F3 – Berechenbarkeit und Komplexität

Aufgabenzettel 1 : Grundlagen

Abgabe bis 25.10.2004 24 h.
Besprechung am 27.10.2004.

Präsenzaufgabe 1 : Die Frage muss, bei Bedarf mit Benutzung der Tafel, beantwortet werden können! In derÜbungsstunde wird eine Person der Gruppe dafür von der Übungsgruppenleitung ausgewählt.

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

gilt.

Übungsaufgabe 1.1 :

(a) Seien $p \in \Omega(n^r), q \in \Omega(n^s)$ Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Für welche (maximalen) $t \in \mathbb{N}$ gilt $p + q \in \Omega(n^t)$, $p \cdot q \in \Omega(n^t)$, $p^q \in \Omega(n^t)$?

Dabei sind definiert: $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$, $(p \cdot q)(x) = p(x) \cdot q(x)$, und $(p^q)(x) = p^{(\lceil q(x) \rceil)}$). (3 Pkt.)

von
12

(b) Sei $c \in \mathbb{R}^+$ und seien $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ Funktionen mit $f(x) := (\sqrt{x})^{x \log_2 c}$ bzw. $g(x) := \sqrt{c^{\log_2 x \cdot \log_2 x}}$. Für welche Elemente $\alpha \in \{O, o, \Omega, \omega, \Theta\}$ gilt $g \in \alpha(f)$? Begründen Sie Ihre Aussage. Verwenden Sie die Regeln für Logarithmus und Potenz. (3 Pkt.)

(c) Betrachten Sie $\alpha, \beta \in \{O, o, \Omega, \omega, \Theta\}$ und eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Welche Relationen $\alpha(g) \subseteq \beta(g)$ gelten, welche nicht ? Begründen Sie die Aussagen. (3 Pkt.)

(d) Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}^+$ und $\alpha \in \{O, o, \Omega, \omega, \Theta\}$. Es gelte die Aussage $\forall n \geq n_0 \;:\; |f(n)| \leq c|g(n)|$. Welche Relationen $\alpha(f) \subseteq \alpha(g)$ sind gültig ? (3 Pkt.)

Bisher erreichbare Punktzahl: 12