# Einfache Zusammenhänge

- Eine TM, die $t(n)$ Zeit (d.h. Schritte) zur Verfügung hat, kann nicht mehr als $t(n)$ Bandzellen besuchen.
  - Umgekehrt gilt dies nicht!
- Platz kann **wiederverwendet** werden, Zeit nicht!
- *Kann man trotzdem eine maximale Rechenzeit in Abhängigkeit vom verbrauchten Platz angeben?*
  - Ja! **Idee:** Sobald eine Konfiguration ein zweites Mal besucht wird, befinden wir uns in einer Endlosschleife!
  - Bleibt zu berechnen, **wieviele verschiedene Konfigurationen** bei einer gegebenen Platzbeschränkung möglich sind.

# Anzahl der Konfigurationen

- Wovon hängt die Anzahl der möglichen unterschiedlichen Konfigurationen ab?
  - maximal verbrauchter Platz
    - **Kopfpositionen** auf den Arbeitsbändern
    - **Länge** möglicher Bandinschriften
  - Anzahl der Bandsymbole
    - **Permutationen** von Bandsymbolen
  - Länge der Eingabe
    - **Kopfpositionen** auf dem Eingabeband
  - Anzahl der Zustände in der endlichen Steuerung
    - aktueller **Zustand** einer Konfiguration

# Randbedingungen für Schranken

- Wenn eine TM mit der Platzbeschränkung $s(n)$ arbeitet, dann ist $s(n) \geq 1$ für jedes $n \in I\!N$, denn die TM muß sich wenigstens ein Feld auf dem Arbeitsband ansehen!
  - TM **arbeitet mit Platzbeschränkung** $s(n)$, wenn sie $\max\{1, \lceil s(n) \rceil\}$-platzbeschränkt ist.
- Es ist ebenfalls nützlich anzunehmen, daß eine TM ihre Eingabe stets vollständig liest und ein weiteres Feld vorrückt, um deren Ende festzustellen.
  - TM **arbeitet mit Zeitbeschränkung** $t(n)$ , wenn sie $\max\{n+1, t(n)\}$- zeitbeschränkt.

# Beispiel $\{w\$w^{rev} \mid w \in \{a,b\}^*\}$

- $\{w\$w^{rev} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ ist kontextfrei.
- Mit dem Verfahren von Cocke/Younger/Kasami kann sie somit in Polynomzeit analysiert werden.
- Wieviel Platz wird gebraucht? $s(n) = n$ genügt.
  - **Idee:** Akzeptieren nach dem **Kellerprinzip**, für Wörter, die in der Sprache enthalten sind, reicht dann sogar $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.
- Es geht aber noch besser: $\log(n)$ Platzbedarf genügt!
  - Codieren der Anzahl bereits bearbeiteter Symbole von $w$ bzw. $w^{rev}$ in $w\$w^{rev}$ als Binärzahl: Ein Zähler gibt das nächste zu bearbeitende Zeichen an.

# Bandkompression

**Theorem:**

> Zu jeder $s(n)$-platzbeschränkten TM und jeder reellen Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ gibt es eine äquivalente TM die $c \cdot s(n)$-platzbeschränkt ist.

