Äquivalenzen

Eine Menge M ist genau dann aufzählbar, wenn sie von einem Automaten der folgenden Art erkannt werden kann:

1. Einer deterministischen Turing-Maschine (DTM).
2. Einer nichtdeterministischen Turing-Maschine (NTM).
3. Einem 2-Keller-Automaten.
4. Einem 2-Zähler-Automaten.
5. M ist durch eine RAM akzeptierbar.

Äquivalenz DTM/NTM

1. Jede DTM ist auch NTM.
2. Simulation einer NTM auf einer DTM.
   - DTM hat keine Platzbeschränkung;
   - Merken des Konfigurationsbaumes auf dem Band;
   - systematische Suche nach Erfolgsrechnung.

Details im Skript und in der Literatur!

Die partiell rekursiven Funktionen

Theorem: Für eine n-stellige Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist durch eine 1-DTM berechenbar,
2. f ist durch eine k-DTM berechenbar,
3. f ist μ-rekursiv (partiell-rekursiv),
4. f ist durch eine RAM berechenbar.

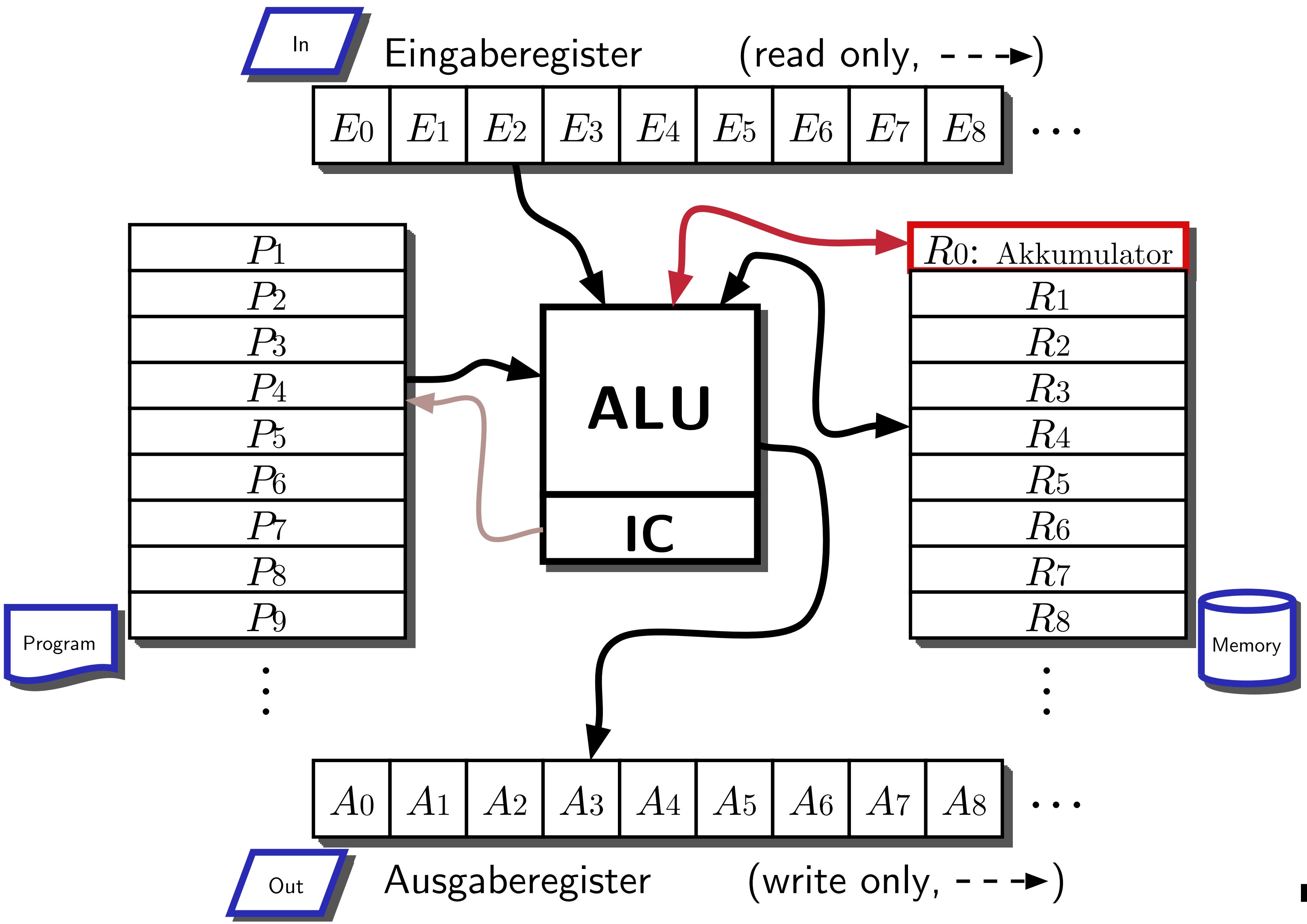
$\vdots$

Random Access Machine (RAM)

Was unterscheidet die RAM von der TM?

- Rechnet auf natürlichen Zahlen.
- Speichermodell: Register
  - nehmen beliebige natürliche Zahlen auf
  - direkter Zugriff auf Register über Adressen möglich
  - indirekte Adressierung möglich
- Programmodell: festes Programm

RAM-Schaubild



RAM-Varianten

zwei verschiedene Varianten der RAM werden unterscheiden:

- Die *Bit-RAM*, bei der die Register beliebige natürliche (ganze) Zahlen enthalten dürfen
- Die *arithmetische RAM*, bei der die Speicherinhalte aus einem beliebigen Körper, wie z.B. oder $\mathbb{Q}$, stammen können.
- Weitere Modellvarianten entstehen bei Einschränkung des erlaubten Befehlssatzes.

RAM-Befehle

- Operationen: READ, WRITE, LOAD, STORE, ADD, SUB, JUMP, JZERO, JGTZ
- Operanden:
  - $= i$ [die Zahl i]
  - i [Inhalt des Registers R_i]
