Formale Grundlagen der Informatik 1
Kapitel 5
Über reguläre Sprachen hinaus
Kellerautomaten und Pumping Lemma
(Teil 2)

Frank Heitmann
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

21. April 2015

Der Kellerautomat - Formal

Definition (Kellerautomat (PDA = Push Down Automata))

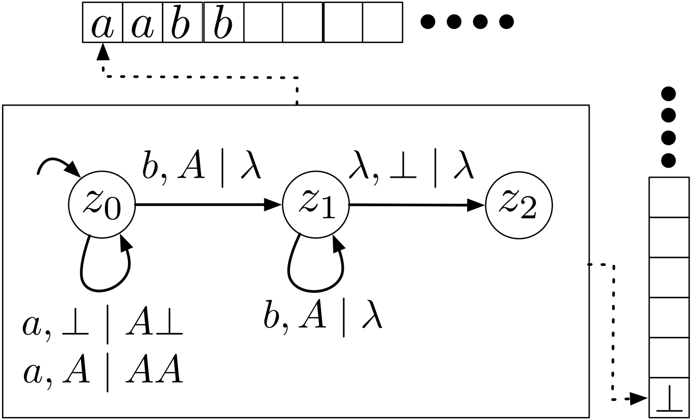
Ein **nichtdeterministischer Kellerautomat** (kurz PDA) ist ein 7-Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, Z_{start}, Z_{end}, \perp)$ mit

- Der endlichen Menge von *Zuständen* Z.
- Dem endlichen Alphabet Σ von *Eingabesymbolen*.
- Dem endlichen Alphabet Γ von *Kellersymbolen*.
- Der *Überführungsfunktion* $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \to 2^{Z \times \Gamma^*}$.
- Der Menge von *Startzuständen* $Z_{start} \subseteq Z$.
- Der Menge der *Endzustände* $Z_{end} \subseteq Z$.
- Dem *Kellerbodensymbol* $\perp \in \Gamma$.

Anmerkung

Dieses Automatenmodell ist *nichtdeterministisch*

Der Kellerautomat

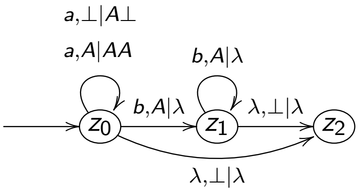


Kellerautomat - Funktionsweise

Die (informale) Funktionsweise eines PDA:

1. Ein PDA beginnt im Startzustand z_0 und mit $\perp$ im Keller.
2. Ist der Automat
   - im Zustand z,
   - liest vom Eingabeband das a (λ möglich)
   - und vom Keller das X (dies ist ganz oben auf dem Keller),
3. so kann ein Element $(z', w) \in \delta(z, a, X)$ gewählt werden.
4. Es wird dann
   - in den Zustand z' gewechselt,
   - der Lesekopf auf dem Eingabeband ein Feld nach rechts bewegt,
   - das X vom Keller gelöscht
   - und dieses X durch w ersetzt (wobei das erste Symbol von w nun ganz oben auf dem Keller ist).

Graphische Darstellung



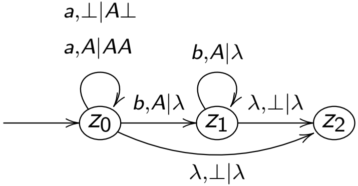
Anmerkung zur graphischen Darstellung

Eine Kantenbeschriftung wie $a, \perp \mid A\perp$ bedeutet, dass

1. a vom Eingabeband gelesen wird
2. $\perp$ (ganz oben) vom Keller gelesen (und gelöscht!) wird
3. $A\perp$ auf den Keller geschrieben wird (wobei A nun ganz oben auf dem Keller ist)

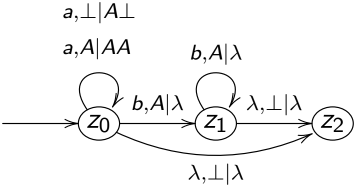
(Band- und Kellerinhalt wird in der Konfiguration dargestellt.)

Beispiel



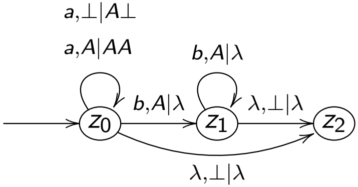
$$(z_0, aabb, \perp) \vdash (z_0, abb, A\perp) \vdash (z_0, bb, AA\perp) \vdash$$
$$(z_1, b, A\perp) \vdash (z_1, \lambda, \perp) \vdash (z_2, \lambda, \lambda)$$

Beispiel



$$(z_0, aabb, \perp) \vdash (z_0, abb, A\perp) \vdash (z_0, bb, AA\perp) \vdash$$
$$(z_1, b, A\perp) \vdash (z_1, \lambda, \perp) \vdash (z_2, \lambda, \lambda)$$

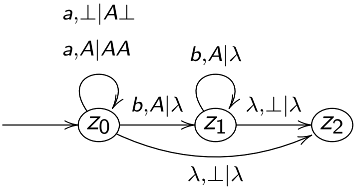
Beispiel



$$(z_0, aabb, \perp) \vdash (z_0, abb, A\perp) \vdash (z_0, bb, AA\perp) \vdash$$

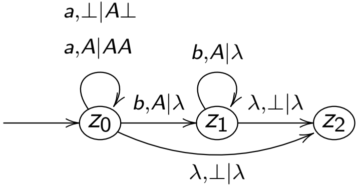
$$(z_1, b, A\perp) \vdash (z_1, \lambda, \perp) \vdash (z_2, \lambda, \lambda)$$

Beispiel



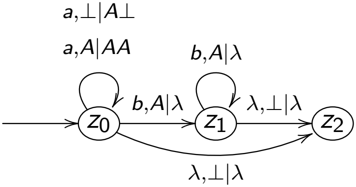
$$
\begin{aligned}
(z_0, aabb, \bot) \quad \vdash \quad & (z_0, abb, A\bot) \vdash (z_0, bb, AA\bot) \vdash \\
& (z_1, b, A\bot) \vdash (z_1, \lambda, \bot) \vdash (z_2, \lambda, \lambda)
\end{aligned}
$$

Beispiel



$$
\begin{aligned}
(z_0, aabb, \perp) \quad \vdash \quad & (z_0, abb, A\perp) \vdash (z_0, bb, AA\perp) \vdash \\
& (z_1, b, A\perp) \vdash (z_1, \lambda, \perp) \vdash (z_2, \lambda, \lambda)
\end{aligned}
$$

Beispiel



$$
\begin{aligned}
(z_0, aabb, \perp) \quad \vdash \quad & (z_0, abb, A\perp) \vdash (z_0, bb, AA\perp) \vdash \\
& (z_1, b, A\perp) \vdash (z_1, \lambda, \perp) \vdash (z_2, \lambda, \lambda)
\end{aligned}
$$

Konfiguration und Rechnung

Definition (Konfiguration und Rechnung)

Eine **Konfiguration** eines PDA A ist ein Element

$$(z, w, v) \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*,$$

mit der Bedeutung,

- dass A im Zustand z ist,
- das w noch auf dem Eingabeband zu lesen ist und
- der aktuelle Kellerinhalt v ist.

Die **Überführungsrelation** $\vdash \subseteq (Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*)$ ist definiert durch

$$(z, xu, yw) \vdash (z', u, y'w) \text{ gdw. } (z', y') \in \delta(z, x, y).$$

Eine **Rechnung** ist wieder eine Folge solcher Übergänge.

Konfiguration und Rechnung

Definition (Konfiguration und Rechnung)

Eine **Konfiguration** eines PDA A ist ein Element

$$(z, w, v) \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*,$$

mit der Bedeutung,

- dass A im Zustand z ist,
- das w noch auf dem Eingabeband zu lesen ist und
- der aktuelle Kellerinhalt v ist.

Die **Überführungsrelation** $\vdash \subseteq (Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*)$ ist definiert durch

$$(z, xu, yw) \vdash (z', u, y'w) \text{ gdw. } (z', y') \in \delta(z, x, y).$$

Eine **Rechnung** ist wieder eine Folge solcher Übergänge.

Konfiguration und Rechnung

Definition (Konfiguration und Rechnung)

Eine **Konfiguration** eines PDA A ist ein Element

$$(z, w, v) \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*,$$

mit der Bedeutung,

- dass A im Zustand z ist,
- das w noch auf dem Eingabeband zu lesen ist und
- der aktuelle Kellerinhalt v ist.

Die **Überführungsrelation** $\vdash \subseteq (Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*)$ ist definiert durch

$$(z, xu, yw) \vdash (z', u, y'w) \text{ gdw. } (z', y') \in \delta(z, x, y).$$

Eine **Rechnung** ist wieder eine Folge solcher Übergänge.

Akzeptierte Sprache

Definition (Akzeptierte Sprache)

Die von einem PDA *mit leerem Keller akzeptierte Sprache* ist die Menge $L_\lambda(A) = N(A)$ mit

$$L_\lambda(A) := \{w \in \Sigma^* \mid (z_0, w, \perp) \vdash^* (z, \lambda, \lambda)\}$$

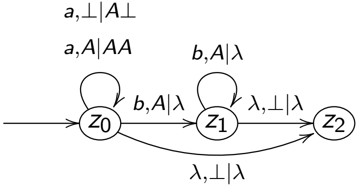
und die von einem PDA *mit Endzustand akzeptierte Sprache* ist die Menge $L_Z(A) = L(A)$ mit

$$L_Z(A) := \{w \in \Sigma^* \mid (z_0, w, \perp) \vdash^* (z_e, \lambda, v), z_e \in Z_{end}, v \in \Gamma^*\}.$$

Anmerkung 1

Da das Modell nichtdeterministisch ist, genügt für die Akzeptanz eines Wortes wieder eine Rechnung, die den Keller leert bzw. den Automaten in einen Endzustand bringt.

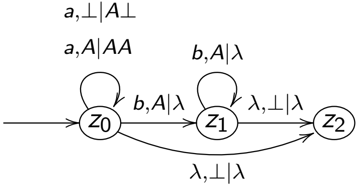
Beispiel



$$(z_0, abb, \perp) \vdash (z_0, bb, A\perp) \vdash (z_1, b, \perp) \vdash (z_1, b, \lambda)$$

Nicht akzeptieren, da Wort nicht zu Ende gelesen!

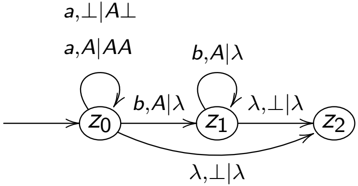
Beispiel



$$(z_0, abb, \perp) \vdash (z_0, bb, A\perp) \vdash (z_1, b, \perp) \vdash (z_1, b, \lambda)$$

Nicht akzeptieren, da Wort nicht zu Ende gelesen!