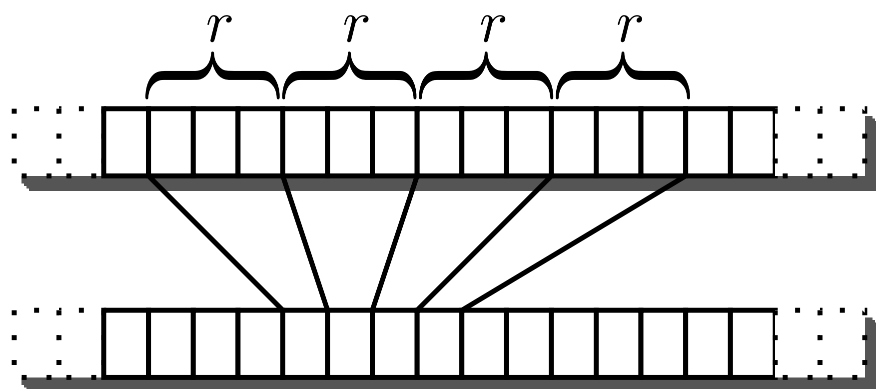
**Beweis:**

**1. Fall** Für $c \geq 1$ ist nichts zu beweisen.

**2. Fall** Für $c < 1$:

- Konstruktion analog zum $|w|$-platzbeschränkten LBA $B$ aus einem beliebigen LBA $A$ für eine TM durchführen!
- Wenn $A$ $s(n)$-platzbeschränkt ist, so ist $B$ dann nur noch $c \cdot s(n)$-platzbeschränkt.

# Bandkompression (2)




- Zusammenfassen von jeweils $r$ Symbolen
- Erweiterung des Bandalphabets
- $r$ berechnet sich aus $r = \lceil \frac{s(n)}{c} \rceil$

$\boxed{\text{Also: } xBand(f) = xBand(cf) \text{ für } x \in \{\mathcal{D}, \mathcal{N}\}.}$

…zum Beispiel: $f(n) := 3n^2 - 70n + 5$ und $g(n) := n^2$

als Platzschranken nicht unterscheidbar!

# linear speed-up

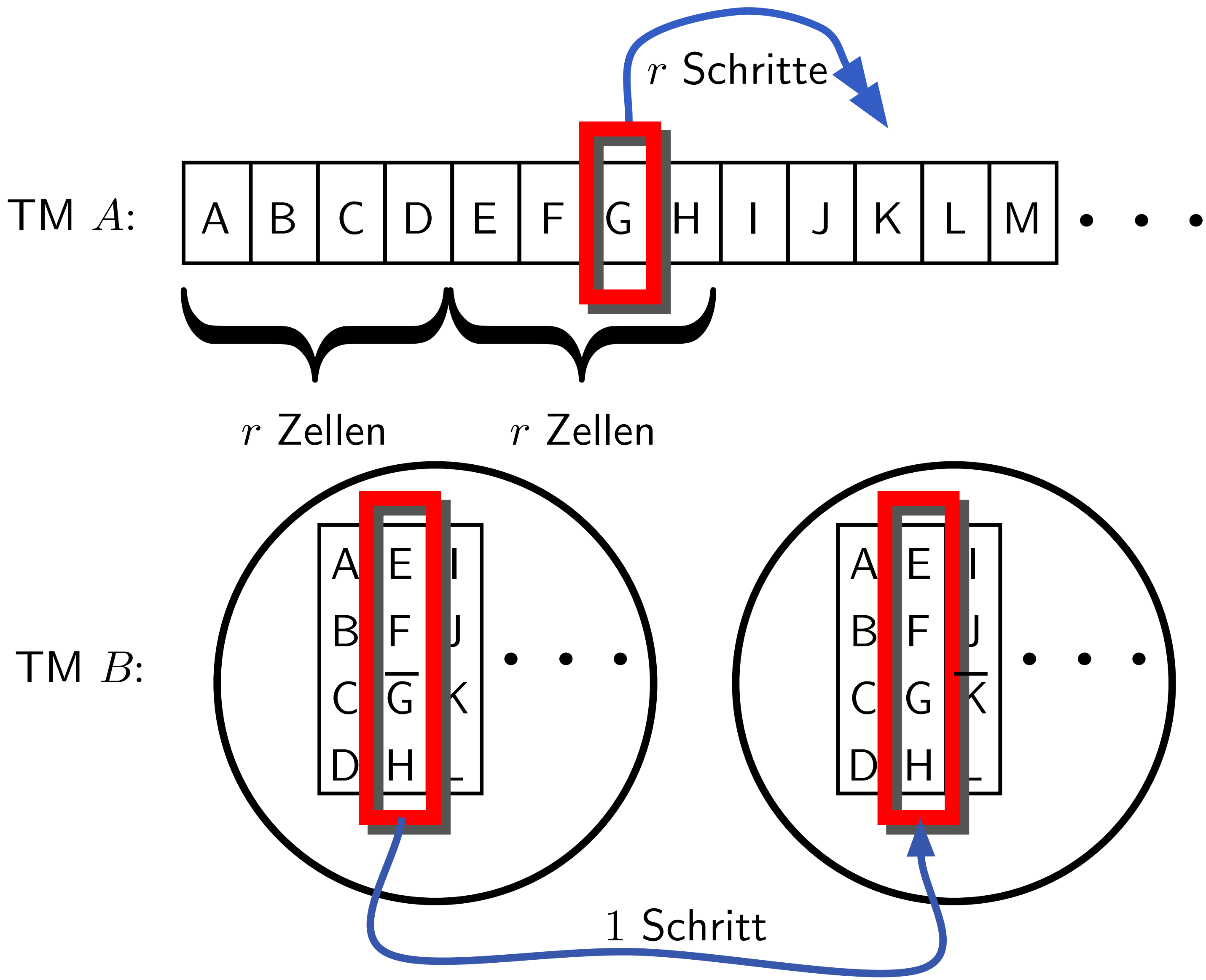
**Theorem:** (lineare Beschleunigung)

