Deterministische Turing-Maschinen (DTM)

Turing-Machine

Wir suchen ein Modell zur formalen Definition

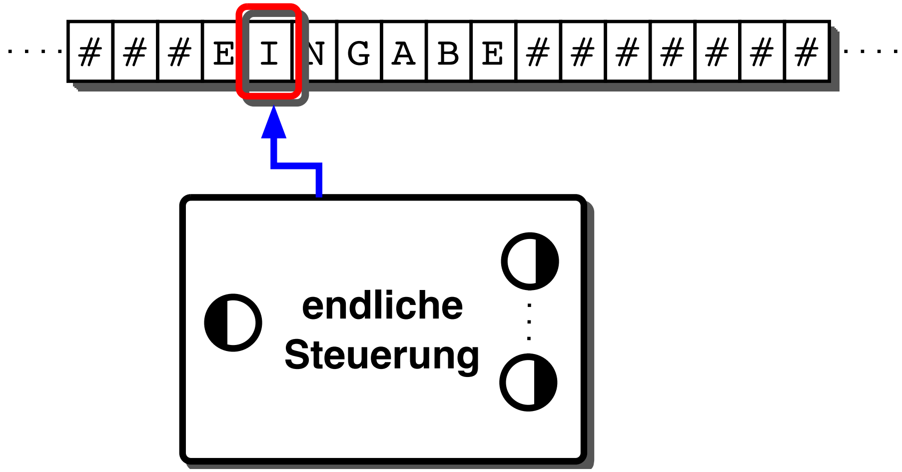
- der **Berechenbarkeit** von Funktionen und
- deren **Zeit-** und **Platzbedarf**.

$\Rightarrow$ Verschiedene Modelle existieren:

- Turing-Maschine
- λ-Definierbarkeit
- μ-Rekursivität
- WHILE-Programme
- ...

TM allgemein

...schematische Darstellung einer TM mit beidseitig unendlichem Band:



- Wie sehen die Kanten aus?
- Was kann mit dem Arbeitsband passieren?
- Was ist die Akzeptierbedingung?
- Wird etwas ausgegeben? (wichtig für die Definition der Berechenbarkeit!)

Definition: DTM

Eine **deterministische Turing-Maschine** (DTM) wird beschrieben durch $A := (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_{\textsf{end}})$, wobei:

- Z endliche Menge (*Zustände*)
- Γ endliche Menge (*Bandalphabet*)
- Σ endliche Menge (*Eingabealphabet*)
  mit $\Sigma \subsetneq \Gamma$, und $\Gamma \cap Z = \emptyset$
- $\# \in \Gamma \setminus \Sigma$ (Symbol für das unbeschriebene Feld)

. . . **gemeint:** jedes „Nicht-Eingabe-Feld“ mit $\#$ initialisiert.

Definition: DTM (Forts.)

Eine **deterministische Turing-Maschine** (DTM) wird beschrieben durch $A := (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_{\text{end}})$, wobei:

- $q_0 \in Z$ (*Startzustand*)
- $Z_{\text{end}} \subseteq Z$ (*Endzustände*)
- $\delta : (Z \times \Gamma) \to (\Gamma \times \{L, R, H\} \times Z)$ (*Übergangsfunktion*)
  - . . . bestimmt zum aktuellen Zustand und Bandsymbol den Folgezustand mit neuer Bandinschrift/Kopfposition.

Konfigurationen einer DTM

Allgemein wird ein Systemzustand vollständig beschrieben durch:

- Spezifikation der Struktur des Systems
  (die DTM)
- Angabe des Systemzustandes
  (der Zustand der endlichen Steuerung und die Kopfposition)
- Angabe des Speicherinhaltes
  (die Bandinschrift)

$\Rightarrow$ Konfiguration einer DTM: $(u, q, v) \in \Gamma^* \times Z \times \Gamma^*$

