Formale Grundlagen der Informatik 1
Kapitel 15
Folgerbarkeit, Äquivalenzen und Normalformen

Frank Heitmann
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

8. Juni 2015

Syntax

Definition (Syntax der Aussagenlogik)

Mit AS_{AL} sei die Menge der *Aussagensymbol* der Aussagenlogik bezeichnet. Wir notieren diese üblicherweise als $A_1, A_2, A_3, \ldots$ oder $A, B, C, \ldots$.

Die Menge $\mathcal{L}_{AL}$ der Formeln der Aussagenlogik definieren wir mittels

1. Jedes $A \in AS_{AL}$ ist eine (atomare) Formel.
2. Ist F eine Formel, so ist auch $\neg F$ eine Formel.
3. Sind F und G Formeln, so sind auch $(F \vee G), (F \wedge G), (F \Rightarrow G)$ und $(F \Leftrightarrow G)$ Formeln.
4. Es gibt keine anderen Formeln, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-3 erzeugt werden.

Semantik

Definition (Semantik der Aussagenlogik)

Eine **Belegung** ist eine Funktion $\mathcal{A}_{AS} : AS_{AL} \to \{0, 1\}$, die jedem Aussagesymbol einen Wahrheitswert zuordnet.
Zu dieser wird rekursiv eine Funktion $\mathcal{A} : \mathcal{L}_{AL} \to \{0, 1\}$ definiert, die alle Formeln bewertet. Es ist für jedes $A \in AS_{AL}$ ist $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}_{AS}(A)$ und für alle Formeln $F, G \in \mathcal{L}_{AL}$ sei

- $\mathcal{A}(\neg F) = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{A}(F) = 0$
- $\mathcal{A}((F \vee G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$ oder $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \wedge G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \Rightarrow G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 0$ oder $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \Leftrightarrow G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$

Semantik - Wahrheitstafeln

Wahrheitstafeln geben für die atomaren Formeln alle möglichen Belegungen an und für die anderen Formeln die entsprechenden Bewertungen. Sie stellen die Definition von eben übersichtlich dar.

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Wichtige Anmerkung

Hier und auf den nachfolgenden Folien verwenden wir bereits Klammerersparnisregeln. Wir führen diese später auch noch genauer ein. Insb. lassen wir äussere Klammern weg.

Kategorien

Definition

- Eine Belegung heißt **passend** zu einer Formel F, wenn sie jedem Aussagesymbol in F einen Wahrheitswert zuweist.
- Eine Belegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$ nennt man ein **Modell** für F oder eine *erfüllende Belegung* von F. Ist $\mathcal{A}(F) = 0$, so ist $\mathcal{A}$ eine *falsifizierende Belegung* von F.
- Ist ferner M eine (evtl. sogar unendliche) Formelmenge. So nennt man eine Belegung $\mathcal{A}$, die alle Formeln F aus M wahr macht, ebenfalls ein *Modell* für M und schreibt dafür bisweilen auch kurz $\mathcal{A}(M) = 1$.
- Zudem ist jede Belegung Modell der leeren Menge. Die leere Menge ist also erfüllbar.

Kategorien

Definition

- Besitzt F mindestens eine erfüllende Belegung (ein Modell) $\mathcal{A}$, so heißt F **erfüllbare** Formel. Notation: $\mathcal{A} \models F$
- Besitzt F mindestens eine falsifizierende Belegung $\mathcal{A}$, so heißt F **falsifizierbare** Formel. Notation: $\mathcal{A} \not\models F$
- Besitzt F mindestens eine erfüllende und mindestens eine falsifizierende Belegung so heißt F **kontingente** Formel.
- Besitzt F kein Modell, so heißt F **unerfüllbare** Formel oder **Kontradiktion**. Notation: $F \models$
- Ist F unter jeder möglichen Belegung „wahr“, so heißt F **(allgemein-)gültig** oder **Tautologie**. Notation: $\models F$

Fragen

Sei K eine Kontradiktion, T eine Tautologie und F eine kontingente Formel, was ist dann

$$(K \vee F) \wedge T$$

1. Unerfüllbar!
2. Allgemeingültig!
3. Kontingent!
4. Weiß ich nicht ...

Fragen

Sei K eine Kontradiktion, T eine Tautologie und F eine kontingente Formel, was ist dann

$$(K \land F) \lor T$$

1. Unerfüllbar!
2. Allgemeingültig!
3. Kontingent!
4. Weiß ich nicht ...

Fragen

Ist die folgende Wahrheitstafel korrekt?

