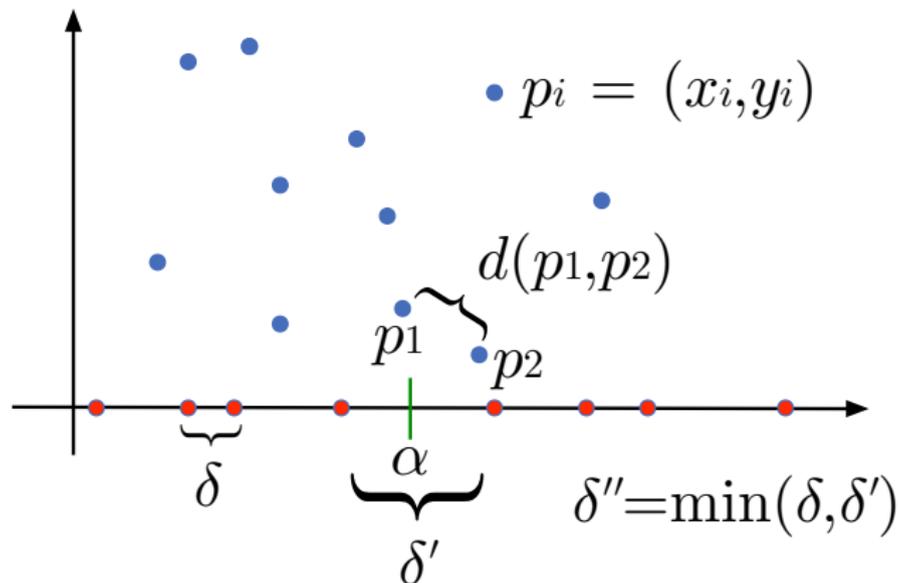


Rückblick: divide and conquer



weitere Algorithmentechniken

- Greedy-Algorithmen
- dynamische Programmierung
- Backtracking
- branch and bound
- Heuristiken und Approximation

Greedy-Algorithmen

- Einsatz bei **Auswahl einer Teilmenge** von Objekten mit bestimmten Eigenschaften;
- Greedy-Algorithmen **wählen** aus der Eingabemenge **sukzessive Elemente aus** und entscheiden *ad hoc*, ob diese zu der Lösungsmenge gehören;
- **Entscheidungen sind endgültig** und können nicht wieder rückgängig gemacht werden!
- Greedy-Algorithmen suchen in der Regel nur **lokal optimale Lösungen**, die aber bisweilen auch global die Besten sind.

Greedy-Algorithmus: Arbeitsweise

```

      :
SOLUTION  $\leftarrow \emptyset$ 
WHILE  $M \neq \emptyset$  DO
BEGIN
    CHOOSE ARBITRARY  $x \in M$ 
     $M \leftarrow M \setminus \{x\}$ 
    IF  $x$  MATCHES CRITERION THEN
        SOLUTION  $\leftarrow$  SOLUTION  $\cup \{x\}$ 
END
RETURN SOLUTION
      :
```

Beispiel: Minimales Gerüst

Problem

Gegeben: endlicher Graph $G = (V, E)$,
ungerichtet, zusammenhängend;
Kanten-Bewertung $l : E \rightarrow \mathbf{N}$

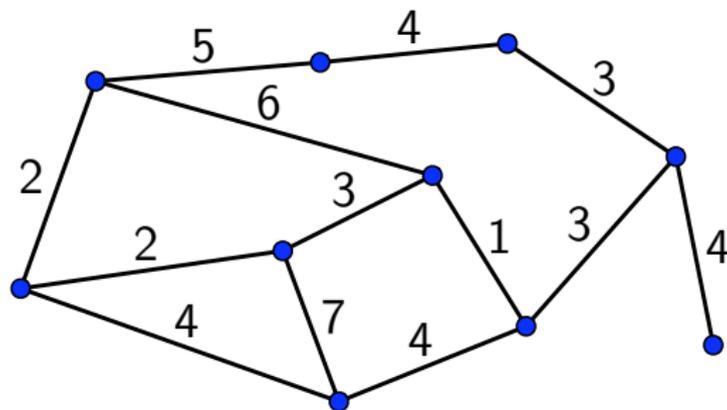
Gesucht: Ein Gerüst T von G mit minimaler Länge