Zu jeder $t(n)$-zeitbeschränkten TM mit $\inf_{n\to\infty}(\frac{t(n)}{n}) = \infty$ und jedem $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ gibt es eine äquivalente $c \cdot t(n)$-zeitbeschränkte TM.

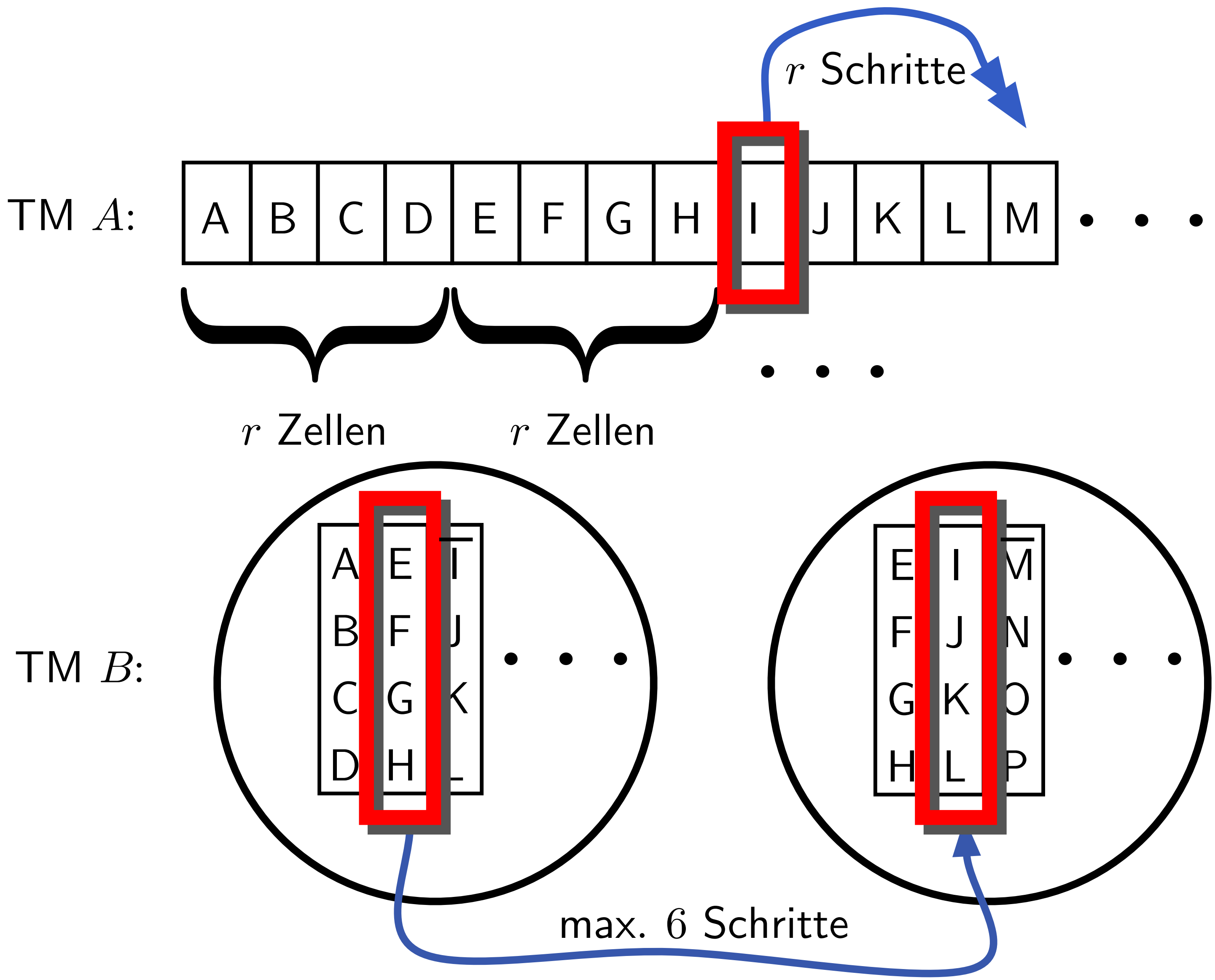
**Beweisidee:**

- Blockbildung (Länge $r$, wie bei der Bandkompression).
- Speichern von jeweils 3 Blöcken im Zustand der endlichen Kontrolle.
- Ein Schritt simuliert $r$ Schritte der ursprünglichen TM.

# Beweis: Speed-Up-Theorem



# Beweis: Speed-Up-Theorem



# Beweis: Speed-Up-Theorem (2)

- Verlassen des 3-Block-Bereiches kostet $A$ mind. $r$ Schritte, $B$ nur 8 Schritte. $\Rightarrow$ Für $t(n)$ Schritte von $A$ benötigt $B$ max. $\lceil \frac{8t(n)}{r} \rceil$ Schritte.
- $n$ Schritte, zum Lesen und Codieren der Eingabe.
- $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ Schritte, Repositionieren des LSK von $B$.
- Wegen $\lceil x \rceil \leq x + 1$, sind max. $n + 1 + \frac{n}{r} + 1 + 8 \cdot (\frac{t(n)}{r})$ Schritte von $B$ nötig.