A	B	$\neg B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow A$
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0

1. Ja!
2. Nein!
3. Nein! Fehler in ...
4. Ich seh' da nur 0en und 1en ...

Zur Nachbereitung

Zur Nachbereitung

1. Kontingent
2. Allgemeingültig
3. Fehler in der letzten Spalte, letzten Zeile

Folgerung

Definition (Folgerung)

Eine Formel F **folgt** genau dann aus einer Formelmenge M, wenn jede Belegung, die Modell für M ist, auch Modell für F ist.
Notation: $M \models F$.

Anmerkung

Im Falle einer einelementigen Menge $M = \{G\}$ notiert man auch $G \models F$ und sagt, F **folgt** aus G.

Folgerung: Beispiel 1

Definition (Folgerung)

Eine Formel F **folgt** genau dann aus einer Formelmenge M, wenn jede Belegung, die Modell für M ist, auch Modell für F ist.

Beweis von $A \wedge B \models A \vee B$ mit Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Jede Belegung, die Modell für $A \wedge B$ ist (nur die vierte Zeile) ist auch Modell für $A \vee B$, daher gilt $A \wedge B \models A \vee B$. (Das $A \vee B$ auch woanders wahr ist, ist egal!)

Folgerung: Beispiel 2

Beweis von $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\} \models A \Rightarrow C$ mit Wahrheitstafel:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Jede Belegung, die Modell für $A \Rightarrow B$ **und** Modell für $B \Rightarrow C$ ist (erste, zweite, vierte und achte Zeile) ist auch Modell für $A \Rightarrow C$, also gilt die Folgerbarkeitsbeziehung.

Folgerung: Beispiel 3

Beweis von $A \wedge B \wedge C \wedge D \models C \vee \neg D$ ohne Wahrheitstafel:

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $A \wedge B \wedge C \wedge D$. Nach der semantischen Definition von $\wedge$ muss dann $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = \mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(D) = 1$ gelten womit wegen $\mathcal{A}(C) = 1$ und der Definition der Semantik von $\vee$ auch $\mathcal{A}(C \vee \neg D) = 1$ gilt. Folglich ist jedes Modell von $A \wedge B \wedge C \wedge D$ auch Modell von $C \vee \neg D$.

Äquivalenz

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln F und G heißen **äquivalent** genau dann, wenn jede Belegung beiden Formeln den gleichen Wahrheitswert zuweist, wenn also $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt.
Notation: $F \equiv G$.

Anmerkung

1. Alternativ: Zwei Formeln sind genau dann äquivalent, wenn sie dieselben Modelle besitzen, also $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(G) = 1$ gilt.
2. Äquivalente Formeln haben denselben Warhheitswerteverlauf!

Äquivalenz: Beispiel 1

Beweis von $A \Leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ mit Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \wedge B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1

In der dritten und letzten Spalte sieht man, dass $A \Leftrightarrow B$ und $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ den gleichen Wahrheitswerteverlauf haben. Damit sind die beiden Formeln äquivalent.

Äquivalenz: Beispiel 2

Widerlegung von $A \wedge B \equiv A \vee B$ durch Angabe eines Gegenbeispiels:

$A \wedge B$ und $A \vee B$ sind nicht äquivalent, da z.B. $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(A) = 0$ und $\mathcal{A}(B) = 1$ zwar ein Modell von $A \vee B$ nicht aber eines von $A \wedge B$ ist. Damit haben die beiden Formeln nicht die gleichen Modelle und sind damit nicht äquivalent.

Wichtige Anmerkung

Ebenso widerlegt man Folgerbarkeitsbeziehungen $F \models G$ durch Angabe eines Gegenbeispiels also durch Angabe einer Belegung $\mathcal{A}$, die Modell für F ist, aber nicht für G.

Wichtige Äquivalenzen

Kommutativität:	$(F \wedge G)$	$\equiv$	$(G \wedge F)$
	$(F \vee G)$	$\equiv$	$(G \vee F)$
Assoziativität:	$(F \wedge (G \wedge H))$	$\equiv$	$((F \wedge G) \wedge H)$
	$(F \vee (G \vee H))$	$\equiv$	$((F \vee G) \vee H)$
Distributivität:	$(F \wedge (G \vee H))$	$\equiv$	$((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$
	$(F \vee (G \wedge H))$	$\equiv$	$((F \vee G) \wedge (F \vee H))$
Doppelnegation:	$\neg\neg F$	$\equiv$	F
de Morgans Regeln:	$\neg(F \wedge G)$	$\equiv$	$(\neg F \vee \neg G)$
	$\neg(F \vee G)$	$\equiv$	$(\neg F \wedge \neg G)$
Elimination von $\Leftrightarrow$:	$(F \Leftrightarrow G)$	$\equiv$	$(F \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow F)$
	$(F \Leftrightarrow G)$	$\equiv$	$(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$
Elimination von $\Rightarrow$:	$(F \Rightarrow G)$	$\equiv$	$(\neg F \vee G)$