Antwort: Graph des minimalen Gerüsts

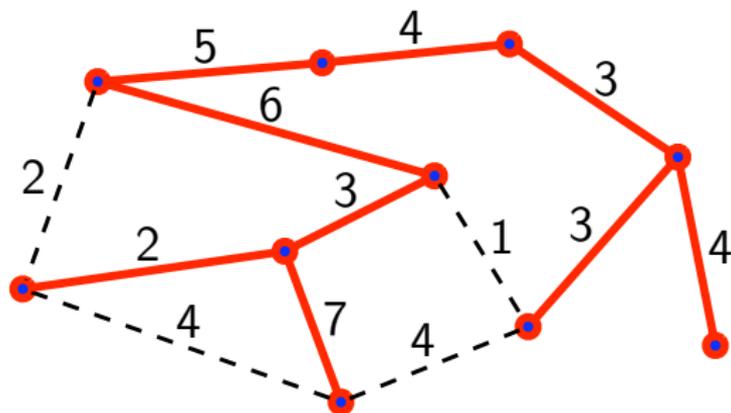
- $l(e)$ bezeichne die "Länge" der Kante $e \in E$.
- O.b.d.A. seien $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,
 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.

Definition: minimales Gerüst

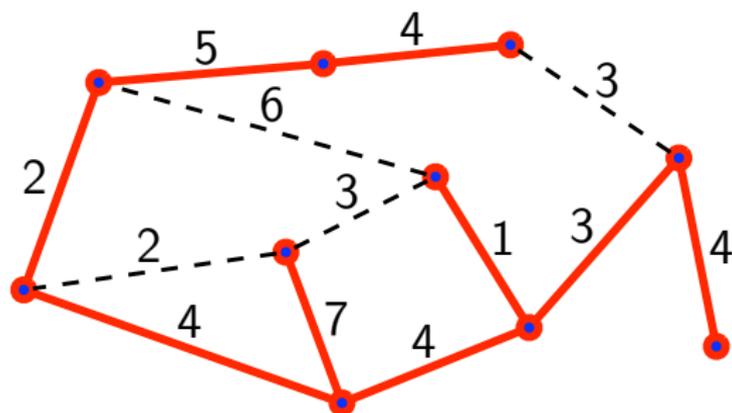
- Ein **Gerüst** von $G = (V, E)$ ist ein Teilgraph $T = (V, F)$ von G , der
 - alle Knoten von G enthält,
 - zusammenhängend ist und
 - eine minimale Anzahl von Kanten hat.
- T ist ein **Baum** und wird auch als **(auf-)spannender Baum** (*spanning tree*) bezeichnet.
- Die **Länge** von T ist: $l(T) = \sum_{e \in F} l(e)$. Dies ist die *Zielfunktion* für dieses Problem, wobei ein minimales $l(T)$ gesucht wird.
(Stichwort: Optimierung)

Beispielgraph G 

...dieser Graph ist zusammenhängend, ungerichtet und kantenbewertet.

Ein Gerüst von G 

... noch ein Gerüst von G



Lösungsansatz

- **Lösungskandidaten** sind alle möglichen Gerüste T von G .
- Gesucht wird dasjenige mit kleinster Länge.
- Die Lösung ist im Allgemeinen nicht eindeutig!
- **Lösungsraum:** $\mathcal{L}_G = \{T_G \mid T_G \text{ ist Gerüst von } G\}$.

Wir suchen eine Lösung für das Problem-Beispiel (G, l) :

$T_G^* \in \mathcal{L}_G$ ist *optimale* Lösung aus $\mathcal{L}_G \Leftrightarrow T_G^* \in \mathcal{L}_G$ mit $l(T_G^*) \leq l(T_G)$ für alle $T_G \in \mathcal{L}_G$.

