

Formale Grundlagen der Informatik 1

Kapitel 15

Folgerbarkeit, Äquivalenzen und Normalformen

Frank Heitmann
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

8. Juni 2015

Syntax

Definition (Syntax der Aussagenlogik)

Mit AS_{AL} sei die Menge der *Aussagensymbol* der Aussagenlogik bezeichnet. Wir notieren diese üblicherweise als A_1, A_2, A_3, \dots oder A, B, C, \dots

Die Menge \mathcal{L}_{AL} der Formeln der Aussagenlogik definieren wir mittels

- ① Jedes $A \in AS_{AL}$ ist eine (atomare) Formel.
- ② Ist F eine Formel, so ist auch $\neg F$ eine Formel.
- ③ Sind F und G Formeln, so sind auch $(F \vee G), (F \wedge G), (F \Rightarrow G)$ und $(F \Leftrightarrow G)$ Formeln.
- ④ Es gibt keine anderen Formeln, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-3 erzeugt werden.

Semantik

Definition (Semantik der Aussagenlogik)

Eine **Belegung** ist eine Funktion $\mathcal{A}_{AS} : AS_{AL} \rightarrow \{0, 1\}$, die jedem Aussagesymbol einen Wahrheitswert zuordnet.

Zu dieser wird rekursiv eine Funktion $\mathcal{A} : \mathcal{L}_{AL} \rightarrow \{0, 1\}$ definiert, die alle Formeln bewertet. Es ist für jedes $A \in AS_{AL}$ ist $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}_{AS}(A)$ und für alle Formeln $F, G \in \mathcal{L}_{AL}$ sei

- $\mathcal{A}(\neg F) = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{A}(F) = 0$
- $\mathcal{A}((F \vee G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$ oder $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \wedge G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \Rightarrow G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 0$ oder $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \Leftrightarrow G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$

Semantik - Wahrheitstabellen

Wahrheitstabellen geben für die atomaren Formeln alle möglichen Belegungen an und für die anderen Formeln die entsprechenden Bewertungen. Sie stellen die Definition von eben übersichtlich dar.

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Wichtige Anmerkung

Hier und auf den nachfolgenden Folien verwenden wir bereits Klammerersparnisregeln. Wir führen diese später auch noch genauer ein. Insb. lassen wir äussere Klammern weg.

Kategorien

Definition

- Eine Belegung heißt **passend** zu einer Formel F , wenn sie jedem Aussagesymbol in F einen Wahrheitswert zuweist.
- Eine Belegung \mathcal{A} mit $\mathcal{A}(F) = 1$ nennt man ein **Modell** für F oder eine *erfüllende Belegung* von F . Ist $\mathcal{A}(F) = 0$, so ist \mathcal{A} eine *falsifizierende Belegung* von F .
- Ist ferner M eine (evtl. sogar unendliche) Formelmenge. So nennt man eine Belegung \mathcal{A} , die alle Formeln F aus M wahr macht, ebenfalls ein *Modell* für M und schreibt dafür bisweilen auch kurz $\mathcal{A}(M) = 1$.
- Zudem ist jede Belegung Modell der leeren Menge. Die leere Menge ist also erfüllbar.

Kategorien

Definition

- Besitzt F mindestens eine erfüllende Belegung (ein Modell) \mathcal{A} , so heißt F **erfüllbare** Formel. Notation: $\mathcal{A} \models F$
- Besitzt F mindestens eine falsifizierende Belegung \mathcal{A} , so heißt F **falsifizierbare** Formel. Notation: $\mathcal{A} \not\models F$
- Besitzt F mindestens eine erfüllende und mindestens eine falsifizierende Belegung so heißt F **kontingente** Formel.
- Besitzt F kein Modell, so heißt F **unerfüllbare** Formel oder **Kontradiktion**. Notation: $F \models$
- Ist F unter jeder möglichen Belegung „wahr“, so heißt F **(allgemein-)gültig** oder **Tautologie**. Notation: $\models F$

Fragen

Sei K eine Kontradiktion, T eine Tautologie und F eine kontingente Formel, was ist dann

$$(K \vee F) \wedge T$$

- 1 Unerfüllbar!
- 2 Allgemeingültig!
- 3 Kontingent!
- 4 Weiß ich nicht ...