Weitere wichtige Äquivalenzen

Absorption:	$(F \wedge (F \vee G))$	$\equiv$	F
	$(F \vee (F \wedge G))$	$\equiv$	F
Idempotenz:	$(F \wedge F)$	$\equiv$	F
	$(F \vee F)$	$\equiv$	F
Tautologieregeln	$(F \wedge \top)$	$\equiv$	F
	$(F \vee \top)$	$\equiv$	$\top$
Kontradiktionsregeln:	$(F \wedge \bot)$	$\equiv$	$\bot$
	$(F \vee \bot)$	$\equiv$	F
Komplement:	$(F \wedge \neg F)$	$\equiv$	$\bot$
	$(F \vee \neg F)$	$\equiv$	$\top$

Anmerkung

Wichtige Anmerkung

1. Auf der letzten Folien waren $\perp$ und $\top$ Konstanten. Man müsste sie streng formal als neue syntaktische Konstrukte einführen. Sie sind dann atomare Formeln, die immer zu 0 (bei $\perp$) bzw. immer zu 1 (bei $\top$) ausgewertet werden.
2. Alle obigen Äquivalenzen kann man z.B. mit Wahrheitstafeln schnell beweisen.

Klammerersparnisregeln

Aufgrund der Äquivalenzen können wir uns auf folgende Regeln zur Klammerersparnis einigen:

1. Die äußersten Klammern entfallen: $A \vee B$ statt $(A \vee B)$
2. Bei mehrfacher Konjuktion oder Disjunktion entfällt die mehrfache Klammerung:
   $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C)) \equiv A \vee B \vee C$
3. Weiterhin **nicht** erlaubt sind $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ oder $A \vee B \wedge C$

Bemerkung

In einigen Büchern findet man auch die Regel, dass $\neg$ am stärksten bindet, dann $\wedge$ und $\vee$ und als dritte $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$. Damit wäre dann z.B. auch $A \wedge B \Rightarrow C$ möglich. Wir wollen dies i.A. aber nicht benutzen. Eine Ausnahme sind Hornformeln in Implikationsschreibweise, zu denen wir später noch kommen.

Folgerung und Äquivalenz (Wdh.)

Definition (Folgerung)

Eine Formel F **folgt** genau dann aus einer Formelmenge M, wenn jede Belegung, die Modell für M ist, auch Modell für F ist.
Notation: $M \models F$ bzw. $G \models F$, wenn $M = \{G\}$.

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln F und G heißen **äquivalent** genau dann, wenn jede Belegung beiden Formeln den gleichen Wahrheitswert zuweist, wenn also $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt.
Notation: $F \equiv G$.

Fragen

Wenn $F \equiv G$ und $\models G$ gilt, dann gilt auch $\models F$

1. Ja!
2. Nein!
3. Weiß ich nicht ...

Fragen

Wenn $F \models$ und $G \models$ gilt, dann gilt $F \equiv G$

1. Ja!
2. Nein!
3. Weiß ich nicht ...

Einige Sätze

Satz

1. *Wenn* $F \equiv G$ *und* $\models G$ *gilt, dann gilt auch* $\models F$
2. *Wenn* $F \equiv G$ *und* $G \models$ *gilt, dann gilt auch* $F \models$
3. *Wenn* $\models F$ *und* $\models G$ *gilt, dann gilt* $F \equiv G$
4. *Wenn* $F \models$ *und* $G \models$ *gilt, dann gilt* $F \equiv G$

Beweis.

1. und 4. nachfolgend. 2. und 3. in den Präsenzaufgaben. $\square$

Einige Sätze

Satz

Wenn $F \equiv G$ und $\models G$ gilt, dann gilt auch $\models F$.

Beweis.

Sie $\mathcal{A}$ eine zu F und G passende Belegung. Da G eine Tautologie ist, gilt $\mathcal{A}(G) = 1$. Da ferner $F \equiv G$ gilt, gilt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$, also auch $\mathcal{A}(F) = 1$. Damit ist jede Belegung Modell für F und folglich F eine Tautologie. $\square$

Einige Sätze

Satz

Wenn $F \models$ und $G \models$ gilt, dann gilt $F \equiv G$

Beweis.