- $\inf_{n \to \infty} (\frac{t(n)}{n}) = \infty \Rightarrow \forall d. \exists n_d. \forall n \geq n_d. (\frac{t(n)}{n}) \geq d$ (d.h. auch $n \leq (\frac{t(n)}{d})$).
- Für $n \geq 2$ (und somit $n + 2 \leq 2n$) und $n \geq n_d$: Schrittzahl von $B$ max. $t(n) \left(\frac{2}{d} + \frac{1}{dr} + \frac{8}{r}\right)$.

# Beweis: Speed-Up-Theorem (3)

- Wählen wir $r := \lceil \frac{16}{c} \rceil$ und $d := \lceil \frac{4}{c} \rceil + \frac{1}{8}$ dann gilt $r \cdot c \geq 16$ und $d \geq \frac{32+c}{8c}$.
- Einsetzen in die Formel für die max. Laufzeit von $B$:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{d} + \frac{1}{dr} + \frac{8}{r} &= \frac{2}{d} + \frac{c}{drc} + \frac{8c}{rc} \\
&\leq \frac{2}{d} + \frac{c}{16d} + \frac{8c}{16} \\
&= \frac{32+c}{16d} + \frac{c}{2} \\
&= \frac{(32+c)c}{16cd} + \frac{c}{2} \\
&= \frac{(32+c)c}{8c \cdot 2d} + \frac{c}{2} \leq \frac{cd}{2d} + \frac{c}{2} \quad = c
\end{aligned}$$

