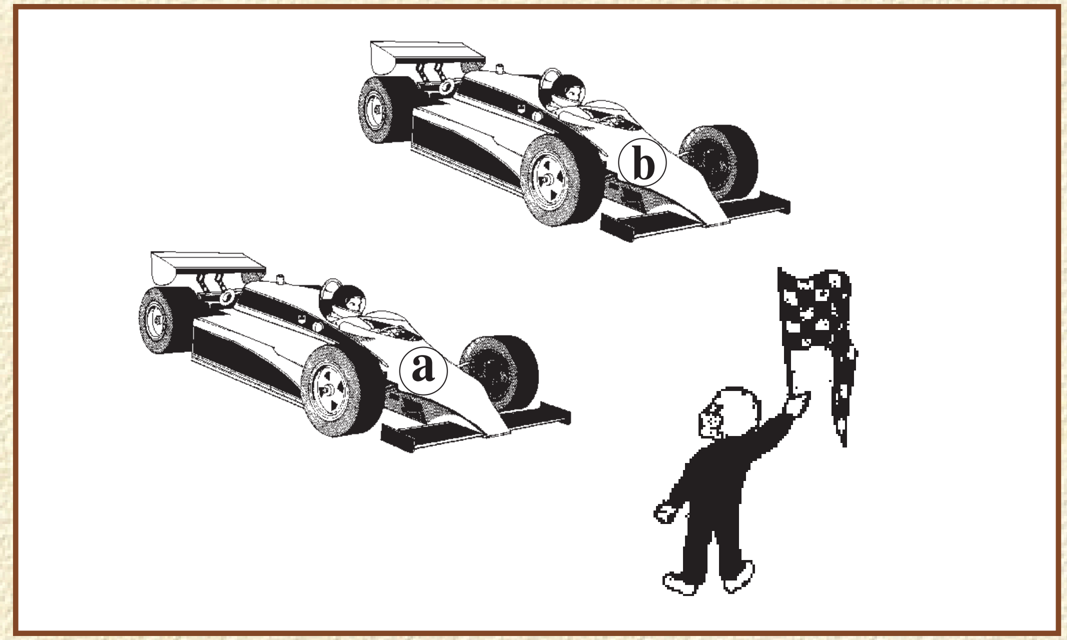
Transitionssystem

car a; preparing for start	p1=true
car a; waiting for start	p2
car a; running	p3
ready sign of car a	p4
start sign for car a	p5
starter; waiting for ready s.	p6=true
starter; start sign given	p7
ready sign of car b	p8
start sign for car b	p9
car b; preparing for start	p10=true
car b; waiting for start	p11
car b; running	p12

→ t1 →

p1	car a; preparing for start
p2=true	car a; waiting for start
p3	car a; running
p4=true	ready sign of car a
p5	start sign for car a
p6=true	starter; waiting for ready s.
p7	starter; start sign given
p8	ready sign of car b
p9	start sign for car b
p10=true	car b; preparing for start
p11	car b; waiting for start
p12	car b; running

Abbildung 2.1: Start zweier Rennwagen



lokaler Zustandsübergang

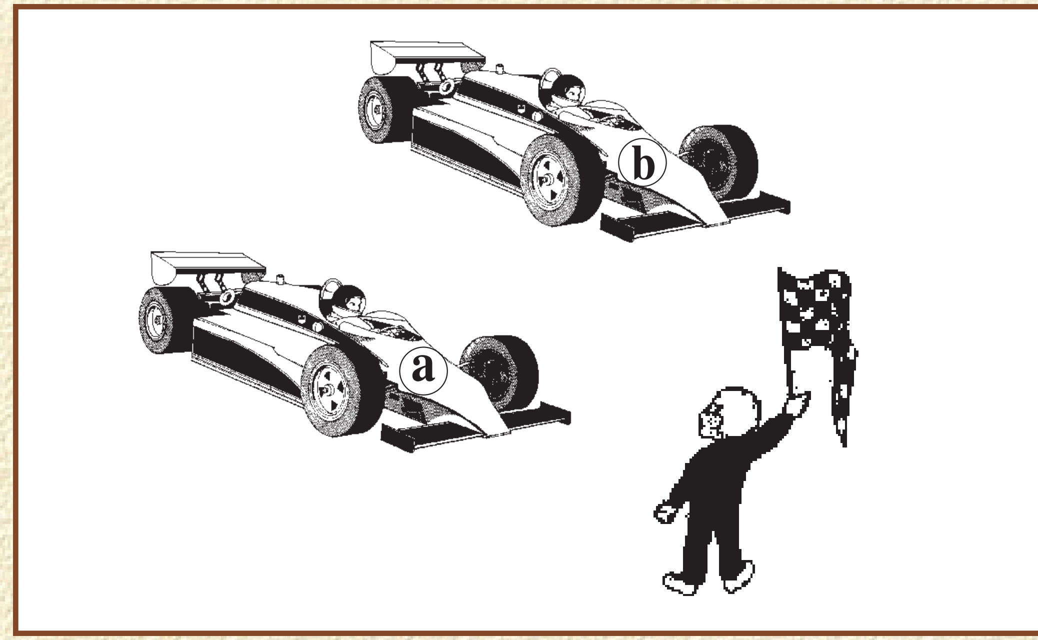
Transitionssystem

car a; preparing for start	p1=true
car a; waiting for start	p2
car a; running	p3
ready sign of car a	p4
start sign for car a	p5
starter; waiting for ready s.	p6=true
starter; start sign given	p7
ready sign of car b	p8
start sign for car b	p9
car b; preparing for start	p10=true
car b; waiting for start	p11
car b; running	p12

t1

p1	car a; preparing for start
p2=true	car a; waiting for start
p3	car a; running
p4=true	ready sign of car a
p5	start sign for car a
p6=true	starter; waiting for ready s.
p7	starter; start sign given
p8	ready sign of car b
p9	start sign for car b
p10=true	car b; preparing for start
p11	car b; waiting for start
p12	car b; running

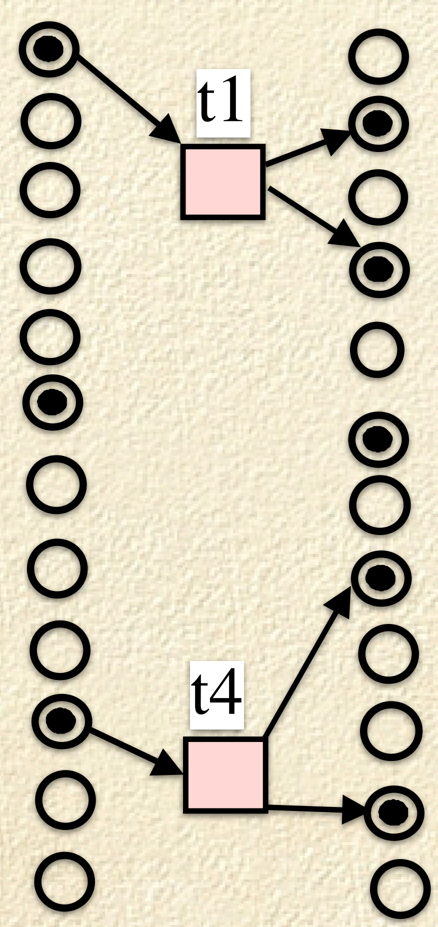
Abbildung 2.1: Start zweier Rennwagen



unabhängiger Zustandsübergang

nebenläufiger Zustandsübergang

car a; preparing for start	p1=true
car a; waiting for start	p2
car a; running	p3
ready sign of car a	p4
start sign for car a	p5
starter; waiting for ready s.	p6=true
starter; start sign given	p7
ready sign of car b	p8
start sign for car b	p9
car b; preparing for start	p10=true
car b; waiting for start	p11
car b; running	p12

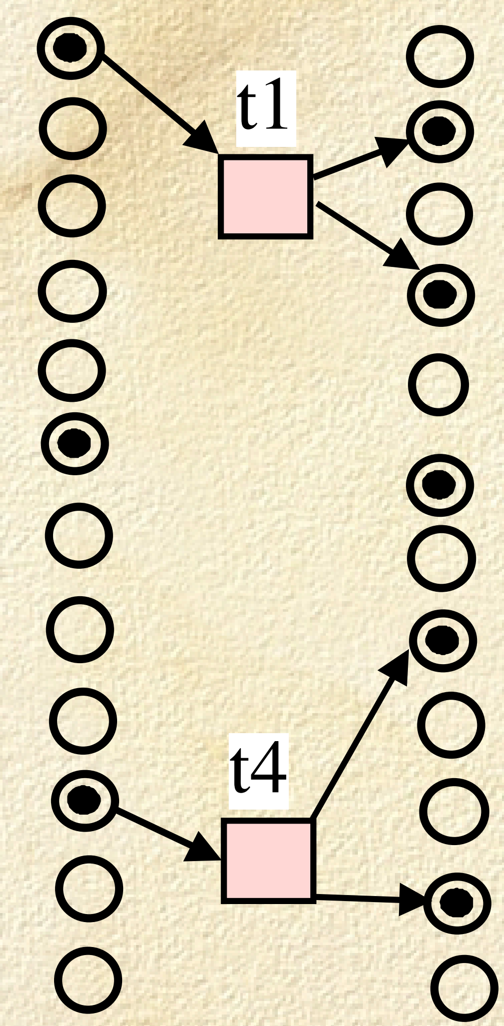


p1	car a; preparing for start
p2=true	car a; waiting for start
p3	car a; running
p4=true	ready sign of car a
p5	start sign for car a
p6=true	starter; waiting for ready s.
p7	starter; start sign given
p8=true	ready sign of car b
p9	start sign for car b
p10	car b; preparing for start
p11=true	car b; waiting for start
p12	car b; running

I	**Das Prinzip der Dualität in Netzen**

Es gibt zwei disjunkte Mengen von Grundelementen:
P-Elemente (state elements, Plätze, Stellen) und
T-Elemente (Transition-Element, Transistionen).

Dinge der realen Welt werden entweder als **passive Elemente** aufgefasst und als P-Elemente dargestellt (z.B. Bedingungen, Plätze, Betriebsmittel, Wartepools, Kanäle usw.) oder als **aktive Elemente**, die durch T-Elemente repräsentiert werden (z.B. Ereignisse, Aktionen, Ausführungen von Anweisungen, Ubermitteln von Nachrichten usw.

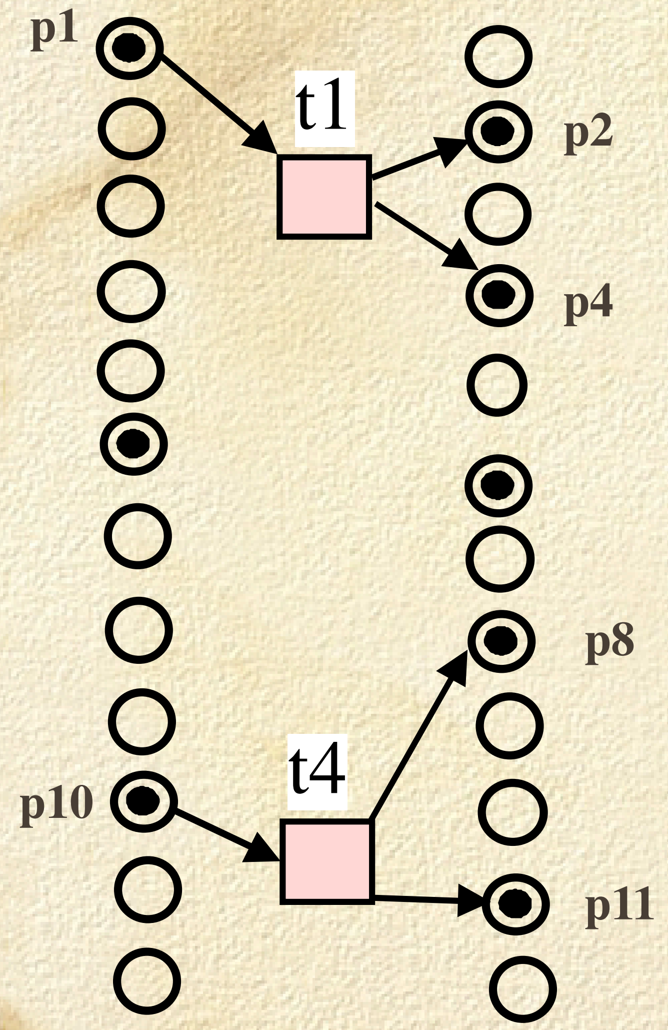


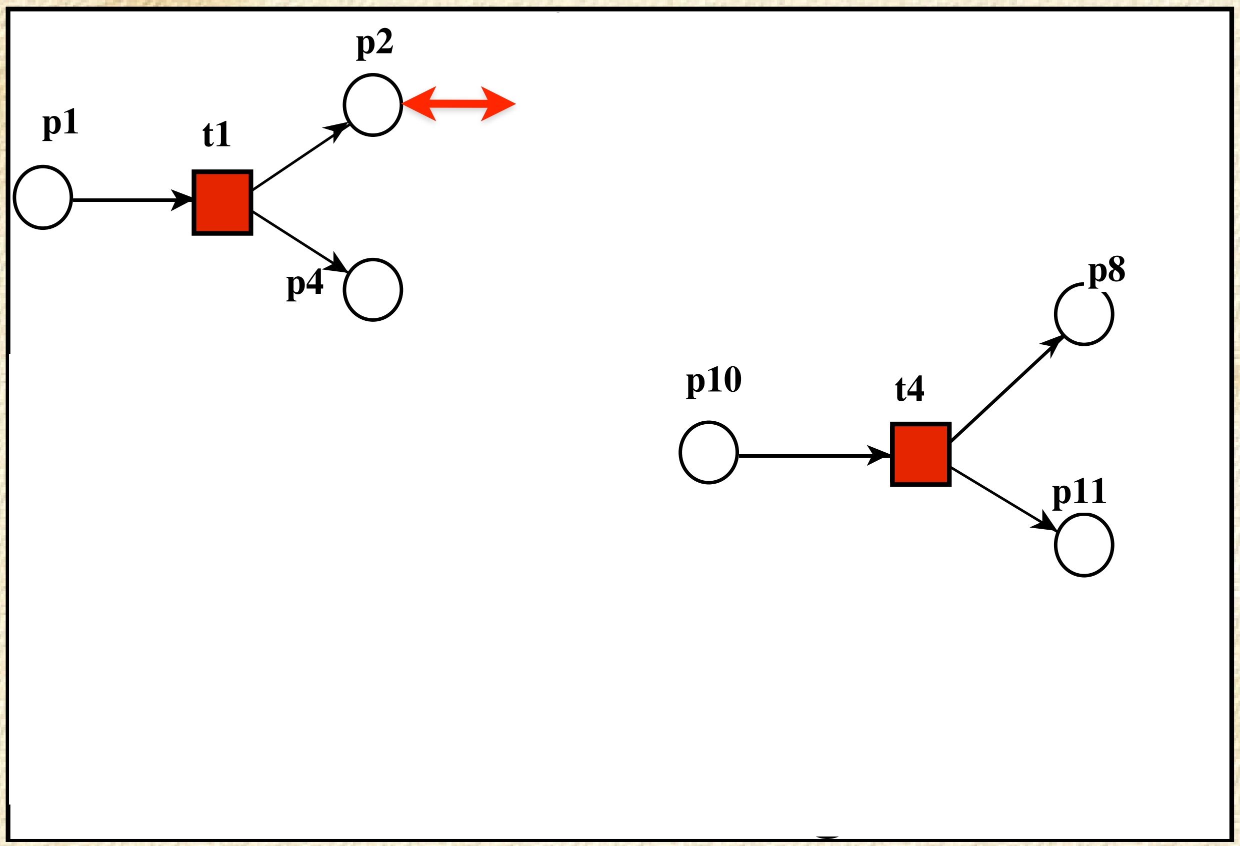
II — Das Prinzip der Lokalität für Petri Netze