  - $*i$ [indirekte Adresse: Inhalt des Registers R_j, wenn j Inhalt des Registers R_i ist]
- Besonderheiten: zusätzliche Operationen MULT und DIV bei RAM$_*$

RAM-Befehle (2)

1. LOAD a $\quad c(0) \leftarrow v(a)$
2. STORE i $\quad c(i) \leftarrow c(0)$

   STORE $*i$ $\quad c(c(i)) \leftarrow c(0)$
3. ADD a $\quad c(0) \leftarrow c(0) + v(a)$
4. SUB a $\quad c(0) \leftarrow c(0) - v(a)$
5. MULT a $\quad c(0) \leftarrow c(0) \times v(a)$
6. DIV a $\quad c(0) \leftarrow \lfloor c(0) \div v(a) \rfloor$
7. READ i $\quad c(i) \leftarrow$ aktuelles Eingabesymbol

   READ $*i$ $\quad c(c(i)) \leftarrow$ aktuelles Eingabesymbol.
8. WRITE a $\quad v(a)$ wird an der aktuellen Position auf die Ausgabe geschrieben

RAM-Befehle (3)

9.	JUMP b	Der *location counter* (Befehlsregister) wird auf die mit b markierte Anweisung gesetzt.
10.	JGTZ b	Der *location counter* wird auf die mit b markierte Anweisung gesetzt, wenn $c(0) > 0$ ist, sonst auf die nachfolgende Anweisung.
11.	JZERO b	Der *location counter* wird auf die mit b markierte Anweisung gesetzt, wenn $c(0) = 0$ ist, sonst auf die nachfolgende Anweisung.
12.	HALT	Programmausführung beenden.

Besonderheiten

- Felder auf dem Eingabe- und Ausgabeband enthalten Zahlen!
- Der Eingabekopf bewegt sich bei jedem READ um ein Feld nach rechts.
- Nach jedem WRITE bewegt sich der Kopf auf der Ausgabe um ein Feld nach rechts.
- Eine RAM ist immer **deterministisch**!

RAM-Berechenbarkeit

Eine Funktion $f : I\!N^k \longrightarrow I\!N^l$ heißt *RAM-berechenbar* gdw. eine RAM existiert, die für die Eingabe $(x_1, \ldots, x_k)$ immer die Ausgabe $(y_1, \ldots, y_l) = f(x_1, \ldots, x_k)$ liefert, sofern $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Def}(f)$.

Zum Beispiel ist die Funktion $f : I\!N \longrightarrow I\!N$ mit $f(n) := n^2$ RAM-berechenbar (siehe Skript).

