

Formale Grundlagen der Informatik 1

Kapitel 19

Prädikatenlogik

Syntax & Semantik

Frank Heitmann
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

23. Juni 2015

Motivation

Die Prädikatenlogik ist eine *Erweiterung der Aussagenlogik*. Sie hat eine größere Ausdrucksstärke und erlaubt eine feinere Differenzierung. Ferner sind Beziehungen/Relationen ausdrückbar.

- Terme repräsentieren Objekte
- Prädikatsymbole repräsentieren Eigenschaften und Relationen
- Formeln repräsentieren Aussagen

Motivation - Beispiel

Jeder Student ist jünger als (irgend-)ein Lehrer.

- $S(x)$ - x ist Student
- $L(x)$ - x ist Lehrer
- $J(x, y)$ - x ist jünger als y

$$\forall x(S(x) \Rightarrow \exists y(L(y) \wedge J(x, y)))$$

Motivation - Beispiel

$$F = \forall x(P(x) \Rightarrow \exists yQ(f(x), y))$$

$$G = P(x, a) \wedge \forall x \exists y P(x, y)$$

Alphabet

Definition (Alphabet)

Das **Alphabet** der Prädikatenlogik besteht aus

- einer Menge von **Variablen**: x, y, z, x_1, x_2, \dots
- einer Menge von **Konstanten**: a, b, c, a_1, a_2, \dots
- einer Menge von **Funktionssymbolen**: f, g, h, f_1, f_2, \dots
- einer Menge von **Prädikatsymbolen**: P, Q, R, P_1, P_2, \dots
- einer Menge von **Aussagensymbolen**: A, B, C, A_1, A_2, \dots
- den **Junktoren**: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- den **Quantoren**: \forall, \exists
- den **Hilfssymbolen**: $), ($ und $,$

Jedem Funktions- und Prädikatsymbol ist dabei eindeutig eine **Stelligkeit** $k \geq 0$ zugewiesen.

Terme

Definition (Terme der Prädikatenlogik)

Die Menge der **prädikatenlogischen Terme** wird wie folgt definiert:

- 1 Jede Variable ist ein Term.
- 2 Jede Konstante ist ein Term.
- 3 Ist f ein Funktionssymbol der Stelligkeit k und sind t_1, \dots, t_k Terme, so ist auch $f(t_1, \dots, t_k)$ ein Term.
- 4 Es gibt keine anderen Terme, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-3 erzeugt werden.

Der Term t ist **Teilterm** des Terms t' , wenn t beim Aufbau von t' verwendet wurde.

Formeln

Definition (Formeln der Prädikatenlogik)

Die Menge der **prädikatenlogischen Formeln** \mathcal{L}_{PL} wird wie folgt definiert:

- 1 Jedes Aussagensymbol ist eine (atomare) Formel.
- 2 Ist P ein Prädikatsymbol der Stelligkeit k und sind t_1, \dots, t_k Terme, so ist $P(t_1, \dots, t_k)$ eine (atomare) Formel.
- 3 Sind F und G Formeln, so sind auch $\neg F, (F \vee G), (F \wedge G), (F \Rightarrow G)$ und $(F \Leftrightarrow G)$ Formeln.
- 4 Ist x eine Variable und F eine Formel, so sind auch $\exists xF$ und $\forall xF$ Formeln.
- 5 Es gibt keine anderen Formeln, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-4 erzeugt werden.

Teilformeln

Definition (Formeln der Prädikatenlogik (Fortsetzung))

- Eine Formel F ist **Teilformel** einer Formel H , wenn F beim Aufbau von H verwendet wurde.
- Ein Term t ist **Teilterm** einer Formel H , wenn t beim Aufbau von H verwendet wird oder Teilterm eines Terms ist für den dies gilt.
- In $\exists xF$ und $\forall xF$ wird x als **Quantorenvariable** bezeichnet und F als **Skopus** des Quantors.