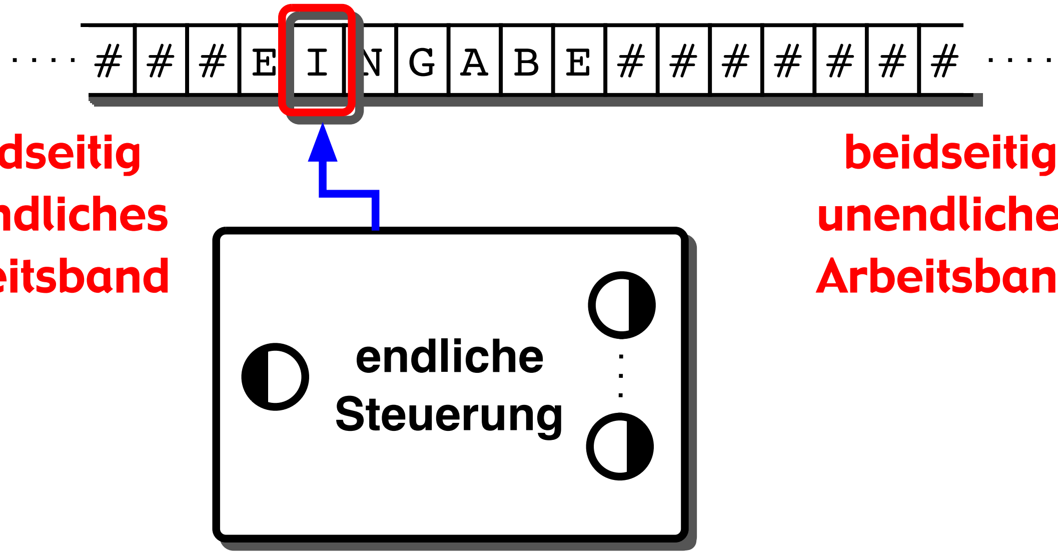
Eigenschaften der DTM

- Die Übergangsfunktion darf partiell sein (d.h. sie darf Definitionslücken enthalten)!
- Folgezustände/Folgekonfigurationen sind eindeutig bestimmt.
- Es gibt genau einen Startzustand.

Es gibt Varianten, die sich bzgl. der Berechenbarkeit als äquivalent erweisen:

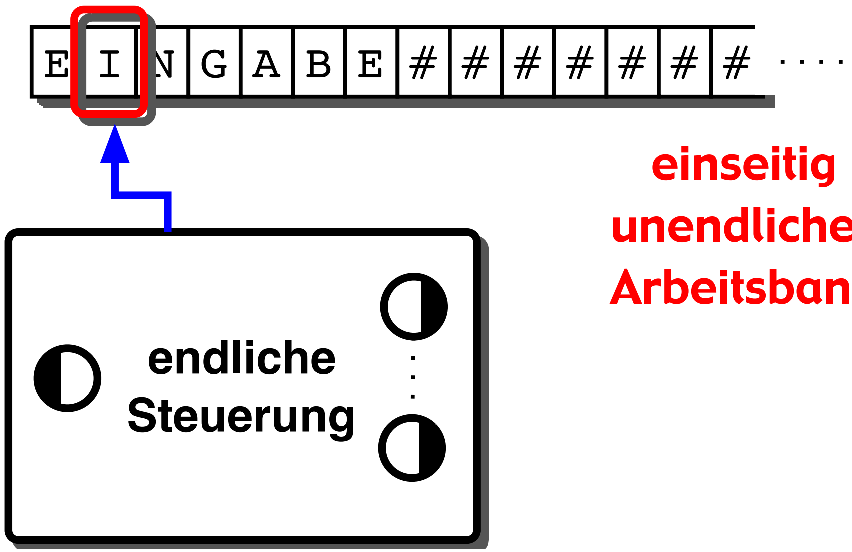
- einseitig unendliches Band
- beidseitig unendliches Band
- mehrere Arbeitsbänder