Eigenschaften

- Die *Anzahl der Lösungen* ist $|\mathcal{L}_G|$. Es gilt dabei:

$$1 \leq |\mathcal{L}_G| \leq |V|^{|V|-2} (= n^{n-2}) \quad \text{mit } |V| = n.$$

- Dabei ist $|V|^{|V|-2}$ die Anzahl der verschiedenen Gerüste des vollständigen Graphen K_n .
- Sei im folgenden $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit der Kantenbewertung l .

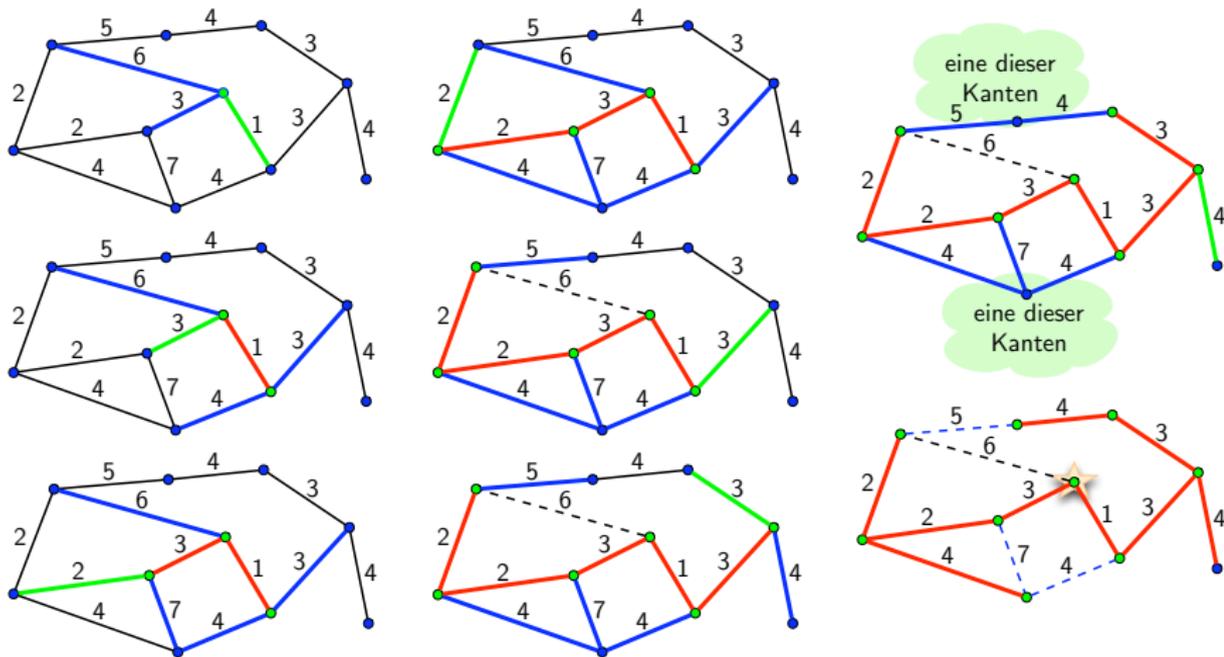
Algorithmus von Prim/Dijkstra

- 1 **Initialisierung:** Setze $X := \emptyset$; $U := \emptyset$.
- 2 **Wähle** beliebigen Knotenpunkt $v \in V$.
 $X \leftarrow \{v\}$; $V \leftarrow V \setminus \{v\}$.
- 3 Betrachte alle Kanten $(a, b) \in E \cap (X \times V)$ **Wähle** eine kürzeste Kante (a_1, b_1) . Dann gilt:

$$l(a_1, b_1) \leq l(a, b) \quad \text{für alle } (a, b) \in E \cap (X \times V)$$

- 4 $X \leftarrow X \cup \{b_1\}$; $U \leftarrow U \cup \{(a_1, b_1)\}$; $V \leftarrow V \setminus \{b_1\}$.
- 5 Falls $V \neq \emptyset$ setze mit 3. fort;
- 6 **STOP.** *Output:* $T = (X, U)$.

