F3 — Berechenbarkeit und Komplexität

Matthias Jantzen (nach Vorlage von Berndt Farwer)

Fachbereich Informatik

AB „Theoretische Grundlagen der Informatik“ (TGI)

Universität Hamburg

jantzen@informatik.uni-hamburg.de

Zielgruppe

1. Informatik (3. Semester)
2. Wirtschaftsinformatik (3. Semester)
3. Allgemeine Ingenieurswissenschaften, Informatikingenieurwesen und TECMA (5. Semester)

Wichtig:

Beginn 12:15

Ende 13:45

Übungsgruppen

. . . gibt es nur für Wirtschaftsinformatiker und Studierende der TU-Harburg!

Mo 12–13	C-101	Heiko Rölke
Mo 13–14	C-101	Heiko Rölke
Do 14–15	C-101	Mathias Jantzen
Do 15–16	C-101	Michael Köhler
Do 16–17	C-101	Michael Köhler

Die Aufgaben sind aber für jede(n) im WEB abrufbar, und sollten (am Besten in AG's) von allen bearbeitet werden!

Scheinkriterien

Bedingungen für die Ausstellung eines Scheines:

- 50% der erreichbaren Punkte
- regelmäßige, aktive Teilnahme an den Übungsgruppen
- Vorrechnen an der Tafel
- max. zweimaliges unentschuldigtes Fehlen

Skript

Das Skript zur Vorlesung ist erhältlich:

1. **gedruckt** über
   - das Sekretariat von TGI (C-218)
   - die Übungsgruppe
2. **elektronisch:** **Benutzer:**
   Passwort:
   - http://www.informatik.uni-hamburg.de $\longrightarrow$ Gliederung $\longrightarrow$ TGI $\longrightarrow$ Lehre $\longrightarrow$ aktuelle Veranstaltungen $\longrightarrow$ Hinweise, Skript, Aufgaben und Musterlösungen
   - http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/lehre/vl/WS0304/F3/F3.html
   - ... dort auch Übungsaufgaben u. Lösungen!

Ägyptische Multiplikation

...ein Zahlenbeispiel: $231 \cdot 101 = 23331$

231	101	
115	202	
57	404	
28	808	(zu streichen)
14	1616	(zu streichen)
7	3232	
3	6464	
1	12928	

Diese Methode ist korrekt! (Beweis mit Hilfe der Binärdarstellungen der Zahlen oder Induktion.)

Ägyptische Multiplikation (2)

Beispielrechnung: $[23]_{10} \cdot [11]_{10}$

$[23]_2 =$	10111	1011	$= [11]_2$
$[11]_2 =$	1011	10110	$= [22]_2$
$[5]_2 =$	101	101100	$= [44]_2$
$[2]_2 =$	10	1011000	$= [88]_2$
$[1]_2 =$	1	10110000	$= [176]_2$
		11111101	$= [253]_2$

Ägyptische Multiplikation (3)

Warum ist das Verfahren für die Informatik interessant?

1. **ganzzahlige Division durch 2:**
   letztes Bit abschneiden
2. **ganzzahlige Multiplikation mit 2:**
   0 anhängen

Diese elementaren Operationen sind leicht zu implementieren!

Korrektheit des Verfahrens

- Beispiele können höchstens **Fehler** im Verfahren aufdecken
- Korrektheit muss **bewiesen** werden, z.B. durch
  - Induktionsbeweis
  - Widerspruchsbeweis
  - andere mathematische Verfahren

Problemtypen

Je nach Aufgabenstellung lassen sich verschiedene Grundtypen von Problemen unterscheiden:

1. **Entscheidungsprobleme**
2. **Suchprobleme**
3. **Optimierungsprobleme**
4. **Abzählungsprobleme**
5. **Anzahlprobleme**

Entscheidungsprobleme

…zum Beispiel:

Gegeben:	Eine natürliche Zahl $n \in I\!N$.
Gesucht:	Antwort auf die Frage: Ist n eine Primzahl?
Antwort:	**JA** oder **NEIN**

Problem Π ist *Entscheidungsproblem*, gdw. Lösungsraum $\mathfrak{L}(\Pi)$besteht aus genau *zwei* Elementen und jede Instanz $I \in \mathfrak{I}(\Pi)$ hat genau eine Lösung.

Z.B. $\mathfrak{L}(\Pi) = \{0, 1\}$.