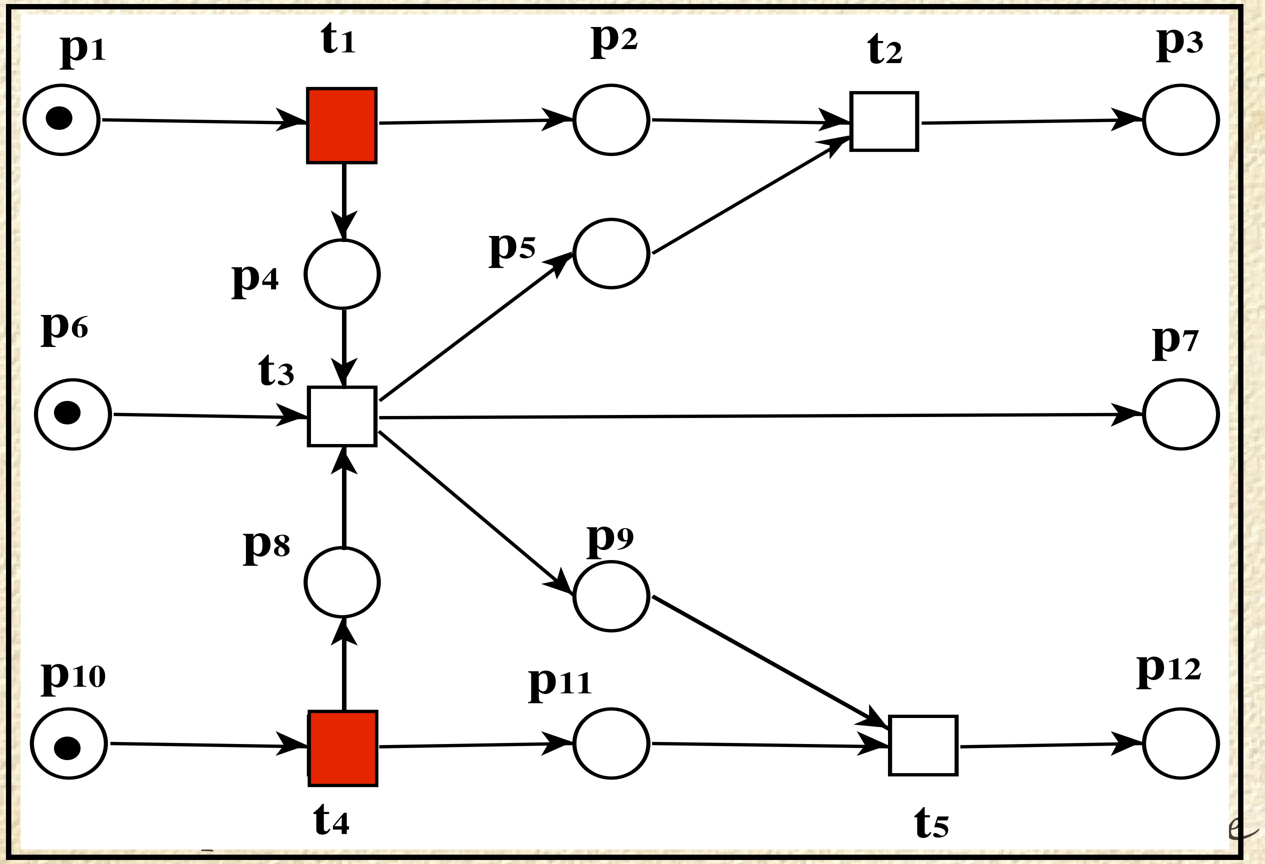
Das Verhalten einer Transition wird ausschließlich durch ihre **Lokalität** bestimmt, welche sich aus ihr und der Gesamtheit ihrer Eingangs- und Ausgangs-Elemente zusammensetzt.

III — Das Prinzip der Nebenläufigkeit (concurrency) für Petrinetze

Transitionen mit disjunkter Lokalität finden unabhängig (**nebenläufig**, concurrently) statt.


p1
t1
p2
p4
p8
t4
p10
p11


p2
p1
t1
p4
p8
p10
t4
p11


p1
t1
p2
t2
p3
p4
p5
p6
t3
p7
p8
p9
p10
p11
p12
t4
t5

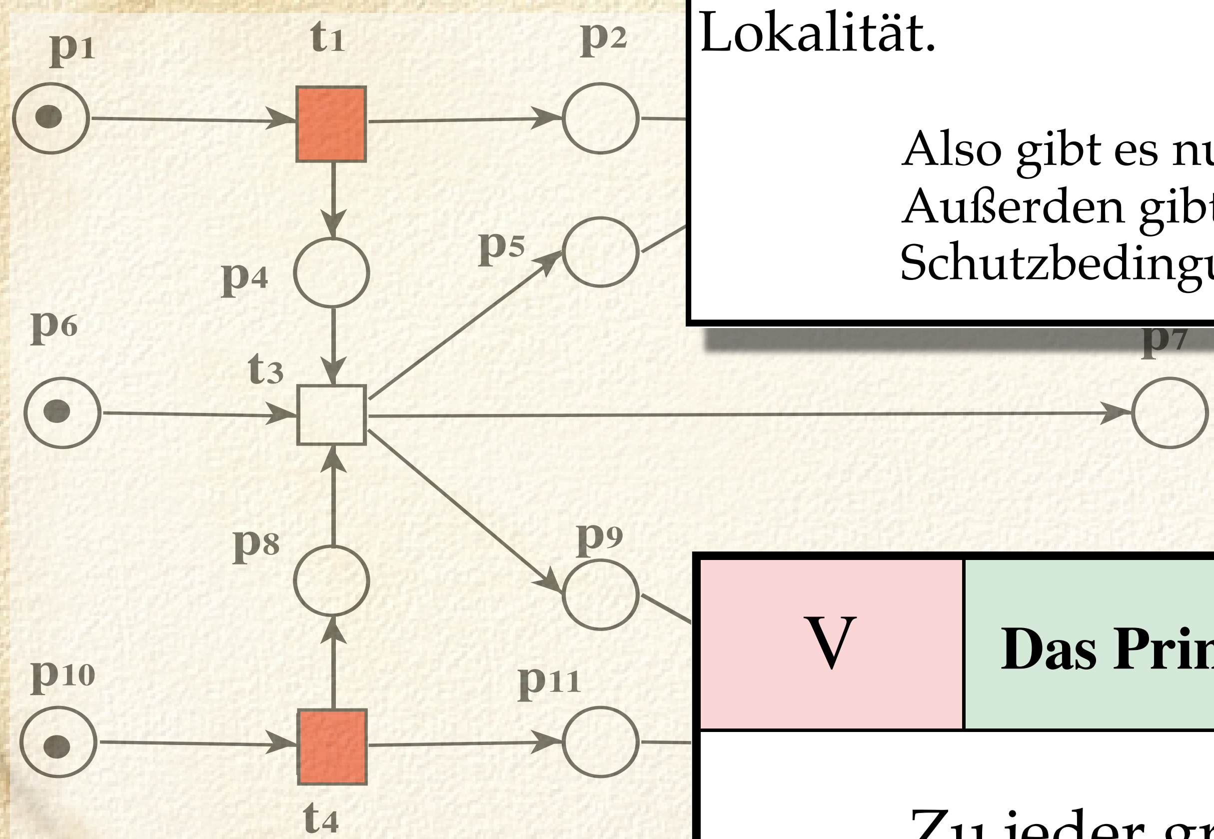
IV	Das Prinzip der grafischen Darstellung von Petrinetzen

P-Elemente (auch „S-Elemente“) werden durch **runde** grafische Elemente (Kreise, Elipsen,...) dargestellt (rund wie im Buchstaben P oder S).

T-Elemente werden durch **eckige** grafische Elemente (Rechtecke, Balken,...) dargestellt (eckig wie im Buchstaben T).

Kanten (auch „Pfeile“) verbinden T-Elemente mit den P-Elementen ihrer Lokalität.

Also gibt es nur Kanten zwischen T-Elementen und P-Elementen.
Außerden gibt es Beschriftungen, wie Bezeichner, Gewichtungen oder Schutzbedingungen (guards).



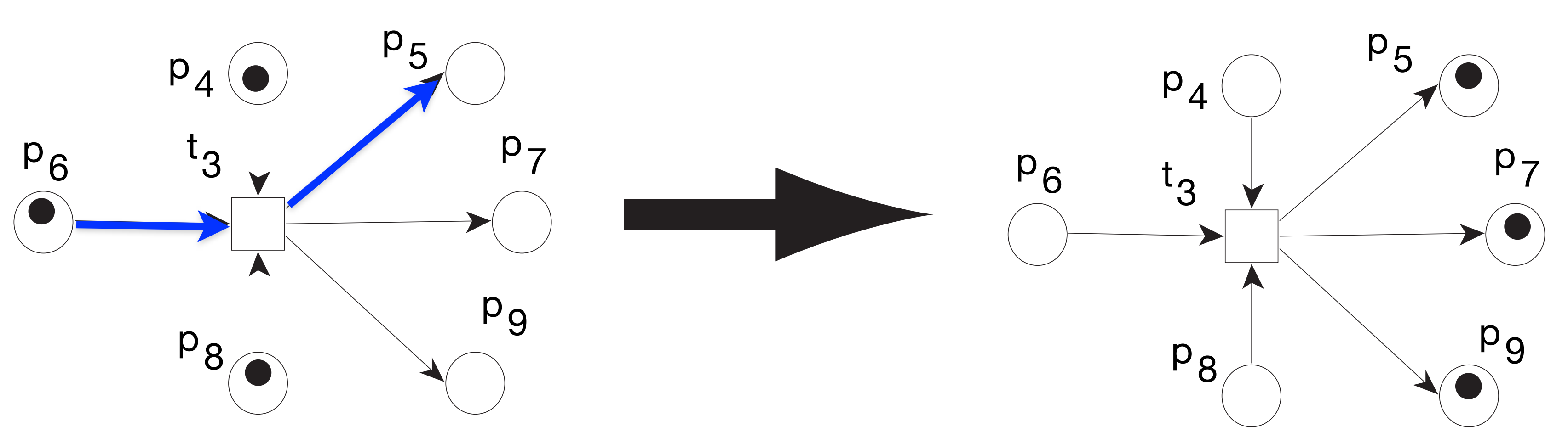
V	Das Prinzip der formaltextuellen Darstellung von Petrinetzen

Zu jeder graphischen Darstellung eines Petrinetzes gibt es eine **äquivalente** formaltextuelle Darstellung und umgekehrt.

Definition 2.1 *Ein* Netz *ist ein Tripel* $\mathcal{N} = (P, T, F)$, *wobei*

- P *eine Menge von* Plätzen *(oder* Stellen*),*
- T *eine mit* P *disjunkte Menge von* Transitionen *und*
- F *die* Flussrelation $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ *darstellt.*

$(p_6, t_3) \in F$ $\qquad$ $(t_3, p_5) \in F$



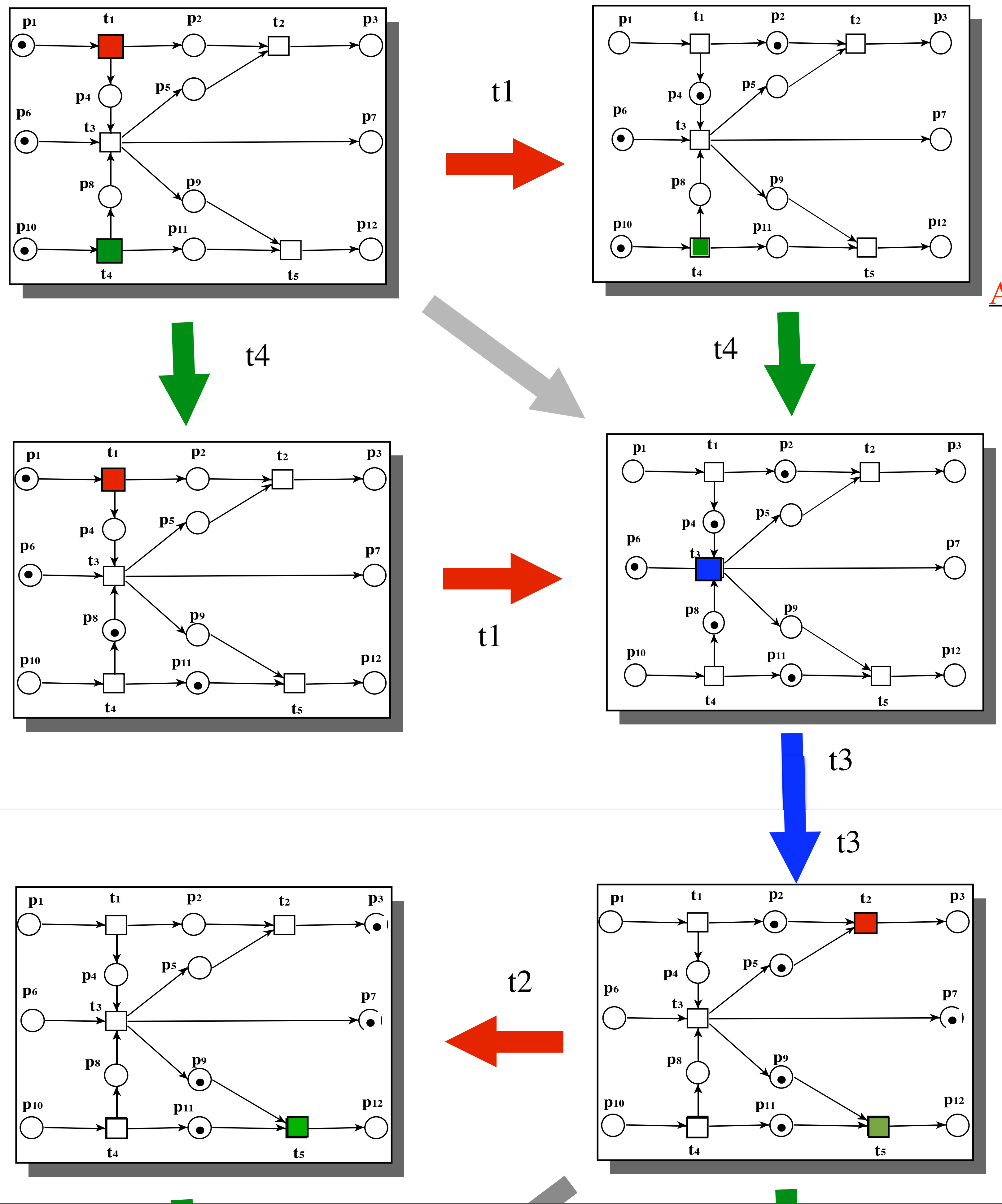
formale Definition später

Abbildung 2.6: Schaltregel

Wagen 1

Starter

Wagen 2



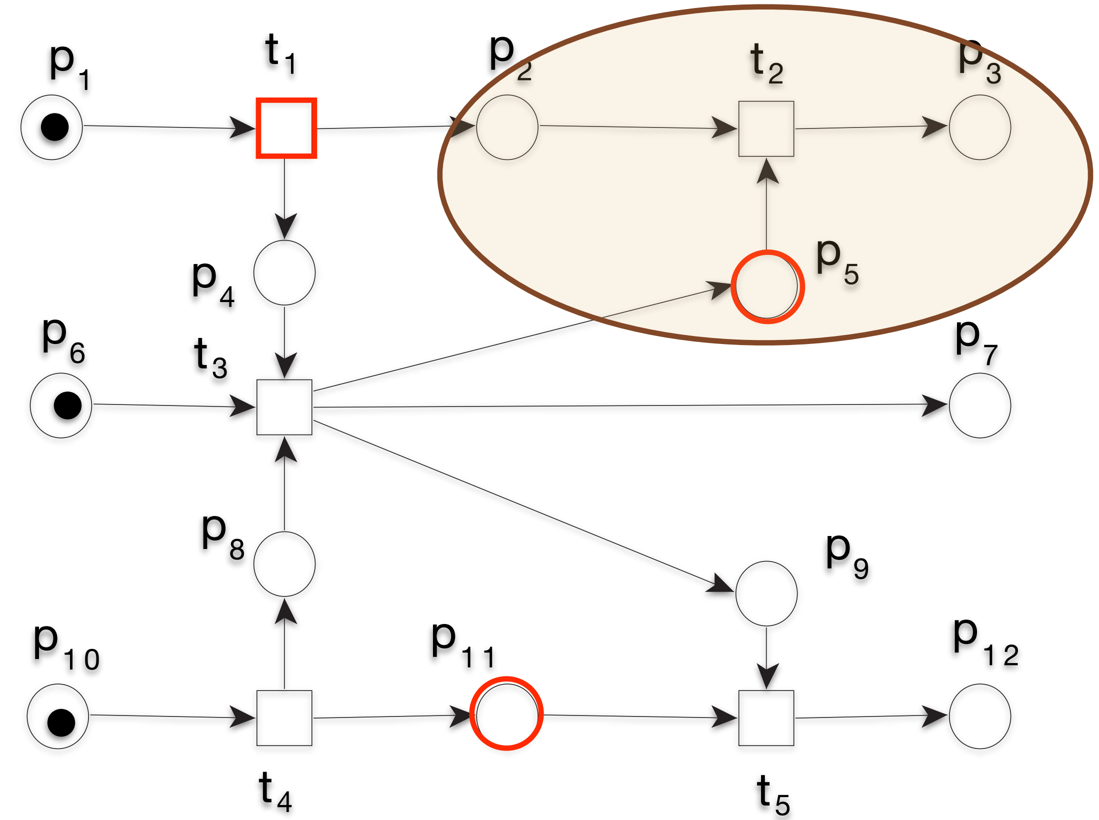
Ablaufsemantik:

