F3 – Berechenbarkeit und Komplexität

Aufgabenzettel 1 : Grundlagen

Besprechung in der Zeit vom 28.10. zum 31.10.2002.

Präsenzaufgabe 1 : Die Frage muss, bei Bedarf mit Benutzung der Tafel, beantwortet werden können! In der Übungsstunde wird eine Person der Gruppe dafür von der Übungsgruppenleitung ausgewählt.

Beweisen Sie bitte an der Tafel die Aussage: Für zwei beliebige Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gilt: $g(n) \in O(f(n))$ genau dann, wenn $f(n) \in \Omega(g(n))$.

Gilt die Aussage analog auch für o und ω? Gilt also $g(n) \in o(f(n))$ genau dann, wenn $f(n) \in \omega(g(n))$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Übungsaufgabe 1.1 :

(a) Seien $p \in O(n^r), q \in O(n^s)$. Für welche (minimalen) $t \in \mathbb{N}$ gilt $p + q \in O(n^t)$, $p \cdot q \in O(n^t)$, $p^q \in O(n^t)$?

Dabei sind definiert: $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$, $(p \cdot q)(x) = p(x) \cdot q(x)$, und $(p^q)(x) = p^{(\lceil q(x) \rceil)}$. (3 Pkt.)

von
12

(b) Sei $c \in \mathbb{N}$ und seien $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ Funktionen mit $f(x) := x^{2 \log c}$ bzw. $g(x) := c^{\log x \cdot \log x}$. Für welche Elemente $\alpha \in \{O, o, \Omega, \omega, \Theta\}$ gilt $g \in \alpha(f)$? Begründen Sie Ihre Aussage. (3 Pkt.)

(c) Zeigen Sie, daß folgende Aussage gilt:

$$f \in \Omega(g) \iff \Omega(g) \subseteq \Omega(f)$$

(3 Pkt.)

(d) Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionen $F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Definiere auf $\mathcal{F}$ eine Relation $\rho \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ durch $(f, g) \in \rho \iff f \in \Omega(g)$.

Ist die Relation ρ reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv? (3 Pkt.)

Bisher erreichbare Punktzahl: 12