# Asymptotische Analyse

- **Konstante Faktoren** und **additive Glieder** spielen bei Beschränkungsfunktionen keine entscheidende Rolle.
- Zur Klassifizierung von Funktionen verwendet man deshalb die bekannten Landau-Schreibweisen: die $O$-, $\Omega$- und $\theta$-Notation.
- *Wichtig:* Bei der asymptotischen Analyse gilt:

  **THINK BIG**

  das heißt, es kommt nur darauf an, wie sich die Funktionen für *große Argumente* verhalten.
- Eine **endliche Anzahl** von „Ausreißern“ ist immer erlaubt!

# Zwei extreme Beispiele (1)

- Es gilt $\log(n) \in o(n^{0.0001})$.
- Das heißt, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^{0.0001}} = 0$
- kurz: $n^{0.0001}$ wächst viel schneller als $\log n$.
- Für $n = 10^{100}$:

$$\log 10^{100} = 100 > \left(10^{100}\right)^{0.0001} = 10^{0.01} = 1,023$$

- Für $n = 10^{10^{100}}$:

$$\log 10^{10^{100}} = 10^{100} < \left(10^{10^{100}}\right)^{0.0001} = 10^{10^{96}}$$

- Also: $\forall\, n > 10^{10^{100}} : \log(n) < n^{0.0001}$.

# Zwei extreme Beispiele (2)

- Sei $\epsilon = 1/10^{10^{100}}$.
- Es gilt $\log(n) \in o(n^\epsilon)$.
- Seien $k$ und $n$ so gewählt, daß $\epsilon > 10^{-k}$ und $n = 10^{10^{2k}}$.
- Dann gilt:

$$\log n = 10^{2k},$$

$$n^\varepsilon > \left(10^{10^{2k}}\right)^{10^{-k}} = 10^{10^k}$$

- Also: $\forall\, n > 10^{10^{2k}}.\log(n) < n^\varepsilon$.

# Einfache Folgerungen

- Es gilt wegen des *speed-up*-Satzes:

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{D}\,Time(n^i) \quad \text{und} \quad \mathcal{NP} = \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{N}\,Time(n^i)$$

- Ähnlich definiert man polynomiale Platz-Klassen:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}Space &:= \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{D}Space(n^i) \\ \mathcal{NP}Space &:= \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{N}Space(n^i) \end{aligned}$$

# Einfache Inklusionen

**Korollar:**
Die sich direkt aus den Definitionen ergebenden trivialen Beziehungen zwischen diesen Komplexitätsklassen sind offensichtlich die folgenden:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}Space(f) &\subseteq \mathcal{N}Space(f) \\
\mathcal{D}Time(f) &\subseteq \mathcal{N}Time(f) \\
\mathcal{D}Time(f) &\subseteq \mathcal{D}Space(f) \\
\mathcal{N}Time(f) &\subseteq \mathcal{N}Space(f) \\
\mathcal{P} &\subseteq \mathcal{NP} \\
\mathcal{P}Space &\subseteq \mathcal{NP}Space
\end{aligned}
$$

# $\mathcal{P}$ und die Praxis

- Von Problemen aus der Komplexitätsklasse $\mathcal{P}$ sagt man, daß sie **effizient lösbar** seien.
- Probleme in $\mathcal{P}$ sind anscheinend wirklich in der Praxis noch mit vertretbarem Aufwand lösbar.
- Nehmen wir also an, daß tatsächlich alle Probleme in $\mathcal{P}$ in der Praxis vernünftig gelöst werden können.
  - Was ist dann mit $\mathcal{NP}$?
  - Sind Probleme aus $\mathcal{NP}$ nicht mehr praktisch verwendbar/lösbar?
  - Handelt es sich nur um praktisch nicht relevante Probleme?