- Folgen
- Schritte
- Prozess

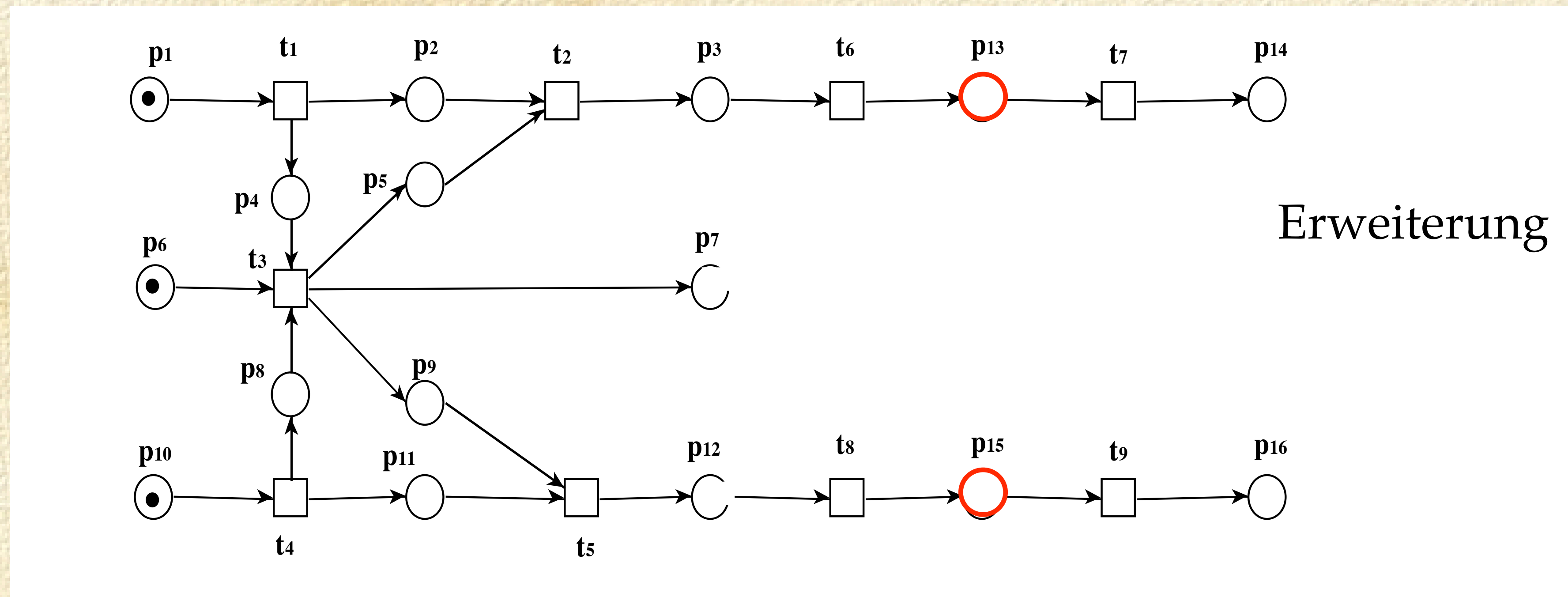
Definition 2.2 *Für ein Netz* $\mathcal{N} = (P, T, F)$ *und ein Element* $x \in P \cup T$ *bezeichnet* ${}^\bullet x := \{y \in P \cup T \mid (y, x) \in F\}$ *die Menge der* Eingangselemente *und* $x^\bullet := \{y \in P \cup T | (x, y) \in F\}$ *die Menge der* Ausgangsselemente *von* x. *Ist* x *ein Platz, dann heißen* ${}^\bullet x$ *bzw.* $x^\bullet$ Eingangs- *bzw.* Ausgangs-Transitionen. *Für eine Menge von Elementen* $X \subseteq P \cup T$ *seien entsprechend*

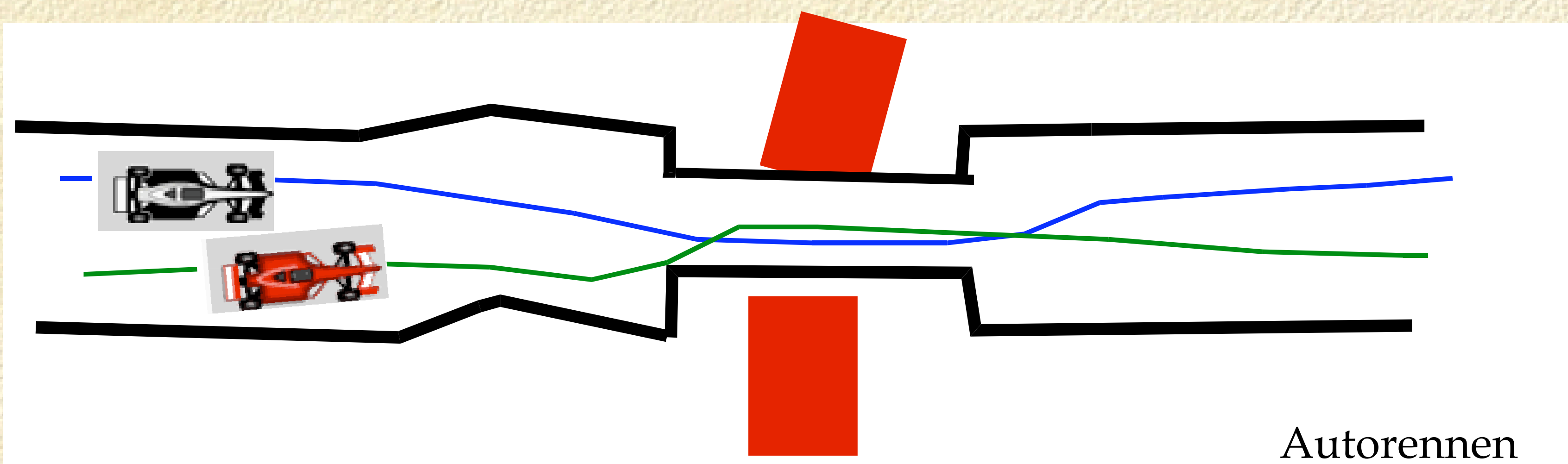
$$ {}^\bullet X := \bigcup_{x \in X} {}^\bullet x \text{ und } X^\bullet := \bigcup_{x \in X} x^\bullet $$

$loc(t) := \{t\} \cup {}^\bullet t \cup t^\bullet$ *heißt* Lokalität *der Transition* t.



Beispiel: Für $A = \{t_1, p_5, p_{11}\}$ im Netz 3.5 erhält man ${}^\bullet A = \{p_1, t_3, t_4\}$ and $A^\bullet = \{p_2, p_4, t_2, t_5\}$.



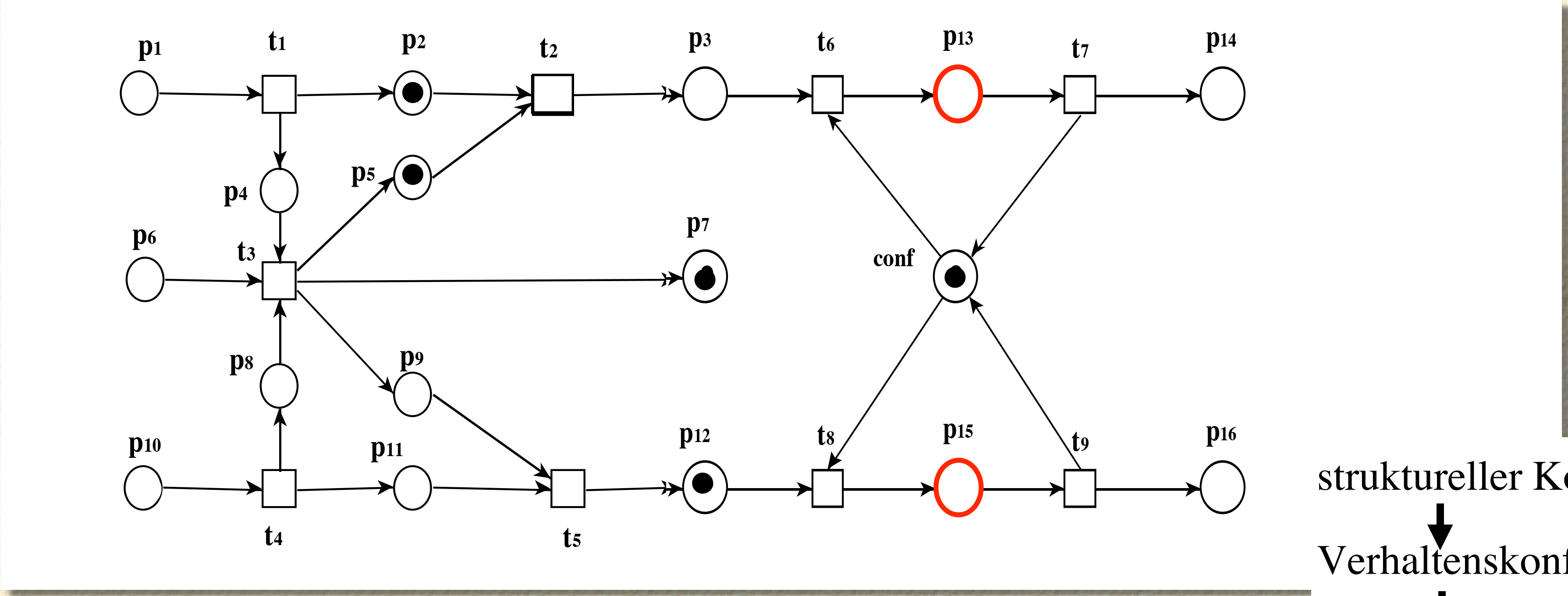


Autorennen
mit Hindernis

Java synchronized statement

Access to an object may also be made mutually exclusive by using the **`synchronized`** statement:

```
    synchronized (object) { statements }
```