Suchprobleme

…zum Beispiel:

Gegeben:	ungerichteter Graph $G := (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$ und Knoten $v_1, v_2 \in V$.
Gesucht:	ein Weg von v_1 nach v_2
Antwort:	Kantenfolge eines Pfades **oder** „Es gibt keinen!“

Optimierungsprobleme

…zum Beispiel:

Gegeben:	gerichteter, bewerteter Graph $G := (V, E)$ mit $E \subseteq V \times \mathbb{N} \times V$ und Knoten $v_1, v_2 \in V$.
Gesucht:	ein günstigster Weg von v_1 nach v_2
Antwort:	Kantenfolge eines Pfades (evtl. mit Kosten) **oder** „Es gibt keinen!“

Abzählungsprobleme

. . . zum Beispiel:

Gegeben:	endliche Menge von Objekten
Gesucht:	alle binären Suchbäume für diese Objekte
Antwort:	Aufzählung der binären Suchbäume

Anzahlprobleme

. . . zum Beispiel:

Gegeben:	zwei Klammersymbole [und]
Gesucht:	Wieviele korrekt geklammerte Terme mit 2n Klammersymbolen gibt es?
Antwort:	Eine Zahl.(aber welche?)

Der Begriff des Algorithmus und die Turing-Maschine

Algorithmus

… einige Algorithmus-Definitionen:

Ein **Algorithmus** liegt genau dann vor, wenn gegebene Größen, auch **Eingabegrößen, Eingabeinformationen** oder **Aufgaben** genannt, auf Grund eines Systems von **Regeln**, Umformungsregeln, in andere Größen, auch **Ausgabegrößen, Ausgabeinformationen** oder **Lösungen** genannt, umgeformt oder umgearbeitet werden.

Kleine Enzyklopädie MATHEMATIK, 1968

Algorithmus (2)

Ein **Algorithmus** ist eine präzise, d.h. in einer festgelegten Sprache abgefaßte, endliche Beschreibung eines allgemeinen Verfahrens unter Verwendung ausführbarer elementarer (Verarbeitungs-)Schritte.
Bauer,Goos, Informatik I, 1991

Wichtig: Es gibt *terminierende* und *nicht terminierende* Algorithmen!

Algorithmus (3)

Ein Algorithmus soll also

- schrittweise arbeiten (**Diskretheit**),
- nach jedem Schritt eindeutig bestimmen, was der nächste Schritt ist (**Determiniertheit**),
- einfache Schritte enthalten (**Elementarität**).
- auf eine hinreichend große Klasse von Instanzen anwendbar sein (**Generalität**).
- sich mit endlichen Mitteln beschreiben lassen (**endliche Beschreibbarkeit**)
- nach endlichen vielen Schritten zu einer Lösung führen (**Konklusivität**). Dies ist **nicht** notwendig, aber oft erwünscht!

Berechenbarkeit

Bereits vor der Prägung des Algorithmenbegriffs:

Suche nach formaler Definition von **Berechenbarkeit**.

Wichtige Observationen:

1. Unlösbare Probleme werden auch bei Verwendung immer schnellerer Rechner unlösbar bleiben.

2. Unter den lösbaren Problemen: Existenz schwer-lösbarer Probleme. Auch schnelle Computer können daran nichts ändern.

Beschreibungsformen für Alg.

- verbal
- ähnlich der Formulierung in einer Programmiersprache
- graphisch
- mathematisch

…aber wie soll man einen Algorithmus mathematisch notieren?!

Beispiel

Summe der ersten n natürlichen Zahlen:

Gegeben:	$n \in I\!N$
Gesucht:	$s = \sum_{i=1}^{n} i$
Antwort:	?

(a) verbale Beschreibung:
Beginne mit $Summe := 0$. Addiere sukzessive zu Summe die Zahlen 1 bis n. Am Ende enthält $Summe$ das gesuchte Resultat.