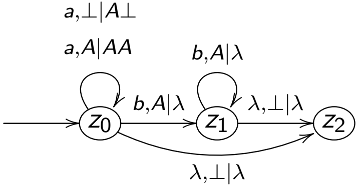
Beispiel



$$(z_0, abb, \perp) \vdash (z_0, bb, A\perp) \vdash (z_1, b, \perp) \vdash (z_1, b, \lambda)$$

Nicht akzeptieren, da Wort nicht zu Ende gelesen!

Beispiel



$$(z_0, abb, \perp) \vdash (z_0, bb, A\perp) \vdash (z_1, b, \perp) \vdash (z_1, b, \lambda)$$

Nicht akzeptieren, da Wort nicht zu Ende gelesen!

Fragen...

Bei einer Kantenbeschriftung $A, a|Aa$ wird ...

1. ... ein A vom Keller gelöscht.
2. ... ein a vom Keller gelöscht.
3. ... ein A auf den Keller geschrieben.
4. ... ein a vom Keller gelöscht und ein A auf den Keller geschrieben
5. etwas anderes passiert
6. das weiß ich nicht

Fragen...

Akzeptiert ein PDA ein Wort mit leerem Keller, so kann er danach noch mit λ-Kanten weiterarbeiten.

1. Ja
2. Nein

Fragen...

Wenn man $N(A) \subseteq M$ zeigen will, geht man von einem $w \in N(A)$ aus. Man weiß dann, dass der Automat w bis zum Ende lesen kann und ...

1. ... in einem Zustand endet, in dem nur noch $\perp$ im Keller ist
2. ... in einem Zustand endet, bei dessen Betreten $\perp$ gelöscht wurde
3. ... in einem Endzustand endet
4. etwas anderes
5. das weiß ich nicht

Zur Nachbereitung

Zur Nachbereitung

Richtige Antworten sind:

1. 2 und 5
2. 2
3. 4

Spiegelwörter

Definition (w^{rev})

Das **Spiegelwort** w^{rev} zu einem Wort $w \in \Sigma^*$ ist definiert durch

1. $\lambda^{rev} = \lambda$ und
2. $(ux)^{rev} = x \cdot u^{rev}$ mit $x \in \Sigma$ und $u \in \Sigma^*$

Bspw. ist für $w = 1011$ dann $w^{rev} = 1101$.
Für Mengen notieren wir $L^{rev} = \{w^{rev} \mid w \in L\}$.

Wir wollen nun einen PDA konstruieren für

$$L := \{ww^{rev} \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

Spiegelwörter

Definition (w^{rev})

Das **Spiegelwort** w^{rev} zu einem Wort $w \in \Sigma^*$ ist definiert durch

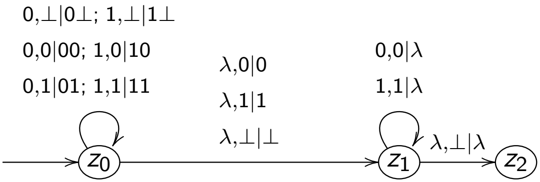
1. $\lambda^{rev} = \lambda$ und
2. $(ux)^{rev} = x \cdot u^{rev}$ mit $x \in \Sigma$ und $u \in \Sigma^*$

Bspw. ist für $w = 1011$ dann $w^{rev} = 1101$.
Für Mengen notieren wir $L^{rev} = \{w^{rev} \mid w \in L\}$.

Wir wollen nun einen PDA konstruieren für

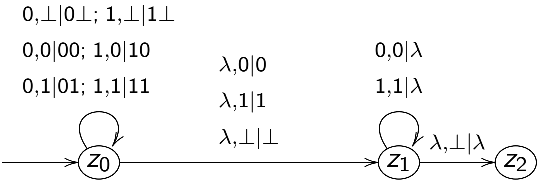
$$L := \{ww^{rev} \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Korrektheitsbeweis



$L := \{ww^{rev} \mid w \in \{0,1\}^*\} \subseteq N(A).$

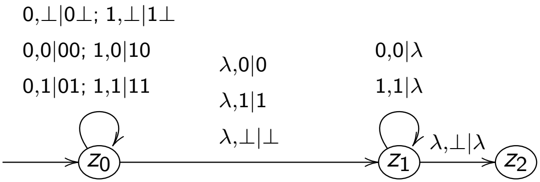
Korrektheitsbeweis



$L := \{ww^{rev} \mid w \in \{0,1\}^*\} \subseteq N(A)$. Sei $v = ww^{rev} \in L$. Nach Konstruktion

- wird in z_0 für jede vom Eingabeband gelesene 0, eine 0 auf den Keller geschrieben; ebenso für die 1;
- in z_1 kann eine 0 nur vom Eingabeband gelesen werden, wenn sie auch auf dem Keller steht (und dann gelöscht wird); ebenso für die 1;

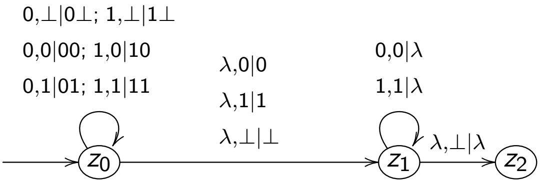
Korrektheitsbeweis



$L := \{ww^{rev} \mid w \in \{0,1\}^*\} \subseteq N(A)$. Sei $v = ww^{rev} \in L$. Nach Konstruktion

- wird in z_0 für jede vom Eingabeband gelesene 0, eine 0 auf den Keller geschrieben; ebenso für die 1;
- in z_1 kann eine 0 nur vom Eingabeband gelesen werden, wenn sie auch auf dem Keller steht (und dann gelöscht wird); ebenso für die 1;

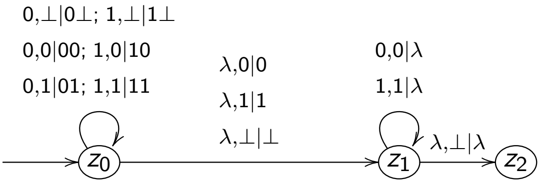
Korrektheitsbeweis



$L := \{ww^{rev} \mid w \in \{0,1\}^*\} \subseteq N(A)$. Sei $v = ww^{rev} \in L$. Nach Konstruktion

- wird in z_0 für jede vom Eingabeband gelesene 0, eine 0 auf den Keller geschrieben; ebenso für die 1;
- in z_1 kann eine 0 nur vom Eingabeband gelesen werden, wenn sie auch auf dem Keller steht (und dann gelöscht wird); ebenso für die 1;

Korrektheitsbeweis



Damit folgt also nach Konstruktion:

$$
\begin{aligned}
(z_0, ww^{rev}, \perp) &\vdash \ldots \vdash (z_0, w^{rev}, w^{rev}\perp) \\
&\vdash (z_1, w^{rev}, w^{rev}, \perp) \vdash \ldots \vdash (z_1, \lambda, \perp) \\
&\vdash (z_2, \lambda, \lambda)
\end{aligned}
$$

Also $v = ww^{rev} \in N(A)$.

Korrektheitsbeweis

Die Rückrichtung ist schwieriger. Wir beobachten zunächst:

- z_2 kann nur von z_1 aus erreicht werden und nur, wenn auf dem Keller nur noch $\perp$ ist. Dies ist die einzige Möglichkeit den Keller zu leeren.
- In z_2 kann nichts mehr gelesen werden. Das Eingabewort muss also schon in z_1 zu Ende gelesen worden sein.
- Jede akzeptierende Rechnung startet in z_0, gelangt von dort nach z_1 und kehrt von dort nie nach z_0 zurück.

Es genügt also Bedingungen für

$$(z_0, w, \perp) \vdash^* (z_1, \lambda, \perp)$$

zu finden. Dies sind dann genau die Wörter, die akzeptiert werden!

Korrektheitsbeweis

Die Rückrichtung ist schwieriger. Wir beobachten zunächst:

- z_2 kann nur von z_1 aus erreicht werden und nur, wenn auf dem Keller nur noch $\perp$ ist. Dies ist die einzige Möglichkeit den Keller zu leeren.
- In z_2 kann nichts mehr gelesen werden. Das Eingabewort muss also schon in z_1 zu Ende gelesen worden sein.
- Jede akzeptierende Rechnung startet in z_0, gelangt von dort nach z_1 und kehrt von dort nie nach z_0 zurück.

Es genügt also Bedingungen für

$$(z_0, w, \perp) \vdash^* (z_1, \lambda, \perp)$$

zu finden. Dies sind dann genau die Wörter, die akzeptiert werden!

Korrektheitsbeweis

Die Rückrichtung ist schwieriger. Wir beobachten zunächst:

- z_2 kann nur von z_1 aus erreicht werden und nur, wenn auf dem Keller nur noch $\perp$ ist. Dies ist die einzige Möglichkeit den Keller zu leeren.
- In z_2 kann nichts mehr gelesen werden. Das Eingabewort muss also schon in z_1 zu Ende gelesen worden sein.
- Jede akzeptierende Rechnung startet in z_0, gelangt von dort nach z_1 und kehrt von dort nie nach z_0 zurück.

Es genügt also Bedingungen für

$$(z_0, w, \perp) \vdash^* (z_1, \lambda, \perp)$$

zu finden. Dies sind dann genau die Wörter, die akzeptiert werden!

Korrektheitsbeweis

Die Rückrichtung ist schwieriger. Wir beobachten zunächst:

- z_2 kann nur von z_1 aus erreicht werden und nur, wenn auf dem Keller nur noch $\perp$ ist. Dies ist die einzige Möglichkeit den Keller zu leeren.
- In z_2 kann nichts mehr gelesen werden. Das Eingabewort muss also schon in z_1 zu Ende gelesen worden sein.
- Jede akzeptierende Rechnung startet in z_0, gelangt von dort nach z_1 und kehrt von dort nie nach z_0 zurück.

Es genügt also Bedingungen für

$$(z_0, w, \perp) \vdash^* (z_1, \lambda, \perp)$$

zu finden. Dies sind dann genau die Wörter, die akzeptiert werden!

Korrektheitsbeweis

Die Rückrichtung ist schwieriger. Wir beobachten zunächst:

- z_2 kann nur von z_1 aus erreicht werden und nur, wenn auf dem Keller nur noch $\perp$ ist. Dies ist die einzige Möglichkeit den Keller zu leeren.
- In z_2 kann nichts mehr gelesen werden. Das Eingabewort muss also schon in z_1 zu Ende gelesen worden sein.
- Jede akzeptierende Rechnung startet in z_0, gelangt von dort nach z_1 und kehrt von dort nie nach z_0 zurück.