Beispiel: Prim/Dijkstra-Alg.



Komplexität: Prim/Dijkstra-Alg.

- Im Schritt 3. sind höchstens m Vergleiche auszuführen. Schritt 3. wird $(n - 1)$ -mal aufgerufen. $\rightarrow T_A = O(m * n)$
- Die **untere Schranke** ist $\Omega(m)$, da jede Kante mindestens einmal geprüft werden muss.
- Etwas bessere Algorithmen existieren ($O(|E| + |V| \cdot \log |V|)$) durch Ausnutzung der verwendeten Datenstruktur.
- Die Suche nach dem besten Algorithmus wird durch die nachweisbar untere Schranke eingeschränkt!

Korrektheit

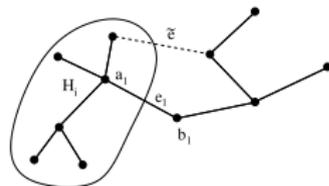
Theorem

MINGERÜST liefert ein Minimal- Gerüst des zusammenhängenden Graphen G .

Beweis: Es werden sukzessive Teil-Unter-Graphen (*TU-Graphen*) von G erzeugt: $H_1, H_2, \dots, H_i, H_{i+1}, \dots, H_n$ mit $H_1 = (\{v\}, \emptyset)$ und $H_n = (V, U)$.

- Die TU-Graphen sind Bäume:
 - H_1 ist ein Baum.
 - H_i ist Baum $\Rightarrow H_{i+1}$ ist Baum
- Für $i = 1, 2, \dots, n - 1$: Ist H_i TU-Graph eines Minimalgerüsts von G , so gilt dies auch für H_{i+1} .

Korrektheit (2)



- T ist Gerüst von G
 $\Rightarrow \exists e_1 = (a_1, b_1) \in U. a_1 \in V_i, b_1 \in V \setminus V_i.$
- Ist \tilde{e} die Kante, die bei Erzeugung von H_{i+1} aus H_i ausgewählt wird:
 - $\tilde{e} = e_1 \Rightarrow$ fertig.
 - $\tilde{e} \neq e_1 \Rightarrow \tilde{e} = (\tilde{a}, \tilde{b}) \in E$ mit $\tilde{a} \in V_i$ und $\tilde{b} \in V - V_i.$
- \tilde{e} zu T hinzufügen. Es entsteht ein Kreis $C.$
- Wegen Schritt 3. muss $l(\tilde{e}) \leq l(e_1)$ gelten.
- Bilde $\tilde{T} = (T \setminus \{e_1\}) \cup \{\tilde{e}\} \Rightarrow l(\tilde{T}) \leq l(T).$ Minimalität von $T \Rightarrow \tilde{T}$ ist Minimalgerüst $\Rightarrow H_{i+1}$ ist TU-Graph eines Minimalgerüsts \tilde{T} von $G.$ □

Beispiel: Münzrückgabe

Mit dem Euro-Münzsatz:



34¢ Wechselgeld:



Mit einem anderen Münzsatz:



GREEDY

Fazit

- Es gibt Probleme, die sich mit *Greedy-Algorithmen* optimal lösen lassen.
- **Aber:** Es gibt auch Probleme, für die *Greedy-Algorithmen* ungeeignet sind!
- **Frage:** Lassen sich die Probleme, die durch *Greedy-Algorithmen* optimal gelöst werden, charakterisieren?
 - Ein *Greedy-Algorithmus* liefert immer eine optimale Lösung, wenn das Problem eine **matroidale Struktur** hat.
 - **Matroide** sind Verallgemeinerungen von Matrizen.

Was sind Matroide?