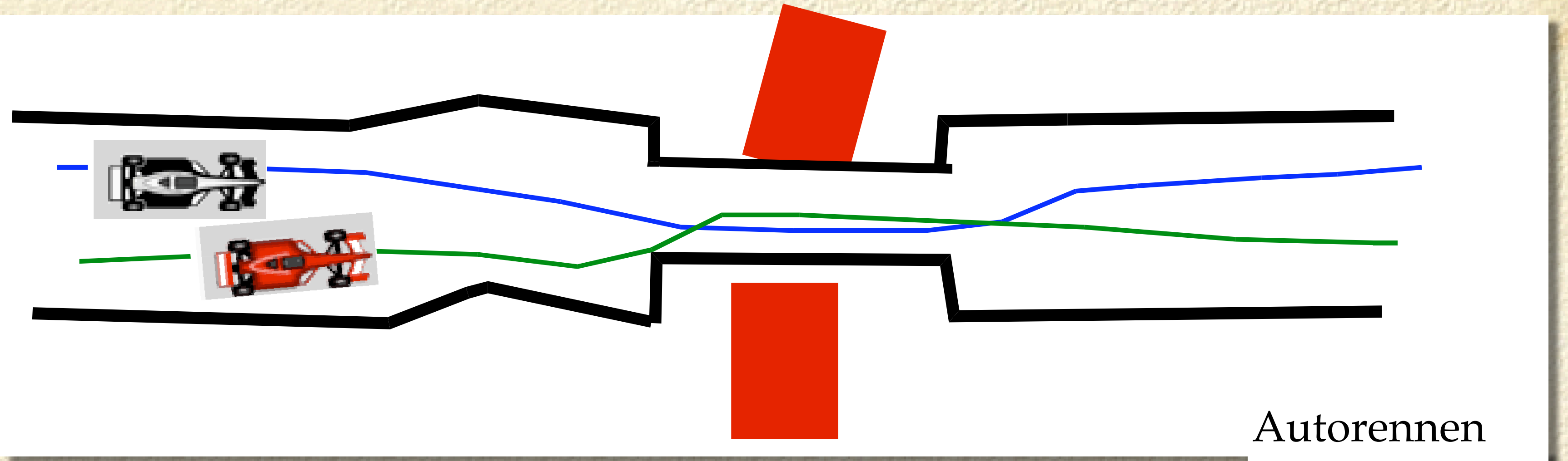
strukturelles Konfliktplatz

↓

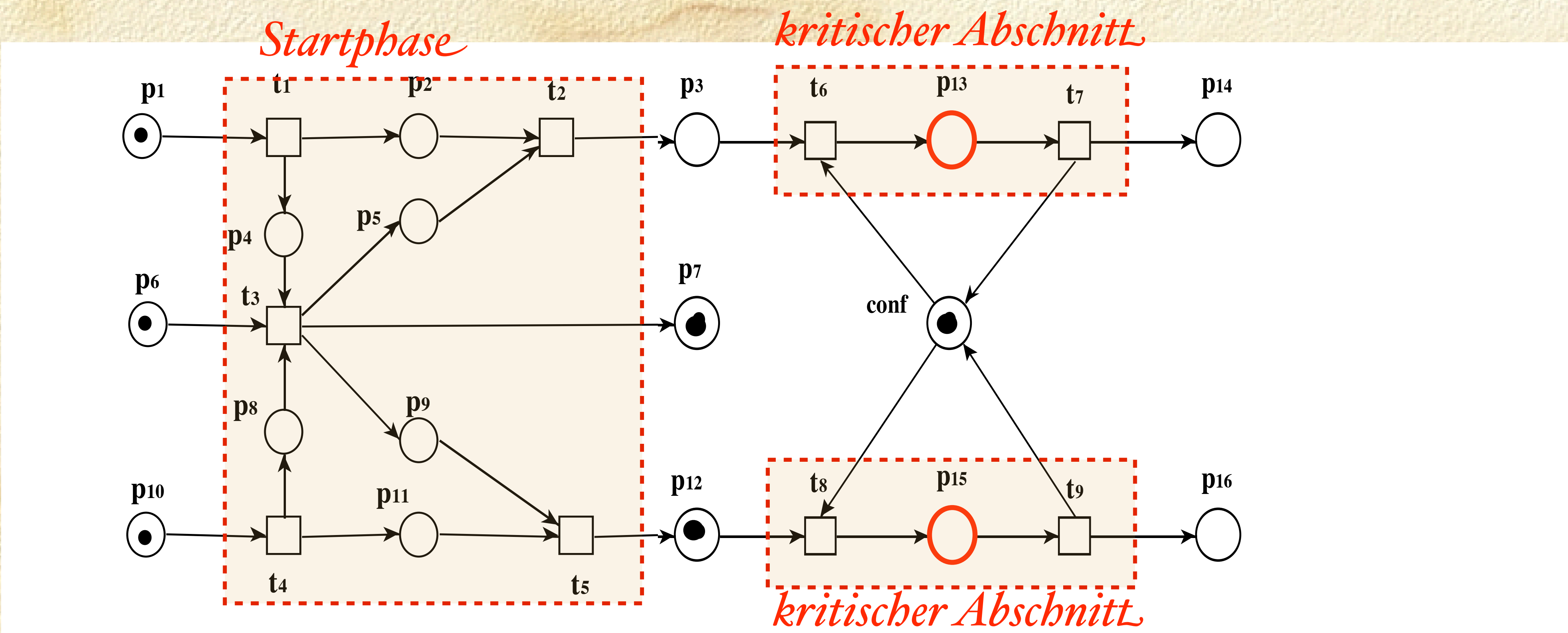
Verhaltenskonflikt

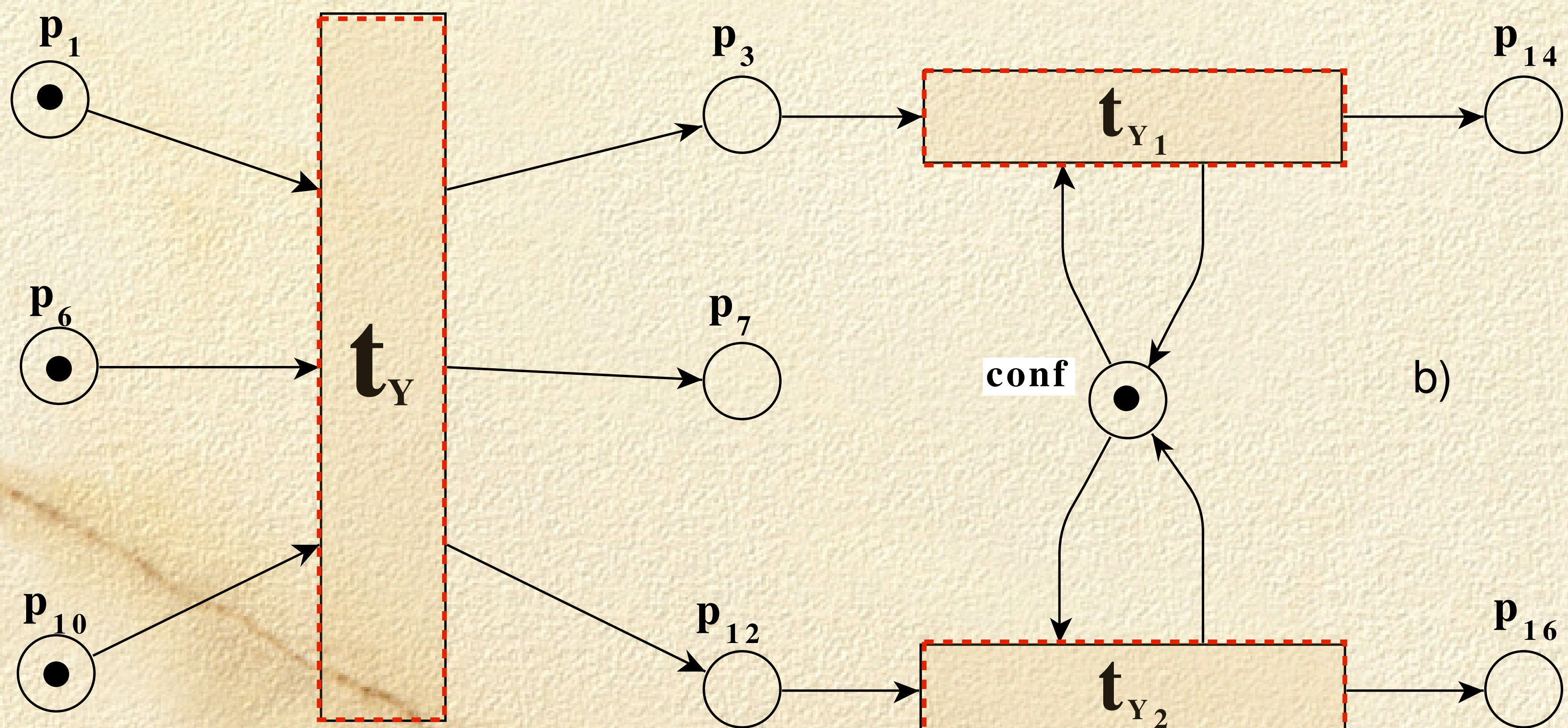
↓

wechselseitiger Ausschluss



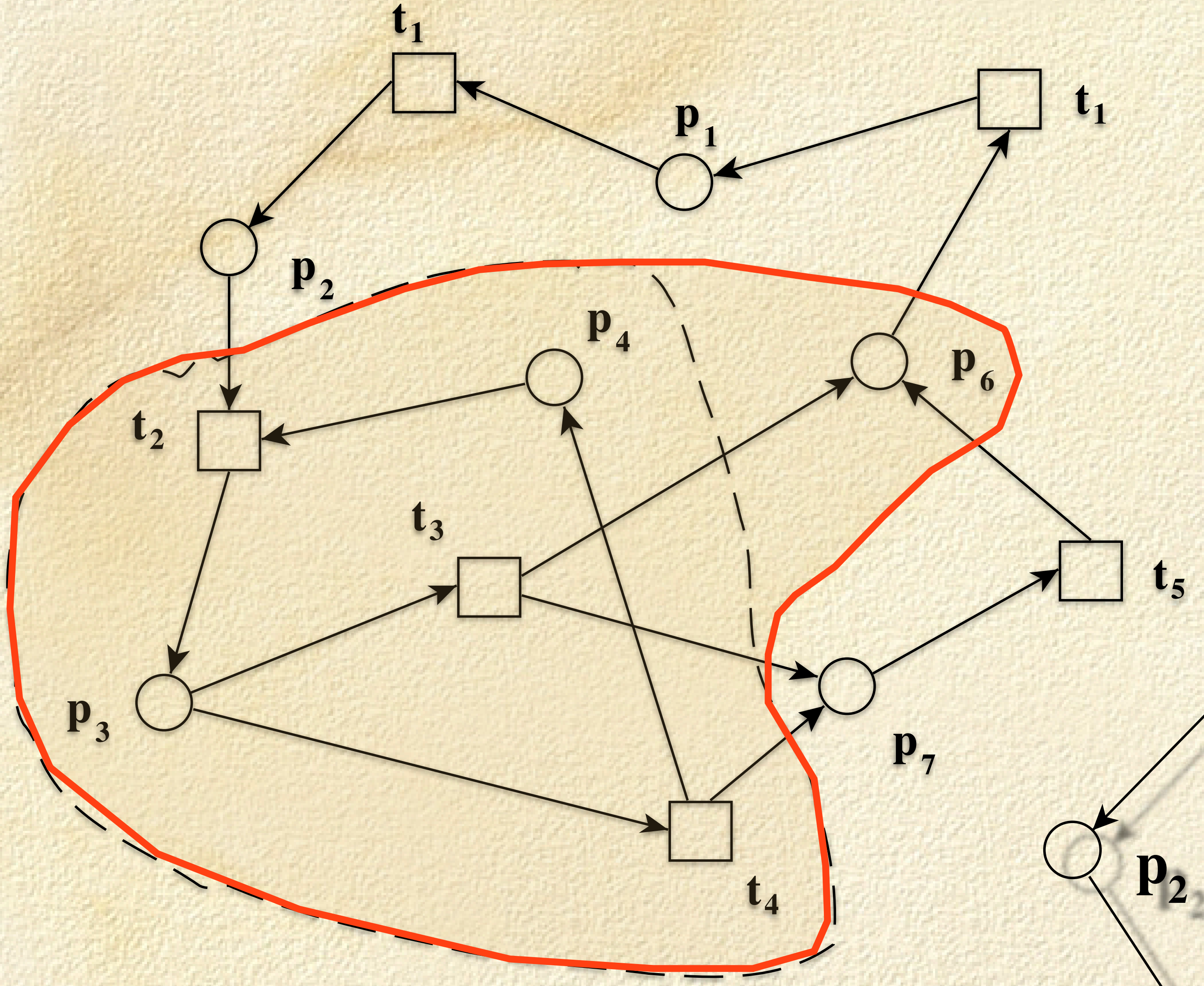
Autorennen
mit Hindernis



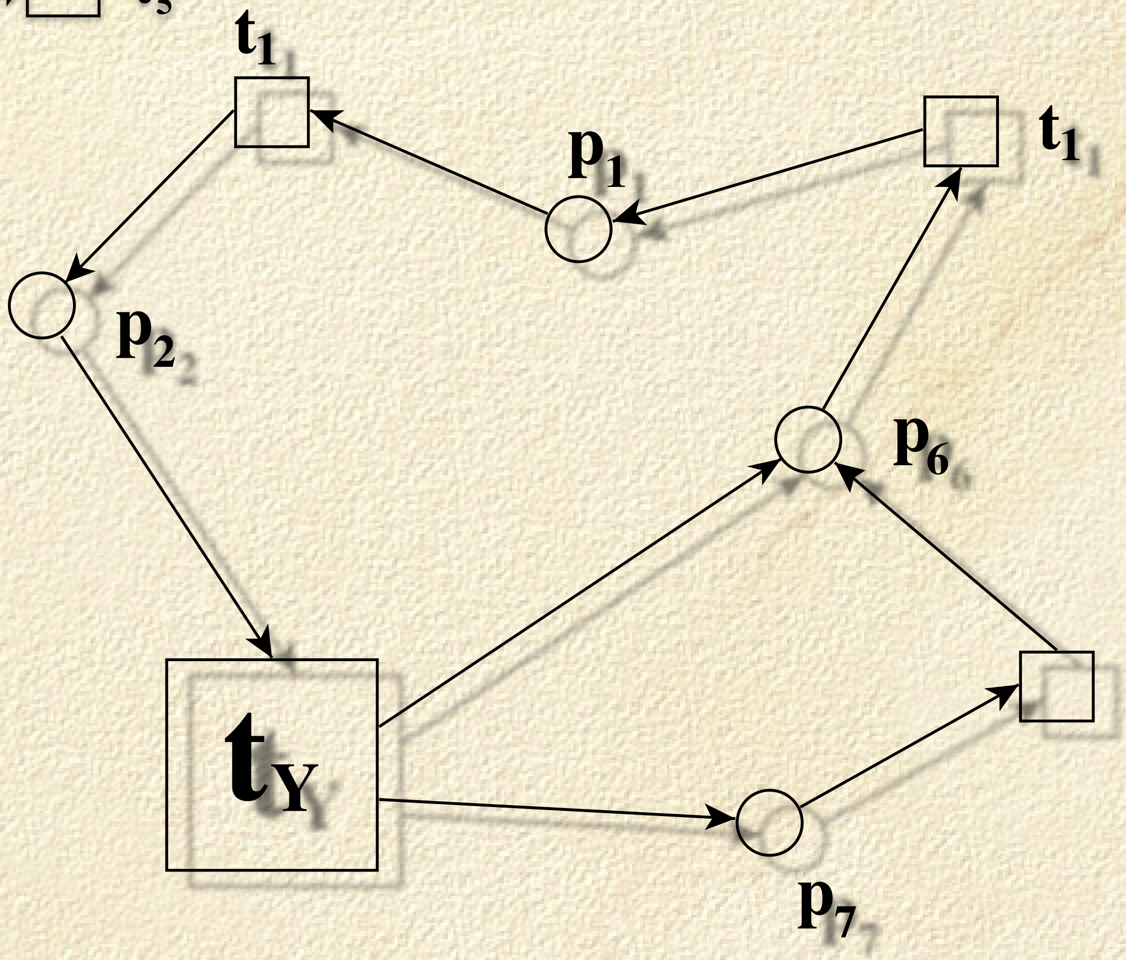


Vergröberung

Verfeinerung und Vergröberung von Netzen

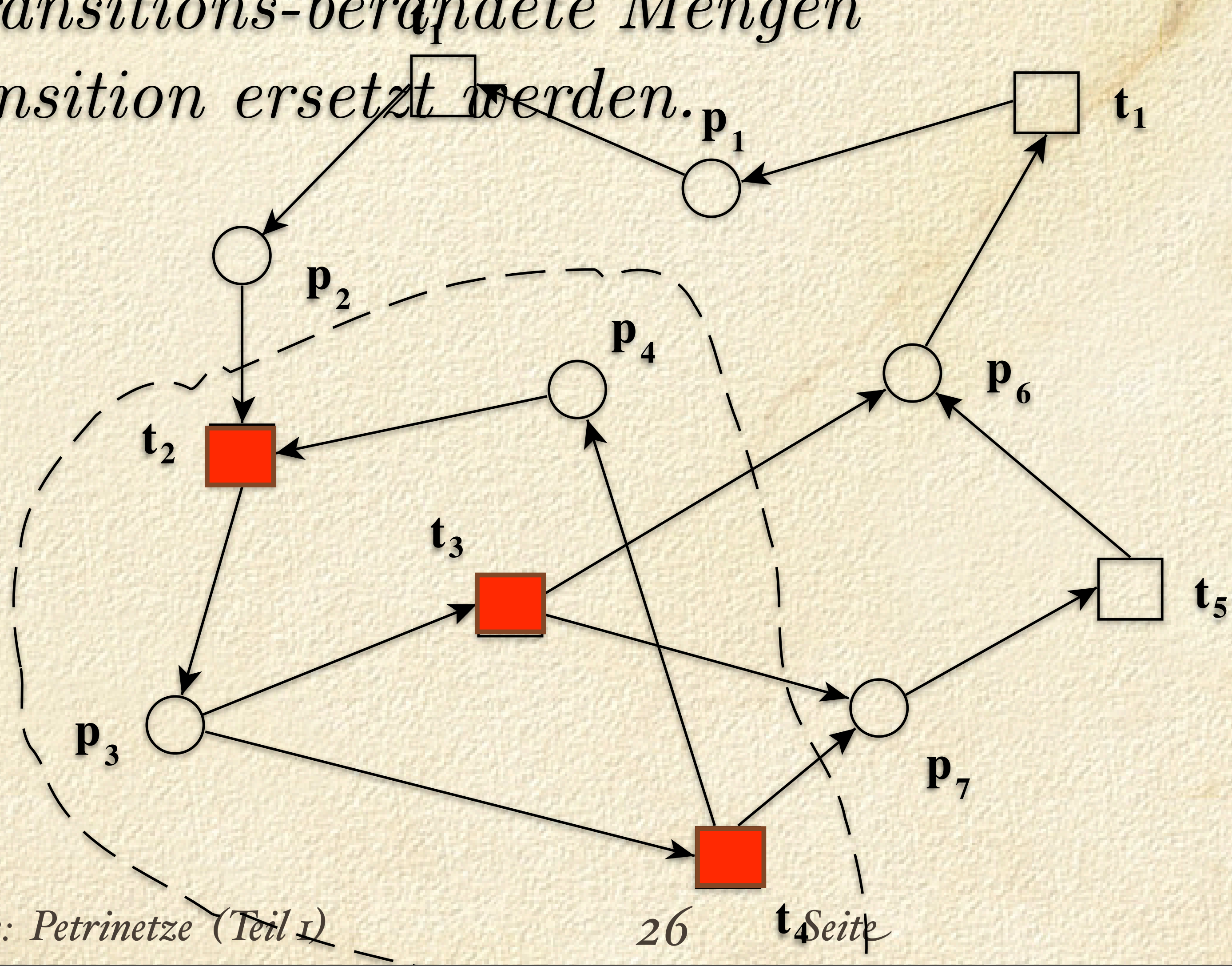


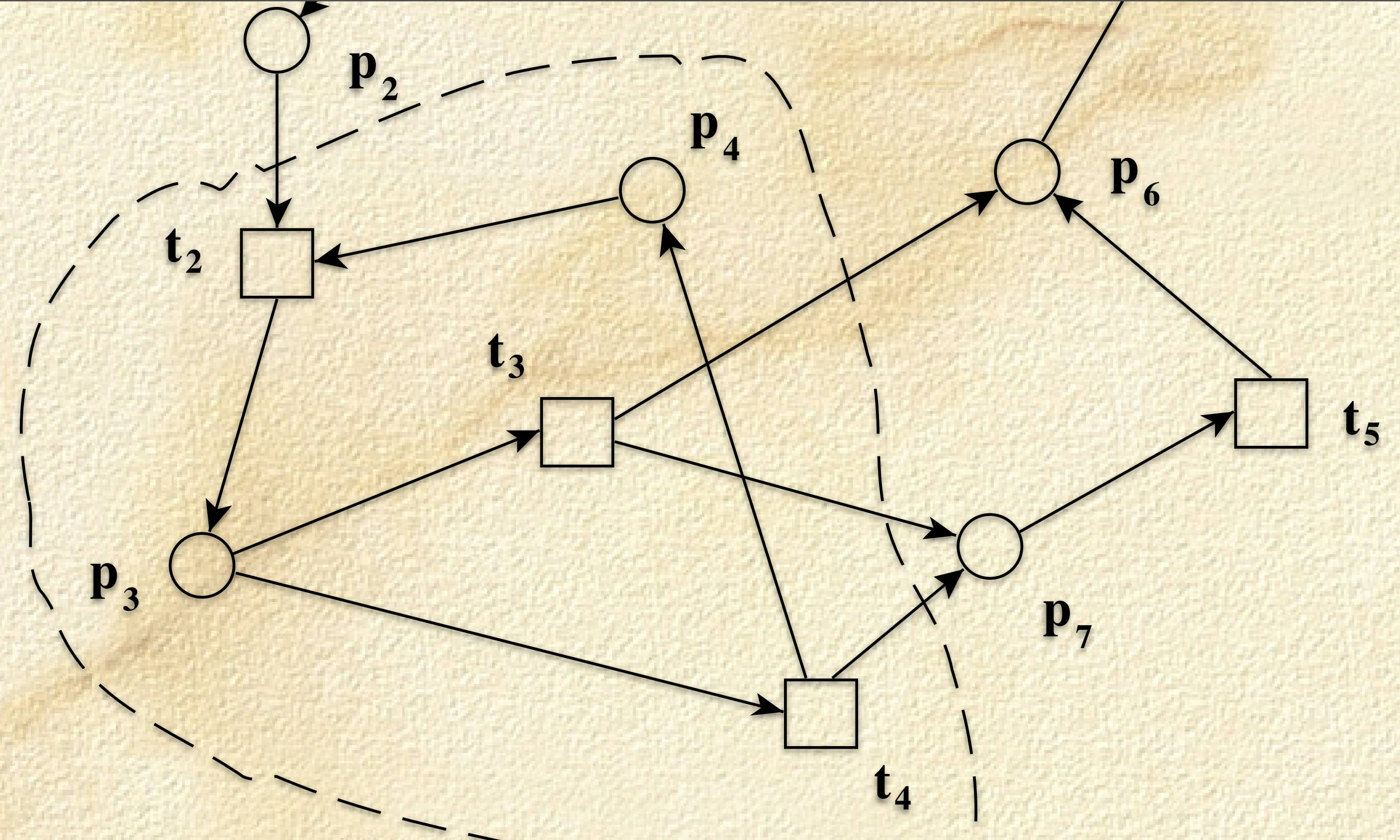
„transitionsberandet“

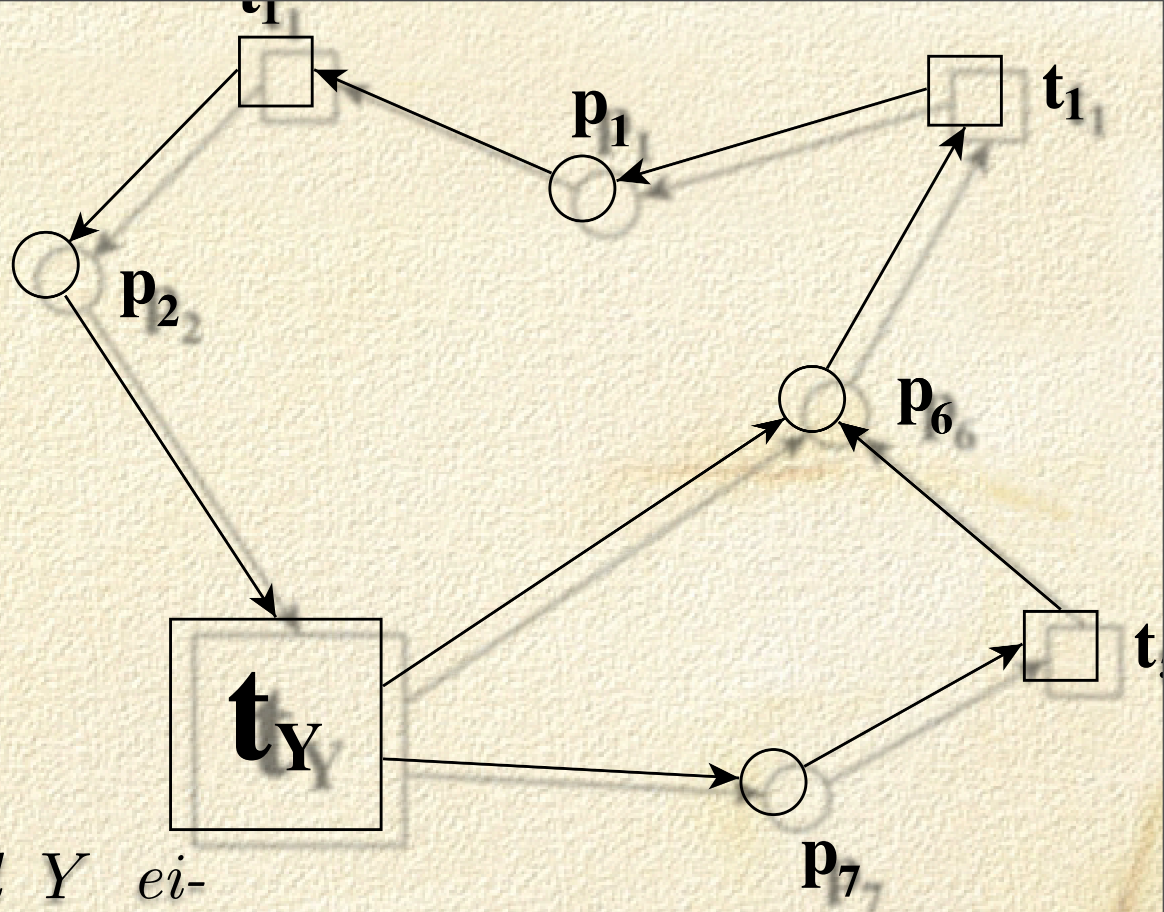


Verfeinerung und Vergröberung von Netzen

Definition 2.3 *Sei* $\mathcal{N} = (P, T, F)$ *ein Netz,* $X := P \cup T$ *und* $Y \subseteq X$ *eine Menge von Elementen. Dann heißt* $\partial(Y) := \{y \in Y | \exists x \notin Y \,.\, x \in loc(y)\}$ *der* Rand *(border) (der Menge* Y*).* Y *heißt* Platz-berandet *(place-bordered) oder* offen[1]*, wenn* $\partial(Y) \subseteq P$*, und* Transitions-berandet *(transition-bordered) oder* abgeschlossen[1]*, falls* $\partial(Y) \subseteq T$*. Um eine Vergröberung mit der Netzstruktur verträglich zu gestalten, sollten im Normalfall Platz- bzw. Transitions-berandete Mengen durch einen Platz bzw. eine Transition ersetzt werden.*