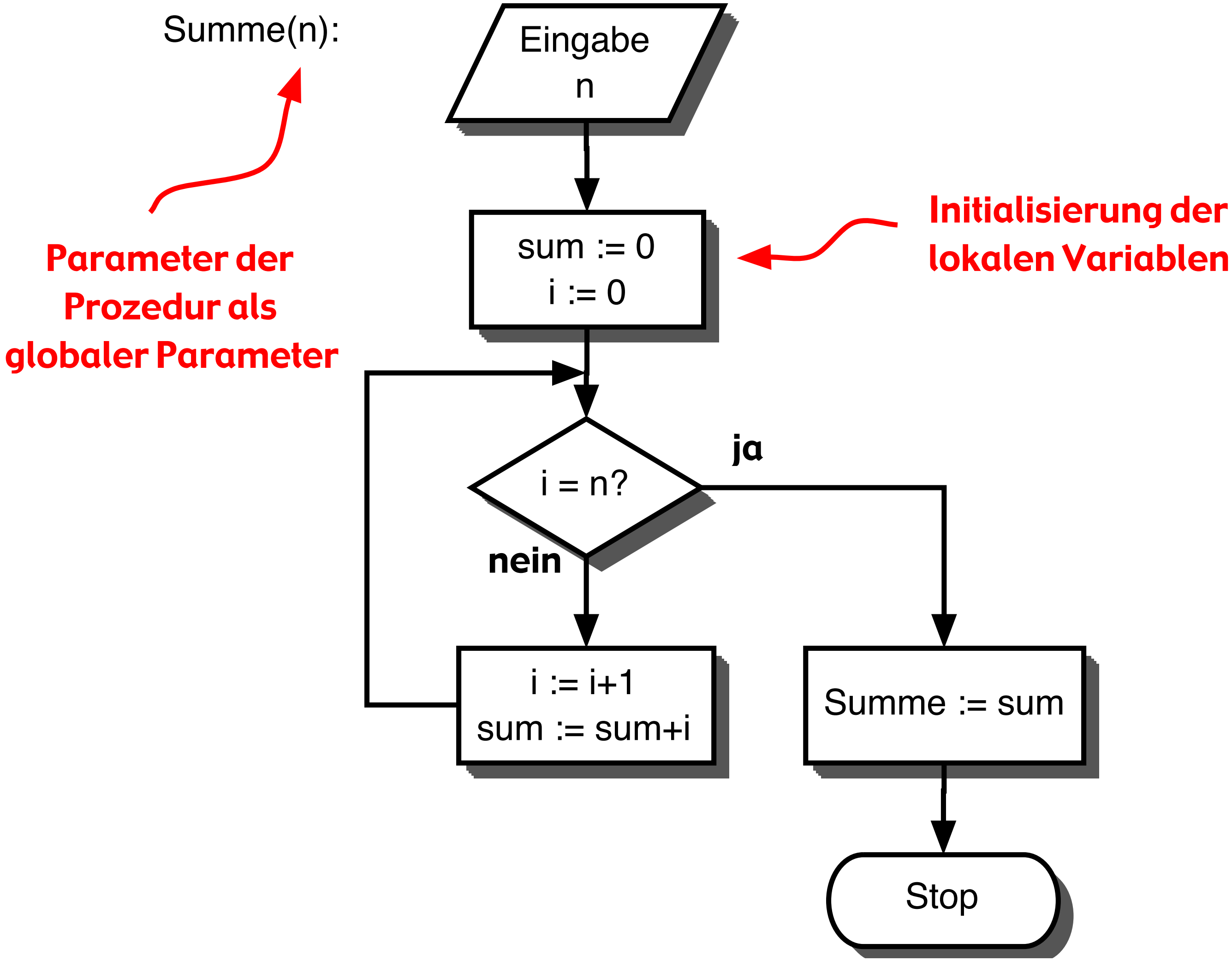
Beispiel (2)

(b) programm-ähnliche Notation:

function *Summe*(n)
{berechnet die Summe der natürlichen
Zahlen von 1 bis n}
sum $\leftarrow 0$
for $i \leftarrow$ 1 **to** n **do** sum $\leftarrow$ sum + i
return sum

Beispiel (3)

(c) graphische Notation:



Die Gaußsche Formel

Theorem: Für beliebiges $n \in I\!N$ gilt:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1) \cdot n}{2}.$$

Algorithmus: Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\binom{n+1}{2}$.

…das sieht viel einfacher aus, aber ist es auch korrekt?

$\longrightarrow$ Das muss erst bewiesen werden!

Beweis der Gaußschen Formel

(a) direkte Methode von Gauß:

$$\begin{aligned}
2s &= 2 \cdot \textstyle\sum_{i=1}^{n} i \\
&= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + \\
&\quad\ n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \\
&= (n+1) \cdot n
\end{aligned}$$

Also:

$$s = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis der Gaußschen Formel (2)

(b) mit vollständiger Induktion:

Verankerung:

$$n = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$$

Induktionsannahme:

Die Gaußsche Formel gilt für festes, aber beliebiges $m \in I\!N$.

Beweis der Gaußschen Formel (2)

Induktionsschritt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m+1} i &= \sum_{i=0}^{m} i + (m+1) \\
&= \frac{m \cdot (m+1)}{2} + (m+1) \\
&= \frac{m \cdot (m+1) + 2 \cdot (m+1)}{2} \\
&= \frac{(m+1)(m+2)}{2}
\end{aligned}
$$

Somit ist die Annahme bewiesen!

