

Formale Grundlagen der Informatik 1  
Kapitel 22  
*NP-Vollständigkeit*

Frank Heitmann  
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

4. Juli 2016

# Die Klassen $P$ und $NP$

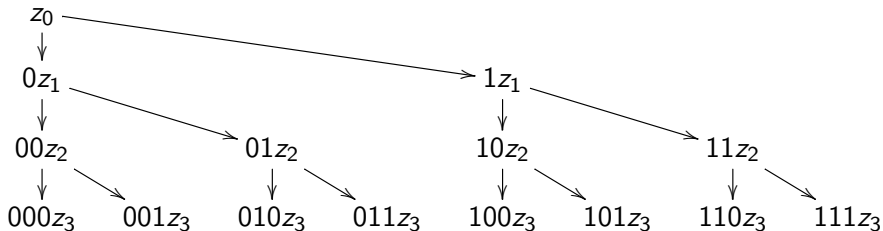
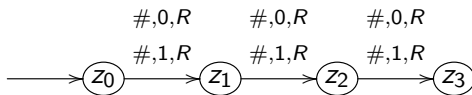
$P := \{L \mid \text{es gibt ein Polynom } p \text{ und eine } p(n)\text{-zeitbeschränkte DTM } A, \text{ die } L \text{ entscheidet}\}$

$NP := \{L \mid \text{es gibt ein Polynom } p \text{ und eine } p(n)\text{-zeitbeschränkte NTM } A, \text{ die } L \text{ entscheidet}\}$

Eine Sprache  $L$  ist in  $P$ , wenn eine DTM  $A$  und ein Polynom  $p$  existiert, so dass  $A$  bei einer Eingabe  $w$  der Länge  $n$  nach  $p(n)$  Schritten spätestens anhält und dann korrekt akzeptiert oder ablehnt. Entsprechend ist  $L$  in  $NP$ , wenn eine NTM existiert, die analog zu obigem auf jeder Rechnung auf  $w$  nach  $p(n)$  Schritten hält.

# Nichtdeterminismus (Raten)

Ein nichtdeterministischer Algorithmus  $A$  kann "raten" und so in einem Zustand z.B. eine Variable auf 0 und auf 1 setzen.



# NP – Verifikation

## Definition (Verifikationsalgorithmus)

Ein *Verifikationsalgorithmus*  $A$  ist ein deterministischer Algorithmus mit zwei Argumenten  $x, y \in \Sigma^*$ , wobei  $x$  die gewöhnliche Eingabe und  $y$  ein *Zertifikat* ist.  $A$  *verifiziert*  $x$ , wenn es ein Zertifikat  $y$  gibt mit  $A(x, y) = 1$ . Die von  $A$  verifizierte Sprache ist

$$L = \{x \in \{0, 1\}^* \mid \exists y \in \{0, 1\}^* : A(x, y) = 1\}.$$

## Definition (NP)

$L \in NP$  gdw. ein Verifikationsalgorithmus  $A$  mit zwei Eingaben und mit polynomialer Laufzeit existiert, so dass für ein  $c$  gilt

$$L = \left\{ x \in \{0, 1\}^* \mid \begin{array}{l} \text{es existiert ein Zertifikat } y \text{ mit } |y| \in O(|x|^c), \\ \text{so dass } A(x, y) = 1 \text{ gilt} \end{array} \right\}$$

# Ein Problem in NP

## Definition (SAT)

$\text{SAT} = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ ist eine erfüllbare aussagenlogische Formel} \}$

Wir raten für jedes Aussagesymbol in  $\phi$  eine Belegung (0 oder 1). Nach dieser Rate-Phase überprüfen wir deterministisch, ob die so geratene Belegung  $\phi$  wahr macht. Falls ja, wird akzeptiert, sonst abgelehnt. Der Algorithmus ist korrekt (gibt es eine erfüllende Belegung, so wird sie gefunden, gibt es keine, kann keine gefunden werden) und arbeitet in Polynomialzeit, also ist das Problem in NP.

# NP-Probleme lösen

## Frage

Wie löst man nun *NP* Probleme *deterministisch*?

## Satz

Sei  $L \in NP$ , dann gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$  und einen deterministischen Algorithmus, der  $L$  in  $2^{O(n^k)}$  entscheidet.