Definition 2.4 *Sei* $\mathcal{N} = (P, T, F)$ *ein Netz und* Y *eine nicht leere Transitions-berandete Menge von Elementen. Dann heißt* $\mathcal{N}[Y] = (P[Y], T[Y], F[Y])$ einfache Vergröberung *(simple abstraction) von* $\mathcal{N}$ *in Bezug auf* Y *falls gilt:* $P[Y] = P \backslash Y$, $T[Y] = (T \backslash Y) \cup \{t_Y\}$, *wobei* t_Y *ein neues Element ist,* $F[Y] = \{(x, y) | x \notin Y \wedge y \notin Y \wedge (x, y) \in F\} \cup \{(x, t_Y) | x \notin Y \wedge \exists y \in Y\,.\,(x, y) \in F\} \cup \{(t_Y, x) | x \notin Y \wedge \exists y \in Y\,.\,(y, x) \in F\}$. $P[Y]$ *enthält alle Plätze mit Ausnahme derjenigen aus* Y. $T[Y]$ *enthält alle Transitionen mit Ausnahme derjenigen aus* Y *und ein neues Element* t_Y. $F[Y]$ *ist die Vereinigung von 3 Kantenmengen, nämlich (1) derjenigen, die kein Ende in* Y *haben, (2) derjenigen die von außerhalb von* Y *zu* t_Y *führen und (3) derjenigen, die von* t_Y *nach Außerhalb führen.*

Iteration der Vergröberung:

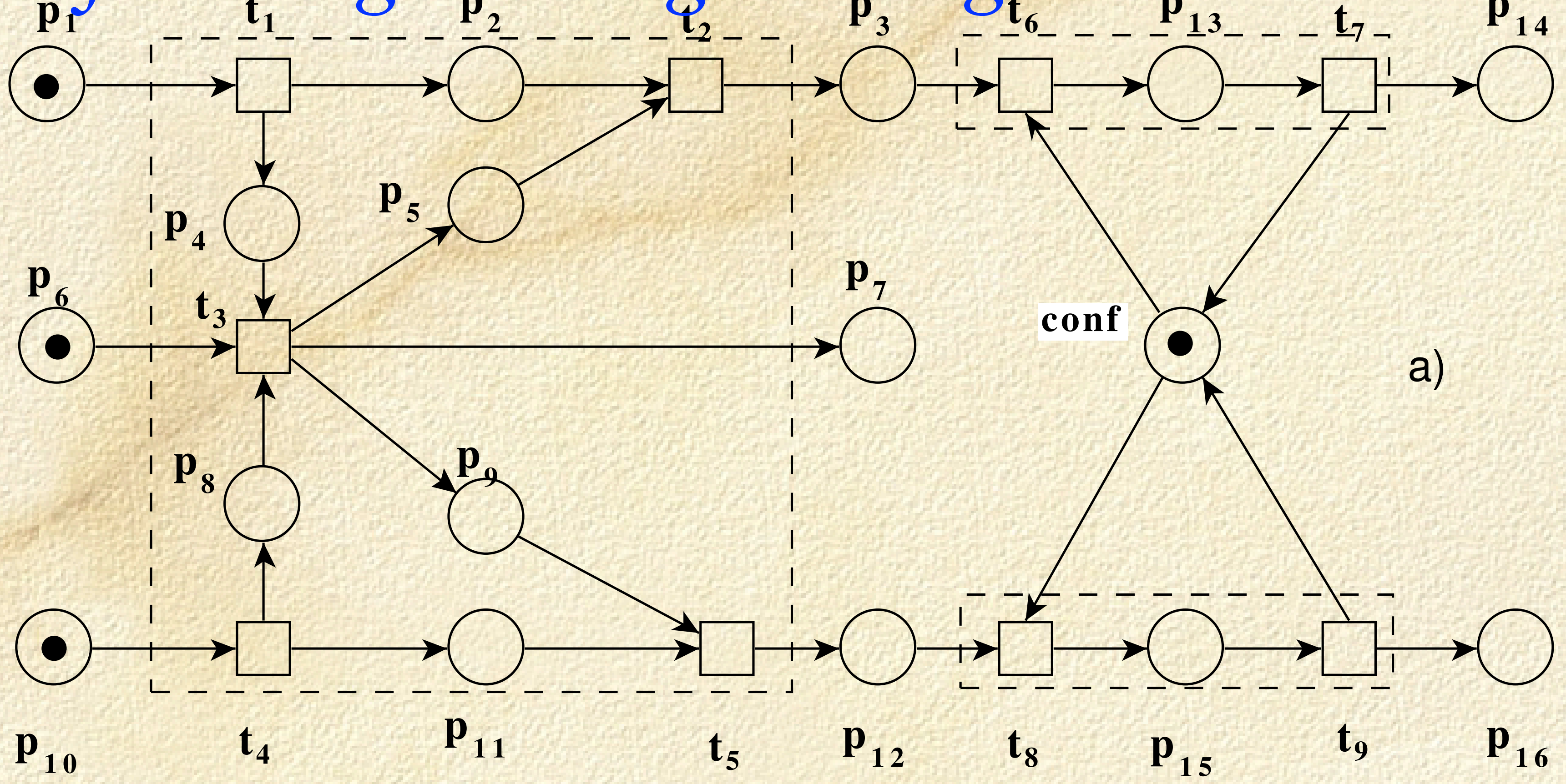
$$\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$$

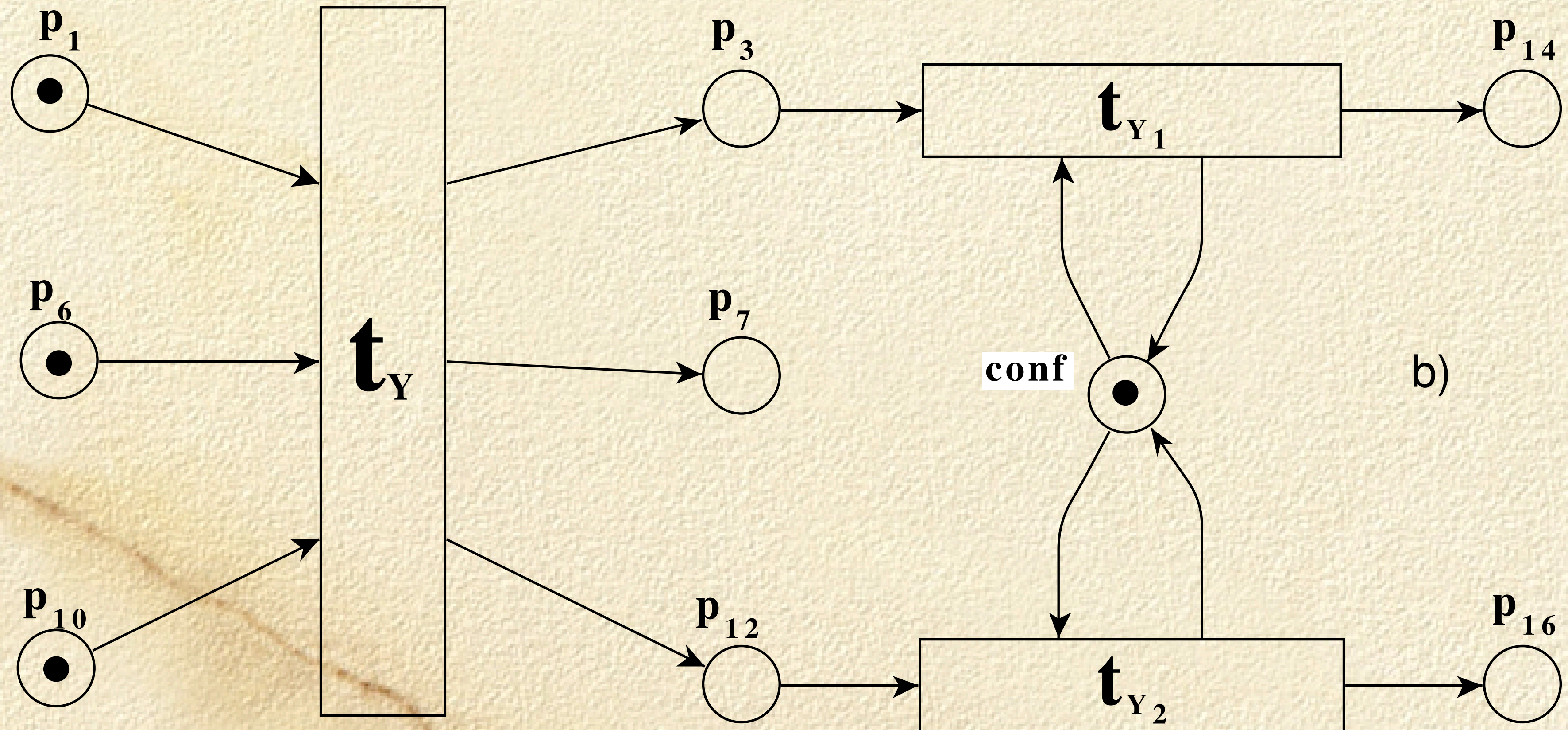
$\mathcal{N}_2$ heißt Vergröberung von $\mathcal{N}_1$

$\mathcal{N}_1$ heißt Verfeinerung von $\mathcal{N}_2$

n = 1 : einfache .....