Freie und gebundene Variablen

Definition (Freie und gebundene Variablen)

- In $\exists xF$ und $\forall xF$ wird x als **Quantorenvariable** bezeichnet und F als **Skopus** des Quantors.
- Eine Variable x , die im Skopus F eines Quantors mit der Quantorenvariablen x frei vorkommt, ist durch den Quantor in dieser Position **gebunden**.
- Eine Variable, die als Teilterm einer Formel F auftritt und an keinen Quantor gebunden ist, ist in dieser Position **frei**.
- Eine Formel ohne freie Variablen heißt **geschlossen**.

Beispiel

In $\forall x(P(x) \vee R(x, y)) \Rightarrow Q(x)$ sind die ersten zwei x gebunden, das y und das dritte x sind frei.

Induktion und Rekursion

Entsprechend den Definitionen lassen sich wieder über die Struktur der Terme und der Formeln

- induktive Beweis führen und
- Funktionen rekursiv definieren.

Anmerkung

Manchmal muss eine Aussage zunächst für die Terme, dann für die Formeln gezeigt werden!

Informale Semantik

Die Idee bei der Semantik ist, die benutzten Symbole durch Elemente einer Grundmenge (z.B. Zahlen) zu interpretieren:

- freie Variablen und Konstanten durch Objekte der Grundmenge
- Funktionssymbole durch Funktionen über der Grundmenge
- Prädikatensymbole durch Mengen über der Grundmenge
- Aussagensymbole durch Wahrheitswerte
- komplexe Ausdrücke auf obigem aufbauend ...

Wahrheitswerte ergeben sich dann durch diese Interpretation ...

Strukturen

Definition (Struktur)

Eine **Struktur** ist ein Tupel $\mathcal{A} = (U, I)$ mit

- dem Universum U (auch Grundmenge oder Domäne) eine beliebige nicht-leere Menge und
- der Interpretation I , die eine Abbildung ist und
 - Variablen und Konstanten auf Elemente auf U abbildet,
 - k -stellige Funktionssymbole auf k -stellige Funktionen über U
 - k -stellige Prädikatensymbole auf Mengen von k -Tupeln über U und
 - Aussagensymbole auf Wahrheitswerte.

Struktur - Beispiel

Beispiel

Haben wir z.B.

$$\forall x P(g(x)) \vee Q(f(x, y), x)$$

So könnten wir z.B. nehmen:

- $U = \mathbb{N}$
- $I(g) = g'$ wobei $g' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $g'(n) = n + 1$
- $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f'(n, m) = n + m$
- $I(P) = \{2, 4, 6, 8, \dots\} \subseteq U$
- $I(Q) = \{(x, y) \mid x < y\} \subseteq U \times U$
- $I(y) = 5 \in U$
- $I(x) = 3 \in U$

Auswertung

Definition (Auswertung von Termen und atomaren Formeln)

I wird rekursiv zu einer **Auswertung** fortgesetzt (für die oft auch einfach \mathcal{A} geschrieben wird).

- ① Rekursive Definition von \mathcal{A} für Terme:
 - Für jede Variable x ist $\mathcal{A}(x) = I(x)$
 - Für jede Konstante a ist $\mathcal{A}(a) = I(a)$
 - Für k Terme t_1, \dots, t_k und ein k -stelliges Funktionssymbol f ist $\mathcal{A}(f(t_1, \dots, t_k)) = I(f)(\mathcal{A}(t_1), \dots, \mathcal{A}(t_k))$
- ② Rekursive Definition von \mathcal{A} für atomare Formeln:
 - Für jedes Aussagensymbol B ist $\mathcal{A}(B) = I(B)$
 - Für k Terme t_1, \dots, t_k und ein k -stelliges Prädikatensymbol P ist

$$\mathcal{A}(P(t_1, \dots, t_k)) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } (\mathcal{A}(t_1), \dots, \mathcal{A}(t_k)) \in I(P) \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Auswertung - Beispiel