RAM-Programme für Bit-RAM's berechnen genau die partiell rekursiven Funktionen!

RAM-Sprachakzeptierung

Sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$ ein Alphabet. Das Symbol a_i wird durch die natürliche Zahl i kodiert (Schreibweise: $a_i^{(k)} = i$).

- Das Eingabewort $w = w_1 \ldots w_k$ wird in den Feldern des Eingabebandes gespeichert.
  - w_i als die Zahl $w_i^{(k)}$ im i–ten Feld.
- im $(k+1)$-ten Feld wird 0 als Endmarkierung gespeichert.
- Ein RAM-Programm P akzeptiert w, gdw. P am Ende der Berechnung 1 in das erste Feld der Ausgabe geschrieben wurde.

RAM-Sprachakzeptierung (2)

Die Sprache, welche von Programm P akzeptiert wird, ist die Menge der Wörter, die P akzeptiert.

RAM–Programme für Bit-RAM's akzeptieren genau die rekursiv aufzählbaren Sprachen.

Problem: Wie kann Komplexität definiert werden?

- Bei TM: Einfach durch Zählen der Schritte und Zählen der max. in einer Erfolgsrechnung genutzten Bandzellen.
- Bei der RAM: Zwei unterschiedliche Maße!

Komplexitätsmaße

- uniformes Maß
- logarithmisches Maß

Uniformes Zeitmaß:	Uniformes Platzmaß:
1 Schritt = 1 Zeiteinheit	1 Register = 1 Platzeinheit

Logarithmisches Maß ist geeigneter, da es die Größe der Zahlen in Registern und Adressen berüchsichtigt. Dazu definieren wir:

$$l(i) = \begin{cases} \lfloor \log i \rfloor + 1 & i \neq 0 \\ 1 & i = 0 \end{cases}$$

Logarithmisches Komplexitätsmaß

- Kosten hängen von den verwandten Operanden ab:

Operand a	Kosten $t(a)$
$=i$	$l(i)$
i	$l(i) + l(c(i))$
$*i$	$l(i) + l(c(i)) + l(c(c(i)))$

- Diese Kosten werden für die Berechnung der Komplexität des *Akzeptierens* bzw. der *Funktionsberechnung* auf die einzelnen Befehle angewandt.

konkrete Kosten

1.	LOAD a	$t(a)$
2.	STORE i	$l(c(0)) + l(i)$
	STORE $*i$	$l(c(0)) + l(i) + l(c(i))$
3.	ADD a	$l(c(0)) + t(a)$
4.	SUB a	$l(c(0)) + t(a)$
5.	MULT a	$l(c(0)) + t(a)$
6.	DIV a	$l(c(0)) + t(a)$
7.	READ i	$l(\text{input}) + l(i)$
	READ $*i$	$l(\text{input}) + l(i) + l(c(i))$
8.	WRITE a	$t(a)$

konkrete Kosten (2)

9.	JUMP b	1
10.	JGTZ b	$l(c(0))$
11.	JZERO b	$l(c(0))$
12.	HALT	1

- Das *logarithmische Platzmaß* eines Registers ist die maximale Länge $l(i)$ aller Zahlen i, die im Register gespeichert wurden.
- Beim logarithmischen Kostenmaß für den Platz muß noch eine Korrekturgröße addiert werden!

Simulation einer TM durch eine RAM

Wir skizzieren, wie TM und RAM sich gegeseitig simulieren können.

Eine $T(n)$-zeitbeschränkte Mehrband DTM M kann durch eine RAM$_+$ simuliert werden, die im uniformen Maß $O(T(n))$-zeitbeschränkt ist und die im logarithmischen Maß $O(T(n) \cdot \log T(n))$-zeitbeschränkt ist.

- pro Bandzelle ein Register
- $\log$-Faktor wg. Speicherung der Kopfposition!

Simulation einer RAM durch eine TM

Eine im logarithmischen Maß $T(n)$-zeitbeschränkte RAM$_+$ kann durch eine $O(T^2(n))$-zeitbeschränkte 5-Band DTM M simuliert werden.

- Register hintereinander auf dem Band
- quadratischer Faktor wg. Speicherung der Register auf dem Band! $\Rightarrow S(n) \cdot T(n)$ abschätzen durch $T(n) \cdot T(n)$!