## Beweis.

Beweisskizze/Idee: Ist  $L \in NP$ , so gibt es einen Verifikationsalgorithmus in  $O(n^k)$  ( $n$  ist die Eingabelänge). Das Zertifikat  $y$  hat eine Länge in  $O(n^c)$ . Man geht alle  $2^{O(n^c)}$  Zertifikate durch und führt für jeden den Verifikationsalgorithmus aus. Dieses Verfahren ist in  $2^{O(n^k)}$ . (Siehe auch letztes Kapitel.) □

# P vs. NP

Abgesehen von PATH sind alle im letzten Kapitel betrachteten Probleme (L-PATH, Independent Set, SAT, Lagerhaus-Problem)

- in NP - und damit schnell *nichtdeterministisch* lösbar

Die besten bekannten deterministischen Algorithmen

- benötigen aber exponentielle Laufzeit!

Geht es wirklich nicht schneller?!?

# Das Problem

## Ziel und Hindernis

- Falls nicht, würden wir gerne so etwas zeigen können wie “dieses Problem lässt sich für kein  $k$  in  $O(n^k)$  lösen”.
- Leider haben wir aktuell keine Möglichkeit unsere (Zeit-)Schranken für Probleme zu zeigen!

Wir geben aber nicht auf und behelfen uns mit einem anderen Ansatz...

- Wir zeigen, dass Probleme eine bestimmte Eigenschaft haben, so dass, wenn das Problem doch in  $P$  lösbar ist, sehr unwahrscheinliche Dinge folgen würde.
- Dazu etablieren wir eine Art zu sagen, dass ein Problem zu “den schwierigsten Problemen seiner Klasse” gehört.
- Und dazu brauchen wir den Begriff der Reduktion ...



# Reduktionen

## Definition (Reduktion)

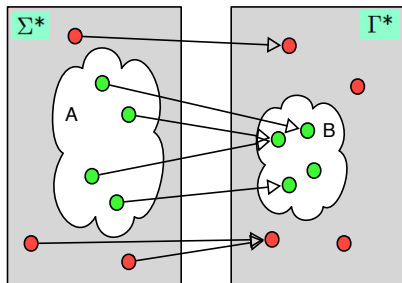
Seien  $L_1, L_2 \subseteq \{0, 1\}^*$  zwei Sprachen. Wir sagen, dass  $L_1$  auf  $L_2$  in *polynomialer Zeit reduziert wird*, wenn eine in Polynomialzeit berechenbare Funktion  $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  existiert mit

$$x \in L_1 \text{ genau dann wenn } f(x) \in L_2$$

für alle  $x \in \{0, 1\}^*$  gilt. Hierfür schreiben wir dann  $L_1 \leq_p L_2$ .  $f$  wird als Reduktionsfunktion, ein Algorithmus der  $f$  berechnet als Reduktionsalgorithmus bezeichnet.

Eine Reduktion ist im Kern auch einfach ein Algorithmus. Es werden Probleminstanzen eines Problems in Probleminstanzen eines anderen Problems umgewandelt. Im Kern findet also eine (algorithmische) Konvertierung statt.

# Reduktionen: Erläuterungen



- Ja-Instanzen ( $x \in A$ ) auf Ja-Instanzen ( $f(x) \in B$ ) abbilden,
- Nein-Instanzen ( $x \notin A$ ) auf Nein-Instanzen ( $f(x) \notin B$ ).
- Gleiche Antwort auf die Fragen ' $x \in A$ ?' und ' $f(x) \in B$ ?'
- Viele Ja-Instanzen können auf *eine* Ja-Instanz abgebildet werden. (Daher auch als 'many-one'-Reduktion bezeichnet.)

# Reduktionen: Beispiel

## Definition (FOLG und KONT)

FOLG =  $\{\langle \phi, \psi \rangle \mid \phi \models \psi \text{ (aussagenlogisch)}\}$

KONT =  $\{\langle \phi \rangle \mid \phi \text{ ist eine aussagenlogische Kontradiktion}\}$

Eine Reduktion  $\text{FOLG} \leq_p \text{KONT}$  gelingt indem  $(\phi, \psi)$  auf  $\phi \wedge \neg\psi$  abgebildet wird. Zu zeigen ist wieder

- 1 Wenn  $(\phi, \psi) \in \text{FOLG}$ , dann  $\phi \wedge \neg\psi \in \text{KONT}$ .
- 2 Wenn  $\phi \wedge \neg\psi \in \text{KONT}$ , dann  $(\phi, \psi) \in \text{FOLG}$ .
- 3 Die Reduktion geht in Polynomialzeit.