Verfeinerung und Vergröberung von Netzen





Verfeinerung und Vergröberung von Netzen

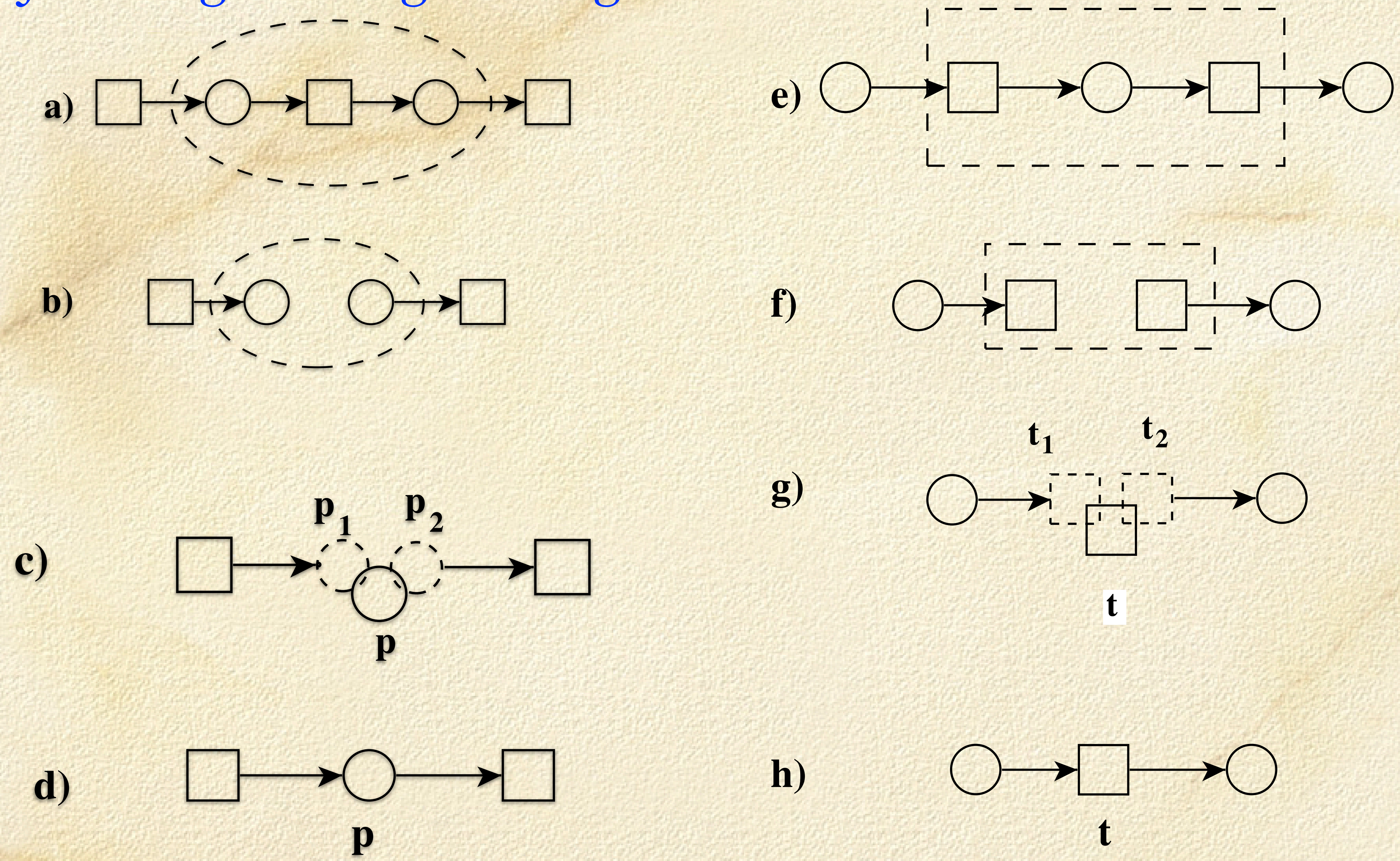
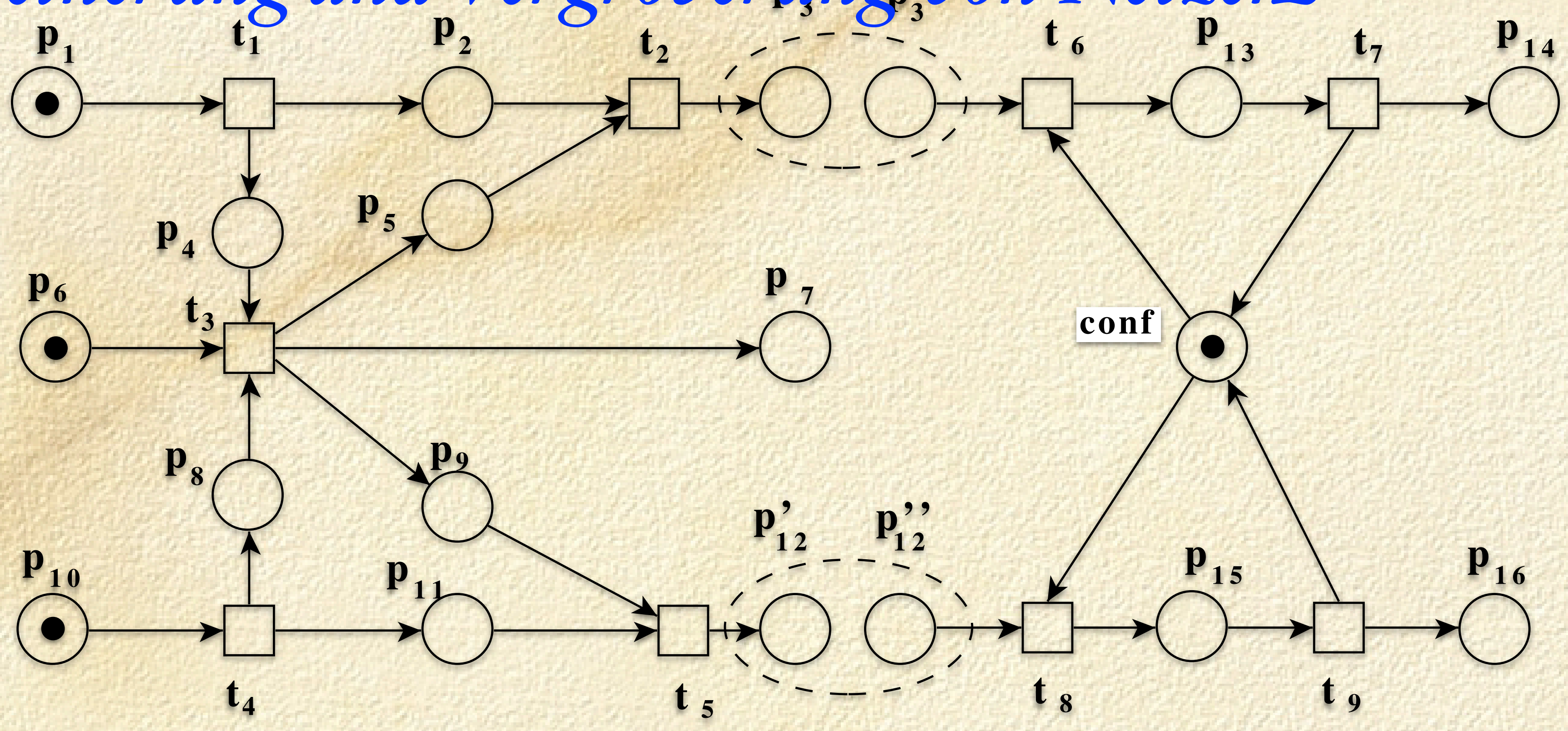
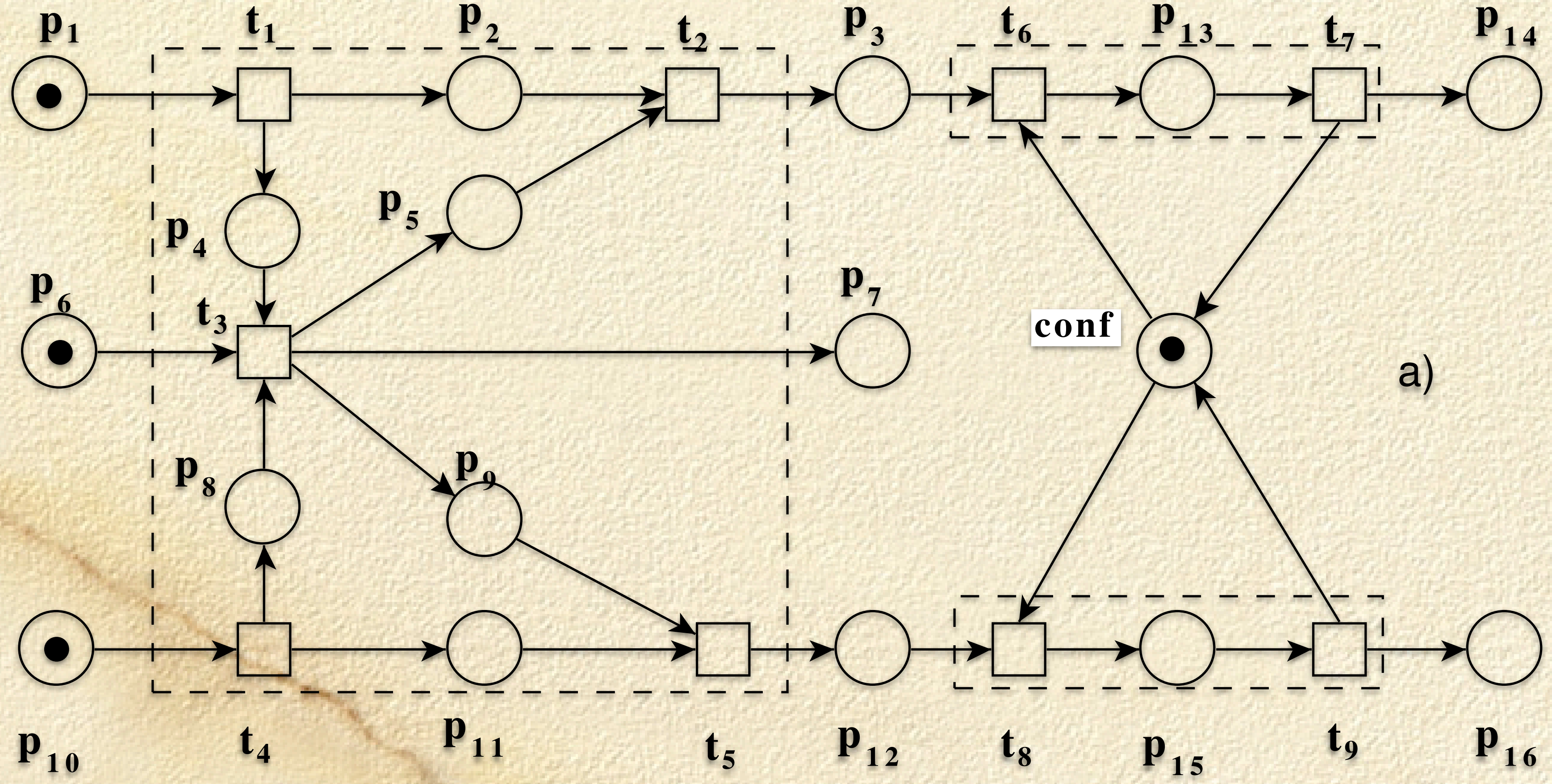


Abbildung 2.11 Vergröberung und Verschmelzung (Fusion)

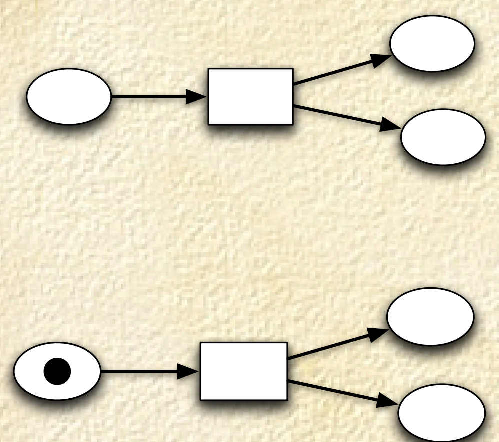
Verfeinerung und Vergröberung von Netzen





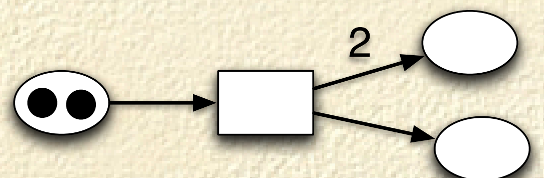
Netzklassen

„einfache“ Netze

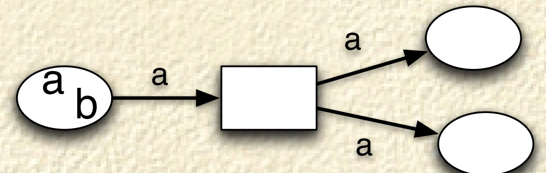


✓

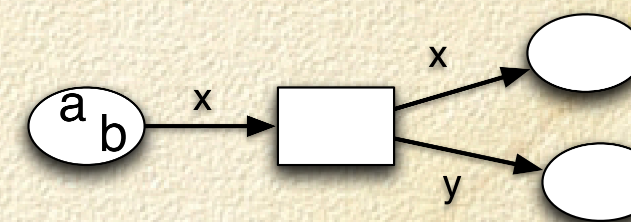
P/T-Netze

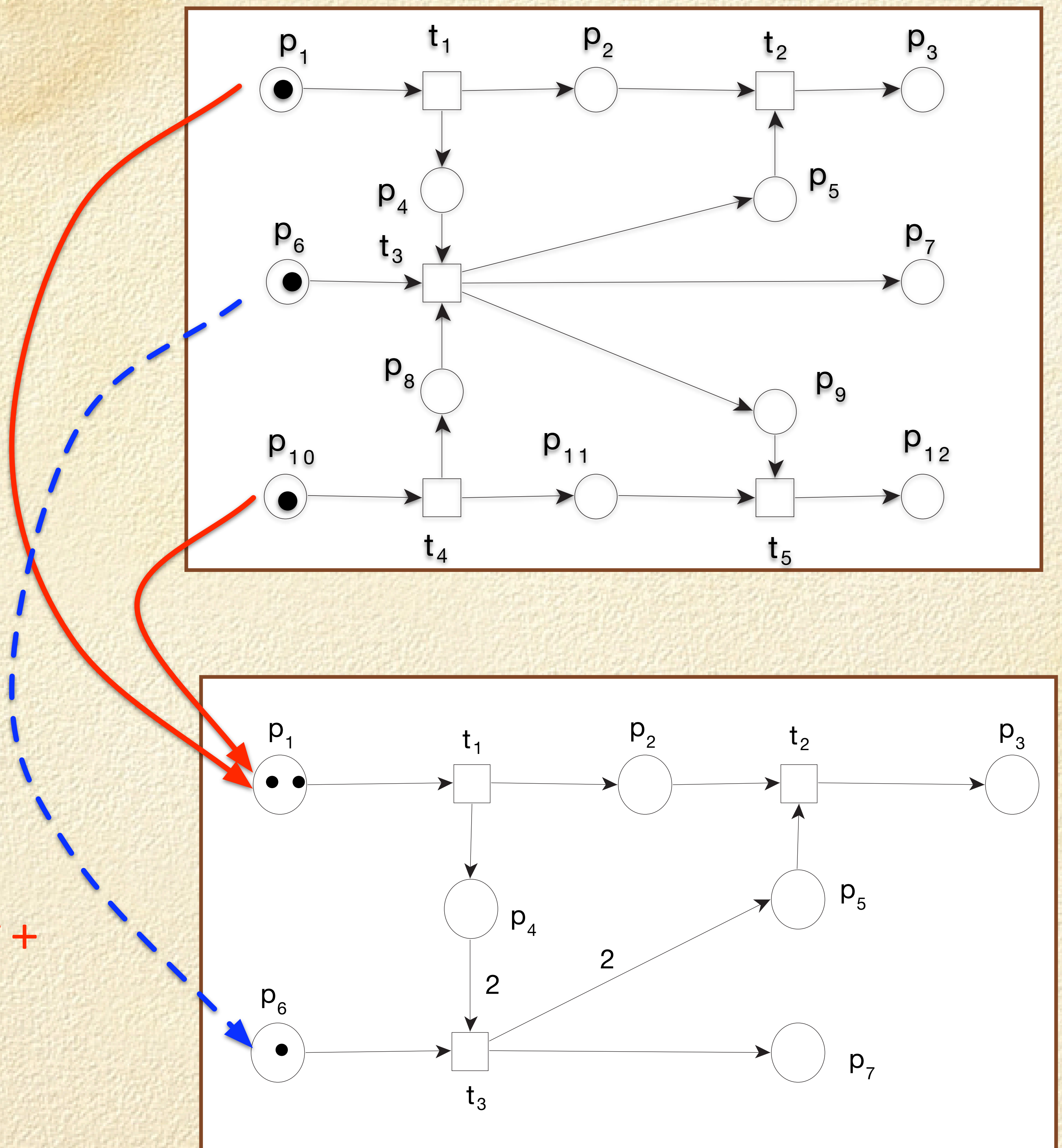


kantenkonstante Netze



gefärbte Netze





neu:
Mehrfachmarkierung +
Kantengewichte

Platz/Transitions-Netze (Seite 48)