- Mathematische Struktur ähnlich *Gruppen*, *Feldern* oder *Topologien*
... ursprünglich aus der Theorie der Vektorräume
- Ein Matroid M ist eine **endliche Menge** E mit einer **Menge von Teilmengen** $I \subseteq 2^{2^E}$, so dass gilt:
 - 1 $\emptyset \in I$
 - 2 Für jedes $X \in I$ ist auch jede Teilmenge von X in I .
 - 3 Falls X und Y in I enthalten sind und $|X| > |Y|$, dann existiert ein Element $x \in X \setminus Y$, so dass auch $Y \cup \{x\} \in I$.
- E ist **Grundmenge**
- I sind **unabhängige** (*independent*) Teilmengen
- alle anderen Teilmengen heißen **abhängig** (*dependent*)

Vereinfachtes Rucksackproblem

Problem

Gegeben: Rucksack mit Maximalgewicht m ;
Multimenge von Objekten,
jeweils mit Gewicht und Wert
 $O = \{(t_1, g_1, w_1), \dots, (t_n, g_n, w_n)\}$

Gesucht: Füllung mit maximalem Wert

Antwort: Liste der Objekte im Rucksack

Beispiel: vereinf. Rucksackproblem

| i | Objektyp | g_i | w_i |
|-----|-----------------|--------|------------|
| 1 | Nägel | 5,0 kg | 8,50 €/kg |
| 2 | Heftpflaster | 0,1 kg | 50,00 €/kg |
| 3 | Whisky | 1,5 kg | 38,00 €/kg |
| 4 | Toilettenpapier | 0,5 kg | 4,50 €/kg |
| 5 | Käse | 9,0 kg | 14,50 €/kg |
| 6 | Brot | 1,0 kg | 2,20 €/kg |

Maximales Rucksackgewicht: $m = 15\text{kg}$

Annahme: Alles ist beliebig portionierbar!

dynamische Programmierung

- Problemlösung durch Zerlegung in Teilprobleme und Zusammenfügen der Lösungen.
(Ähnlichkeit zu *divide and conquer*)
- Dynamische Programmierung eignet sich zur Lösung solcher Probleme, bei denen es sehr *viel weniger* Teilprobleme als mögliche Zerlegungen gibt.
- Häufig ist es günstig, **gefundene Teillösungen in einer Tabelle zu speichern**, so daß jedes Teilproblem nur einmal gelöst wird.
- Anwendung: z.B. *Vergleich des genetische Codes unterschiedlicher Arten von Lebewesen*

dynamische Prog.: Vorgehensweise

- 1 Bestimme die zu einer optimalen Gesamtlösung führenden Zerlegungen der Eingabe.
- 2 Definiere rekursiv den Wert der Zielfunktion für
 - die Gesamtlösung und
 - die in Betracht kommenden Teilaufgaben.
- 3 Berechne diese Werte für alle in Betracht kommenden Teilaufgaben und speichere sie ab.
- 4 Bestimme eine optimale Gesamtlösung unter Rückgriff auf die vorher berechneten Werte für benutzte Teilaufgaben.

Matrizenmultiplikation

Eine optimale Folge von Entscheidungen erfordert optimale Teilfolgen!

Betrachten wir z.B. n Matrizen der Größe $d_{i-1} \times d_i$ mit $1 \leq i \leq n$.

- Gesucht wird $M = M_1 \cdot \dots \cdot M_n$ mit **minimaler Anzahl von Multiplikationen**.
- Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ, also kann das Produkt auf verschiedene Arten berechnet werden, und man kann **durch geschickte Klammerung die Anzahl der skalaren Multiplikationen senken**.