TM-Varianten



beidseitig
unendliches
Arbeitsband

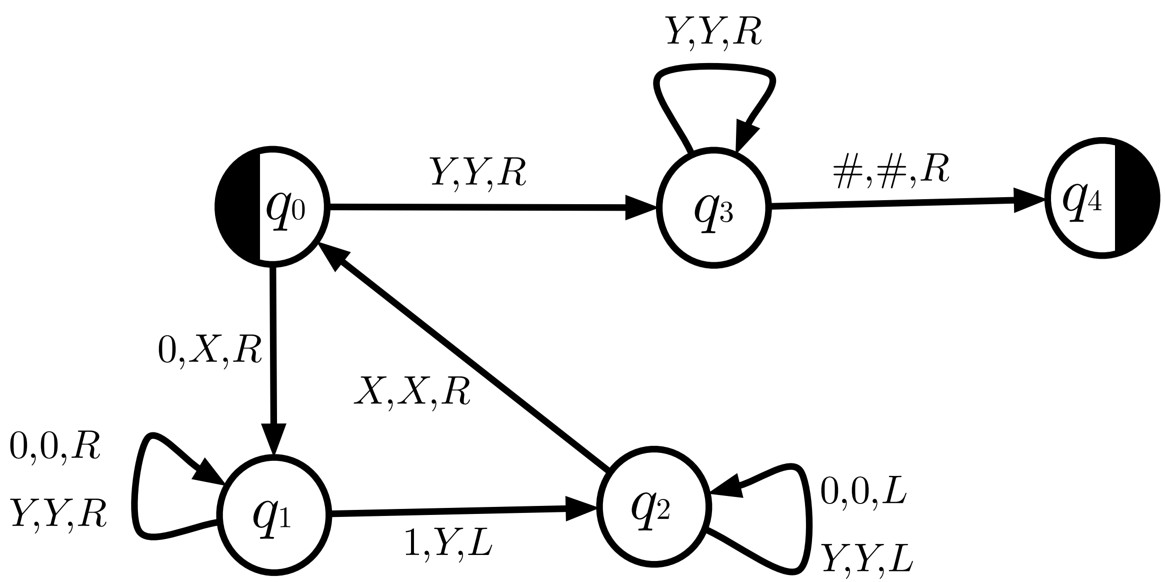
beidseitig
unendliches
Arbeitsband



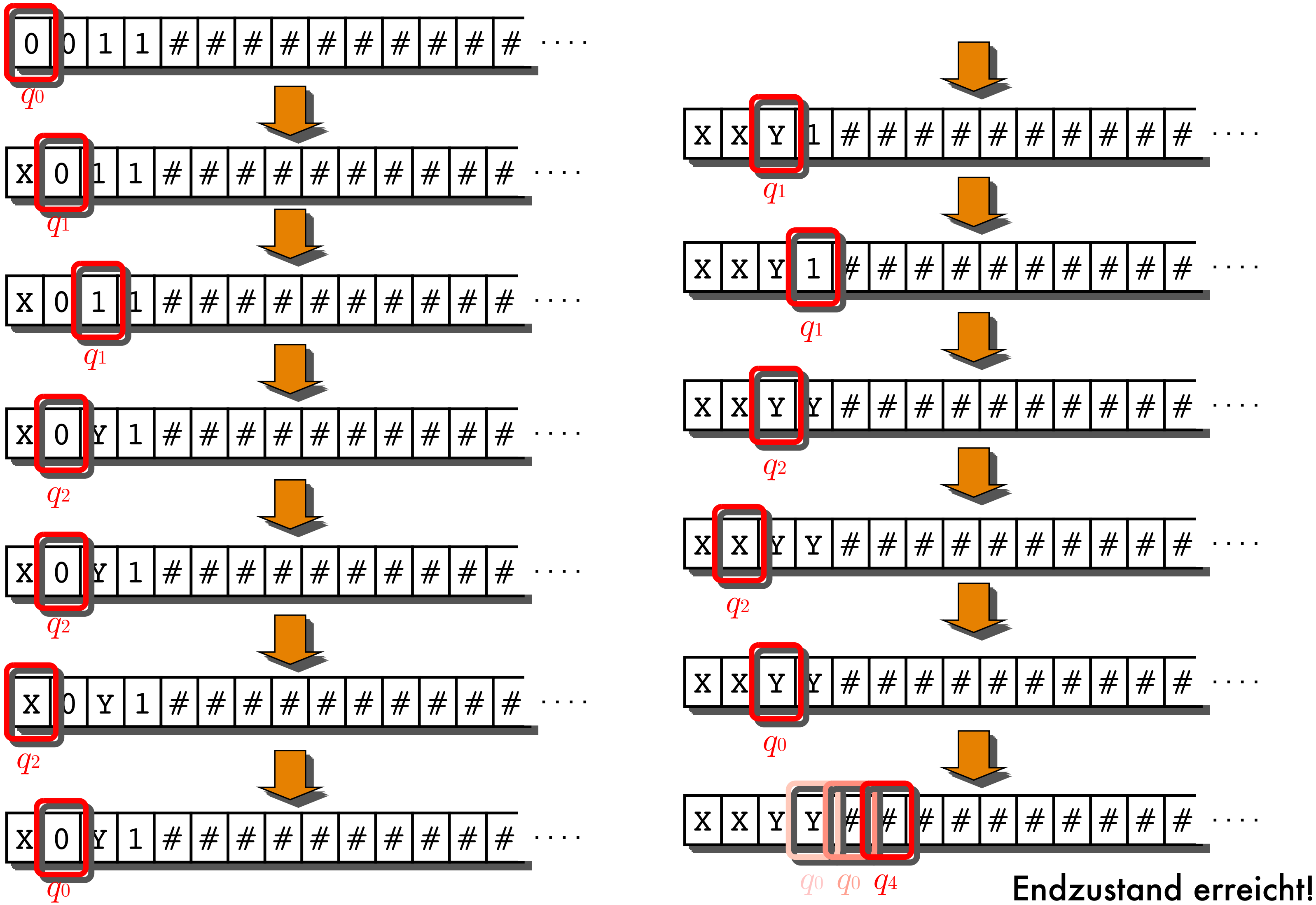
einseitig
unendliches
Arbeitsband

Beispiel: 0^n1^n

Zustand	0	1	X	Y	$\#$
q_0	(X, R, q_1)	—	—	(Y, R, q_3)	—
q_1	$(0, R, q_1)$	(Y, L, q_2)	—	(Y, R, q_1)	—
q_2	$(0, L, q_2)$	—	(X, R, q_0)	(Y, L, q_2)	—
q_3	—	—	—	(Y, R, q_3)	$(\#, R, q_4)$
q_4	—	—	—	—	—



Konfigurationsübergänge



Definition: Konfiguration

$w \in \Gamma^* \cdot Z \cdot \Gamma^*$ heißt **Konfiguration** gdw.

- $w = upv$ mit $u, v \in \Gamma^*$ und $p \in Z$:
- A befindet sich im Zustand p, die Bandinschrift ist uv und der Kopf steht auf dem ersten Zeichen von v. Falls $v = \lambda$, so ist # unter dem Kopf.
- Falls $v \neq \lambda$, dann ist $v \in \Gamma^* \cdot (\Gamma \setminus \{\#\})$, d.h. ganz rechts in v steht nicht das Symbol # und rechts von v sind nur noch #'s auf dem Band.
- Entsprechend für u: Falls $u \neq \lambda$, dann ist $u \in (\Gamma \setminus \{\#\})\Gamma^*$, d.h. ganz links von u steht nicht # und links von u sind nur noch #'s.

Konfigurationsübergang