Die sind bei diesem Beispiel wieder alle bekannt/klar, mündlich ...

# Zusammenfassung

Bis hierhin:

- Definition von  $P$  und  $NP$
- Abschlusseigenschaften
- Zeigen, dass  $L \in NP$  gilt
- Definition der Reduktion

# Fragen

Wir haben im letzten Kapitel  $3CNF \leq_p CLIQUE$  gezeigt. Was mussten wir dafür tun?

- 1 Eine erfüllbare Formel in 3CNF in einen Graphen  $G$  umwandeln, der eine  $k$ -Clique enthält.
- 2 Einen Graphen, der eine  $k$ -Clique enthält, so umwandeln, dass eine erfüllbare Formel in 3CNF entsteht.
- 3 beide obigen
- 4 etwas anderes ...

# Fragen

Hat man  $L_1 \leq_p L_2$  und weiß, dass  $L_1$  entscheidbar ist, ist dann auch  $L_2$  entscheidbar?

- 1 Ja
- 2 Nur wenn man auf die polynomiale Zeitschranke bei der Reduktion verzichtet
- 3 Nein

# Fragen

Hat man  $L_1 \leq_p L_2$  und weiß, dass  $L_2$  entscheidbar ist, ist dann auch  $L_1$  entscheidbar?

- 1 Ja
- 2 Nur wenn man auf die polynomiale Zeitschranke bei der Reduktion verzichtet
- 3 Nein

# Fragen

Hat man  $L_1 \leq_p L_2$ , was stimmt?

- 1 Wenn  $L_1$  unentscheidbar ist, dann auch  $L_2$ .
- 2 Wenn  $L_2$  unentscheidbar ist, dann auch  $L_1$ .
- 3 Keines davon



# Zur Nachbereitung

## Zur Nachbereitung

- 1 4. (siehe letztes Kapitel)
- 2 3.
- 3 1. (die Zeitschranke bei der Reduktion kann man aber fallen lassen)
- 4 1.

# Probleme durch andere lösen

## Satz

Seien  $L_1, L_2 \subseteq \{0, 1\}^*$  mit  $L_1 \leq_p L_2$ , dann folgt aus  $L_2 \in P$  auch  $L_1 \in P$ .

## Beweis

- Wegen  $L_1 \leq_p L_2$  gibt es eine Reduktionsfunktion  $f$  mit  $x \in L_1$  gdw.  $f(x) \in L_2$ , die in Polynomialzeit berechenbar ist.
- Wegen  $L_2 \in P$  kann  $L_2$  von einem Algorithmus  $A_2$  in Polynomialzeit entschieden werden.
- Der Algorithmus  $A_1$ , der  $L_1$  in Polynomialzeit entscheidet arbeitet auf einer Eingabe  $x \in \{0, 1\}^*$  wie folgt:
  - Berechne  $f(x)$ .
  - Nutze  $A_2$ , um  $f(x) \in L_2$  zu entscheiden.
- $f(x) \in L_2$  gilt gdw.  $x \in L_1$  gilt.

# Probleme durch andere lösen

## Satz

Seien  $L_1, L_2 \subseteq \{0, 1\}^*$  mit  $L_1 \leq_p L_2$ , dann folgt aus  $L_2 \in P$  auch  $L_1 \in P$ .

## Beweis.

- Der Algorithmus  $A_1$ , der  $L_1$  in Polynomialzeit entscheidet arbeitet auf einer Eingabe  $x \in \{0, 1\}^*$  wie folgt:
  - Berechne  $f(x)$ .
  - Nutze  $A_2$ , um  $f(x) \in L_2$  zu entscheiden.
- $A_1$  arbeitet in Polynomialzeit:  $f$  kann in Polynomialzeit berechnet werden und daher ist  $|f(x)| \in O(|x|^c)$  ( $c$  eine Konstante). Die Laufzeit von  $A_2$  ist dann durch  $O(|f(x)|^d) = O(|x|^{c \cdot d})$  beschränkt. Insgesamt arbeitet  $A_1$  also in Polynomialzeit:  $O(|x|^c + |x|^{c \cdot d}) = O(|x|^{c \cdot d})$ .