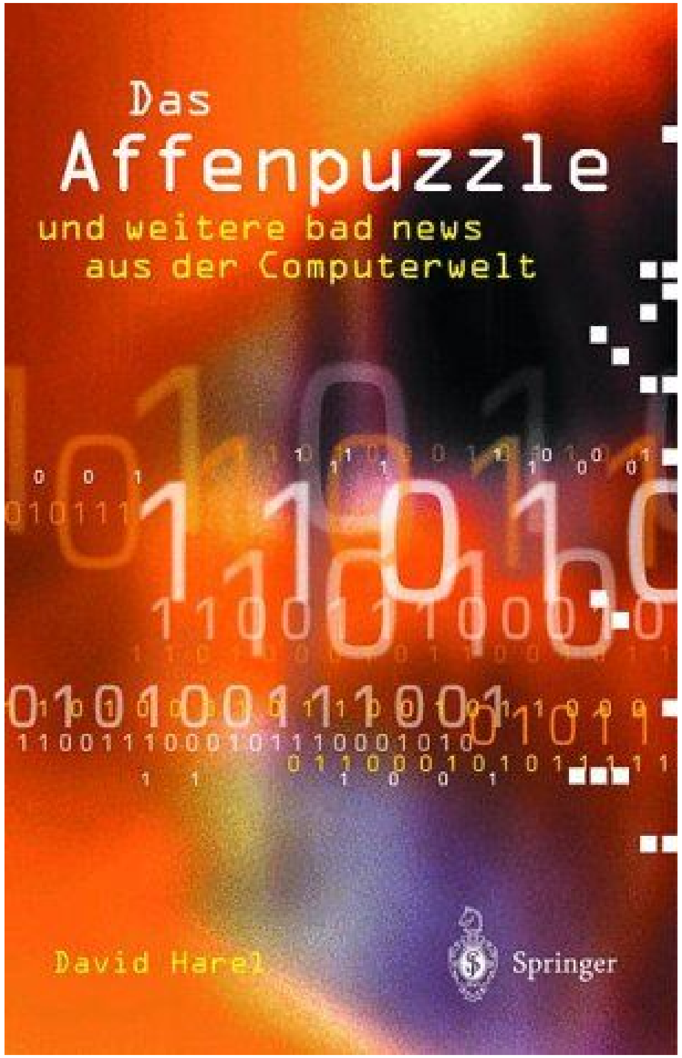
Komplexitätsklasse $\mathcal{P}$

$\mathcal{P}$ ist die Klasse der Sprachen (algorithmischen Probleme), die man in Polynomialzeit erkennen (lösen) kann.

$\mathcal{P}Space$ ist die Klasse der Sprachen (algorithmischen Probleme), die man mit polynomiell viel Platz erkennen (lösen) kann.

- Obige Klassen sind unabhängig vom verwendeten Modell (RAM oder TM).

Literatur-Tip



...eine unterhaltsame Exposition vieler interessanter Zusammenhänge zum Thema *Grenzen allen Wissens* (insbesondere aus der theoretischen informatik und der Logik).

David Harel
Das Affenpuzzle
Springer-Verlag, 2001

Phrasenstrukturgrammatiken und kontextsensitive Grammatiken

Sprachfamilie

Eine Menge $\mathcal{L}$ heißt **Sprachfamilie** genau dann, wenn folgendes gilt:

1. Es existiert eine Sprache $L \in \mathcal{L}$ mit $L \neq \emptyset$, d.h. folglich gilt auch $\mathcal{L} \neq \emptyset$.
2. Für jede Sprache $L \in \mathcal{L}$ gibt es ein endliches Alphabet Σ_L mit $L \subseteq \Sigma_L^*$.

Bisher bekannt: $\mathcal{Cf} \cap \mathcal{Reg} = \mathcal{Reg}$, d.h. jede reguläre Sprache ist auch kontextfrei.

semi-Thue System (STS)

Ein **semi-Thue System** (STS) über dem Alphabet Σ ist eine (endliche oder unendliche) Teilmenge $S \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ ist ein Tupel (Σ, S).