Es genügt also Bedingungen für

$$(z_0, w, \perp) \vdash^* (z_1, \lambda, \perp)$$

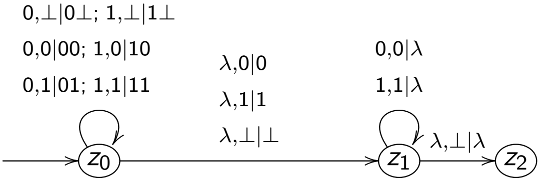
zu finden. Dies sind dann genau die Wörter, die akzeptiert werden!

Die Behauptung

Wir zeigen eine etwas allgemeinere Behauptung **mittels Induktion über die Wortlänge**:

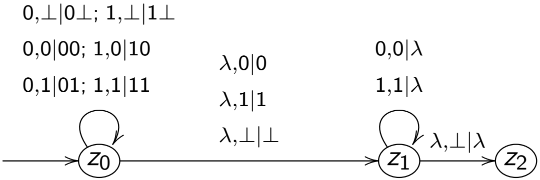
Wenn $(z_0, x, V) \vdash^* (z_1, \lambda, V)$ (für beliebiges V), dann ist $x = ww^{rev}$ für ein $w \in \{0, 1\}^*$

Korrektheitsbeweis



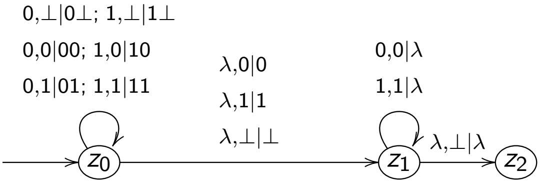
(Z.Z. Wenn $(z_0, x, V) \vdash^* (z_1, \lambda, V)$, dann $x = ww^{rev}$.)
Induktionsanfang: Sei $x = \lambda$. Dann ist x von der gewünschten Form und wir sind fertig (unabhängig davon, ob der "wenn"-Teil gilt oder nicht).

Korrektheitsbeweis



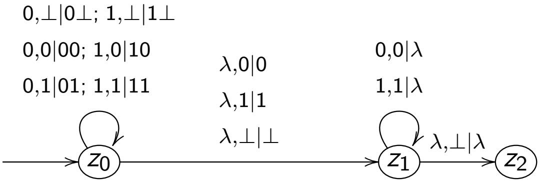
(Z.Z. Wenn $(z_0, x, V) \vdash^* (z_1, \lambda, V)$, dann $x = ww^{rev}$.)
Induktionsanfang: Sei $x = \lambda$. Dann ist x von der gewünschten Form und wir sind fertig (unabhängig davon, ob der "wenn"-Teil gilt oder nicht).

Korrektheitsbeweis



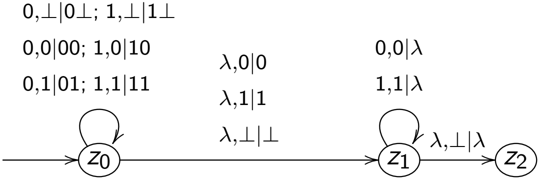
Induktionsannahme: Gelte die Behauptung für Worte der Länge bis zu $n-1$, d.h. für jedes Wort x der Länge bis zu $n-1$ gilt, wenn $(z_0, x, V) \vdash^* (z_1, \lambda, V)$ für ein V, dann ist $x = ww^{rev}$ für ein $w \in \{0,1\}^*$

Korrektheitsbeweis



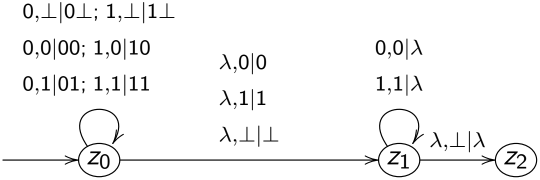
Induktionsannahme: Gelte die Behauptung für Worte der Länge bis zu $n-1$, d.h. für jedes Wort x der Länge bis zu $n-1$ gilt, wenn $(z_0, x, V) \vdash^* (z_1, \lambda, V)$ für ein V, dann ist $x = ww^{rev}$ für ein $w \in \{0,1\}^*$

Korrektheitsbeweis



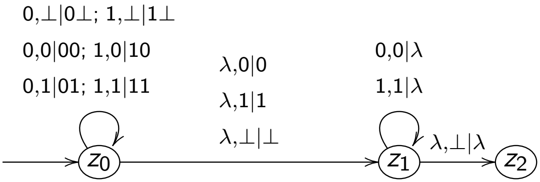
Induktionsschritt: Sei $x = a_1 \dots a_n$ ein Wort der Länge n mit $(z_0, x, V) \vdash^* (z_1, \lambda, V)$ für ein V. Wir wollen $x = ww^{rev}$ zeigen. Zunächst kann der erste Schritt nicht $(z_0, x, V) \vdash (z_1, x, V)$ sein, da in z_1 nur Buchstaben vom Keller gelöscht werden können und wegen $|x| \geq 1$ auf jeden Fall mindestens ein Buchstabe gelöscht werden würde. Dann wäre aber nicht mehr V auf dem Keller!

Korrektheitsbeweis



Induktionsschritt: Sei $x = a_1 \dots a_n$ ein Wort der Länge n mit $(z_0, x, V) \vdash^* (z_1, \lambda, V)$ für ein V. Wir wollen $x = ww^{rev}$ zeigen. Zunächst kann der erste Schritt nicht $(z_0, x, V) \vdash (z_1, x, V)$ sein, da in z_1 nur Buchstaben vom Keller gelöscht werden können und wegen $|x| \geq 1$ auf jeden Fall mindestens ein Buchstabe gelöscht werden würde. Dann wäre aber nicht mehr V auf dem Keller!

Korrektheitsbeweis



Induktionsschritt: Sei $x = a_1 \dots a_n$ ein Wort der Länge n mit $(z_0, x, V) \vdash^* (z_1, \lambda, V)$ für ein V. Wir wollen $x = ww^{rev}$ zeigen. Zunächst kann der erste Schritt nicht $(z_0, x, V) \vdash (z_1, x, V)$ sein, da in z_1 nur Buchstaben vom Keller gelöscht werden können und wegen $|x| \geq 1$ auf jeden Fall mindestens ein Buchstabe gelöscht werden würde. Dann wäre aber nicht mehr V auf dem Keller!

Korrektheitsbeweis

Der erste Schritt ist also $(z_0, a_1 a_2 \dots a_n, V) \vdash (z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V)$. Da wir ferner das a_1 wieder vom Keller löschen müssen und dies nur in z_1 geschehen kann, muss der letzte Schritt $(z_1, a_n, a_1 V) \vdash (z_1, \lambda, V)$ sein. Hieraus folgt zunächst $a_n = a_1$ (wegen der Übergänge an z_1). Außerdem wissen wir, da ja nach Voraussetzung $(z_0, x, V) \vdash^* (z_1, \lambda, V)$ gilt, dass nun insgesamt

$$(z_0, a_1 a_2 \dots a_n, V) \vdash (z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V) \vdash^* (z_1, a_n, a_1 V) \vdash (z_1, \lambda, V)$$

also insb.

$$(z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V) \vdash^* (z_1, a_n, a_1 V)$$

Da das a_n von der Eingabe nicht benutzt wird ist dies gleichbedeutend mit

$$(z_0, a_2 \dots a_{n-1}, a_1 V) \vdash^* (z_1, \lambda, a_1 V)$$

Korrektheitsbeweis

Der erste Schritt ist also $(z_0, a_1 a_2 \dots a_n, V) \vdash (z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V)$. Da wir ferner das a_1 wieder vom Keller löschen müssen und dies nur in z_1 geschehen kann, muss der letzte Schritt $(z_1, a_n, a_1 V) \vdash (z_1, \lambda, V)$ sein.
Hieraus folgt zunächst $a_n = a_1$ (wegen der Übergänge an z_1). Außerdem wissen wir, da ja nach Voraussetzung $(z_0, x, V) \vdash^* (z_1, \lambda, V)$ gilt, dass nun insgesamt

$$(z_0, a_1 a_2 \dots a_n, V) \vdash (z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V) \vdash^* (z_1, a_n, a_1 V) \vdash (z_1, \lambda, V)$$

also insb.

$$(z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V) \vdash^* (z_1, a_n, a_1 V)$$

Da das a_n von der Eingabe nicht benutzt wird ist dies gleichbedeutend mit

$$(z_0, a_2 \dots a_{n-1}, a_1 V) \vdash^* (z_1, \lambda, a_1 V)$$

Korrektheitsbeweis

Der erste Schritt ist also $(z_0, a_1 a_2 \dots a_n, V) \vdash (z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V)$. Da wir ferner das a_1 wieder vom Keller löschen müssen und dies nur in z_1 geschehen kann, muss der letzte Schritt $(z_1, a_n, a_1 V) \vdash (z_1, \lambda, V)$ sein. Hieraus folgt zunächst $a_n = a_1$ (wegen der Übergänge an z_1). Außerdem wissen wir, da ja nach Voraussetzung $(z_0, x, V) \vdash^* (z_1, \lambda, V)$ gilt, dass nun insgesamt

$$(z_0, a_1 a_2 \dots a_n, V) \vdash (z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V) \vdash^* (z_1, a_n, a_1 V) \vdash (z_1, \lambda, V)$$

also insb.

$$(z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V) \vdash^* (z_1, a_n, a_1 V)$$

Da das a_n von der Eingabe nicht benutzt wird ist dies gleichbedeutend mit

$$(z_0, a_2 \dots a_{n-1}, a_1 V) \vdash^* (z_1, \lambda, a_1 V)$$

Korrektheitsbeweis

Der erste Schritt ist also $(z_0, a_1 a_2 \ldots a_n, V) \vdash (z_0, a_2 \ldots a_n, a_1 V)$. Da wir ferner das a_1 wieder vom Keller löschen müssen und dies nur in z_1 geschehen kann, muss der letzte Schritt $(z_1, a_n, a_1 V) \vdash (z_1, \lambda, V)$ sein. Hieraus folgt zunächst $a_n = a_1$ (wegen der Übergänge an z_1). Außerdem wissen wir, da ja nach Voraussetzung $(z_0, x, V) \vdash^* (z_1, \lambda, V)$ gilt, dass nun insgesamt

$$(z_0, a_1 a_2 \ldots a_n, V) \vdash (z_0, a_2 \ldots a_n, a_1 V) \vdash^* (z_1, a_n, a_1 V) \vdash (z_1, \lambda, V)$$

also insb.