Abbildung 2.12 Platz/Transitions Netz $\mathcal{N}_3$

Platz/Transitions-Netze (Seite 48)

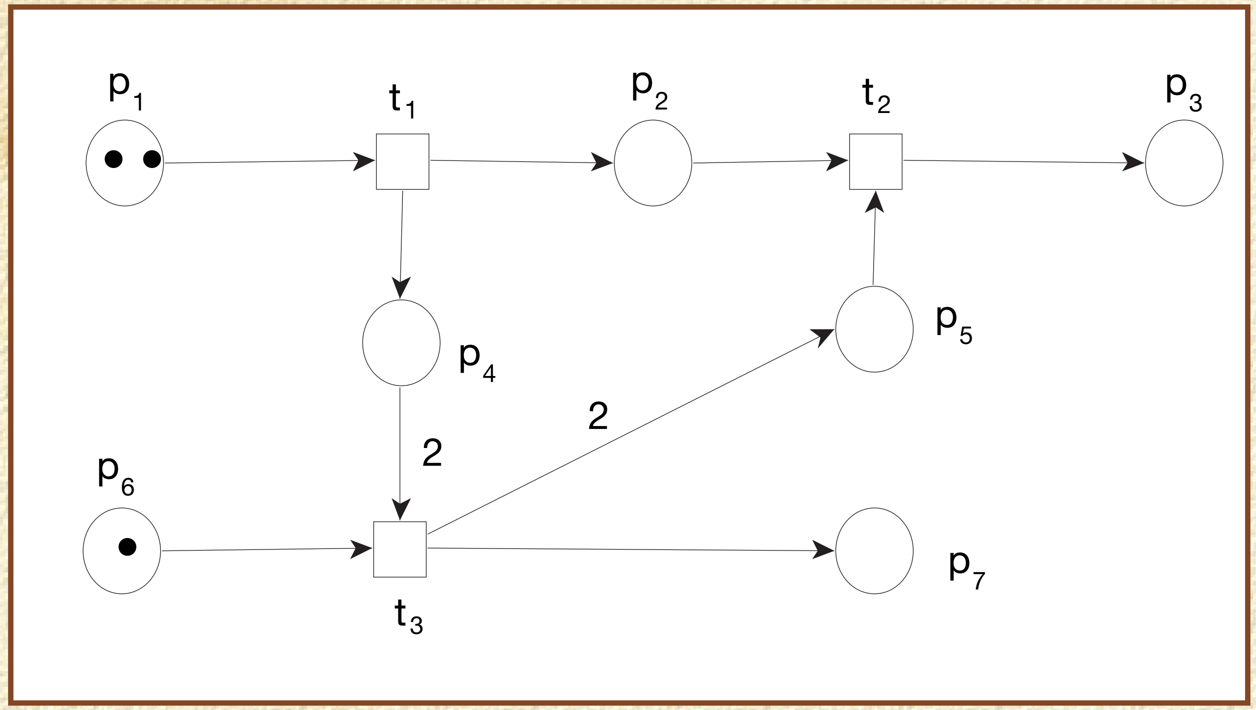


Abbildung 2.12 Platz/Transitions Netz $\mathcal{N}_3$

Definition 2.11 (II) *Ein Platz/Transitions-Netz (P/T-Netz) oder Stellen/Transitions-Netz (S/T-Netz) wird als Tupel* $\mathcal{N} = \langle P, T, F, W, \mathbf{m}_0 \rangle$ *definiert, wobei*

- (P, T, F) *ein endliches Netz (Def. 2.1) ist ,*
- $W : F \to \mathbb{N}^+$ *Kantengewichtung heißt und* — z.B.: $W(t_3,p_5) = 2$
- $\mathbf{m}_0 : P \to \mathbb{N}$ *die Anfangsmarkierung ist.*

Darstellung als Abbildung und als Vektor möglich

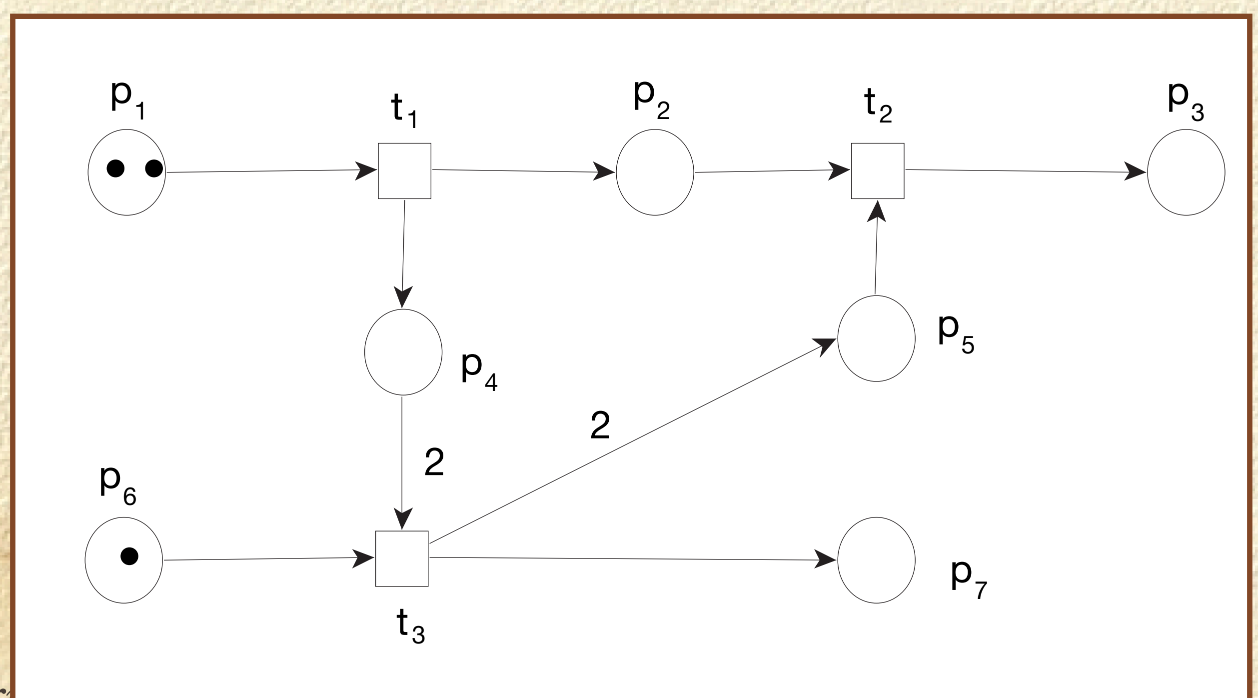
Definition 2.12 *a) Die* Markierung *eines* $P/T-Netzes$ $\mathcal{N} = \langle P, T, F, W, \mathbf{m}_0 \rangle$ *ist ein Vektor* $\mathbf{m}$ *mit* $\mathbf{m}(p) \in \mathbb{N}$ *für jedes* $p \in P$ *(auch als Abbildung* $\mathbf{m} : P \to \mathbb{N}$ *aufzufassen). Die Menge aller Markierungen über* P *(bzw.* S*) wird mit* M_P *(bzw.* M_S*) bezeichnet.*

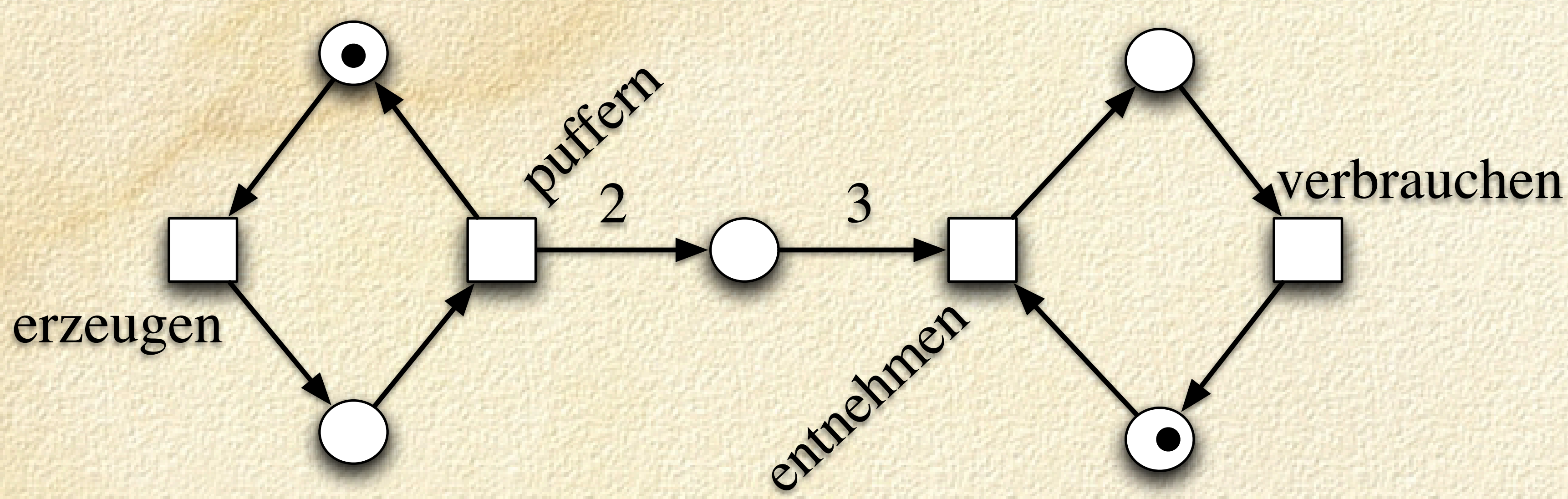
Darstellung als Abbildung:

$\mathbf{m}(p_1) = 2, \mathbf{m}(p_6) = 1, \mathbf{m}(p_i) = 0$ für $i \in \{2, 3, 4, 5, 7\}$

Darstellung als Vektor :

$$\begin{array}{c} p_1 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ p_7 \end{array} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

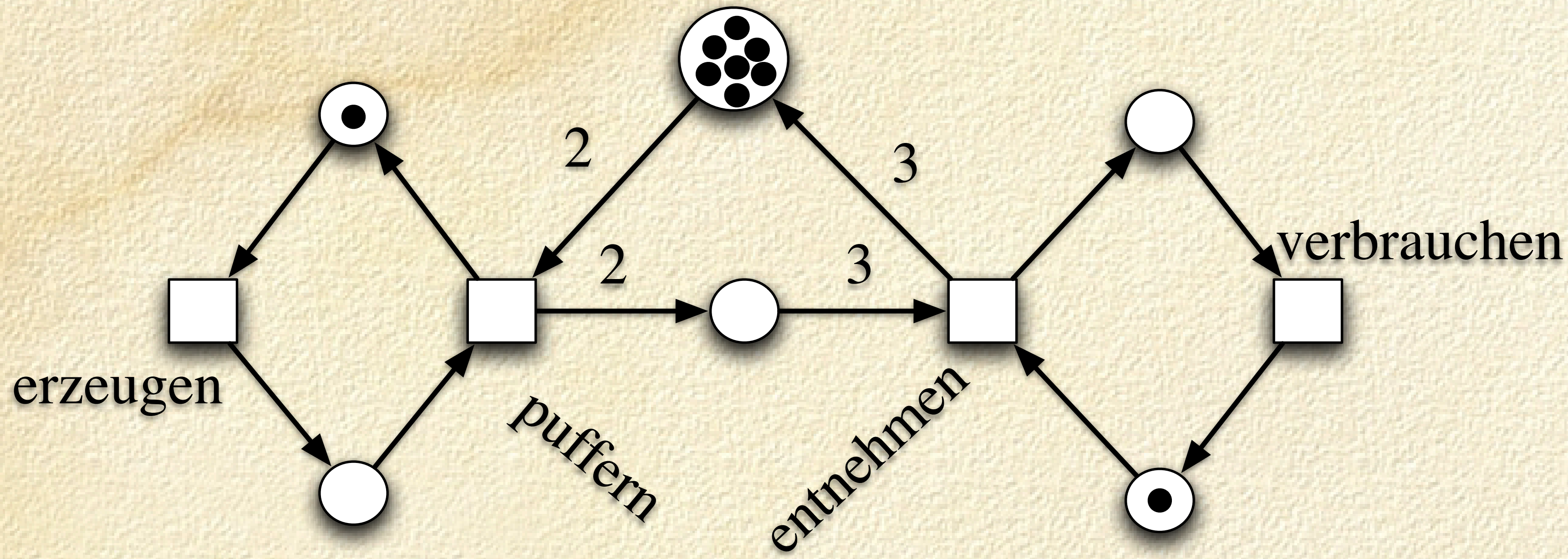




Erzeuger - Verbraucher - System

Sender - Empfänger - System

unbeschränkter Puffer

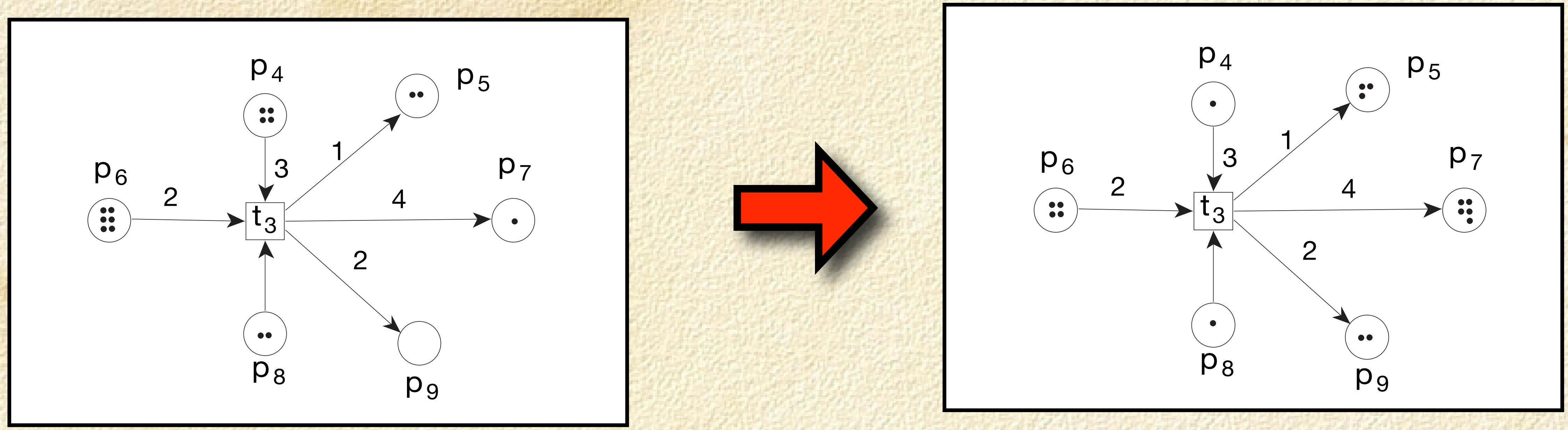


Erzeuger - Verbraucher - System

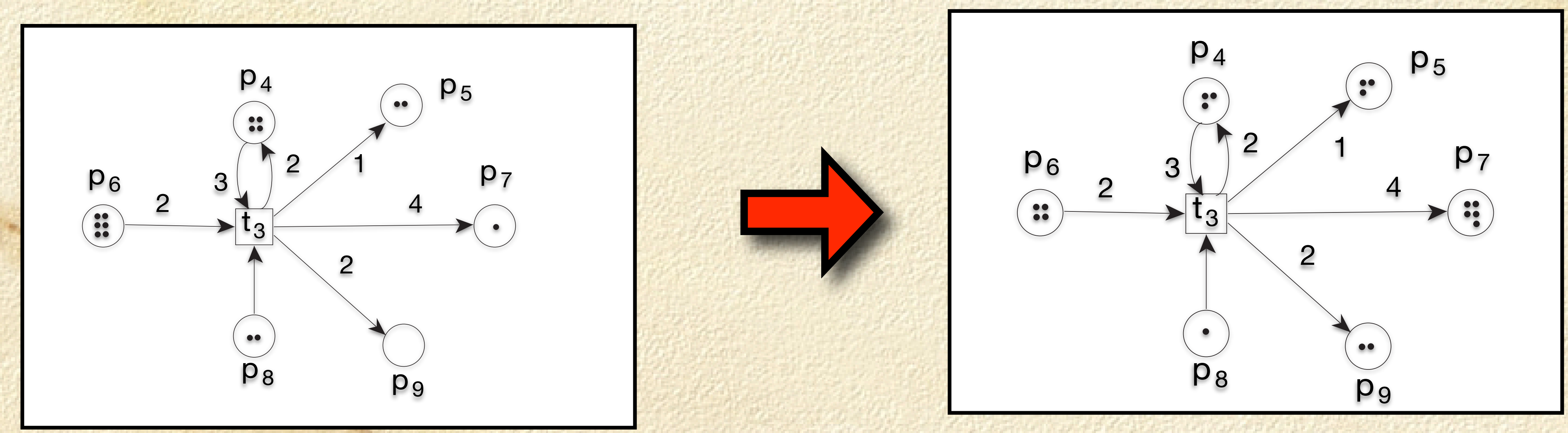
Sender - Empfänger - System

beschränkter Puffer

Schaltregel für *Platz/Transitions-Netze*



Nebenbedingung



(Seite 42)