# Probleme durch andere lösen

## Satz

Seien  $L_1, L_2 \subseteq \{0, 1\}^*$  mit  $L_1 \leq_p L_2$ , dann folgt aus  $L_2 \in P$  auch  $L_1 \in P$ .

## Anmerkung

Mit obigen Satz, kann man ein Problem ( $L_1$ ) durch ein anderes ( $L_2$ ) lösen. Darum auch Reduktion: Statt einen Algorithmus für  $L_1$  zu finden und so  $L_1$  zu lösen, findet man einen für  $L_2$  und löst so nicht nur  $L_2$ , sondern (dank des Reduktionsalgorithmus) auch  $L_1$ . Das Problem  $L_1$  zu lösen ist also darauf 'reduziert' worden das Problem  $L_2$  zu lösen.

(Alternativ kann eine Reduktion als eine *Transformation* von einem Problem in ein anderes angesehen werden.)

# Übergang zur NP-Vollständigkeit...

- Ist  $A \leq_p B$ , so ist  $A$  höchstens so schwierig wie  $B$ .
- Reduziert man nun *jede* Sprache aus  $NP$  auf eine (neue) Sprache  $L$ , so ist  $L$  mindestens so schwierig wie *ganz*  $NP$ , denn löst man  $L$ , kann man jedes Problem in  $NP$  lösen.
- Das macht  $L \in P$  *sehr* unwahrscheinlich, weil dann  $P = NP$  gelten würde.

## Anmerkung

Höchstens/mindestens bezieht sich auf polynomiellen Mehraufwand, der hier (im Falle von Problemen in  $P$  und  $NP$ ) als akzeptabel angesehen wird.

# NP-vollständig

## Definition

Eine Sprache  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  wird als *NP-vollständig* bezeichnet, wenn

- 1  $L \in NP$  und
- 2  $L' \leq_p L$  für jedes  $L' \in NP$  gilt.

Kann man für  $L$  zunächst nur die zweite Eigenschaft beweisen, so ist  $L$  *NP-schwierig* (-schwer/-hart).

Alle *NP-vollständigen* Probleme bilden die Komplexitätsklasse *NPC*.

## Zwei wichtige Theoreme (I)

### Theorem

Sei  $L \in NPC$ . Ist nun  $L \in P$ , so ist  $NP = P$ .

### Beweis.

Sei  $L \in NPC \cap P$ . Sei nun  $L' \in NP$ . Wegen  $L \in NPC$  gilt  $L' \leq_p L$  und aus  $L \in P$  folgt mit dem letzten Satz  $L' \in P$ .  $\square$

### Anmerkung

Äquivalente Formulierung: Gibt es ein  $L \in NP \setminus P$ , so ist  $NP \cap P = \emptyset$ .

# Zur Nachbereitung

## Wichtige Anmerkung

Der letzte Satz rechtfertigt die Aussage, dass ein Problem in *NPC* (also ein *NP*-vollständiges Problem) höchstwahrscheinlich nicht effizient lösbar ist (also in *P* ist), da dann  $P = NP$  gelten würde und damit alle Probleme in *NP* (darunter auch all die komplizierten aus *NPC*) effizient lösbar (in *P*) wären.

## Begründung

Dass wir an  $P = NP$  nicht glauben liegt daran, dass in *NPC* sehr viele Probleme liegen, an denen schon seit sehr langer Zeit gearbeitet wird und für keines davon kennen wir einen effizienten Algorithmus (einen in *P*). (Es gibt noch viele gute weitere Gründe, dies nicht zu glauben, aber die führen hier zu weit und obiges ist bereits ein ziemlich guter.)



## Zwei wichtige Theoreme (IIa)

### Lemma

Ist  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \leq_p L_3$ , so ist  $L_1 \leq_p L_3$ .

### Beweis.

Das Argument ist ähnlich wie bei dem Beweis, dass  $L_1 \in P$  aus  $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \in P$  folgt. Seien  $f$  und  $g$  die Reduktionsfunktionen aus  $L_1 \leq_p L_2$  bzw.  $L_2 \leq_p L_3$ . Bei Eingabe  $x$  mit  $|x| = n$  berechnen wir zunächst  $f(x)$  in Polynomialzeit  $p(n)$ . Dann berechnen wir  $g(f(x))$  in Zeit  $q(|f(x)|) \leq q(p(n))$ . Insgesamt ist der Aufwand dann bei Eingaben der Länge  $n$  durch  $p(n) + q(p(n))$  nach oben beschränkt, was ein Polynom ist. (Die Eigenschaft  $x \in L_1$  gdw.  $(g \circ f)(x) \in L_3$  folgt direkt aus den gegebenen Reduktionen. Die hier gesuchte Reduktionsfunktion ist also  $g \circ f$ .) □

## Zwei wichtige Theoreme (IIb)

### Theorem

Sei  $L$  eine Sprache und  $L' \in NPC$ . Gilt  $L' \leq_p L$ , so ist  $L$  NP-schwierig. Ist zusätzlich  $L \in NP$ , so ist  $L$  NP-vollständig.