$$(z_0, a_2 \ldots a_n, a_1 V) \vdash^* (z_1, a_n, a_1 V)$$

Da das a_n von der Eingabe nicht benutzt wird ist dies gleichbedeutend mit

$$(z_0, a_2 \ldots a_{n-1}, a_1 V) \vdash^* (z_1, \lambda, a_1 V)$$

Korrektheitsbeweis

Der erste Schritt ist also $(z_0, a_1 a_2 \dots a_n, V) \vdash (z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V)$. Da wir ferner das a_1 wieder vom Keller löschen müssen und dies nur in z_1 geschehen kann, muss der letzte Schritt $(z_1, a_n, a_1 V) \vdash (z_1, \lambda, V)$ sein. Hieraus folgt zunächst $a_n = a_1$ (wegen der Übergänge an z_1). Außerdem wissen wir, da ja nach Voraussetzung $(z_0, x, V) \vdash^* (z_1, \lambda, V)$ gilt, dass nun insgesamt

$$(z_0, a_1 a_2 \dots a_n, V) \vdash (z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V) \vdash^* (z_1, a_n, a_1 V) \vdash (z_1, \lambda, V)$$

also insb.

$$(z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V) \vdash^* (z_1, a_n, a_1 V)$$

Da das a_n von der Eingabe nicht benutzt wird ist dies gleichbedeutend mit

$$(z_0, a_2 \dots a_{n-1}, a_1 V) \vdash^* (z_1, \lambda, a_1 V)$$

Korrektheitsbeweis

Der erste Schritt ist also $(z_0, a_1 a_2 \dots a_n, V) \vdash (z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V)$. Da wir ferner das a_1 wieder vom Keller löschen müssen und dies nur in z_1 geschehen kann, muss der letzte Schritt $(z_1, a_n, a_1 V) \vdash (z_1, \lambda, V)$ sein. Hieraus folgt zunächst $a_n = a_1$ (wegen der Übergänge an z_1). Außerdem wissen wir, da ja nach Voraussetzung $(z_0, x, V) \vdash^* (z_1, \lambda, V)$ gilt, dass nun insgesamt

$$(z_0, a_1 a_2 \dots a_n, V) \vdash (z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V) \vdash^* (z_1, a_n, a_1 V) \vdash (z_1, \lambda, V)$$

also insb.

$$(z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V) \vdash^* (z_1, a_n, a_1 V)$$

Da das a_n von der Eingabe nicht benutzt wird ist dies gleichbedeutend mit

$$(z_0, a_2 \dots a_{n-1}, a_1 V) \vdash^* (z_1, \lambda, a_1 V)$$

Korrektheitsbeweis

Der erste Schritt ist also $(z_0, a_1 a_2 \dots a_n, V) \vdash (z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V)$. Da wir ferner das a_1 wieder vom Keller löschen müssen und dies nur in z_1 geschehen kann, muss der letzte Schritt $(z_1, a_n, a_1 V) \vdash (z_1, \lambda, V)$ sein. Hieraus folgt zunächst $a_n = a_1$ (wegen der Übergänge an z_1). Außerdem wissen wir, da ja nach Voraussetzung $(z_0, x, V) \vdash^* (z_1, \lambda, V)$ gilt, dass nun insgesamt

$$(z_0, a_1 a_2 \dots a_n, V) \vdash (z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V) \vdash^* (z_1, a_n, a_1 V) \vdash (z_1, \lambda, V)$$

also insb.

$$(z_0, a_2 \dots a_n, a_1 V) \vdash^* (z_1, a_n, a_1 V)$$

Da das a_n von der Eingabe nicht benutzt wird ist dies gleichbedeutend mit

$$(z_0, a_2 \dots a_{n-1}, a_1 V) \vdash^* (z_1, \lambda, a_1 V)$$

Korrektheitsbeweis

$$(z_0, a_2 \dots a_{n-1}, a_1 V) \vdash^* (z_1, \lambda, a_1 V)$$

Nun ist aber $a_2 \dots a_{n-1}$ ein Wort der Länge $n-2 < n$, so dass die Induktionsannahme anwendbar ist! Es gibt also ein v derart, dass $a_2 \dots a_{n-1} = vv^{rev}$. Da ferner $a_1 = a_n$ gilt, haben wir mit $w = a_1 v$ $a_1 \dots a_n = a_1 vv^{rev} a_n = a_1 vv^{rev} a_1 = ww^{rev}$ und sind fertig.

Korrektheitsbeweis

$$(z_0, a_2 \dots a_{n-1}, a_1 V) \vdash^* (z_1, \lambda, a_1 V)$$

Nun ist aber $a_2 \dots a_{n-1}$ ein Wort der Länge $n - 2 < n$, so dass die Induktionsannahme anwendbar ist! Es gibt also ein v derart, dass $a_2 \dots a_{n-1} = vv^{rev}$. Da ferner $a_1 = a_n$ gilt, haben wir mit $w = a_1 v$ $a_1 \dots a_n = a_1 vv^{rev} a_n = a_1 vv^{rev} a_1 = ww^{rev}$ und sind fertig.

Die Technik

Zur rev-Technik

Es gilt ganz allgemein, dass wenn man ein Wort w von der Eingabe liest und dieses Buchstabe für Buchstabe auf den Keller schreibt. Auf dem Keller genau w^{rev} liegt. Dies kann man ggf. auch in anderen Kontexten benutzen...

Zur Zähltechnik

Letztes Mal hatten wir schon die Technik, den Keller als (unären) Zähler zu benutzen.

Die Technik

Zur rev-Technik

Es gilt ganz allgemein, dass wenn man ein Wort w von der Eingabe liest und dieses Buchstabe für Buchstabe auf den Keller schreibt. Auf dem Keller genau w^{rev} liegt. Dies kann man ggf. auch in anderen Kontexten benutzen...

Zur Zähltechnik

Letztes Mal hatten wir schon die Technik, den Keller als (unären) Zähler zu benutzen.

Zusammenfassung

Wir haben gestern und heute

- PDAs / Kellerautomaten kennengelernt
- Wieder die Begriffe wie Konfiguration, Rechnung, akzeptierte Sprache usw. eingeführt

Dabei

- können PDAs mit leerem Keller oder mit Endzustand akzeptieren.
- Beide Akzeptanzbedingungen sind äquivalent (ohne Beweis).

Wir haben

- einen PDA für $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gebaut
  - und dabei den Keller als Zähler benutzt (Technik 1)
- einen PDA für $L = \{ww^{rev} \mid w \in \{0,1\}^*\}$ gebaut
  - und dabei den Keller als Speicher benutzt (Technik 2)

Zusammenfassung

Wir haben gestern und heute

- PDAs / Kellerautomaten kennengelernt
- Wieder die Begriffe wie Konfiguration, Rechnung, akzeptierte Sprache usw. eingeführt

Dabei

- können PDAs mit leerem Keller oder mit Endzustand akzeptieren.
- Beide Akzeptanzbedingungen sind äquivalent (ohne Beweis).

Wir haben

- einen PDA für $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gebaut
  - und dabei den Keller als Zähler benutzt (Technik 1)
- einen PDA für $L = \{ww^{rev} \mid w \in \{0,1\}^*\}$ gebaut
  - und dabei den Keller als Speicher benutzt (Technik 2)

Zusammenfassung

Wir haben gestern und heute

- PDAs / Kellerautomaten kennengelernt
- Wieder die Begriffe wie Konfiguration, Rechnung, akzeptierte Sprache usw. eingeführt

Dabei

- können PDAs mit leerem Keller oder mit Endzustand akzeptieren.
- Beide Akzeptanzbedingungen sind äquivalent (ohne Beweis).

Wir haben

- einen PDA für $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gebaut
  - und dabei den Keller als Zähler benutzt (Technik 1)
- einen PDA für $L = \{ww^{rev} \mid w \in \{0,1\}^*\}$ gebaut
  - und dabei den Keller als Speicher benutzt (Technik 2)

Zum Pumping Lemma hin...

Wir haben jetzt einen PDA für $L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, *aber* bisher wissen wir nicht mit Sicherheit, dass es hierfür keinen DFA gibt!

Können wir vielleicht eine Eigenschaft X finden, die alle regulären Sprachen haben müssen?

Dann könnten wir vielleicht nachweisen, dass L oben die Eigenschaft X nicht hat - und dann kann L nicht regulär sein!

Zum Pumping Lemma hin...

Wir haben jetzt einen PDA für $L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, *aber* bisher wissen wir nicht mit Sicherheit, dass es hierfür keinen DFA gibt!

Können wir vielleicht eine Eigenschaft X finden, die alle regulären Sprachen haben müssen?

Dann könnten wir vielleicht nachweisen, dass L oben die Eigenschaft X nicht hat - und dann kann L nicht regulär sein!

Zum Pumping Lemma hin...

Wir haben jetzt einen PDA für $L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, *aber* bisher wissen wir nicht mit Sicherheit, dass es hierfür keinen DFA gibt!

Können wir vielleicht eine Eigenschaft X finden, die alle regulären Sprachen haben müssen?

Dann könnten wir vielleicht nachweisen, dass L oben die Eigenschaft X nicht hat - und dann kann L nicht regulär sein!

Zum Pumping Lemma hin...

Wir wissen von regulären Sprachen, dass

Zum Pumping Lemma hin...

Wir wissen von regulären Sprachen, dass

- sie von endlichen Automaten akzeptiert werden.

Von diesen wissen wir, dass

- sie endlich viele Zustände haben.

Zum Pumping Lemma hin...

- Wörter, die akzeptiert werden und
- die mehr Buchstaben haben als der Automat Zustände,
- müssen dann Schleifen im Automaten durchlaufen!
- Diese Schleifen könnte man öfter entlang gehen!
- Und damit neue Wörter erzeugen, die auch in der Sprache sein müssen!

Bei $a^n b^n$ wird das aber nicht gehen! Man überlege sich:

- Wenn es einen Automat gibt mit k Zuständen für L
- betrachtet man $a^k b^k$
- Es müsste eine Schleife geben
- Aber welche sollte das sein, so dass man sie zweimal entlang gehen kann und trotzdem ein Wort der Form $a^j b^j$ herauskommt?

Zum Pumping Lemma hin...

- Wörter, die akzeptiert werden und
- die mehr Buchstaben haben als der Automat Zustände,
- müssen dann Schleifen im Automaten durchlaufen!
- Diese Schleifen könnte man öfter entlang gehen!
- Und damit neue Wörter erzeugen, die auch in der Sprache sein müssen!

Bei $a^n b^n$ wird das aber nicht gehen! Man überlege sich:

- Wenn es einen Automat gibt mit k Zuständen für L
- betrachtet man $a^k b^k$
- Es müsste eine Schleife geben
- Aber welche sollte das sein, so dass man sie zweimal entlang gehen kann und trotzdem ein Wort der Form $a^j b^j$ herauskommt?