Wir zeigen, dass $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt. Sei dazu $\mathcal{A}$ eine zu F und G passende Belegung. Da sowohl F als auch G Kontradiktionen sind, gilt stets $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) = 0$ womit bereits alles gezeigt ist. □

Sätze mit Folgerbarkeit

Satz

$F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$

Beweis.

Sei $F \equiv G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für F. Wegen $F \equiv G$ ist $\mathcal{A}$ auch ein Modell für G und damit gilt $F \models G$. Analog gilt auch $G \models F$. Gelte nun andersherum $F \models G$ und $G \models F$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für F. Wegen $F \models G$ gilt dann auch $\mathcal{A}(G) = 1$. Ist $\mathcal{A}'$ ein Modell für G, dann ist $\mathcal{A}'$ wegen $G \models F$ auch ein Modell für F. Damit haben F und G genau dieselben Modelle und folglich gilt $F \equiv G$. (Verallgemeinerung als Übungsaufgabe.) $\square$

Drei wichtige Sätze

Satz

1. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
2. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
3. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$

Beweis.

1. ist Präsenzaufgabe. Zu 2: Gelte $F \models G$ und sei $\mathcal{A}$ eine zu F und G passende Belegung. Ist $\mathcal{A}(F) = 0$, so ist $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ aufgrund der Definition der Semantik von $\Rightarrow$. Ist $\mathcal{A}(F) = 1$, so ist wegen $F \models G$ auch $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit wieder $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ und folglich gilt $\models F \Rightarrow G$.
Sei umgekehrt $\models F \Rightarrow G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für F. Wegen der Definition der Semantik von $\Rightarrow$ folgt aus $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ (es gilt ja $\models F \Rightarrow G$) sofort $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit ist jedes Modell von F auch Modell von G und wir sind fertig. $\square$

Drei wichtige Sätze

Satz

1. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
2. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
3. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$

Beweis.

3. folgt aus 2. sofort aus der Äquivalenz $F \Rightarrow G \equiv \neg F \vee G$ und da die Negation einer Tautologie eine Kontradiktion ist (und umgekehrt) und da $\neg(\neg F \vee G) \equiv F \wedge \neg G$. □

Verallgemeinerung

Die Aussagen

1. $F \models G$ genau dann, wenn $\models F \Rightarrow G$
2. $F \models G$ genau dann, wenn $F \wedge \neg G \models$

können verallgemeinert werden. Sei M eine beliebige Formelmenge, dann gilt:

1. $M \cup \{F\} \models G$ genau dann, wenn $M \models F \Rightarrow G$
2. $M \models G$ genau dann, wenn $M \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar ist.

Dabei ist eine Formelmenge unerfüllbar, wenn es keine Belegung gibt, die alle Formeln der Menge wahr macht.

Alle Sätze im Überblick

Satz

1. *Wenn* $F \equiv G$ *und* $\models G$ *gilt, dann gilt auch* $\models F$
2. *Wenn* $F \equiv G$ *und* $G \models$ *gilt, dann gilt auch* $F \models$
3. *Wenn* $\models F$ *und* $\models G$ *gilt, dann gilt* $F \equiv G$
4. *Wenn* $F \models$ *und* $G \models$ *gilt, dann gilt* $F \equiv G$
5. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $F \models G$ *und* $G \models F$
6. *Wenn* $F_1 \equiv F_2$ *und* $G_1 \equiv G_2$ *gilt, dann gilt* $F_1 \models G_1$ *genau dann, wenn* $F_2 \models G_2$ *gilt.*
7. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
8. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
9. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$
10. $M \cup \{F\} \models G$ *genau dann, wenn* $M \models F \Rightarrow G$
11. $M \models G$ *genau dann, wenn* $M \cup \{\neg G\}$ *unerfüllbar ist.*

Normalformen

Wir wollen jetzt

- die Äquivalenzen nutzen, um Teilformeln zu ersetzen und
- so zu einer Normalform kommen

Die Normalform hat verschiedene Vorteile:

- Einfach strukturiert (daher gut für Beweis, Algorithmen, ...)
- Eigenschaften lassen sich bisweilen leichter ablesen/ermitteln.