# Die Klasse $\mathcal{NP}$

- Jedes Problem $L \in \mathcal{NP}$, ist mit exponentiellem Zeitaufwand (in $\mathcal{D}Time(2^{p(n)})$ für ein Polynom $p$) deterministisch lösbar.
  - Bessere Transformationen sind i.a. nicht bekannt.
- Viele der *praktisch wichtigen* Fragestellungen haben Lösungen mit Algorithmen, die **nur dann in Polynomzeit arbeiten, wenn sie nicht-deterministisch sind**.
- Eine **Implementierung** erfordert ein **deterministisches Verfahren**.
- Unterscheiden sich $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$ überhaupt?!

# Einige Probleme

- Ähnliche Probleme liegen trotzdem oft in unterschiedlichen Komplexitätsklassen!

| | |
|---|---|
| **Gegeben:** Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und Vektor $b \in \mathbb{Z}^m$ | |
| **Frage:** Gibt es $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $Ax = b$ | **Frage:** Gibt es $x \in \mathbb{N}^n$ mit $Ax = b$ |
| $\mathcal{P}$ | $\mathcal{NP}$ |

# Einige Probleme (2.1)

| | |
|---|---|
| **Gegeben:** Ungerichteter, kantenbewerteter Graph $G = (V, E)$, eine Gewichtsfunktion $g : E \to \mathbb{N}$, zwei Knoten $s, t \in V$ und eine Schranke $k \in \mathbb{N}$ | |
| **Frage:** Gibt es einen einfachen Pfad $p$ von $s$ nach $t$ mit $g(p) \leq k$? („Kürzester Weg zwischen zwei Knoten“) | **Frage:** Gibt es einen einfachen Pfad $p$ von $s$ nach $t$ mit $g(p) \geq k$? („Längster Weg zwischen zwei Knoten“) |
| $\mathcal{P}$ | $\mathcal{NP}$ |

# Einige Probleme (2.2)

- $L_w := \{\langle G, s, t, k\rangle \mid G$ besitzt einen Pfad $p$ von $S$ nach $t$ mit $g(p) \geq k\}$ ist die dem Problem „Längster Weg zwischen zwei Knoten“ zugeordnete Sprache.
- **Theorem:** Das Problem zu $L_w$ ist nichtdeterministisch in Polynomzeit zu lösen, d.h. $K_w \in \mathcal{NP}$.
  **Idee:** Raten eines geeigneten Pfades.
- $K_w := \{\langle G, s, t, k\rangle \mid G$ besitzt einen Pfad $p$ von $s$ nach $t$ mit $g(p) \leq k\}$ ist die Sprache, die zu dem Problem „Kürzester Weg zwischen zwei Knoten“ gehört.
- **Theorem:** Das Problem zu $K_w$ ist in $\mathcal{P}$.
  **Idee:** Systematische Suche der minimalen Pfadlängen.