Das Pumping Lemma

Wir werden jetzt die oben skizzierte Eigenschaft der regulären Sprachen genauer fassen und so das **Pumping Lemma** formulieren.

Dies werden wir dann nutzen, um tatsächlich zu zeigen, dass $L = \{a^n b^n\}$ nicht regulär ist!

Das Pumping Lemma - Das Lemma

Lemma

Sei $L \in REG$ eine reguläre Sprache. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in die Form $z = uvw$ zerlegt werden kann, wobei

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| \geq 1$
3. $uv^iw \in L$ *für jedes* $i \in \mathbb{N}$ *(inkl. der* 0*)*

(Äquivalent zur letzten Aussage ist die Aussage $\{u\}\{v\}^*\{w\} \subseteq L$*.)*

Wichtige Anmerkung

Das v kann (mit $i = 0$) auch ganz weggelassen werden, d.h. die dritte Bedingung fordert, dass nicht nur $uvw, uvvw, uvvvw$ usw. in L sein müssen, sondern auch $uv^0w = u\lambda w = uw$. Dies ist manchmal die einzige Möglichkeit einen Widerspruch herzustellen!

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

Sei L regulär. Dann gibt es einen vollständigen DFA A mit $L(A) = L$. Sei n die Anzahl der Zustände von A. Wir betrachten nun ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (gibt es kein solches z ist nichts zu zeigen).

- Wir legen A das Wort z vor.
- A beginnt im Startzustand z_0
- Da A vollständig ist und z akzeptiert wird, kann z gelesen werden.
- Da z aus mindestens n Buchstaben besteht, finden mindestens n Zustandsübergänge statt.
- D.h. es werden mindestens $n + 1$ Zustände besucht.
- Da es nur n Zustände gibt, muss mindestens ein Zustand doppelt auftreten!

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

Sei L regulär. Dann gibt es einen vollständigen DFA A mit $L(A) = L$. Sei n die Anzahl der Zustände von A. Wir betrachten nun ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (gibt es kein solches z ist nichts zu zeigen).

- Wir legen A das Wort z vor.
- A beginnt im Startzustand z_0
- Da A vollständig ist und z akzeptiert wird, kann z gelesen werden.
- Da z aus mindestens n Buchstaben besteht, finden mindestens n Zustandsübergänge statt.
- D.h. es werden mindestens $n + 1$ Zustände besucht.
- Da es nur n Zustände gibt, muss mindestens ein Zustand doppelt auftreten!

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

Sei L regulär. Dann gibt es einen vollständigen DFA A mit $L(A) = L$. Sei n die Anzahl der Zustände von A. Wir betrachten nun ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (gibt es kein solches z ist nichts zu zeigen).

- Wir legen A das Wort z vor.
- A beginnt im Startzustand z_0
- Da A vollständig ist und z akzeptiert wird, kann z gelesen werden.
- Da z aus mindestens n Buchstaben besteht, finden mindestens n Zustandsübergänge statt.
- D.h. es werden mindestens $n+1$ Zustände besucht.
- Da es nur n Zustände gibt, muss mindestens ein Zustand doppelt auftreten!

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

Sei L regulär. Dann gibt es einen vollständigen DFA A mit $L(A) = L$. Sei n die Anzahl der Zustände von A. Wir betrachten nun ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (gibt es kein solches z ist nichts zu zeigen).

- Wir legen A das Wort z vor.
- A beginnt im Startzustand z_0
- Da A vollständig ist und z akzeptiert wird, kann z gelesen werden.
- Da z aus mindestens n Buchstaben besteht, finden mindestens n Zustandsübergänge statt.
- D.h. es werden mindestens $n + 1$ Zustände besucht.
- Da es nur n Zustände gibt, muss mindestens ein Zustand doppelt auftreten!

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

Sei L regulär. Dann gibt es einen vollständigen DFA A mit $L(A) = L$. Sei n die Anzahl der Zustände von A. Wir betrachten nun ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (gibt es kein solches z ist nichts zu zeigen).

- Wir legen A das Wort z vor.
- A beginnt im Startzustand z_0
- Da A vollständig ist und z akzeptiert wird, kann z gelesen werden.
- Da z aus mindestens n Buchstaben besteht, finden mindestens n Zustandsübergänge statt.
- D.h. es werden mindestens $n + 1$ Zustände besucht.
- Da es nur n Zustände gibt, muss mindestens ein Zustand doppelt auftreten!

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

Sei L regulär. Dann gibt es einen vollständigen DFA A mit $L(A) = L$. Sei n die Anzahl der Zustände von A. Wir betrachten nun ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (gibt es kein solches z ist nichts zu zeigen).

- Wir legen A das Wort z vor.
- A beginnt im Startzustand z_0
- Da A vollständig ist und z akzeptiert wird, kann z gelesen werden.
- Da z aus mindestens n Buchstaben besteht, finden mindestens n Zustandsübergänge statt.
- D.h. es werden mindestens $n + 1$ Zustände besucht.
- Da es nur n Zustände gibt, muss mindestens ein Zustand doppelt auftreten!

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

Sei L regulär. Dann gibt es einen vollständigen DFA A mit $L(A) = L$. Sei n die Anzahl der Zustände von A. Wir betrachten nun ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (gibt es kein solches z ist nichts zu zeigen).

- Wir legen A das Wort z vor.
- A beginnt im Startzustand z_0
- Da A vollständig ist und z akzeptiert wird, kann z gelesen werden.
- Da z aus mindestens n Buchstaben besteht, finden mindestens n Zustandsübergänge statt.
- D.h. es werden mindestens $n + 1$ Zustände besucht.
- Da es nur n Zustände gibt, muss mindestens ein Zustand doppelt auftreten!

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

Sei die Zustandsfolge vom Startzustand z_0 zu einem Endzustand z_e, die beim Lesen von z besucht wird durch $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots, z_e$ gegeben.

- Seien z_i und z_j ($i \neq j$ und $i < j$) in dieser Folge gleich und außerdem z_j der erste Zustand, der ein zweites Mal auftritt!
- Nun ist $j \leq n$ (denn von z_0 bis z_n sind es bereits $n + 1$ Zustände; einer davon muss doppelt auftreten!)
- und $j - i \geq 1$
- Sei u das Wort das von z_0 bis z_i gelesen wird
- v das Wort das von z_i bis z_j gelesen wird
- und w das Wort von z_j bis z_e

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

Sei die Zustandsfolge vom Startzustand z_0 zu einem Endzustand z_e, die beim Lesen von z besucht wird durch $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots, z_e$ gegeben.

- Seien z_i und z_j ($i \neq j$ und $i < j$) in dieser Folge gleich und außerdem z_j der erste Zustand, der ein zweites Mal auftritt!
- Nun ist $j \leq n$ (denn von z_0 bis z_n sind es bereits $n + 1$ Zustände; einer davon muss doppelt auftreten!)
- und $j - i \geq 1$
- Sei u das Wort das von z_0 bis z_i gelesen wird
- v das Wort das von z_i bis z_j gelesen wird
- und w das Wort von z_j bis z_e

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

Sei die Zustandsfolge vom Startzustand z_0 zu einem Endzustand z_e, die beim Lesen von z besucht wird durch $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots, z_e$ gegeben.

- Seien z_i und z_j ($i \neq j$ und $i < j$) in dieser Folge gleich und außerdem z_j der erste Zustand, der ein zweites Mal auftritt!
- Nun ist $j \leq n$ (denn von z_0 bis z_n sind es bereits $n + 1$ Zustände; einer davon muss doppelt auftreten!)
- und $j - i \geq 1$
- Sei u das Wort das von z_0 bis z_i gelesen wird
- v das Wort das von z_i bis z_j gelesen wird
- und w das Wort von z_j bis z_e

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

Sei die Zustandsfolge vom Startzustand z_0 zu einem Endzustand z_e, die beim Lesen von z besucht wird durch $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots, z_e$ gegeben.

- Seien z_i und z_j ($i \neq j$ und $i < j$) in dieser Folge gleich und außerdem z_j der erste Zustand, der ein zweites Mal auftritt!
- Nun ist $j \leq n$ (denn von z_0 bis z_n sind es bereits $n + 1$ Zustände; einer davon muss doppelt auftreten!)
- und $j - i \geq 1$
- Sei u das Wort das von z_0 bis z_i gelesen wird
- v das Wort das von z_i bis z_j gelesen wird
- und w das Wort von z_j bis z_e

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

Sei die Zustandsfolge vom Startzustand z_0 zu einem Endzustand z_e, die beim Lesen von z besucht wird durch $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots, z_e$ gegeben.

- Seien z_i und z_j ($i \neq j$ und $i < j$) in dieser Folge gleich und außerdem z_j der erste Zustand, der ein zweites Mal auftritt!
- Nun ist $j \leq n$ (denn von z_0 bis z_n sind es bereits $n + 1$ Zustände; einer davon muss doppelt auftreten!)
- und $j - i \geq 1$
- Sei u das Wort das von z_0 bis z_i gelesen wird
- v das Wort das von z_i bis z_j gelesen wird
- und w das Wort von z_j bis z_e

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

Sei die Zustandsfolge vom Startzustand z_0 zu einem Endzustand z_e, die beim Lesen von z besucht wird durch $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots, z_e$ gegeben.

- Seien z_i und z_j ($i \neq j$ und $i < j$) in dieser Folge gleich und außerdem z_j der erste Zustand, der ein zweites Mal auftritt!
- Nun ist $j \leq n$ (denn von z_0 bis z_n sind es bereits $n + 1$ Zustände; einer davon muss doppelt auftreten!)
- und $j - i \geq 1$
- Sei u das Wort das von z_0 bis z_i gelesen wird
- v das Wort das von z_i bis z_j gelesen wird
- und w das Wort von z_j bis z_e

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

Sei die Zustandsfolge vom Startzustand z_0 zu einem Endzustand z_e, die beim Lesen von z besucht wird durch $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots, z_e$ gegeben.