- $KONF_M$ bezeichnet die **Menge aller Konfigurationen** der Turing-Maschine M.
- Für eine DTM A ist die **Schrittrelation** $\underset{A}{\vdash} \subseteq KONF_A \times KONF_A$ erklärt durch:

  $w \underset{A}{\vdash} w'$ gilt genau dann, wenn für $w = uypxv$ mit $u, v \in \Gamma^*$, $x, y, z \in \Gamma$ und $p, q \in Z$, folgendes gilt:

$$w' = \begin{cases} uqyzv, & \text{falls } \delta(p,x) = (z, L, q) \\ uyzqv, & \text{falls } \delta(p,x) = (z, R, q) \\ uyqzv, & \text{falls } \delta(p,x) = (z, H, q) \end{cases}$$

Weitere Begriffe

- Mit $\overset{*}{\underset{A}{\vdash\!\!-}}$ wird die reflexive, transitive Hülle von $\underset{A}{\vdash\!\!-}$ bezeichnet.
- Folgen von Konfigurationen $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_i, k_{i+1}, \ldots$, die in der Relation $k_1 \vdash\!\!- \; k_2 \vdash\!\!- \; \cdots \vdash\!\!- \; k_i \vdash\!\!- \; k_{i+1} \vdash\!\!- \; \ldots$ stehen, heißen **Rechnungen**.
- Endliche Rechnungen $k_1 \vdash\!\!- \; k_2 \vdash\!\!- \; \cdots \vdash\!\!- \; k_t$ heißen **Erfolgsrechnungen**, wenn $k_1 \in \Gamma^* \cdot \{q_0\} \cdot \Gamma^*$ und $k_t \in \Gamma^* \cdot Z_{\text{end}} \cdot \Gamma^*$ ist.