Problemlösung

. . . besteht aus:

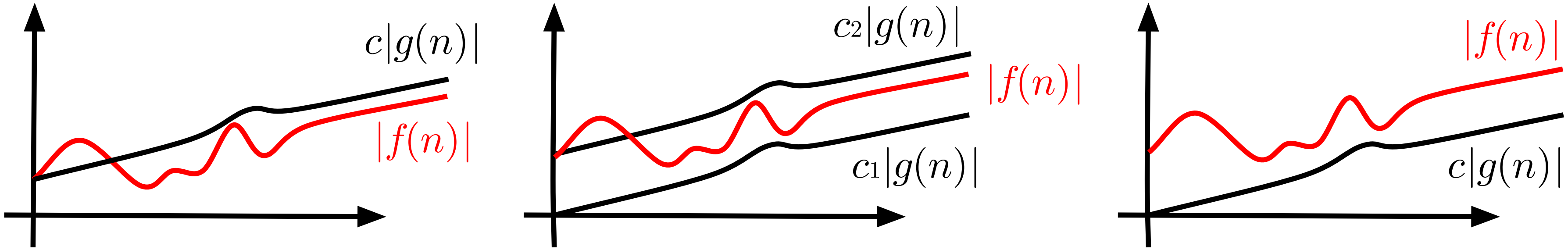
- Problem, vorhandene Eingaben und gewünschte Ausgaben korrekt erfassen
- Algorithmus finden, der das Problem löst
- Algorithmus als korrekt nachweisen
  - mittlere/schlechteste Laufzeit und Speicherbedarfe ermitteln
  - Algorithmus effizient implementieren

Die Landau- oder O-Notation

Anschaulich

Wir betrachten das Wachstum von Funktionen:

Auf *Paul Bachmann* (1894) geht die von E. Landau popularisierte Notation zurück.



$f(n) \in O(g(n))$ $\quad$ $f(n) \in \Theta(g(n))$ $\quad$ $f(n) \in \Omega(g(n))$

O-Notation

Definition:
Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
wächst mit der Ordnung $g(n)$ bzw. g, geschrieben

$$f(n) \in O(g(n)) \text{ bzw. } f \in O(g),$$

falls $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist und eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ existiert, so dass

$$|f(n)| \le c \cdot |g(n)|$$

für alle, bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt.

O-Notation (2)

Etwas knapper notiert liest sich das so:

$$O(g) =$$

$$\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$$
$$[\,|f(n)| \leq c\,|g(n)|\,]\}.$$

…die Menge aller Funktionen, für die g (mit einem konstanten Faktor) eine obere Schranke ist.
(„f wächst nicht schneller als g“)

Mit $O(f)$ bezeichnen wir also eine Menge von Funktionen.

„$f \in O(g)$ist **von der Ordnung** $O(g)$.“

Zusammenfassung

- Die O-Notation ist asymptotische Notation. Sie spiegelt das Verhalten einer Funktion nur für große n korrekt wider. $f(n) \in O(g(n))$ bedeutet:
  - $g(n)$ und $f(n)$ haben für große n ein ähnliches Wachstumsverhalten.
  - Es ist $\frac{|f(n)|}{|g(n)|} \leq c$ für alle $n \geq n_0$ mit $g(n) \neq 0$.
  - Es gilt, falls $a_k \neq 0$: $O(a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0) = O(n^k)$
  - $O(f(n) + g(n)) = O(max(|f(n)|, |g(n)|))$.

Beispiele zur O-Notation

Beispiele:

Seien f und g definiert durch:

$f(n) := 12n^4 - 11n^3 + 1993$ und $g(n) := 7n^3 - n$.

Dann ist $g \in O(f)$ aber nicht $f \in O(g)$.

Auch gilt

$$f \in O(n^4)$$

und

$$f \in O(7028060n^4 - 1948).$$

$$1000x \in O(x^2 - x)$$

Die Funktionsklassen $\Omega(g)$

Definition:

$$\Omega(g) =$$

$$\{f : I\!\!N \to I\!\!R \;\Big|$$

$$(\exists c \in I\!\!R^+)(\exists n_0 \in I\!\!N)(\forall n \geq n_0)[\, c\,|g(n)| \leq |f(n)|\,]\}$$

…die Menge aller Funktionen, für die g (mit einem konstanten Faktor) eine untere Schranke ist.