- Seien z_i und z_j ($i \neq j$ und $i < j$) in dieser Folge gleich und außerdem z_j der erste Zustand, der ein zweites Mal auftritt!
- Nun ist $j \leq n$ (denn von z_0 bis z_n sind es bereits $n + 1$ Zustände; einer davon muss doppelt auftreten!)
- und $j - i \geq 1$
- Sei u das Wort das von z_0 bis z_i gelesen wird
- v das Wort das von z_i bis z_j gelesen wird
- und w das Wort von z_j bis z_e

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

- Sei u das Wort das von z_0 bis z_i gelesen wird
- v das Wort das von z_i bis z_j gelesen wird
- und w das Wort von z_j bis z_e

Es ist nun $|uv| \leq n$ (wegen $j \leq n$ oben) und $|v| \geq 1$ (wegen $j - i \geq 1$ oben). Ferner kann die Schleife von z_i nach z_j (man beachte: $i \neq j$, aber $z_i = z_j$!) beliebig oft durchlaufen werden und trotzdem kann dann von z_j aus mit w der Endzustand z_n erreicht werden. Daraus folgt, dass auch uv^iw für alle $i \geq 0$ akzeptiert werden. Und wir sind fertig! □

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

- Sei u das Wort das von z_0 bis z_i gelesen wird
- v das Wort das von z_i bis z_j gelesen wird
- und w das Wort von z_j bis z_e

Es ist nun $|uv| \leq n$ (wegen $j \leq n$ oben) und $|v| \geq 1$ (wegen $j - i \geq 1$ oben). Ferner kann die Schleife von z_i nach z_j (man beachte: $i \neq j$, aber $z_i = z_j$!) beliebig oft durchlaufen werden und trotzdem kann dann von z_j aus mit w der Endzustand z_n erreicht werden. Daraus folgt, dass auch uv^iw für alle $i \geq 0$ akzeptiert werden. Und wir sind fertig! □

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

- Sei u das Wort das von z_0 bis z_i gelesen wird
- v das Wort das von z_i bis z_j gelesen wird
- und w das Wort von z_j bis z_e

Es ist nun $|uv| \leq n$ (wegen $j \leq n$ oben) und $|v| \geq 1$ (wegen $j - i \geq 1$ oben). Ferner kann die Schleife von z_i nach z_j (man beachte: $i \neq j$, aber $z_i = z_j$!) beliebig oft durchlaufen werden und trotzdem kann dann von z_j aus mit w der Endzustand z_n erreicht werden. Daraus folgt, dass auch uv^iw für alle $i \geq 0$ akzeptiert werden. Und wir sind fertig! □

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

- Sei u das Wort das von z_0 bis z_i gelesen wird
- v das Wort das von z_i bis z_j gelesen wird
- und w das Wort von z_j bis z_e

Es ist nun $|uv| \leq n$ (wegen $j \leq n$ oben) und $|v| \geq 1$ (wegen $j - i \geq 1$ oben). Ferner kann die Schleife von z_i nach z_j (man beachte: $i \neq j$, aber $z_i = z_j$!) beliebig oft durchlaufen werden und trotzdem kann dann von z_j aus mit w der Endzustand z_n erreicht werden. Daraus folgt, dass auch uv^iw für alle $i \geq 0$ akzeptiert werden. Und wir sind fertig! $\square$

Das Pumping Lemma - Der Beweis

Beweis.

- Sei u das Wort das von z_0 bis z_i gelesen wird
- v das Wort das von z_i bis z_j gelesen wird
- und w das Wort von z_j bis z_e

Es ist nun $|uv| \leq n$ (wegen $j \leq n$ oben) und $|v| \geq 1$ (wegen $j - i \geq 1$ oben). Ferner kann die Schleife von z_i nach z_j (man beachte: $i \neq j$, aber $z_i = z_j$!) beliebig oft durchlaufen werden und trotzdem kann dann von z_j aus mit w der Endzustand z_n erreicht werden. Daraus folgt, dass auch $uv^i w$ für alle $i \geq 0$ akzeptiert werden. Und wir sind fertig! □

Das Pumping Lemma - Das Lemma

Lemma

Sei $L \in REG$ eine reguläre Sprache. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in die Form $z = uvw$ zerlegt werden kann, wobei

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| \geq 1$
3. $uv^i w \in L$ *für jedes* $i \in \mathbb{N}$ *(inkl. der* 0*)*

(Äquivalent zur letzten Aussage ist die Aussage $\{u\}\{v\}^*\{w\} \subseteq L$*.)*

Wichtige Anmerkung

Das v kann (mit $i = 0$) auch ganz weggelassen werden, d.h. die dritte Bedingung fordert, dass nicht nur $uvw, uvvw, uvvvw$ usw. in L sein müssen, sondern auch $uv^0w = u\lambda w = uw$. Dies ist manchmal die einzige Möglichkeit einen Widerspruch herzustellen!

Das Pumping Lemma - Der Ablauf

Der Ablauf beim Pumping Lemma:

1. Annehmen L wäre regulär
2. Die Zahl aus dem Pumping Lemma benennen (z.B. k).
3. **Ein Wort** z finden mit $|z| \geq k$ und $z \in L$.
   - Dieses Wort muss gut gewählt sein, damit der nachfolgende Widerspruch gelingt! Hier muss man also u.U. experimentieren!
4. **Für alle Zerlegungen** von z in uvw zeigen, dass sie im Widerspruch zur ersten, zweiten oder dritten Bedingung sind.
   - Üblicherweise betrachtet man alle Zerlegungen, die die erste und zweite Bedingung erfüllen und zeigt, dass man dann einen Widerspruch zur dritten Bedingung erhält.
5. Also: Alle Zerlegungen $z = uvw$ mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$ betrachten.
6. Zeigen, dass man **ein** i findet mit $uv^iw \notin L$. (Dies kann auch $i = 0$ sein!)

Das Pumping Lemma - Der Ablauf

Der Ablauf beim Pumping Lemma:

1. Annehmen L wäre regulär
2. Die Zahl aus dem Pumping Lemma benennen (z.B. k).
3. **Ein Wort** z finden mit $|z| \geq k$ und $z \in L$.
   - Dieses Wort muss gut gewählt sein, damit der nachfolgende Widerspruch gelingt! Hier muss man also u.U. experimentieren!
4. **Für alle Zerlegungen** von z in uvw zeigen, dass sie im Widerspruch zur ersten, zweiten oder dritten Bedingung sind.
   - Üblicherweise betrachtet man alle Zerlegungen, die die erste und zweite Bedingung erfüllen und zeigt, dass man dann einen Widerspruch zur dritten Bedingung erhält.
5. Also: Alle Zerlegungen $z = uvw$ mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$ betrachten.
6. Zeigen, dass man **ein** i findet mit $uv^iw \notin L$. (Dies kann auch $i = 0$ sein!)

Das Pumping Lemma - Der Ablauf

Der Ablauf beim Pumping Lemma:

1. Annehmen L wäre regulär
2. Die Zahl aus dem Pumping Lemma benennen (z.B. k).
3. **Ein Wort** z finden mit $|z| \geq k$ und $z \in L$.
   - Dieses Wort muss gut gewählt sein, damit der nachfolgende Widerspruch gelingt! Hier muss man also u.U. experimentieren!
4. **Für alle Zerlegungen** von z in uvw zeigen, dass sie im Widerspruch zur ersten, zweiten oder dritten Bedingung sind.
   - Üblicherweise betrachtet man alle Zerlegungen, die die erste und zweite Bedingung erfüllen und zeigt, dass man dann einen Widerspruch zur dritten Bedingung erhält.
5. Also: Alle Zerlegungen $z = uvw$ mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$ betrachten.
6. Zeigen, dass man **ein** i findet mit $uv^iw \notin L$. (Dies kann auch $i = 0$ sein!)

Das Pumping Lemma - Der Ablauf

Der Ablauf beim Pumping Lemma:

1. Annehmen L wäre regulär
2. Die Zahl aus dem Pumping Lemma benennen (z.B. k).
3. **Ein Wort** z finden mit $|z| \geq k$ und $z \in L$.
   - Dieses Wort muss gut gewählt sein, damit der nachfolgende Widerspruch gelingt! Hier muss man also u.U. experimentieren!
4. **Für alle Zerlegungen** von z in uvw zeigen, dass sie im Widerspruch zur ersten, zweiten oder dritten Bedingung sind.
   - Üblicherweise betrachtet man alle Zerlegungen, die die erste und zweite Bedingung erfüllen und zeigt, dass man dann einen Widerspruch zur dritten Bedingung erhält.
5. Also: Alle Zerlegungen $z = uvw$ mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$ betrachten.
6. Zeigen, dass man **ein** i findet mit $uv^iw \notin L$. (Dies kann auch $i = 0$ sein!)

Das Pumping Lemma - Der Ablauf

Der Ablauf beim Pumping Lemma:

1. Annehmen L wäre regulär
2. Die Zahl aus dem Pumping Lemma benennen (z.B. k).
3. **Ein Wort** z finden mit $|z| \geq k$ und $z \in L$.
   - Dieses Wort muss gut gewählt sein, damit der nachfolgende Widerspruch gelingt! Hier muss man also u.U. experimentieren!
4. **Für alle Zerlegungen** von z in uvw zeigen, dass sie im Widerspruch zur ersten, zweiten oder dritten Bedingung sind.
   - Üblicherweise betrachtet man alle Zerlegungen, die die erste und zweite Bedingung erfüllen und zeigt, dass man dann einen Widerspruch zur dritten Bedingung erhält.
5. Also: Alle Zerlegungen $z = uvw$ mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$ betrachten.
6. Zeigen, dass man **ein** i findet mit $uv^iw \notin L$. (Dies kann auch $i = 0$ sein!)

Das Pumping Lemma - Der Ablauf

Der Ablauf beim Pumping Lemma:

1. Annehmen L wäre regulär
2. Die Zahl aus dem Pumping Lemma benennen (z.B. k).
3. **Ein Wort** z finden mit $|z| \geq k$ und $z \in L$.
   - Dieses Wort muss gut gewählt sein, damit der nachfolgende Widerspruch gelingt! Hier muss man also u.U. experimentieren!
4. **Für alle Zerlegungen** von z in uvw zeigen, dass sie im Widerspruch zur ersten, zweiten oder dritten Bedingung sind.
   - Üblicherweise betrachtet man alle Zerlegungen, die die erste und zweite Bedingung erfüllen und zeigt, dass man dann einen Widerspruch zur dritten Bedingung erhält.
5. Also: Alle Zerlegungen $z = uvw$ mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$ betrachten.
6. Zeigen, dass man **ein** i findet mit $uv^iw \notin L$. (Dies kann auch $i = 0$ sein!)

Das Pumping Lemma - Beispiel 1

Behauptung

$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regulär. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten das Wort $z = a^k b^k$. Es gilt $z \in L$ und $|z| \geq k$. Damit muss es eine Zerlegung $z = uvw$ geben, die die drei Eigenschaften erfüllt. Wir betrachten nun nur jene Zerlegungen, die die erste und zweite Bedingung erfüllen und zeigen, dass diese im Widerspruch zur dritten stehen. Wir haben dann gezeigt, dass jede Zerlegung von z in uvw im Widerspruch zu einer der drei Bedingungen steht und sind dann fertig. ...