### Beweis.

Wegen  $L' \in NPC$  gilt  $L'' \leq_p L'$  für jedes  $L'' \in NP$ . Aus  $L' \leq_p L$  und dem vorherigen Satz folgt dann  $L'' \leq_p L$ ,  $L$  ist also NP-schwierig. Ist zusätzlich  $L \in NP$ , so ist  $L$  nach Definition NP-vollständig.  $\square$

# Verfahren

Methode zum Beweis der NP-Vollständigkeit einer Sprache  $L$ :

- 1 Zeige  $L \in NP$ .
- 2 Wähle ein  $L' \in NPC$  aus.
- 3 Gib einen Algorithmus an, der ein  $f$  berechnet, das jede Instanz  $x \in \{0, 1\}^*$  von  $L'$  auf eine Instanz  $f(x)$  von  $L$  abbildet (also eine Reduktion).
- 4 Beweise, dass  $f$  die Eigenschaft  $x \in L'$  gdw.  $f(x) \in L$  für jedes  $x \in \{0, 1\}^*$  besitzt.
- 5 Beweise, dass  $f$  in Polynomialzeit berechnet werden kann.

## Anmerkung

Die letzten drei Punkte zeigen  $L' \leq_p L$ . Mit dem vorherigen Satz folgt daraus und aus den ersten beiden Punkten  $L \in NPC$ .

# Verfahren

## Anmerkung

Um im Verfahren eben ein  $L' \in NPC$  auswählen zu können, muss man aber erstmal welche haben! Je mehr man kennt, desto besser ist es später, aber ein erstes brauchen wir und dort werden wir tatsächlich *alle* Probleme aus  $NP$  auf dieses reduzieren müssen!

# Zusammenfassung

Zusammenfassung bisher:

- In  $P$  sind jene Probleme, die in Polynomialzeit lösbar sind,
  - d.h. es gibt ein Polynom  $p$ , so dass bei einer Eingabe der Länge  $n$  maximal  $p(n)$  Schritte benötigt werden.
  - Probleme in  $P$  gelten als effizient lösbar.
- In  $NP$  sind Probleme, die *nichtdeterministisch* in Polynomialzeit lösbar sind.
- Ein  $NP$  Problem kann deterministisch auf jeden Fall in Exponentialzeit gelöst werden.
- Um zu zeigen, dass es wahrscheinlich nicht schneller geht, zeigt man dass das Problem  $NP$ -vollständig ist.
- Begriffe:  $P$ ,  $NP$ , Reduktion,  $NP$ -schwierig,  $NP$ -vollständig.

# Fragen

Welche Aussage gilt unter der Annahme  $P \neq NP$  ?

- ①  $P \subsetneq NP \subsetneq NPC$
- ②  $P \subsetneq NPC \subsetneq NP$
- ③  $P \subsetneq NP$  und  $NPC \subsetneq NP$  und  $P \cap NPC = \emptyset$
- ④  $P \subsetneq NPC$  und  $NP \subsetneq NPC$

# Fragen

Sei  $NPH$  die Klasse der  $NP$ -schwierigen Probleme. Was gilt?

- 1  $NPH \subseteq NPC$
- 2  $NPC \subseteq NPH$
- 3  $NPC \cap NPH = \emptyset$
- 4  $NPC \cap NPH \neq \emptyset$  aber auch  $NPC \setminus NPH \neq \emptyset$  und  $NPH \setminus NPC \neq \emptyset$

# Fragen

Sei  $L_{NPC} \in NPC$  und die Komplexität von  $L_?$  unbekannt. Welche Reduktion müssen Sie zeigen, um  $L_?$  als NP-vollständig nachzuweisen?