Ersetzungen

Unser Ziel ist es zunächst Teilformeln ersetzen zu dürfen, also aus

$$A \wedge (B \Rightarrow C)$$

z.B.

$$A \wedge (\neg B \vee C)$$

zu machen. Die Rechtfertigung dafür wird die Äquivalenz $B \Rightarrow C \equiv \neg B \vee C$ sein. Dass wir dies tatsächlich in Teilformeln so ersetzen dürfen, sagt uns das *Ersetzbarkeitstheorem*.

Ersetzbarkeitstheorem

Satz (Ersetzbarkeitstheorem)

Seien F und G äquivalente Formeln und sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Formel F als Teilformel. Gehe H' aus H hervor, indem ein Vorkommen von F (in H) durch G ersetzt wird. Dann sind H und H' äquivalent.

Ersetzt man also eine Teilformel F einer Formel H durch eine äquivalente Formel, so ist die entstehende Formel H' zur ursprünglichen H äquivalent.

Der Satz ist die Rechtfertigung für die Schreibweise
$A \wedge (B \Rightarrow C) \equiv A \wedge (\neg B \vee C)$.

Der Beweis erfolg nun mittels struktureller Induktion...

Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

Beweis

Induktionsanfang. Sei H eine atomare Formel und gehe H' durch ersetzen von F durch G aus H hervor. Dann muss $H = F$ und $H' = G$ gelten und aus $F \equiv G$ folgt dann sofort $H = F \equiv G = H'$ also $H \equiv H'$.

Induktionsannahme. Wir nehmen an, dass H_1 und H_2 Formeln sind, für die gilt: Für jede Formel H_1' bzw. H_2', die durch Ersetzung von F durch G aus H_1 bzw. H_2 hervorgegangen ist, gilt $H_1 \equiv H_1'$ bzw. $H_2 \equiv H_2'$.

Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

Induktionsschritt. Ist $F = H$, so verfahren wir wie im Induktionsanfang und sind fertig. Nachfolgend genügt es also den Fall zu betrachten, dass F eine echte Teilformel von H ist.
Fall $H = \neg H_1$. Dann ist F eine Teilformel von H_1 und es gibt H_1', das aus H_1 durch Ersetzen von F durch G entsteht und so, dass $H' = \neg H_1'$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und wegen der Definition der Semantik von $\neg$ ist dann auch $\mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1)$ also auch $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H')$ und damit $H \equiv H'$.

Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

Induktionsschritt (Fortsetzung). Fall $H = H_1 \vee H_2$. Angenommen F ist eine Teilformel von H_1 (der andere Fall ist analog). Dann gibt es wieder ein H_1', das aus H_1 durch Ersetzen von F durch G entsteht und so, dass $H' = H_1' \vee H_2$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und ähnlich wie eben folgt wegen der Definition der Semantik von $\vee$ dann $\mathcal{A}(H') = \mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2) = \mathcal{A}(H)$ und damit $H' \equiv H$. Die anderen Fälle gehen ganz analog, was den Beweis abschließt.

Anmerkung

Wichtig ist hier, dass $\mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2)$ gilt. Dies folgt aus der Definition von $\vee$ und wegen $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$. Man überlegt sich, was passiert, wenn die einzelnen Teilformeln zu 0 oder 1 ausgewertet werden und dass tatsächlich immer das gleiche rauskommt.

Äquivalenzumformungen

Ergebnis

Wir dürfen nun dank des Ersetzbarkeitstheorems Teilformeln durch andere Formeln ersetzen, sofern diese zu der gewählten Teilformel äquivalent sind.

$$\neg A \Rightarrow \neg\neg B \equiv \neg A \Rightarrow B \equiv \neg\neg A \vee B \equiv A \vee B$$

Normalformen - Motivation

Wir wollen nun eine **Normalform** für aussagenlogische Formeln einführen, d.h. eine Form

- in die wir jede aussagenlogische Formel durch Äquivalenzumformungen bringen können und
- die eine praktische Form hat (z.B. für Berechnungen)

Dazu erst ein paar Begriffe ...

Normalformen - Begriffe

Definition

1. Ein **Literal** ist eine atomare Formel oder eine negierte atomare Formel.
2. Ein **positives Literal** ist eine atomare Formel, ein **negatives Literal** eine negierte atomare Formel.
3. Zwei Literale heißen **komplementär**, wenn sie positives und negatives Literal der gleichen atomaren Formel sind. Bspw. ist A das komplementäre Literal zu $\neg A$ und umgekehrt.
4. Literale und Disjunktionen von Literalen werden als **Klauseln** bezeichnet.
5. Literale und Konjunktionen von Literalen werden als **duale Klauseln** bezeichnet.