Fragen

Sei K eine Kontradiktion, T eine Tautologie und F eine kontingente Formel, was ist dann

$$(K \wedge F) \vee T$$

- 1 Unerfüllbar!
- 2 Allgemeingültig!
- 3 Kontingent!
- 4 Weiß ich nicht ...

Fragen

Ist die folgende Wahrheitstafel korrekt?

A	B	$\neg B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow A$
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0

- 1 Ja!
- 2 Nein!
- 3 Nein! Fehler in ...
- 4 Ich seh' da nur 0en und 1en ...

Zur Nachbereitung

Zur Nachbereitung

- 1 Kontingent
- 2 Allgemeingültig
- 3 Fehler in der letzten Spalte, letzten Zeile

Folgerung

Definition (Folgerung)

Eine Formel F **folgt** genau dann aus einer Formelmengemenge M , wenn jede Belegung, die Modell für M ist, auch Modell für F ist.
Notation: $M \models F$.

Anmerkung

Im Falle einer einelementigen Menge $M = \{G\}$ notiert man auch $G \models F$ und sagt, F **folgt** aus G .

Folgerung: Beispiel 1

Definition (Folgerung)

Eine Formel F **folgt** genau dann aus einer Formelmengemenge M , wenn jede Belegung, die Modell für M ist, auch Modell für F ist.

Beweis von $A \wedge B \models A \vee B$ mit Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Jede Belegung, die Modell für $A \wedge B$ ist (nur die vierte Zeile) ist auch Modell für $A \vee B$, daher gilt $A \wedge B \models A \vee B$. (Das $A \vee B$ auch woanders wahr ist, ist egal!)

Folgerung: Beispiel 2

Beweis von $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\} \models A \Rightarrow C$ mit Wahrheitstafel:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Jede Belegung, die Modell für $A \Rightarrow B$ **und** Modell für $B \Rightarrow C$ ist (erste, zweite, vierte und achte Zeile) ist auch Modell für $A \Rightarrow C$, also gilt die Folgerbarkeitsbeziehung.

Folgerung: Beispiel 3

Beweis von $A \wedge B \wedge C \wedge D \models C \vee \neg D$ ohne Wahrheitstafel:

Sei \mathcal{A} ein Modell für $A \wedge B \wedge C \wedge D$. Nach der semantischen Definition von \wedge muss dann $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = \mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(D) = 1$ gelten womit wegen $\mathcal{A}(C) = 1$ und der Definition der Semantik von \vee auch $\mathcal{A}(C \vee \neg D) = 1$ gilt. Folglich ist jedes Modell von $A \wedge B \wedge C \wedge D$ auch Modell von $C \vee \neg D$.

Äquivalenz

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln F und G heißen **äquivalent** genau dann, wenn jede Belegung beiden Formeln den gleichen Wahrheitswert zuweist, wenn also $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Belegung \mathcal{A} gilt.

Notation: $F \equiv G$.

Anmerkung

- 1 Alternativ: Zwei Formeln sind genau dann äquivalent, wenn sie dieselben Modelle besitzen, also $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(G) = 1$ gilt.
- 2 Äquivalente Formeln haben denselben Wahrheitswertverlauf!

Äquivalenz: Beispiel 1

Beweis von $A \Leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ mit Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \wedge B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1

In der dritten und letzten Spalte sieht man, dass $A \Leftrightarrow B$ und $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ den gleichen Wahrheitswertverlauf haben. Damit sind die beiden Formeln äquivalent.

Äquivalenz: Beispiel 2

Widerlegung von $A \wedge B \equiv A \vee B$ durch Angabe eines Gegenbeispiels:

$A \wedge B$ und $A \vee B$ sind nicht äquivalent, da z.B. \mathcal{A} mit $\mathcal{A}(A) = 0$ und $\mathcal{A}(B) = 1$ zwar ein Modell von $A \vee B$ nicht aber eines von $A \wedge B$ ist. Damit haben die beiden Formeln nicht die gleichen Modelle und sind damit nicht äquivalent.

Wichtige Anmerkung

Ebenso widerlegt man Folgerbarkeitsbeziehungen $F \models G$ durch Angabe eines Gegenbeispiels also durch Angabe einer Belegung \mathcal{A} , die Modell für F ist, aber nicht für G .