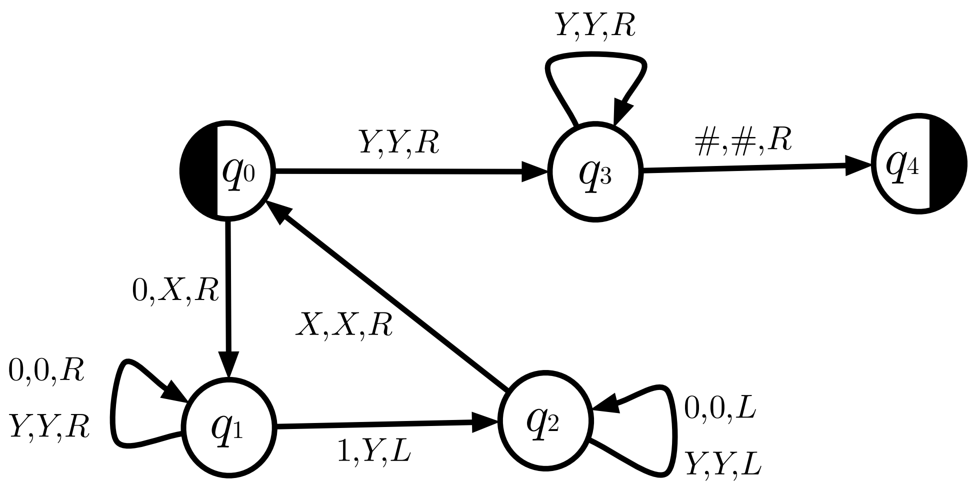
Definition: akzeptierte Sprache

Für die DTM $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_{\text{end}})$ bezeichnet $L(A)$ die **von A akzeptierte Sprache**:

$$L(A) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Gamma^*\ \exists q \in Z_{\text{end}} :\ q_0 w \vdash^* uqv\}$$

Für das obige Beispiel:

$$L(A) = \{0^n 1^n \mid n \in I\!N\}$$



Definition: Turing-Berechenbarkeit

Sei Σ ein Alphabet.

Eine (Wort-)Funktion $f : \Sigma^* \underset{p}{\longrightarrow} \Sigma^*$ heißt

(Turing-)berechenbar oder **partiell rekursiv** gdw. es eine DTM $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_{\text{end}})$ gibt mit:

$q_0 w \overset{*}{\underset{A}{\vdash}} q_e v$, für $q_e \in Z_{\text{end}}$ gdw. $f(w) = v$ ist.

$\boxed{\text{. . . der Funktionswert steht } \textit{ab der Kopfposition als einziges} \text{ (abgesehen von \#'s) auf dem Band!}}$

Definition: Berechenbarkeit auf $I\!N$

Seien $r, s \in I\!N$ und$r, s \geq 1$.

Eine (partielle) Funktion $f : I\!N^r \xrightarrow[p]{} I\!N^s$ heißt

(Turing-)berechenbar oder **partiell rekursiv**
gdw. eine DTM $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_{\text{end}})$ existiert
mit $q_0 0^{m_1+1} 1 \ldots 1 0^{m_r+1} \mathrel{\vdash\!\!\frac{*}{A}} p 0^{n_1+1} 1 0^{n_2+1} 1 \ldots 1 0^{n_s+1}$
und $p \in Z_{\text{end}}$ sowie

$$f(m_1, m_2, \ldots, m_r) = (n_1, n_2, \ldots, n_s)$$

gdw. der Funktionswert definiert ist.

Beispiele berechenbarer Funktionen

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$ (Nachfolger)
- $f : \{1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ mit $f(w) := v$ mit $[w]_1 = [v]_2$ (unär→binär Konversion)
- $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x,y) := x + y$ (Summe)
- $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x,y) := x \cdot y$ (Produkt)
- $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x,y) := x^y$ (Exponentiation)

. . . aber nicht alle Funktionen sind berechenbar!!!

Existenz nicht berechenbarer Fkt.

- DTM als endliche Zeichenkette darstellbar
  $\Rightarrow$ Menge aller DTM abzählbar.
- Ist die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ abzählbar? (**Annahme:** JA! $\Rightarrow f_1, f_2, f_3, \ldots$)
- Definiere $g : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ durch