# Einige Probleme (3)

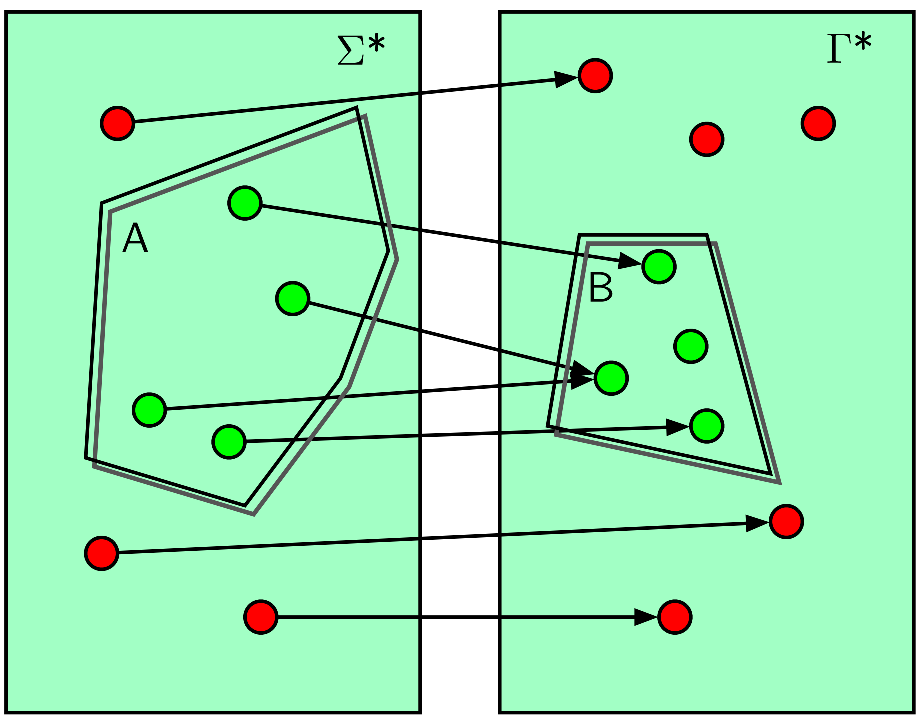
| **Gegeben:** Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ | |
|---|---|
| **Frage:** Gibt es einen geschlossenen Kreis, in dem jede Kante genau einmal auftritt? („Euler-Kreis“) | **Frage:** Gibt es einen geschlossenen Kreis, in dem jeder Knoten genau einmal auftritt? („Hamilton-Kreis“) |
| $\mathcal{P}$ | $\mathcal{NP}$ |

- (Leider) sind häufig Probleme aus $\mathcal{NP}$ die (für die Praxis) interessantesten!
- Manchmal kann man das aber auch ausnutzen. Z.B. für die Kryptographie.

# Reduktion

- Seien $A \subset \Sigma^*$ und $B \subset \Gamma^*$.
- Man sagt „$A$ ist **reduzierbar** auf $B$“ ($A \leq B$) gdw.

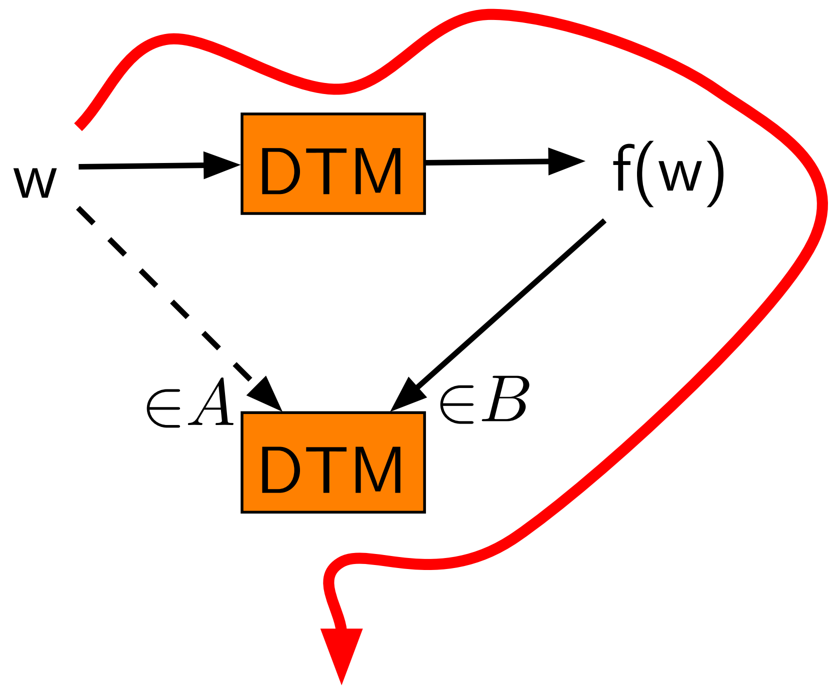
$$\exists f : \Sigma^* \to \Gamma^*. \forall x \in \Sigma^*. x \in A \iff f(x) \in B$$




von speziellem Interesse: Polynomialzeitreduktion ($\leq_{\text{pol}}$), logarithmische-Platz-Reduktion ($\leq_{\log}$).