Das Pumping Lemma - Beispiel 1

Behauptung

$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regulär. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten das Wort $z = a^k b^k$. Es gilt $z \in L$ und $|z| \geq k$. Damit muss es eine Zerlegung $z = uvw$ geben, die die drei Eigenschaften erfüllt. Wir betrachten nun nur jene Zerlegungen, die die erste und zweite Bedingung erfüllen und zeigen, dass diese im Widerspruch zur dritten stehen. Wir haben dann gezeigt, dass jede Zerlegung von z in uvw im Widerspruch zu einer der drei Bedingungen steht und sind dann fertig. ...

Das Pumping Lemma - Beispiel 1

Behauptung

$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regulär. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten das Wort $z = a^k b^k$. Es gilt $z \in L$ und $|z| \geq k$. Damit muss es eine Zerlegung $z = uvw$ geben, die die drei Eigenschaften erfüllt. Wir betrachten nun nur jene Zerlegungen, die die erste und zweite Bedingung erfüllen und zeigen, dass diese im Widerspruch zur dritten stehen. Wir haben dann gezeigt, dass jede Zerlegung von z in uvw im Widerspruch zu einer der drei Bedingungen steht und sind dann fertig. ...

Das Pumping Lemma - Beispiel 1

Behauptung

$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regulär. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten das Wort $z = a^k b^k$. Es gilt $z \in L$ und $|z| \geq k$. Damit muss es eine Zerlegung $z = uvw$ geben, die die drei Eigenschaften erfüllt. Wir betrachten nun nur jene Zerlegungen, die die erste und zweite Bedingung erfüllen und zeigen, dass diese im Widerspruch zur dritten stehen. Wir haben dann gezeigt, dass jede Zerlegung von z in uvw im Widerspruch zu einer der drei Bedingungen steht und sind dann fertig. ...

Das Pumping Lemma - Beispiel 1

Behauptung

$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regulär. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten das Wort $z = a^k b^k$. Es gilt $z \in L$ und $|z| \geq k$. Damit muss es eine Zerlegung $z = uvw$ geben, die die drei Eigenschaften erfüllt. Wir betrachten nun nur jene Zerlegungen, die die erste und zweite Bedingung erfüllen und zeigen, dass diese im Widerspruch zur dritten stehen. Wir haben dann gezeigt, dass jede Zerlegung von z in uvw im Widerspruch zu einer der drei Bedingungen steht und sind dann fertig. ...

Das Pumping Lemma - Beispiel 1

Behauptung

$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regulär. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten das Wort $z = a^k b^k$. Es gilt $z \in L$ und $|z| \geq k$. Damit muss es eine Zerlegung $z = uvw$ geben, die die drei Eigenschaften erfüllt. Wir betrachten nun nur jene Zerlegungen, die die erste und zweite Bedingung erfüllen und zeigen, dass diese im Widerspruch zur dritten stehen. Wir haben dann gezeigt, dass jede Zerlegung von z in uvw im Widerspruch zu einer der drei Bedingungen steht und sind dann fertig. ...

Das Pumping Lemma - Beispiel 1

Behauptung

$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regulär. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten das Wort $z = a^k b^k$. Es gilt $z \in L$ und $|z| \geq k$. Damit muss es eine Zerlegung $z = uvw$ geben, die die drei Eigenschaften erfüllt. Wir betrachten nun nur jene Zerlegungen, die die erste und zweite Bedingung erfüllen und zeigen, dass diese im Widerspruch zur dritten stehen. Wir haben dann gezeigt, dass jede Zerlegung von z in uvw im Widerspruch zu einer der drei Bedingungen steht und sind dann fertig. ...

Das Pumping Lemma - Beispiel 1

Behauptung

$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regulär. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten das Wort $z = a^k b^k$. Es gilt $z \in L$ und $|z| \geq k$. Damit muss es eine Zerlegung $z = uvw$ geben, die die drei Eigenschaften erfüllt. Wir betrachten nun nur jene Zerlegungen, die die erste und zweite Bedingung erfüllen und zeigen, dass diese im Widerspruch zur dritten stehen. Wir haben dann gezeigt, dass jede Zerlegung von z in uvw im Widerspruch zu einer der drei Bedingungen steht und sind dann fertig. ...

Das Pumping Lemma - Beispiel 1

Behauptung

$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regulär. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten das Wort $z = a^k b^k$. Es gilt $z \in L$ und $|z| \geq k$. Damit muss es eine Zerlegung $z = uvw$ geben, die die drei Eigenschaften erfüllt. Wir betrachten nun nur jene Zerlegungen, die die erste und zweite Bedingung erfüllen und zeigen, dass diese im Widerspruch zur dritten stehen. Wir haben dann gezeigt, dass jede Zerlegung von z in uvw im Widerspruch zu einer der drei Bedingungen steht und sind dann fertig. ...

Das Pumping Lemma - Beispiel 1

Behauptung

$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Sei also $z = a^k b^k = uvw$ eine Zerlegung mit $i)|uv| \leq k$ und $ii)|v| \geq 1$. Es muss dann $v \in \{a\}^+$ gelten, da uv ja die ersten Buchstaben von z ausmacht, aber davon nur maximal k einnehmen kann und da ferner v mindestens die Länge 1 hat. Es gibt sogar ein j mit $1 \leq j \leq k$ derart, dass $v = a^j$ gilt. Wir betrachten nun das Wort uv^2w, dass nach der dritten Bedingung in L sein müsste. Es ist aber $uv^2w = a^{k+j}b^k$ und somit $uv^2w \notin L$. Die ursprüngliche Annahme muss also falsch sein und daher ist L nicht regulär. □

Das Pumping Lemma - Beispiel 1

Behauptung

$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Sei also $z = a^k b^k = uvw$ eine Zerlegung mit $i)|uv| \leq k$ und $ii)|v| \geq 1$. Es muss dann $v \in \{a\}^+$ gelten, da uv ja die ersten Buchstaben von z ausmacht, aber davon nur maximal k einnehmen kann und da ferner v mindestens die Länge 1 hat. Es gibt sogar ein j mit $1 \leq j \leq k$ derart, dass $v = a^j$ gilt. Wir betrachten nun das Wort uv^2w, dass nach der dritten Bedingung in L sein müsste. Es ist aber $uv^2w = a^{k+j}b^k$ und somit $uv^2w \notin L$. Die ursprüngliche Annahme muss also falsch sein und daher ist L nicht regulär. □

Das Pumping Lemma - Beispiel 1

Behauptung

$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Sei also $z = a^k b^k = uvw$ eine Zerlegung mit $i)|uv| \leq k$ und $ii)|v| \geq 1$. Es muss dann $v \in \{a\}^+$ gelten, da uv ja die ersten Buchstaben von z ausmacht, aber davon nur maximal k einnehmen kann und da ferner v mindestens die Länge 1 hat. Es gibt sogar ein j mit $1 \leq j \leq k$ derart, dass $v = a^j$ gilt.

Wir betrachten nun das Wort uv^2w, dass nach der dritten Bedingung in L sein müsste. Es ist aber $uv^2w = a^{k+j}b^k$ und somit $uv^2w \notin L$. Die ursprüngliche Annahme muss also falsch sein und daher ist L nicht regulär. □

Das Pumping Lemma - Beispiel 1

Behauptung

$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Sei also $z = a^k b^k = uvw$ eine Zerlegung mit $i)|uv| \leq k$ und $ii)|v| \geq 1$. Es muss dann $v \in \{a\}^+$ gelten, da uv ja die ersten Buchstaben von z ausmacht, aber davon nur maximal k einnehmen kann und da ferner v mindestens die Länge 1 hat. Es gibt sogar ein j mit $1 \leq j \leq k$ derart, dass $v = a^j$ gilt. Wir betrachten nun das Wort uv^2w, dass nach der dritten Bedingung in L sein müsste. Es ist aber $uv^2w = a^{k+j}b^k$ und somit $uv^2w \notin L$. Die ursprüngliche Annahme muss also falsch sein und daher ist L nicht regulär. □

Das Pumping Lemma - Beispiel 1

Behauptung

$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Sei also $z = a^k b^k = uvw$ eine Zerlegung mit $i)|uv| \leq k$ und $ii)|v| \geq 1$. Es muss dann $v \in \{a\}^+$ gelten, da uv ja die ersten Buchstaben von z ausmacht, aber davon nur maximal k einnehmen kann und da ferner v mindestens die Länge 1 hat. Es gibt sogar ein j mit $1 \leq j \leq k$ derart, dass $v = a^j$ gilt. Wir betrachten nun das Wort uv^2w, dass nach der dritten Bedingung in L sein müsste. Es ist aber $uv^2w = a^{k+j}b^k$ und somit $uv^2w \notin L$. Die ursprüngliche Annahme muss also falsch sein und daher ist L nicht regulär. □

Das Pumping Lemma - Beispiel 1

Behauptung

$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Sei also $z = a^k b^k = uvw$ eine Zerlegung mit $i)|uv| \leq k$ und $ii)|v| \geq 1$. Es muss dann $v \in \{a\}^+$ gelten, da uv ja die ersten Buchstaben von z ausmacht, aber davon nur maximal k einnehmen kann und da ferner v mindestens die Länge 1 hat. Es gibt sogar ein j mit $1 \leq j \leq k$ derart, dass $v = a^j$ gilt. Wir betrachten nun das Wort uv^2w, dass nach der dritten Bedingung in L sein müsste. Es ist aber $uv^2w = a^{k+j}b^k$ und somit $uv^2w \notin L$. Die ursprüngliche Annahme muss also falsch sein und daher ist L nicht regulär. □

Das Pumping Lemma - Beispiel 1

Behauptung

$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Sei also $z = a^k b^k = uvw$ eine Zerlegung mit $i)|uv| \leq k$ und $ii)|v| \geq 1$. Es muss dann $v \in \{a\}^+$ gelten, da uv ja die ersten Buchstaben von z ausmacht, aber davon nur maximal k einnehmen kann und da ferner v mindestens die Länge 1 hat. Es gibt sogar ein j mit $1 \leq j \leq k$ derart, dass $v = a^j$ gilt. Wir betrachten nun das Wort uv^2w, dass nach der dritten Bedingung in L sein müsste. Es ist aber $uv^2w = a^{k+j}b^k$ und somit $uv^2w \notin L$. Die ursprüngliche Annahme muss also falsch sein und daher ist L nicht regulär. $\square$

Wichtige Folgerung

Wichtige Anmerkung

Damit ist bewiesen,
dass der PDA tatsächlich mehr kann als der DFA!
Die Sprachfamilie der von einem PDA akzeptierten Sprachen ist also echt größer als die Sprachfamilie REG (der von DFAs akzeptierten Sprachen).

Fragen...

Wovon muss das gewählte Wort z abhängen?

1. Von der Anzahl der Zustände $|Z|$ des DFA.
2. Von der Zahl aus dem Pumping Lemma k, die noch genauer spezifiziert werden muss.
3. Von der Zahl aus dem Pumping Lemma k, die nicht genauer spezifiziert werden muss.
4. Das Wort muss lediglich in der Sprache sein.