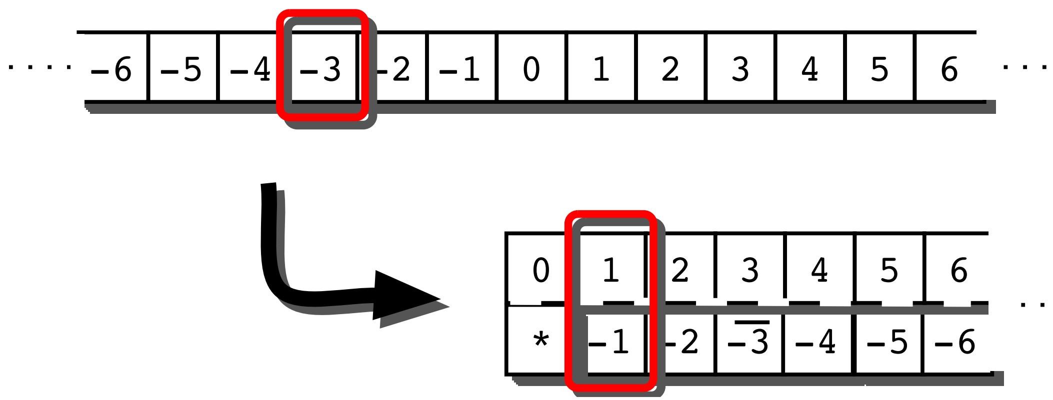
$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } f_x(x) = 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dann gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : g \neq f_n$ **Widerspruch!!!**

Also muß es nicht berechenbare Funktion geben!

beidseitig vs. einseitig unendl. Band

- Zwei Turingmaschinen A und B heißen genau dann **äquivalent**, wenn sie die gleiche Sprache akzeptieren, d.h. $L(A) = L(B)$ gilt.
- Zu jeder DTM A mit *beidseitig* unendlichem Arbeitsband gibt es eine äquivalente DTM B mit *einseitig* unendlichem Arbeitsband und umgekehrt.



Beweisidee: „Spuren-bildung“

Darstellung von Turing-Maschinen

- graphisch als Zustandsübergangsdiagramm
- als Tabelle
- als Turingtafel (δ als Relation $\subseteq Z \times Y \times Y \times \{L, H, R\} \times Z$ geschrieben)

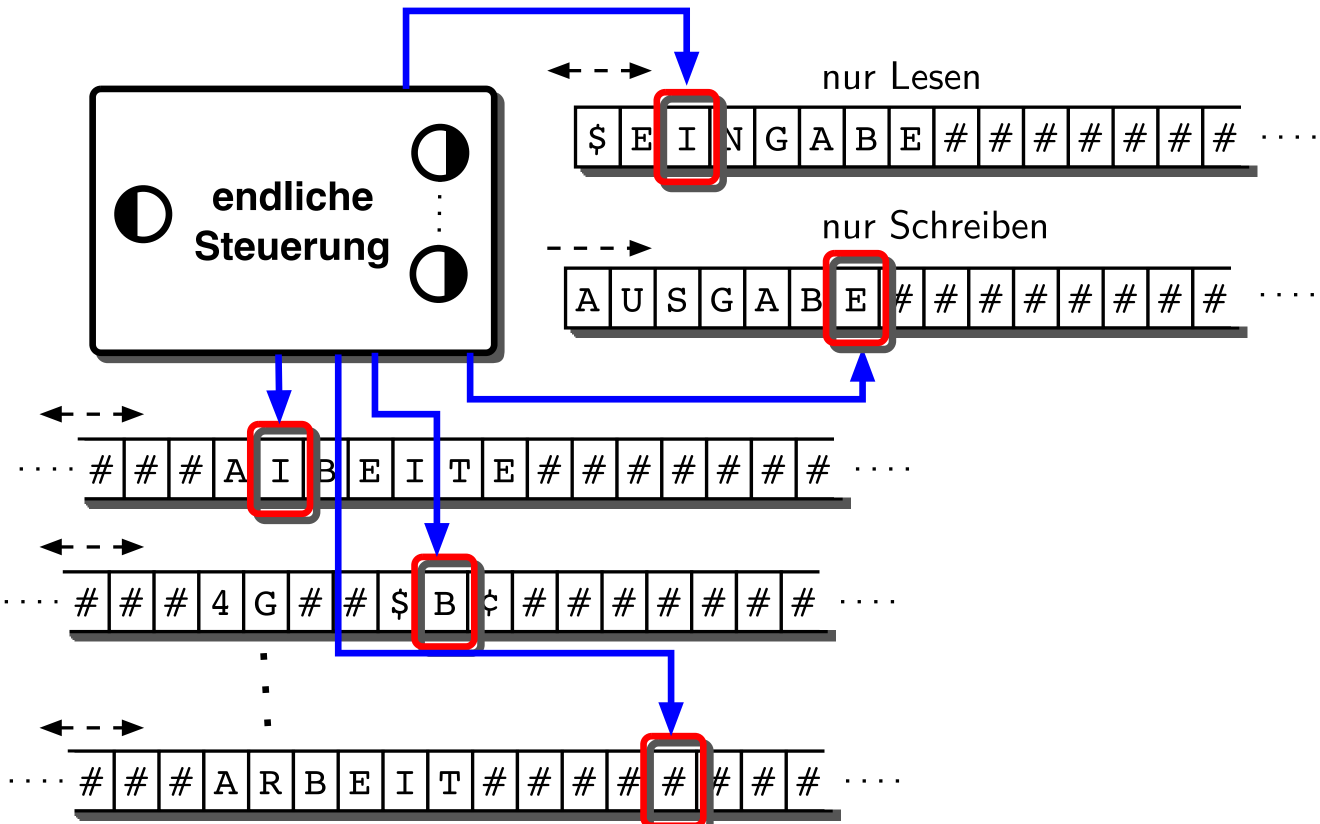
…sind alles Darstellungsvarianten für ein und dasselbe mathematische Modell!