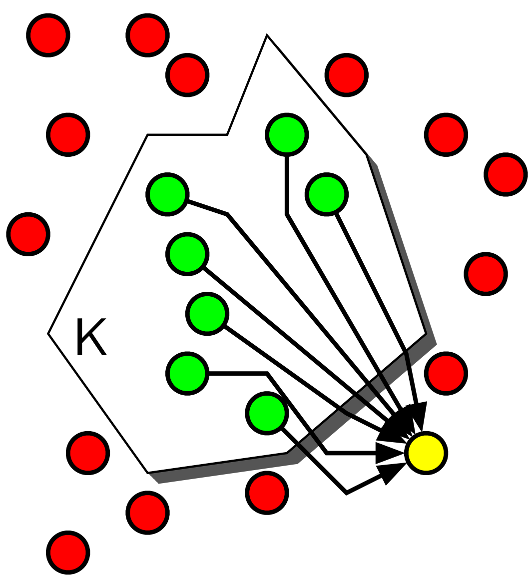
# Reduktion (2)

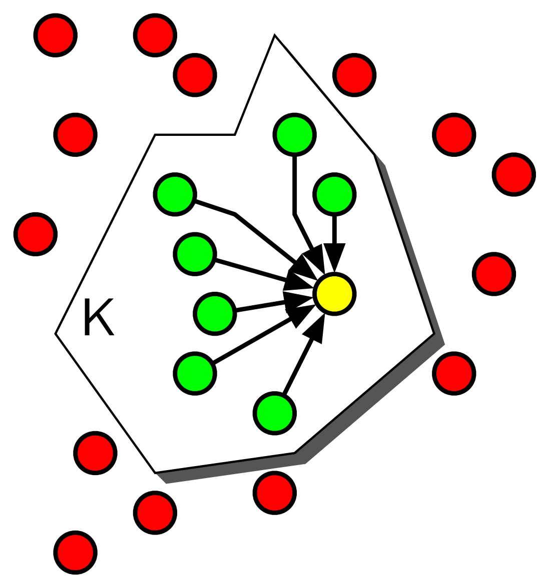
- Zurückführen der Entscheidbarkeit von $A$ auf die Entscheidbarkeit von $B$:
- Voraussetzung $A \leq B$.



# $\mathcal{K}$-Vollständigkeit

- Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **hart** (oder besser: **schwer**) für eine Klasse $\mathcal{K}$ gdw. $\quad \forall b \in \mathcal{K}.B \leq A$
- Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **vollständig** für eine Klasse $\mathcal{K}$ gdw. $\quad A \in \mathcal{K} \ \wedge \ \forall b \in \mathcal{K}.B \leq A$



# $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- besonders interessannter Spezialfall der Vollständigkeit:
- Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ heißt $\mathcal{NP}$**-vollständig** gdw.

$$A \in \mathcal{NP} \ \wedge \ \forall B \in \mathcal{NP}. B \leq_{\text{pol}} A$$

- Ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem ist somit eines der **schwersten** bzw. **umfassendsten** Probleme innerhalb der Klasse $\mathcal{NP}$.
- Wichtige Eigenschaft: Transitivität von $\leq_{\text{pol}}$.
- Ist $A$ ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem und gilt $A \leq_{\text{pol}} B$, so ist auch $B$ $\mathcal{NP}$-vollständig.

# Ausblick

- Existenz eines $\mathcal{NP}$-vollständigen Problems
  - Konstruktion am Beispiel des Dominoproblems (Parkettierung)
- Einfache Folgerungen
- das $\mathcal{P}{=}\mathcal{NP}$-Problem