- Produktionen $(u, v) \in S$ werden oft als $u \longrightarrow v$ geschrieben.
- Die **Einschrittige Ableitungsrelation**

  $\underset{(S)}{\Longrightarrow} \;\subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, ist definiert durch:

  $w_1 \underset{(S)}{\Longrightarrow} w_2$, wenn $w_1 = \alpha u \beta$, $w_2 = \alpha v \beta$ für $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ und $u \longrightarrow v \in S$.

Ableitungsrelation

- Die reflexive, transitive Hülle von $\underset{(S)}{\Longrightarrow}$ wird mit $\overset{*}{\underset{(S)}{\Longrightarrow}}$ bezeichnet, und ist die von S definierte **Ableitungsrelation**.
- Weiterehin für $n \in I\!N$:
  - $\overset{n+1}{\underset{(S)}{\Longrightarrow}} := \overset{n}{\underset{(S)}{\Longrightarrow}} \circ \underset{(S)}{\Longrightarrow}$
  - $\overset{0}{\underset{(S)}{\Longrightarrow}} := Id_S$

Phrasenstrukturgrammatik

Eine **Typ-0** oder **Phrasenstruktur-Grammatik** wird durch ein Tupel $G := (V_N, V_T, P, S)$ spezifiziert. Hierbei gilt:

V_N ist ein endliches Alphabet von **Nonterminalen**,

V_T ist endliches Alphabet von **Terminalsymbolen** mit $V_N \cap V_T = \emptyset$,

$S \in V_N$ ist das **Startsymbol**.

$P \subseteq V^* V_N V^* \times V^*$ ist endliche Menge von **Produktionen** (oder **Regeln**), also ein spezielles STS über V.

Generator: Typ-0-Grammatik

- Eine Produktion $(u, v) \in P$ wird auch hier meist als $u \longrightarrow v$ geschrieben.
- Die von G generierte oder erzeugte Sprache

  ist $L(G) := \{w \in V_T^* \mid S \overset{*}{\underset{(P)}{\Longrightarrow}} w\}$.
- Mit $\mathcal{L}_0$ wird die Familie aller von Typ-0 Grammatiken erzeugbaren Sprachen bezeichnet. D.h., $\mathcal{L}_0 := \{L \mid L = L(G)$ für eine Typ-0 Grammatik $G\}$

Typ-0-Sprachen

Beispiel:
Sei G gegeben durch die Produktionen:

$$S \longrightarrow abc \mid aRbc$$

$$Rb \longrightarrow bR$$

$$bL \longrightarrow Lb$$

$$Rc \longrightarrow Lbcc$$

$$aL \longrightarrow aaR$$

$$aL \longrightarrow aa$$

Dann gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

kontextsensitive Grammatik

Ein Spezialfall der Typ-0 Grammatik $G = (V_N, V_T, P, S)$ ist die **Typ-1** oder **kontextsensitive Grammatik**. Hierfür ist $u \longrightarrow v \in P$, wenn *entweder*

- $u = \alpha A \beta$, $v = \alpha w \beta$ mit $A \in V_N$, $w \in V^+$ und $\alpha, \beta \in V^*$ *oder*
- $u = S, v = \lambda$ und S kommt in keiner Produktion auf der rechten Seite vor.

Die Familie der **kontextsensitiven Sprachen** wird mit $\mathcal{C}s$ oder $\mathcal{L}_1$ abgekürzt, und es ist $\mathcal{L}_1 := \{L \mid L = L(G)$ für eine Typ-1 Grammatik $G\}$.

Vergleich der Regeln

1 kontextfrei

$$A \longrightarrow aBccA$$

2 kontextsensitiv

a $\quad cA \longrightarrow caBccD$

b $\quad \underset{\alpha}{c}A\underset{\beta}{b} \longrightarrow \underset{\alpha}{c}aBccD\underset{\beta}{b}$

3 nicht kontextsensitiv

$$cA \longrightarrow aBccD$$

Beispiel: $AbcAcAba$

A	bc	A	c	A	ba
1		1		1	
		2a		2a	
				2b	
		3		3	

Anwendbarkeit der Regeln

Ausblick

Theorem Jede von einer Turing-Maschine akzeptierte Sprache kann auch von einer Typ-0 Grammatik generiert werden und umgekehrt, kurz: $\mathcal{L}_0 = \mathcal{RE}$.

- Was sind monotone Grammatiken?
- Gibt es eine Automatenmodell für kontextsensitive Sprachen?
- Einige Entscheidbarkeitsresultate.