- 1  $L_?$  auf  $L_{NPC}$  reduzieren
- 2  $L_{NPC}$  auf  $L_?$  reduzieren
- 3 Beide oben genannten Reduktionen
- 4 Welche Richtung ist wegen der Eigenschaft der Reduktion ( $x \in L_1$  gdw.  $f(x) \in L_2$ ) egal.



# Fragen

Sei nochmal  $L_{NPC} \in NPC$  und  $L_?$  ein Problem mit unbekannter Komplexität. Was wissen Sie, wenn Sie doch  $L_? \leq_p L_{NPC}$  zeigen?

- 1 Nichts! (Zumindest nichts hilfreiches!)
- 2  $L_? \in NPC$
- 3  $L_? \in NP$
- 4  $L_{NPC}$  "erbt" die Komplexität von  $L_?$ , wenn wir diese ermittelt haben.

# Fragen

## Zur Nachbereitung

- 1 3. ist richtig. Alle anderen entfallen, da sie  $P \subset NPC$  enthalten, woraus  $P = NP$  folgt.
- 2 2. ist richtig. Jedes NP-vollständige Problem ist auch NP-schwierig, da für NP-schwierig weniger verlangt wird.
- 3 2. ist richtig. Zudem muss noch  $L_? \in NP$  gezeigt werden.
- 4 3. ist richtig. Man kann in Polynomialzeit mit der Reduktion  $L_?$  auf  $L_{NPC}$  reduzieren und dann (in NP)  $L_{NPC}$  lösen. Damit hat man dann einen Algorithmus, der  $L_? \in NP$  zeigt.

# SAT - Ein erstes NPC Problem!

Wir haben immer noch kein Problem in *NPC* ...

## Definition (SAT)

$SAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ ist eine erfüllbare aussagenlogische Formel} \}$

Das *Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik*, SAT, ist historisch das erste NP-vollständige Problem (und immer noch sehr nützlich).

# SAT $\in$ NPC

## Theorem

*SAT ist NP-vollständig.*

## Beweis.

Um  $\text{SAT} \in \text{NP}$  zu zeigen, raten wir gegeben eine Formel  $\phi$  eine Belegung (es gibt  $2^n$  viele bei  $n$  verschiedenen Variablen in  $\phi$ ) und verifizieren in Polynomialzeit, ob sie die Formel erfüllt.

Um zu zeigen, dass SAT vollständig ist für NP müssen wir alle Probleme aus NP auf SAT reduzieren. Die Idee mündlich...  $\square$

## Literaturhinweis

Schön erklärter Beweis in [HMU].

## Der weitere Weg...

### Anmerkung (zur Nachbereitung)

Hat man nun erstmal ein *NP*-vollständiges Problem, so kann man - siehe den Plan oben - nun dieses benutzen, um es auf neue Probleme zu reduzieren und diese so als *NP*-vollständig nachzuweisen. Der umständliche Weg *alle NP*-Probleme auf ein neues zu reduzieren entfällt so (bzw. man kriegt dies insb. wegen der Transitivität von  $\leq_p$  geschenkt). Je größer dann der Vorrat an *NP*-vollständigen Problemen ist, desto größer ist die Auswahl an Problemen, von denen man eine Reduktion auf ein neues Problem, dessen Komplexität noch unbekannt ist, versuchen kann. (Schritt 2 in obigem Plan.)

Wir wollen zwei weitere Probleme als gegeben voraussetzen, dazu:

### Definition (CNF)

$CNF = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ ist eine erfüllbare aussagenlogische Formel in KNF} \}$

### Definition (3CNF)

$3CNF = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \in CNF, \text{jede Klausel hat genau drei verschiedene Literale} \}$

### Theorem

*CNF und 3CNF sind NP-vollständig.*

### Beweis.

$CNF, 3CNF \in NP$  ist klar. Man kann dann  $SAT \leq_p CNF$  und  $CNF \leq_p 3CNF$  zeigen (siehe wieder [HMU]). □

# Clique

Nun wollen wir ein Problem tatsächlich als *NP*-vollständig nachweisen...

## Definition (Clique)

$\text{CLIQUE} = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ enthält einen } K^k \text{ als Teilgraphen} \}$

Dabei ist ein  $K^k$  eine  $k$ -Clique, d.h. ein (Teil-)Graph auf  $k$  Knoten, wobei alle Knoten paarweise miteinander verbunden sind.