Beispiel

Ist $F = P(a, f(a))$ und $\mathcal{A} = (U, I)$ mit $U = \mathbb{N}$ und I mit $I(a) = 4$
 $I(P) = \{(x, y) \mid x, y \text{ sind gerade}\}$ und $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 mit $f'(n) = 2 \cdot n$, dann ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(P(a, f(a))) &= 1 \\ \text{gdw. } (\mathcal{A}(a), \mathcal{A}(f(a))) &\in I(P) \\ \text{gdw. } (4, I(f)(\mathcal{A}(a))) &\in I(P) \\ \text{gdw. } (4, f'(4)) &\in I(P) \\ \text{gdw. } (4, 8) &\in I(P) \end{aligned}$$

Da $(4, 8) \in I(P)$ gilt, ist \mathcal{A} eine erfüllende Struktur.

Auswertung

Definition (Auswertung komplexer Formeln ohne Quantoren)

I (bzw. \mathcal{A}) wird weiter rekursiv zu einer **Auswertung** fortgesetzt.
 Die Junktoren werden dabei wie in der Aussagenlogik behandelt:
 Für alle Formeln F und G und Strukturen \mathcal{A} ist:

- $\mathcal{A}(\neg F) = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{A}(F) = 0$
- $\mathcal{A}((F \vee G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$ oder $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \wedge G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \Rightarrow G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 0$ oder $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \Leftrightarrow G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$

Auswertung - Beispiel

Beispiel

Ist $F = P(a, f(a)) \wedge P(f(a), a)$ und $\mathcal{A} = (U, I)$ wie vorhin, dann ist

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(P(a, f(a)) \wedge P(f(a), a)) = 1 \\ \text{gdw. } & (\mathcal{A}(a), \mathcal{A}(f(a))) \in I(P) \text{ und} \\ & (\mathcal{A}(f(a)), \mathcal{A}(a)) \in I(P) \\ \text{gdw. } & \dots \\ \text{gdw. } & (4, 8) \in I(P) \text{ und } (8, 4) \in I(P) \end{aligned}$$

Auswertung

Definition (x -Variante von Strukturen)

Sei $\mathcal{A} = (U, I)$ eine Struktur, $d \in U$ und x eine Variable. Mit $\mathcal{A}_{[x/d]} = (U, I_{[x/d]})$ bezeichnen wir die Struktur, die überall komplett mit \mathcal{A} übereinstimmt, außer bei x . Dies wird mit d interpretiert. Es gilt also für alle verfügbaren Symbole τ :

$$\mathcal{A}_{[x/d]}(\tau) = I_{[x/d]}(\tau) = \begin{cases} d & , \text{ falls } \tau = x \\ I(\tau) & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Die Struktur $\mathcal{A}_{[x/d]}$ wird als x -Variante zu \mathcal{A} bezeichnet.

Auswertung

Definition (Auswertung komplexer Formeln mit Quantoren)

Wir schließen die rekursive Fortsetzung von I mit der Betrachtung der Quantoren ab: Für jede Variable x , jede Formel F und jede Struktur \mathcal{A} ist

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\forall x F) &= \begin{cases} 1 & , \text{ falls für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \\ \mathcal{A}(\exists x F) &= \begin{cases} 1 & , \text{ falls es ein } d \in U \text{ gibt mit: } \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Anmerkung zu den Quantoren

Wichtige Anmerkung

Bei der Auswertung einer quantifizierten Formel ist der ursprüngliche Wert der Quantorenvariable unerheblich, d.h. für z.B. $\forall x P(x)$ ist der Wert von $I(x)$ nicht erheblich (und muss auch gar nicht definiert sein).