Wichtige Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \text{Kommutativität:} \quad (F \wedge G) &\equiv (G \wedge F) \\ (F \vee G) &\equiv (G \vee F) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Assoziativität:} \quad (F \wedge (G \wedge H)) &\equiv ((F \wedge G) \wedge H) \\ (F \vee (G \vee H)) &\equiv ((F \vee G) \vee H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Distributivität:} \quad (F \wedge (G \vee H)) &\equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H)) \\ (F \vee (G \wedge H)) &\equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H)) \end{aligned}$$

$$\text{Doppelnegation:} \quad \neg\neg F \equiv F$$

$$\begin{aligned} \text{de Morgans Regeln:} \quad \neg(F \wedge G) &\equiv (\neg F \vee \neg G) \\ \neg(F \vee G) &\equiv (\neg F \wedge \neg G) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Elimination von } \Leftrightarrow: \quad (F \Leftrightarrow G) &\equiv (F \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow F) \\ (F \Leftrightarrow G) &\equiv (F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G) \end{aligned}$$

$$\text{Elimination von } \Rightarrow: \quad (F \Rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$$

Weitere wichtige Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \text{Absorption:} \quad (F \wedge (F \vee G)) &\equiv F \\ (F \vee (F \wedge G)) &\equiv F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Idempotenz:} \quad (F \wedge F) &\equiv F \\ (F \vee F) &\equiv F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tautologieregeln} \quad (F \wedge \top) &\equiv F \\ (F \vee \top) &\equiv \top \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kontradiktionsregeln:} \quad (F \wedge \perp) &\equiv \perp \\ (F \vee \perp) &\equiv F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Komplement:} \quad (F \wedge \neg F) &\equiv \perp \\ (F \vee \neg F) &\equiv \top \end{aligned}$$

Anmerkung

Wichtige Anmerkung

- 1 Auf der letzten Folien waren \perp und \top Konstanten. Man müsste sie streng formal als neue syntaktische Konstrukte einführen. Sie sind dann atomare Formeln, die immer zu 0 (bei \perp) bzw. immer zu 1 (bei \top) ausgewertet werden.
- 2 Alle obigen Äquivalenzen kann man z.B. mit Wahrheitstafeln schnell beweisen.

Klammerersparnisregeln

Aufgrund der Äquivalenzen können wir uns auf folgende Regeln zur Klammerersparnis einigen:

- ① Die äußersten Klammern entfallen: $A \vee B$ statt $(A \vee B)$
- ② Bei mehrfacher Konjunktion oder Disjunktion entfällt die mehrfache Klammerung:
 $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C)) \equiv A \vee B \vee C$
- ③ Weiterhin **nicht** erlaubt sind $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ oder $A \vee B \wedge C$

Bemerkung

In einigen Büchern findet man auch die Regel, dass \neg am stärksten bindet, dann \wedge und \vee und als dritte \Rightarrow und \Leftrightarrow . Damit wäre dann z.B. auch $A \wedge B \Rightarrow C$ möglich. Wir wollen dies i.A. aber nicht benutzen. Eine Ausnahme sind Hornformeln in Implikationsschreibweise, zu denen wir später noch kommen.

Folgerung und Äquivalenz (Wdh.)

Definition (Folgerung)

Eine Formel F **folgt** genau dann aus einer Formelmenge M , wenn jede Belegung, die Modell für M ist, auch Modell für F ist.
Notation: $M \models F$ bzw. $G \models F$, wenn $M = \{G\}$.

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln F und G heißen **äquivalent** genau dann, wenn jede Belegung beiden Formeln den gleichen Wahrheitswert zuweist, wenn also $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Belegung \mathcal{A} gilt.
Notation: $F \equiv G$.

Fragen

Wenn $F \equiv G$ und $\models G$ gilt, dann gilt auch $\models F$

- ① Ja!
- ② Nein!
- ③ Weiß ich nicht ...

Fragen

Wenn $F \models$ und $G \models$ gilt, dann gilt $F \equiv G$

- ① Ja!
- ② Nein!
- ③ Weiß ich nicht ...

Einige Sätze

Satz

- ① Wenn $F \equiv G$ und $\models G$ gilt, dann gilt auch $\models F$
- ② Wenn $F \equiv G$ und $G \models$ gilt, dann gilt auch $F \models$
- ③ Wenn $\models F$ und $\models G$ gilt, dann gilt $F \equiv G$
- ④ Wenn $F \models$ und $G \models$ gilt, dann gilt $F \equiv G$

Beweis.