Fragen...

Wieviele Zerlegungen von z müssen betrachtet werden?

1. Eine muss zum Widerspruch geführt werden!
2. Alle Zerlegungen von z müssen zum Widerspruch gebracht werden!
3. Zerlegungen mit bestimmten Eigenschaften müssen zum Widerspruch gebracht werden!
4. Man muss eine Zerlegung mit bestimmten Eigenschaften finden und diese zum Widerspruch führen!

Fragen...

Kann mit dem Pumping Lemma gezeigt werden, dass eine Sprache regulär ist?

1. Ja!
2. Nein!

Zur Nachbereitung

Zur Nachbereitung

Richtige Antworten sind:

1. 3
2. 2 und 3 ist beides ok
3. 2

Das Pumping Lemma - Beispiel 2

Behauptung

$L := \{ww^{rev} \mid w \in \{0,1\}^*\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regular. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten $z = 0^k 1^k 1^k 0^k$. Es ist $z \in L$ und $|z| \geq k$. Sei $z = uvw$ eine Zerlegung von z mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$. Hieraus folgt $v = 0^j$ für ein j mit $1 \leq j \leq k$. Nun ist aber $uv^0w = 0^{k-j}1^k 1^k 0^k$ nicht mehr in L im Widerspruch zum Pumping Lemma. Die Annahme ist daher falsch und L somit nicht regulär. □

Das Pumping Lemma - Beispiel 2

Behauptung

$L := \{ww^{rev} \mid w \in \{0,1\}^*\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regular. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten $z = 0^k 1^k 1^k 0^k$. Es ist $z \in L$ und $|z| \geq k$. Sei $z = uvw$ eine Zerlegung von z mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$. Hieraus folgt $v = 0^j$ für ein j mit $1 \leq j \leq k$. Nun ist aber $uv^0w = 0^{k-j}1^k 1^k 0^k$ nicht mehr in L im Widerspruch zum Pumping Lemma. Die Annahme ist daher falsch und L somit nicht regulär. □

Das Pumping Lemma - Beispiel 2

Behauptung

$L := \{ww^{rev} \mid w \in \{0,1\}^*\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regular. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten $z = 0^k 1^k 1^k 0^k$. Es ist $z \in L$ und $|z| \geq k$. Sei $z = uvw$ eine Zerlegung von z mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$. Hieraus folgt $v = 0^j$ für ein j mit $1 \leq j \leq k$. Nun ist aber $uv^0w = 0^{k-j}1^k 1^k 0^k$ nicht mehr in L im Widerspruch zum Pumping Lemma. Die Annahme ist daher falsch und L somit nicht regulär. □

Das Pumping Lemma - Beispiel 2

Behauptung

$L := \{ww^{rev} \mid w \in \{0,1\}^*\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regular. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten $z = 0^k 1^k 1^k 0^k$. Es ist $z \in L$ und $|z| \geq k$. Sei $z = uvw$ eine Zerlegung von z mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$. Hieraus folgt $v = 0^j$ für ein j mit $1 \leq j \leq k$. Nun ist aber $uv^0w = 0^{k-j}1^k1^k0^k$ nicht mehr in L im Widerspruch zum Pumping Lemma. Die Annahme ist daher falsch und L somit nicht regulär. □

Das Pumping Lemma - Beispiel 2

Behauptung

$L := \{ww^{rev} \mid w \in \{0,1\}^*\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regular. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten $z = 0^k1^k1^k0^k$. Es ist $z \in L$ und $|z| \geq k$. Sei $z = uvw$ eine Zerlegung von z mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$. Hieraus folgt $v = 0^j$ für ein j mit $1 \leq j \leq k$. Nun ist aber $uv^0w = 0^{k-j}1^k1^k0^k$ nicht mehr in L im Widerspruch zum Pumping Lemma. Die Annahme ist daher falsch und L somit nicht regulär. □

Das Pumping Lemma - Beispiel 2

Behauptung

$L := \{ww^{rev} \mid w \in \{0,1\}^*\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regular. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten $z = 0^k1^k1^k0^k$. Es ist $z \in L$ und $|z| \geq k$. Sei $z = uvw$ eine Zerlegung von z mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$. Hieraus folgt $v = 0^j$ für ein j mit $1 \leq j \leq k$. Nun ist aber $uv^0w = 0^{k-j}1^k1^k0^k$ nicht mehr in L im Widerspruch zum Pumping Lemma. Die Annahme ist daher falsch und L somit nicht regulär. $\square$

Das Pumping Lemma - Beispiel 2

Behauptung

$L := \{ww^{rev} \mid w \in \{0,1\}^*\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regular. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten $z = 0^k 1^k 1^k 0^k$. Es ist $z \in L$ und $|z| \geq k$. Sei $z = uvw$ eine Zerlegung von z mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$. Hieraus folgt $v = 0^j$ für ein j mit $1 \leq j \leq k$. Nun ist aber $uv^0w = 0^{k-j}1^k1^k0^k$ nicht mehr in L im Widerspruch zum Pumping Lemma. Die Annahme ist daher falsch und L somit nicht regulär. □

Das Pumping Lemma - Beispiel 2

Behauptung

$L := \{ww^{rev} \mid w \in \{0,1\}^*\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regular. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten $z = 0^k1^k1^k0^k$. Es ist $z \in L$ und $|z| \geq k$. Sei $z = uvw$ eine Zerlegung von z mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$. Hieraus folgt $v = 0^j$ für ein j mit $1 \leq j \leq k$. Nun ist aber $uv^0w = 0^{k-j}1^k1^k0^k$ nicht mehr in L im Widerspruch zum Pumping Lemma. Die Annahme ist daher falsch und L somit nicht regulär. $\square$

Das Pumping Lemma - Beispiel 2

Behauptung

$L := \{ww^{rev} \mid w \in \{0,1\}^*\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L wäre regular. Dann gilt das Pumping Lemma. Sei k die Zahl aus dem Pumping Lemma. Wir betrachten $z = 0^k 1^k 1^k 0^k$. Es ist $z \in L$ und $|z| \geq k$. Sei $z = uvw$ eine Zerlegung von z mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$. Hieraus folgt $v = 0^j$ für ein j mit $1 \leq j \leq k$. Nun ist aber $uv^0w = 0^{k-j}1^k1^k0^k$ nicht mehr in L im Widerspruch zum Pumping Lemma. Die Annahme ist daher falsch und L somit nicht regulär. $\square$

Zur Nachbereitung

Zur Zahl im Pumping Lemma

In der Vorlesung gab es an dieser Stelle die Anmerkung, dass der obige Beweis mit $k = 0$ nicht klappen würde. Hierzu zwei Dinge:

1. Die Zahl aus dem Pumping Lemma muss mindestens 1 sein, da sonst die Bedingungen 1. und 2. nicht beide gelten können. (Man kann sagen, dass durch 1. und 2. bereits impliziert wird, dass die Zahl mindestens 1 ist, man kann es aber auch in den Voraussetzungen fordern, also zu $n \in \mathbb{N}$ zusätzlich $n \geq 1$ fordern.)
2. Nutzt man das Pumping Lemma wie oben, hat man die Zahl aber nie konkret. (Hätte man so etwas wie $k = 0$ oder $k = 1$ konkret, so könnte man davon abhängig aber ebenfalls Wörter finden, wie dann z.B. $z = 0^5 1^5 1^5 0^5$.)

Das Pumping Lemma - Nochmal der Ablauf

Der Ablauf beim Pumping Lemma:

1. Annehmen L wäre regulär
2. Die Zahl aus dem Pumping Lemma benennen (z.B. k).
3. **Ein Wort** z finden mit $|z| \geq k$ und $z \in L$.
   - Dieses Wort muss gut gewählt sein, damit der nachfolgende Widerspruch gelingt! Hier muss man also u.U. experimentieren!
4. **Für alle Zerlegungen** von z in uvw zeigen, dass sie im Widerspruch zur ersten, zweiten oder dritten Bedingung sind.
   - Üblicherweise betrachtet man alle Zerlegungen, die die erste und zweite Bedingung erfüllen und zeigt, dass man dann einen Widerspruch zur dritten Bedingung erhält.
5. Also: Alle Zerlegungen $z = uvw$ mit $|uv| \leq k$ und $|v| \geq 1$ betrachten.
6. Zeigen, dass man **ein** i findet mit $uv^iw \notin L$. (Dies kann auch $i = 0$ sein!)

Das Pumping Lemma - Anmerkung zum Ablauf

Anmerkung

Bei der Zerlegung (vorletzter Schritt eben) gelingt oft eine Parametrisierung. Bspw. konnte in den Beispielen oben $v = 0^j$ bzw. $v = a^j$ mit einem j mit $1 \leq j \leq k$ gesetzt werden. Das j wandert quasi den Bereich von 1 bis k ab. Für jedes j ist dies eine mögliche Zerlegung, die die ersten beiden Bedingungen erfüllt – und man führt im Grunde genommen *alle* diese Zerlegungen zum Widerspruch!

Wiederholung

Wir haben gestern und heute:

- Kellerautomaten kennengelernt
- Zwei Konstruktionsmethoden kennengelernt
  - Etwas zählen
  - Eine Zeichenkette merken, die dann andersherum vom Keller gelesen werden kann
- Das Pumping Lemma kennengelernt
- Damit bewiesen, dass Kellerautomaten mächtiger sind als endliche Automaten.

Wiederholung

Wir haben gestern und heute:

- Kellerautomaten kennengelernt
- Zwei Konstruktionsmethoden kennengelernt
  - Etwas zählen
  - Eine Zeichenkette merken, die dann andersherum vom Keller gelesen werden kann
- Das Pumping Lemma kennengelernt
- Damit bewiesen, dass Kellerautomaten mächtiger sind als endliche Automaten.

Wiederholung

Wir haben gestern und heute:

- Kellerautomaten kennengelernt
- Zwei Konstruktionsmethoden kennengelernt
  - Etwas zählen
  - Eine Zeichenkette merken, die dann andersherum vom Keller gelesen werden kann
- Das Pumping Lemma kennengelernt
- Damit bewiesen, dass Kellerautomaten mächtiger sind als endliche Automaten.

Wiederholung

Wir haben gestern und heute:

- Kellerautomaten kennengelernt
- Zwei Konstruktionsmethoden kennengelernt
  - Etwas zählen
  - Eine Zeichenkette merken, die dann andersherum vom Keller gelesen werden kann
- Das Pumping Lemma kennengelernt
- Damit bewiesen, dass Kellerautomaten mächtiger sind als endliche Automaten.