Auswertung - Beispiel

Beispiel

Sei $F = \forall x(P(x) \vee Q(a, f(x)))$. Dann ist

$$\mathcal{A}(\forall x(P(x) \vee Q(a, f(x)))) = 1$$

gdw. für alle $d \in U$ gilt: $\mathcal{A}_{[x/d]}(P(x) \vee Q(a, f(x))) = 1$

gdw. für alle $d \in U$ gilt: $\mathcal{A}_{[x/d]}(P(x)) = 1$ oder
 $\mathcal{A}_{[x/d]}(Q(a, f(x))) = 1$

gdw. für alle $d \in U$ gilt: $\mathcal{A}_{[x/d]}(x) \in I(P)$ oder
 $(\mathcal{A}_{[x/d]}(a), \mathcal{A}_{[x/d]}(f(x))) \in I(Q)$

gdw. für alle $d \in U$ gilt: $d \in I(P)$ oder
 $(I(a), I(f)(d)) \in I(Q)$

Eine erfüllende Struktur ist z.B. durch $U = \mathbb{N}$ und $I(P) = U$ (Rest beliebig) gegeben (warum?) oder durch $I(a) = 1$, $I(f) = f'$ mit $f' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und $f'(n) = 1$ und $I(Q) = \{(1, 1)\}$ (warum?).

Analoge Begriffe

Viele Begriffe werden analog zur AL definiert:

- Eine Struktur \mathcal{A} heißt **Modell** für F , wenn $\mathcal{A}(F) = 1$ gilt.
- Eine Struktur ist Modell einer Formelmengemenge M , wenn sie alle Formeln in M wahr macht.
- Eine Formel F heißt erfüllbar, wenn es eine Struktur \mathcal{A} gibt mit $\mathcal{A}(F) = 1$
- Eine Formel F heißt falsifizierbar, wenn es eine Struktur \mathcal{A} gibt mit $\mathcal{A}(F) = 0$
- Die Begriffe (allgemein-)gültig, kontingent, Tautologie, Kontradiktion, Folgerbarkeit und Äquivalenz werden wie in der Aussagenlogik eingeführt. Formulierung wie *alle Strukturen* beinhalten allerdings alle Strukturen mit beliebigen Domänen und Interpretationen!

Beispiel

Beispiel

Es gilt $\models \forall xP(x) \Rightarrow \exists yP(y)$.

Angenommen \mathcal{A} ist eine Struktur mit $\mathcal{A}(\forall xP(x) \Rightarrow \exists yP(y)) = 0$. Dann ist $\mathcal{A}(\forall xP(x)) = 1$ und $\mathcal{A}(\exists yP(y)) = 0$. Nun kann $\mathcal{A}(\exists yP(y)) = 0$ nur gelten, wenn für jedes $d \in U$ $\mathcal{A}_{[y/d]}(P(y)) = 0$, also für jedes $d \in U$ $d \notin I(P)$ gilt. Dafür muss $I(P) = \emptyset$ sein.

Für $\mathcal{A}(\forall xP(x)) = 1$ muss für jedes $e \in U$ $\mathcal{A}_{[x/e]}(P(x)) = 1$ gelten, also muss für jedes $e \in U$ $e \in I(P)$ gelten. Dafür muss $I(P) = U$ sein.

Nach Definition darf U aber nicht leer sein und die Struktur \mathcal{A} kann es nicht geben!

Zusammenfassung

Wir haben heute

- Prädikatenlogische Syntax und
- Prädikatenlogische Semantik

eingeführt.

An der Semantik erkennt man schon, dass dies viel komplizierter ist als bei der Aussagenlogik!

Ausblick

Wie in der Aussagenlogik werden wir zuerst Syntax & Semantik einüben.

Im Anschluss ist es wieder wichtig für eine gegebene Formel herauszufinden, ob sie erfüllbar ist oder unerfüllbar. Genauso sind wieder Tests daraufhin interessant, ob $F \models G$ gilt, ob $F \equiv G$ usw. Dazu kann man wieder die Resolution benutzen.

Ausblick:

- Normalformen in der Prädikatenlogik (Klauselnormalform)
- Prädikatenlogische Resolution