…und dann gibt es noch die „höhersprachliche“ Variante mit mehreren Bändern …

Mehr-Band = 1-Band

. . . dieselbe Idee führt zum Ergebnis:

Zu jeder deterministischen k-Band off-line Turing-Maschine A mit $k \geq 1$ gibt es eine äquivalente DTM B mit nur einem Band.



nichtdeterministische TM

$M = (Z, \Sigma, \Gamma, K, q_0, Z_{\text{end}})$ heißt **nichtdeterministische Turingmaschine** (NTM), wenn zu jedem Paar $(p, y) \in Z \times \Gamma$ eine endliche Zahl von Übergängen möglich ist:

$$\delta : Z \times \Gamma \longrightarrow 2^{\Gamma \times \{L,R,H\} \times Z}$$

Alles andere, wie bei der DTM.

NTM-Übergangsrelation

Alternativ zu δ:Kanten als Relation K

$$K \subseteq Z \times \Gamma \times \Gamma \times \{L, R, H\} \times Z$$

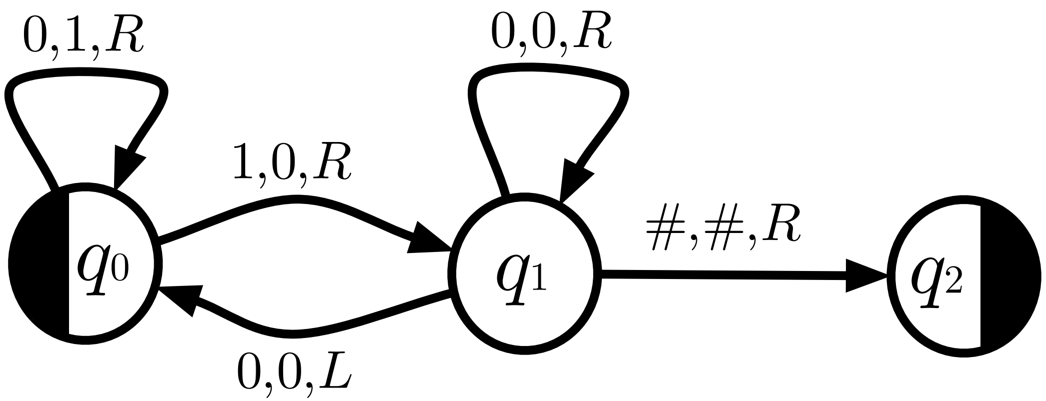
…zu einem Zustand q und einem Symbol x unter dem Kopf kann es mehrere verschiedene Möglichkeiten für die Folgekonfiguration geben.

…zum Beispiel:

(q, A, A, R, q') und $(q, A, \#, H, q'')$ könnten beide in K sein!

Beispiel: NTM

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \#\}, \delta, q_0, \#, \{q_2\})$$



Zustand	0	1	#
q_0	$\{(1, R, q_0)\}$	$\{(0, R, q_1)\}$	$\emptyset$
q_1	$\{(0, R, q_1), (0, L, q_0)\}$	$\{(1, R, q_1), (1, L, q_0)\}$	$\{(\#, R, q_2)\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Aufgabe: Welche Konfigurationen sind bei Eingabe von 01 (bzw. 100) erreichbar?

Ausblick

Entscheidbarkeit/Beweisbarkeit