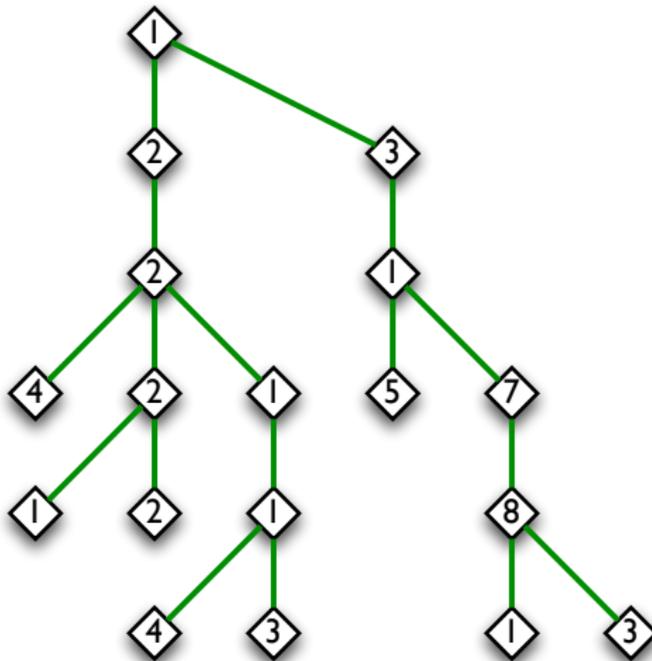
Beispiel: Matrizenmultiplikation

- 4 Matrizen A:[13,5], B:[5,89], C:[89,3] und D:[3,34]:

| Klammerung | Anzahl der Multiplikationen |
|------------|-------------------------------|
| $A(B(CD))$ | $9078 + 15130 + 2210 = 26418$ |
| $A((BC)D)$ | $1335 + 510 + 2210 = 4055$ |
| $(AB)(CD)$ | $5785 + 9078 + 39338 = 54201$ |
| $(A(BC))D$ | $1335 + 195 + 1326 = 2856$ |
| $((AB)C)D$ | $5785 + 3471 + 1326 = 10582$ |

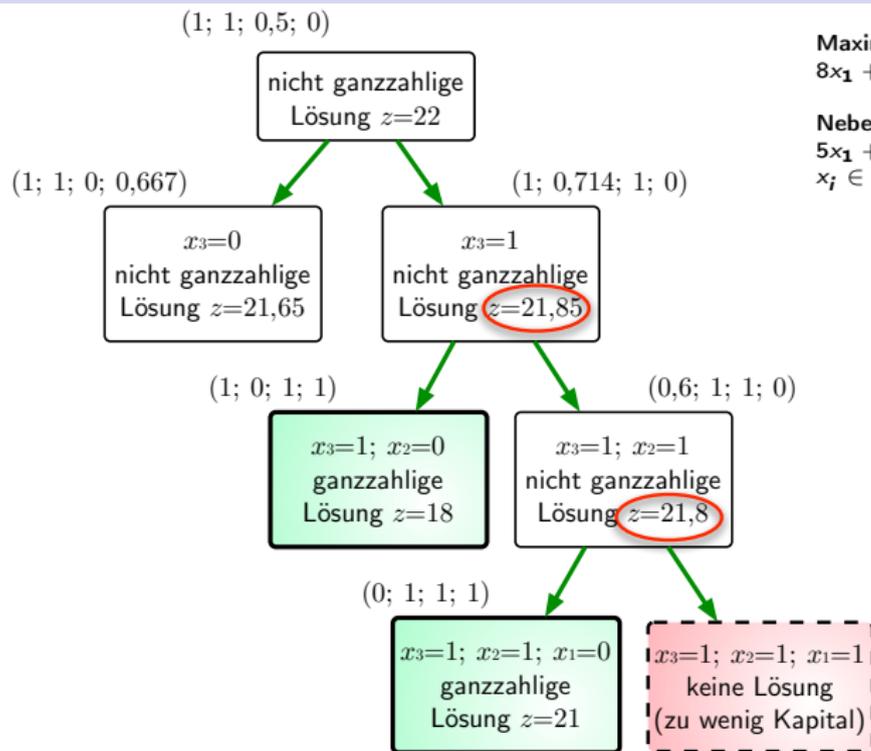
- beste Klammerung ist ca. 19mal schneller
- Lösungen gemeinsamer Teile werden in Tabelle gespeichert

branch and bound



- Heuristiken vs. Zielfunktionen

Investitionen (branch and bound)



Maximiere:

$$8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

Nebenbedingungen:

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14$$

$$x_i \in \{0, 1\} \text{ f\"ur alle } i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Ausblick

- noch einmal dynamische Programmierung:
 - Eine Lösung für das *Wechselgeldproblem*.
 - Das allgemeine *Rucksackproblem*.
 - Das *Travelling-Salesman-Problem*.
- weitere Algorithmentechniken