Definition 2.12 *a) Die* Markierung *eines* $P/T-Netzes$ $\mathcal{N} = \langle P, T, F, W, \mathbf{m}_0 \rangle$ *ist ein Vektor* $\mathbf{m}$ *mit* $\mathbf{m}(p) \in \mathbb{N}$ *für jedes* $p \in P$ *(auch als Abbildung* $\mathbf{m} : P \to \mathbb{N}$ *aufzufassen). Die Menge aller Markierungen über* P *(bzw.* S*) wird mit* M_P *(bzw.* M_S*) bezeichnet.*

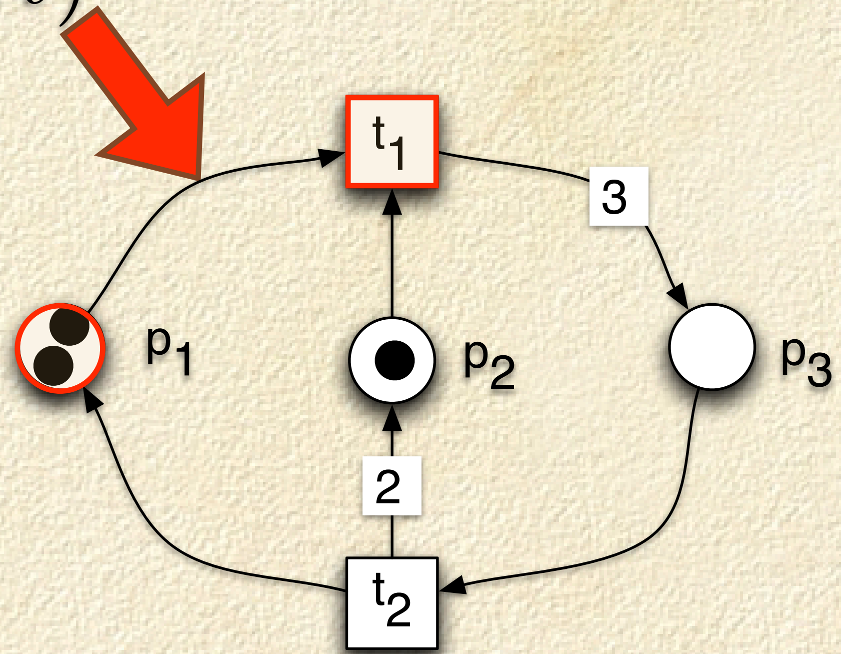
b) Eine Transition $t \in T$ *heißt* aktiviert *in einer Markierung* $\mathbf{m}$ *falls*

$$\forall p \in {}^\bullet t.\ \mathbf{m}(p) \geq W(p,t)$$

2 1

(als Relation: $\mathbf{m} \xrightarrow{t}$*).*

Markierung $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



c) Es sei $\widetilde{W}(p,t) := \begin{cases} W(p,t) & \text{falls } (p,t) \in F \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

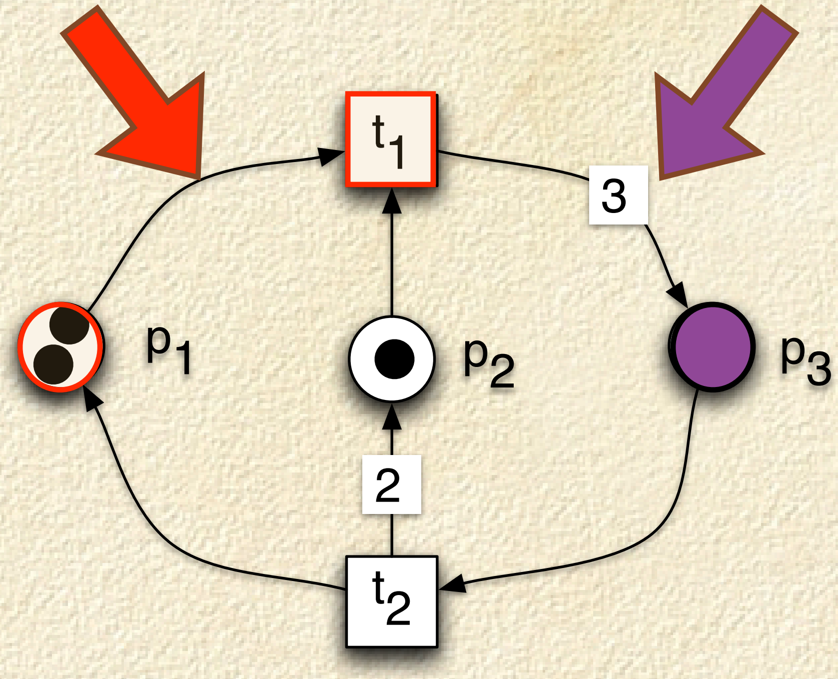
und entsprechend

$\widetilde{W}(t,p) := \begin{cases} W(t,p) & \text{falls } (t,p) \in F \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Ist t in $\mathbf{m}$ aktiviert, dann ist die Nachfolgemarkierung *definiert durch:*

$$\mathbf{m} \xrightarrow{t} \mathbf{m}' \Leftrightarrow \forall p \in P.\ (\mathbf{m}(p) \geq \widetilde{W}(p,t) \wedge \mathbf{m}'(p) = \mathbf{m}(p) - \widetilde{W}(p,t) + \widetilde{W}(t,p))$$

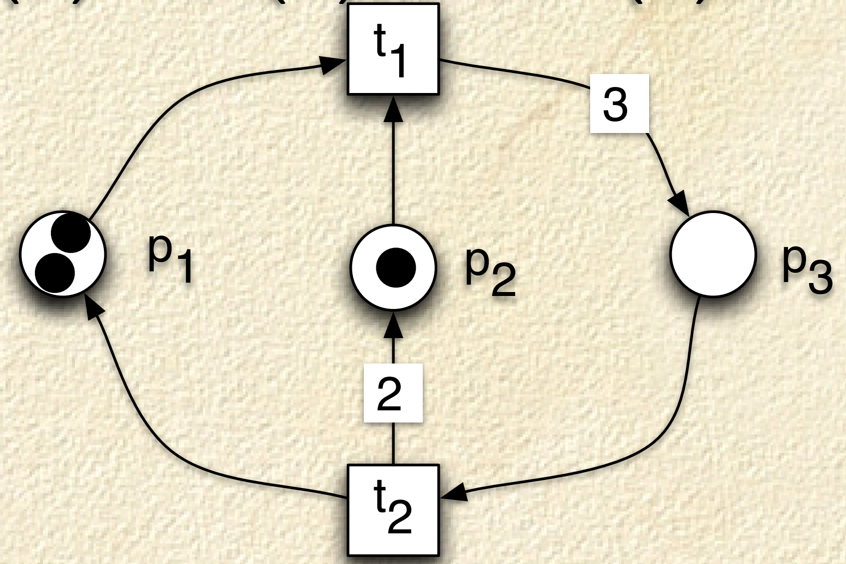
$p = p_1, t = t_1$	2	1	1	2	1	0
$p = p_3, t = t_1$	0	0	3	0	0	3



d) *Definiert man* $W(\bullet,t) := (\widetilde{W}(p_1,t),\ldots,\widetilde{W}(p_{|P|},t))$ *als Vektor der Länge* $|P|$ *und entsprechend* $W(t,\bullet) := (\widetilde{W}(t,p_1),\ldots,\widetilde{W}(t,p_{|P|}))$, *dann kann die Nachfolgemarkierung einfacher durch Vektoren definiert werden:*

$$\mathbf{m}\xrightarrow{t}\mathbf{m}' \Leftrightarrow \mathbf{m} \geq W(\bullet,t) \wedge \mathbf{m}' = \mathbf{m} - W(\bullet,t) + W(t,\bullet))$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

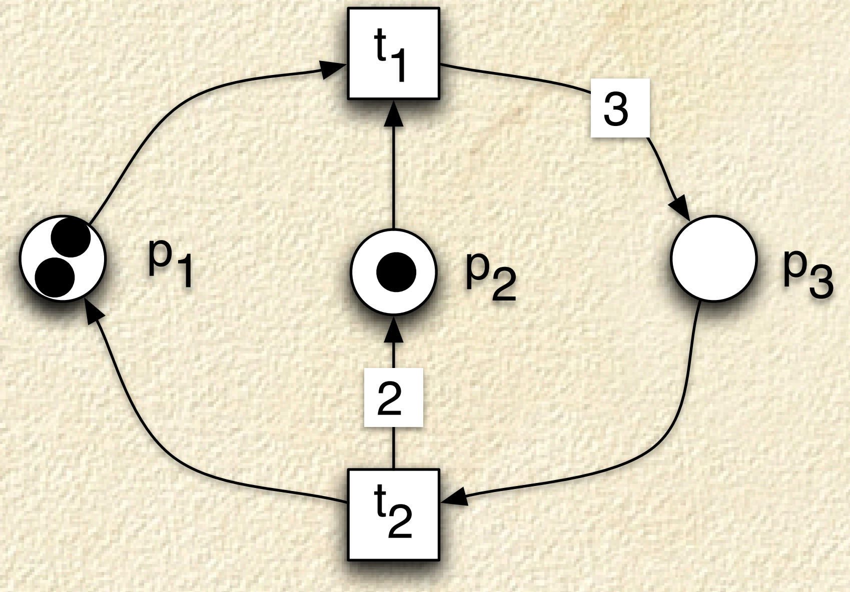


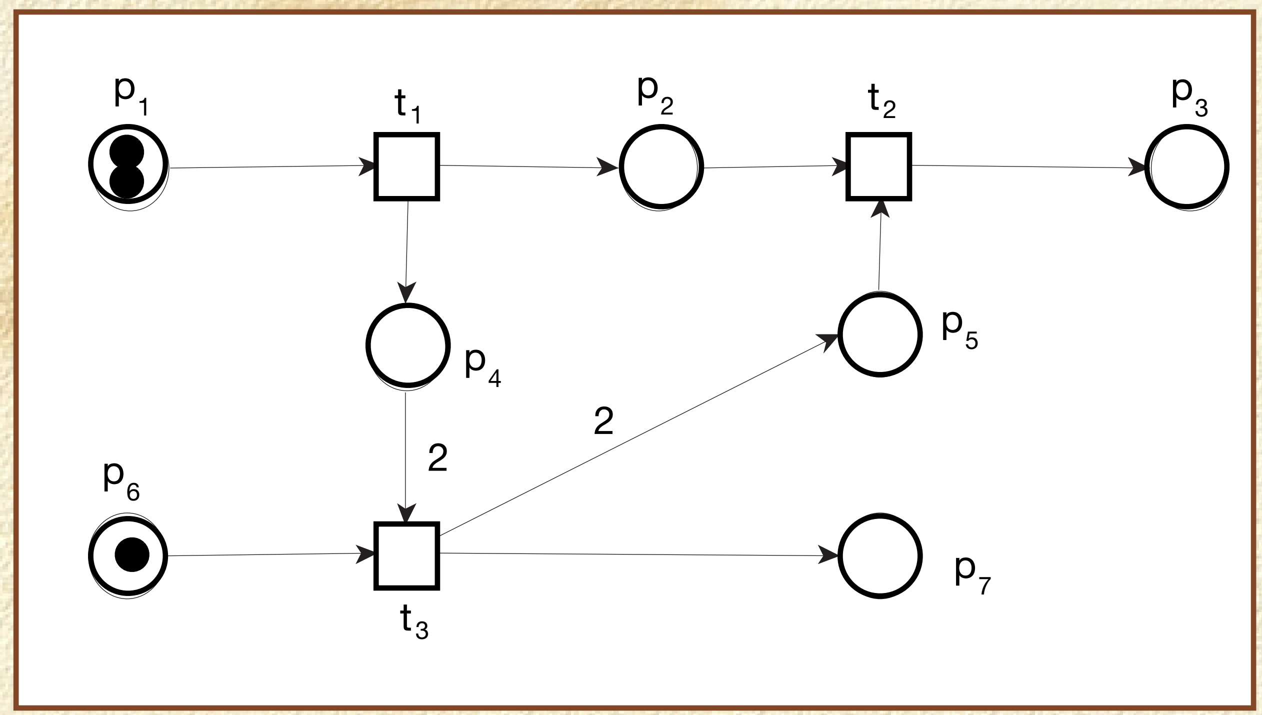
Definition 2.9 *Die Nachfolgemarkierungsrelation von Definition 2.8 wird wie üblich auf Wörter über T erweitert:*

- $\mathbf{m} \xrightarrow{w} \mathbf{m}'$ *falls w das leere Wort λ ist und* $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$,
- $\mathbf{m} \xrightarrow{wt} \mathbf{m}'$ *falls* $\exists \mathbf{m}'' : \mathbf{m} \xrightarrow{w} \mathbf{m}'' \wedge \mathbf{m}'' \xrightarrow{t} \mathbf{m}'$ *für $w \in T^*$ und $t \in T$.*

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda} \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{t_1 t_2 t_1 t_2 t_1} \begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$$





$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{t_1} \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{t_1} \begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\\0\\1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{t_3} \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{t_2} \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{t_2} \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Die Menge $\mathbf{R}(\mathcal{N}) := \{\mathbf{m} | \exists w \in T^* : \mathbf{m_0} \xrightarrow{w} \mathbf{m}\}$ *ist die Menge der* erreichbaren *Markierungen oder auch* Erreichbarkeitsmenge. *Eine Transitionsfolge* $w \in T^*$ *heißt aktiviert in* $\mathbf{m}$ *(in Zeichen:* $\mathbf{m} \xrightarrow{w}$*), falls* $\exists \mathbf{m}_1 : \mathbf{m} \xrightarrow{w} \mathbf{m}_1$ *und* $FS(\mathcal{N}) := \{w \in T^* \mid \mathbf{m_0} \xrightarrow{w}\}$ *ist die Menge der* Schaltfolgen *(firing sequence set) von* $\mathcal{N}$.

Definition 2.13 *Der Erreichbarkeitsgraph ist ein Tupel* $RG(\mathcal{N}) := (Kn, Ka)$ *mit Knotenmenge* $Kn := \mathbf{R}(\mathcal{N})$ *(siehe Def. 3.6) und Kantenmenge* $Ka := \{(\mathbf{m}_1, t, \mathbf{m}_2) \mid \mathbf{m}_1 \xrightarrow{t} \mathbf{m}_2\}$ *vergl. Def. 3.5.*

$$
\begin{tikzcd}
p_1p_6p_{10} \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "t_4"] & p_2p_4p_6p_{10} \arrow[d, "t_4"] \\
p_1p_6p_8p_{11} \arrow[r, "t_1"] & p_2p_4p_6p_8p_{11} \arrow[d, "t_3"] \\
p_3p_7p_9p_{11} \arrow[d, "t_5"] & p_2p_5p_7p_9p_{11} \arrow[l, "t_2"'] \arrow[d, "t_5"] \\
p_3p_7p_{12} & p_2p_5p_7p_{12} \arrow[l, "t_2"']
\end{tikzcd}
$$

Transitionssystem