# Clique

## Definition (Clique)

$\text{CLIQUE} = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ enthält einen } K^k \text{ als Teilgraphen} \}$

## Satz

*CLIQUE ist NP-vollständig.*

## Beweis

Als Zertifikat nehmen wir eine Menge  $V' \subseteq V(G)$  von Knoten, die eine Clique bilden. Dieses Zertifikat ist polynomial in der Eingabelänge und zudem lässt sich leicht in polynomialer Zeit prüfen, ob alle Knoten verbunden sind, indem man für je zwei Knoten  $u, v$  aus  $V'$  einfach testet, ob  $\{u, v\}$  eine Kante in  $E(G)$  ist. Dies zeigt  $\text{CLIQUE} \in \text{NP}$ .



CLIQUE  $\in$  NPC

## Satz

CLIQUE ist NP-vollständig.

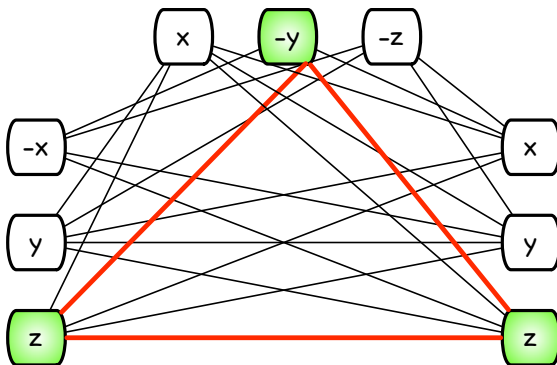
## Beweis

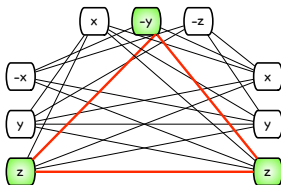
Nun zeigen wir noch  $3\text{CNF} \leq_p \text{CLIQUE}$ . (Die folgende Reduktion hatten wir schon letztes Mal...) Sei dazu  $\phi = C_1 \wedge \dots \wedge C_k$  eine Instanz von 3CNF mit  $k$  Klauseln. Seien ferner  $l_1^r, l_2^r, l_3^r$  für  $r = 1, 2, \dots, k$  die drei verschiedenen Literale in der Klausel  $C_r$ . Wir konstruieren eine Instanz  $(G, k)$  von CLIQUE wie folgt: Zu jeder Klausel  $C_r = (l_1^r \vee l_2^r \vee l_3^r)$  nehmen wir ein Tripel  $v_1^r, v_2^r, v_3^r$  in  $V$  auf. Zwei Knoten  $v_i^s$  und  $v_j^t$  sind nun genau dann miteinander verbunden, wenn  $s \neq t$  gilt und die zugehörigen Literale nicht zueinander komplementär sind (d.h. das eine ein positives das andere ein negatives Literal der selben Variable ist). Der Wert  $k$  der Instanz von CLIQUE entspricht der Anzahl der Klauseln von  $\phi$ .

CLIQUE  $\in$  NPC - Illustration

Konstruktion zu

$$\phi = (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (x \vee y \vee z)$$



CLIQUE  $\in$  NPC - Konstruktion in P

## Beweis

Diese Konstruktion ist in Polynomialzeit möglich, da man durch einmal lesen der Formel die auftretenden Variablen und Klauseln kennt und so die Knoten erzeugen kann. Die Kanten erzeugt man dann schlimmstenfalls in dem man jeden Knoten mit allen Knoten der anderen Tripel vergleicht und prüft ob die zugehörigen Literale komplementär sind. Sind sie es nicht, fügt man eine Kante hinzu. Dies geht dann in  $O(V^2) = O(\phi^2)$ .

CLIQUE  $\in$  NPC

## Beweis

Wir müssen noch zeigen, dass dies wirklich eine Reduktion ist, der gegebene Graph also genau dann eine Clique enthält, wenn die Formel erfüllbar ist. Sei die Formel erfüllbar, dann gibt es eine Belegung die in jeder Klausel mindestens ein Literal wahr macht. Nimmt man nun aus jeder Klausel eines dieser wahren Literale und dann die jeweils zugehörigen Knoten aus den Tripeln so hat man eine  $k$ -Clique, denn es sind  $k$  Knoten (da es  $k$  Klauseln sind) und zu zwei Knoten  $v_i^r, v_j^s$  gilt  $r \neq s$  (da die Literale aus verschiedenen Klauseln, die Knoten also aus verschiedenen Tripeln gewählt wurden) und ferner sind die zu den Knoten gehörigen Literale nicht komplementär, da die Belegung dann nicht beide wahr machen könnte. Die Knoten sind also durch eine Kante verbunden.