(„f wächst nicht langsamer als g“)

Funktionsklassen $\Theta(g)$

Definition:

$$\begin{gathered}\Theta(g) = \\ \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \\ (\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \\ (\forall n \geq n_0)[c_1 \, |g(n)| \leq |f(n)| \leq c_2 \, |g(n)| \,]\}.\end{gathered}$$

„f wächst etwa so schnell wie g“

Beispiel zu $\Theta(g)$

Beispiel: Um zu beweisen, dass

$$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2) \qquad n \to \infty$$

muss man solche $c_1 > 0, c_2, n_0$ finden, dass

$$c_1 n^2 \le |\frac{1}{2}n^2 - 3n| \le c_2 n^2 \quad \text{für } n \ge n_0$$

$$c_1 \le |\frac{1}{2} - \frac{3}{n}| \le c_2 \quad \text{für } n \ge n_0$$

Lösungen: $c_1 \le \frac{1}{14}, \quad c_2 \ge \frac{1}{2}, \quad n \ge 7$

Weitere Funktionsklassen

Definition:

$$o(g) = \{f : I\!N \to I\!R \mid (\forall c \in I\!R^+)(\exists n_0 \in I\!N)$$

$$(\forall n \geq n_0)[\,|f(n)| \leq c\,|g(n)|\,]\}$$

„f wächst langsamer als g“

Beispiel: $\ln(x) \in o(\sqrt{x}) \quad und \quad \sqrt{x} \in o(x)$

Definition:

Es sei $f \in \omega(g)$ genau dann, wenn $g \in o(f)$

„f wächst schneller als g“

Zusammenhänge

…grundlegende Beziehungen zwischen Θ-, O- und Ω-Notation:

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \quad \Longleftrightarrow \quad f(n) \in O(g(n)) \text{ und } f(n) \in \Omega(g(n)).$$

Eine Auswahl von Regeln zur Manipulation von O-Ausdrücken:

$$\begin{aligned}
n^m &\in O(n^{m'}) \quad \text{falls } m \leq m' \\
f(n) &\in O(f(n)) \\
cO(f(n)) &= O(f(n)) \\
O(O(f(n))) &= O(f(n)) \\
O(f(n)) + O(g(n)) &= O(|f(n)| + |g(n)|) \\
O(f(n))O(g(n)) &= O(f(n)g(n)) \\
O(f(n)g(n)) &= f(n)O(g(n))
\end{aligned}$$

kanonische Erweiterung

Man schreibt $f(n) + O(g(n))$ für

$$\{g' \mid g'(n) := f(n) + h(n) \text{ und } h \in O(g)\}$$

... zum Beispiel:

$$\sum_{k=0}^{n} (e + O(k)) \qquad e, k \in \mathbb{R}$$

$$e + O(k) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists c : |f(n,k)| \leq c \cdot k\}$$

Also: $\sum_{k=0}^{n} (e + O(k))$ enthält alle Funktionen der Form: $\sum_{k=0}^{n} e + \sum_{k=0}^{n} f(n,k)$

Abschätzung

Wegen $|f(n,k)| \leq c \cdot k$ folgt:

$$\begin{aligned} & e \cdot (n+1) + |f(n,0)| + |f(n,1)| + \cdots + |f(n,n)| \\ \leq \; & e \cdot (n+1) + c \cdot 0 + c \cdot 1 + \cdots + c \cdot n \\ = \; & e \cdot (n+1) + c \cdot \tfrac{n(n+1)}{2} \\ = \; & c \cdot \tfrac{n^2}{2} + \left(\tfrac{c}{2} + e\right) \cdot n + e \\ \leq \; & d \cdot n^2 \end{aligned}$$

Also: $\sum_{k=0}^{n} (e + O(k)) \subseteq O(n^2)$,
da die linke Seite eine Menge von Funktionen beschreibt!

log-Funktion

Definition: Wir schreiben $\log(n)$ anstelle des oft üblichen $\log\ n$, außer in der Variante $(\log\ n)$ statt ($\log(n)$), und meinen damit:

$$\log(n) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } n \leq 1 \\ \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

...die Länge der Binärdarstellung einer natürlichen Zahl.

Anzahl der Speicherzellen/Schritte ist eine natürliche Zahl.

Effizienz

. . . jetzt haben wir die Grundlagen zum Einordnen von Funktionen (Schranken).

ABER: was wollen wir eigentlich abschätzen?

Zeit und Platz müssen formalisiert werden.

$\longrightarrow$ Turing-Maschine zur *Vereinheitlichung des Zeitbegriffes* (**Rechenschritte, Konfigurationsübergänge**) und des *Speicherbedarfes* (**Bandzellen**).

. . . im Skript: Beispiel ggt-Berechnung

Ausblick