Normalformen - Begriffe 2

Definition

1. Eine Formel F ist in **konjunktiver Normalform** (KNF), wenn sie eine Konjunktion von Klauseln ist, also eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, z.B.

$$(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge B \wedge (\neg C \vee \neg B) \wedge (A \vee B \vee C)$$

2. Eine Formel F ist in **disjunktiver Normalform** (DNF), wenn sie eine Disjunktion von dualen Klauseln ist, also eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen, z.B.

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg A \wedge C)$$

Eigenschaften der KNF und DNF

Merkhilfe

KNF: $(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge B \wedge (\neg C \vee \neg B)$
DNF: $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg A \wedge C)$

Satz

1. *Eine KNF ist gültig gdw. alle ihre Klauseln gültig sind gdw. in allen Klauseln mindestens ein Paar komplementäre Literale vorkommt.*
2. *Eine DNF ist unerfüllbar gdw. alle ihre dualen Klauseln unerfüllbar sind gdw. in allen dualen Klauseln mindestens ein Paar komplementäre Literale vorkommt.*
3. *Ein Erfüllbarkeitstest für DNFs ist effizient implementierbar (Laufzeit ist in P). (Für KNFs gilt dies wahrscheinlich nicht! Hier war SAT NP-vollständig.)*

KNF und DNF

Satz

Zu jeder Formel F gibt es (mindestens) eine konjunktive Normalform und (mindestens) eine disjunktive Normalform, d.h. es gibt Formeln K in konjunktiver Normalform und D in disjunktiver Normalform mit $F \equiv K \equiv D$.

Verfahren für die Erstellung von KNF und DNF

1. Ersetze alle Teilformeln der Form
   - $(G \Leftrightarrow H)$ durch $(\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G)$ [Elimination von $\Leftrightarrow$]
   - $(G \Rightarrow H)$ durch $(\neg G \vee H)$ [Elimination von $\Rightarrow$]
2. Ersetze alle Teilformeln der Form
   - $\neg\neg G$ durch G [Doppelte Negation]
   - $\neg(G \wedge H)$ durch $(\neg G \vee \neg H)$ [de Morgan]
   - $\neg(G \vee H)$ durch $(\neg G \wedge \neg H)$ [de Morgan]
3. Um die KNF zu bilden ersetze alle Teilformeln der Form
   - $(F \vee (G \wedge H))$ durch $((F \vee G) \wedge (F \vee H))$ [Distributivität]
   - $((F \wedge G) \vee H)$ durch $((F \vee H) \wedge (G \vee H))$ [Distributivität]
4. Um die DNF zu bilden ersetze alle Teilformeln der Form
   - $(F \wedge (G \vee H))$ durch $((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$ [Distributivität]
   - $((F \vee G) \wedge H)$ durch $((F \wedge H) \vee (G \wedge H))$ [Distributivität]

Beispiel

$$
\begin{array}{ll}
(A \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow D & \text{Elimination von } \Rightarrow \\
\equiv (A \wedge (\neg B \vee C)) \Rightarrow D & \text{Elimination von } \Rightarrow \\
\equiv \neg(A \wedge (\neg B \vee C)) \vee D & \text{de Morgen} \\
\equiv (\neg A \vee \neg(\neg B \vee C)) \vee D & \text{de Morgen} \\
\equiv (\neg A \vee (\neg\neg B \wedge \neg C)) \vee D & \text{Doppelte Negation} \\
\equiv (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \vee D & \text{Distributivität} \\
\equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee D & \text{Distributivität} \\
\equiv ((\neg A \vee B) \vee D) \wedge ((\neg A \vee \neg C) \vee D) & \text{Klammern} \\
\equiv (\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D) &
\end{array}
$$

Zusammenfassung

Heute haben wir

- Folgerbarkeit und Äquivalenz eingeführt
  - Nachweis mit Wahrheitstafeln
  - Nachweis ohne Wahrheitstafeln
  - Gegenbeispiel (mit und ohne Wahrheitstafeln)
- etliche Sätze zur Folgerbarkeit und Äquivalenz gesehen
- das Ersetzbarkeitstheorem eingeführt und mit struktureller Induktion bewiesen
- Literal, Klausel, duale Klausel, DNF und KNF definiert
- gesehen, wie ein KNF und DNF hergestellt werden kann

Morgen:

- Beweisen wir formal die Existenz von KNF und DNF
- lernen noch ein zweites Verfahren zur Herstellung der KNF und DNF kennen
- ...