CLIQUE  $\in$  NPC

## Beweis.

Gibt es andersherum eine  $k$ -Clique  $V'$ , so muss jeder Knoten aus einem anderen Tripel sein, da die Knoten in einem Tripel nicht miteinander verbunden sind. Wir können nun dem zu einem Knoten  $v'_i \in V'$  zugehörigem Literal  $l'_i$  den Wert 1 zuweisen ohne dadurch dem Literal und seinem Komplement den Wert 1 zuzuweisen, da dann zwei Knoten in  $V'$  sein müssten, die nicht miteinander verbunden wären (was nicht sein kann, da  $V'$  eine Clique ist). Damit ist dann jede Klausel erfüllt, da aus jedem Tripel ein Knoten und damit aus jeder Klausel ein Literal beteiligt ist und wir haben somit eine erfüllende Belegung. Damit ist alles gezeigt.  $\square$

## Weitere Probleme in NPC

Neben SAT, CNF, 3CNF und CLIQUE gibt es viele weitere NP-vollständige Probleme:

### Das Teilsummenproblem

Gegeben ist eine Menge  $S \subseteq \mathbb{N}$  und ein  $t \in \mathbb{N}$ . Gibt es eine Menge  $S' \subseteq S$  mit  $\sum_{s \in S'} s = t$ ?

### Das Mengenpartitionsproblem

Gegeben sei eine Menge  $S \subseteq \mathbb{N}$ . Gesucht ist eine Menge  $A \subseteq S$ , so dass  $\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in \bar{A}} x$  gilt.

### Das Knotenüberdeckungsproblem

Gegeben ist ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  und ein  $k \in \mathbb{N}$ . Enthält  $G$  eine Knotenüberdeckung der Größe  $k$ , d.h. eine Teilmenge  $V' \subseteq V$  mit  $|V'| = k$  derart, dass für alle  $\{u, v\} \in E$   $u \in V'$  oder  $v \in V'$  (oder beides) gilt?

## Weitere Probleme in NPC

### Independent Set

Gegeben ist ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  und ein  $k \in \mathbb{N}$ . Enthält  $G$  ein *Independent Set* der Größe  $k$ , d.h.  $k$  Knoten bei denen keine zwei miteinander verbunden sind?

### Das Hamilton-Kreis-Problem

Gegeben ist ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$ . Besitzt  $G$  einen Hamilton-Kreis, d.h. einen einfachen Kreis, der alle Knoten aus  $V$  enthält?

### Das Färbungsproblem

Gegeben ist ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  und ein  $k \in \mathbb{N}$ . Kann  $G$  mit  $k$  Farben gefärbt werden? D.h. gibt es eine Funktion  $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  derart, dass  $c(u) \neq c(v)$  für jede Kante  $\{u, v\} \in E$  gilt?

# $P$ vs. $NP$

Zusammenhänge zwischen  $P$  und  $NP$ :

- $P \subseteq NP$  ist klar.
- $P \supseteq NP$  und damit  $P = NP$  ist ungelöst.
- Die Theorie der  $NP$ -vollständigen Sprachen liefert einen starken Hinweis darauf, dass  $P \neq NP$  gilt, denn es wird vermutet, dass keine  $NP$ -vollständige Sprache in  $P$  liegt.
- Alle oben genannten Probleme sind  $NP$ -vollständig...



# Take Home Message

## Take Home Message

Gegeben ein Problem für das ihr einen Algorithmus entwickeln sollt. Fallen euch nach einiger Zeit und etlichem Nachdenken stets nur Algorithmen ein, die **im Prinzip den ganzen Suchraum durchgehen**, so ist das Problem vermutlich *NP*-vollständig (oder schlimmer). (Hängt natürlich u.a. von eurer Erfahrung im Algorithmenentwurf ab.) Ein Nachweis der *NP*-Vollständigkeit ist natürlich trotzdem nett und sinnvoll... ;-)

## Für Interessierte

Mehr zu *NP*-vollständigen Problemen findet Ihr in [HMU] und in dem Buch *Computers and Intractability* von Garey und Johnson.