1. und 4. nachfolgend. 2. und 3. in den Präsenzaufgaben. \square

Einige Sätze

Satz

Wenn $F \equiv G$ und $\models G$ gilt, dann gilt auch $\models F$.

Beweis.

Sei \mathcal{A} eine zu F und G passende Belegung. Da G eine Tautologie ist, gilt $\mathcal{A}(G) = 1$. Da ferner $F \equiv G$ gilt, gilt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$, also auch $\mathcal{A}(F) = 1$. Damit ist jede Belegung Modell für F und folglich F eine Tautologie. \square

Einige Sätze

Satz

Wenn $F \models$ und $G \models$ gilt, dann gilt $F \equiv G$

Beweis.

Wir zeigen, dass $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Belegung \mathcal{A} gilt. Sei dazu \mathcal{A} eine zu F und G passende Belegung. Da sowohl F als auch G Kontradiktionen sind, gilt stets $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) = 0$ womit bereits alles gezeigt ist. \square

Sätze mit Folgerbarkeit

Satz

$F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$

Beweis.

Sei $F \equiv G$ und sei \mathcal{A} ein Modell für F . Wegen $F \equiv G$ ist \mathcal{A} auch ein Modell für G und damit gilt $F \models G$. Analog gilt auch $G \models F$. Gelte nun andersherum $F \models G$ und $G \models F$ und sei \mathcal{A} ein Modell für F . Wegen $F \models G$ gilt dann auch $\mathcal{A}(G) = 1$. Ist \mathcal{A}' ein Modell für G , dann ist \mathcal{A}' wegen $G \models F$ auch ein Modell für F . Damit haben F und G genau dieselben Modelle und folglich gilt $F \equiv G$. (Verallgemeinerung als Übungsaufgabe.) \square

Drei wichtige Sätze

Satz

- ① $F \equiv G$ genau dann, wenn $\models F \Leftrightarrow G$
- ② $F \models G$ genau dann, wenn $\models F \Rightarrow G$
- ③ $F \models G$ genau dann, wenn $F \wedge \neg G \models$

Beweis.

1. ist Präsenzaufgabe. Zu 2: Gelte $F \models G$ und sei \mathcal{A} eine zu F und G passende Belegung. Ist $\mathcal{A}(F) = 0$, so ist $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ aufgrund der Definition der Semantik von \Rightarrow . Ist $\mathcal{A}(F) = 1$, so ist wegen $F \models G$ auch $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit wieder $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ und folglich gilt $\models F \Rightarrow G$.

Sei umgekehrt $\models F \Rightarrow G$ und sei \mathcal{A} ein Modell für F . Wegen der Definition der Semantik von \Rightarrow folgt aus $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ (es gilt ja $\models F \Rightarrow G$) sofort $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit ist jedes Modell von F auch Modell von G und wir sind fertig. \square

Drei wichtige Sätze

Satz

- ① $F \equiv G$ genau dann, wenn $\models F \Leftrightarrow G$
- ② $F \models G$ genau dann, wenn $\models F \Rightarrow G$
- ③ $F \models G$ genau dann, wenn $F \wedge \neg G \models$

Beweis.

3. folgt aus 2. sofort aus der Äquivalenz $F \Rightarrow G \equiv \neg F \vee G$ und da die Negation einer Tautologie eine Kontradiktion ist (und umgekehrt) und da $\neg(\neg F \vee G) \equiv F \wedge \neg G$. \square

Verallgemeinerung

Die Aussagen

- ① $F \models G$ genau dann, wenn $\models F \Rightarrow G$
- ② $F \models G$ genau dann, wenn $F \wedge \neg G \models$

können verallgemeinert werden. Sei M eine beliebige Formelmengung, dann gilt:

- ① $M \cup \{F\} \models G$ genau dann, wenn $M \models F \Rightarrow G$
- ② $M \models G$ genau dann, wenn $M \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar ist.

Dabei ist eine Formelmengung unerfüllbar, wenn es keine Belegung gibt, die alle Formeln der Menge wahr macht.

Alle Sätze im Überblick

Satz

- ① Wenn $F \equiv G$ und $\models G$ gilt, dann gilt auch $\models F$
- ② Wenn $F \equiv G$ und $G \models$ gilt, dann gilt auch $F \models$
- ③ Wenn $\models F$ und $\models G$ gilt, dann gilt $F \equiv G$
- ④ Wenn $F \models$ und $G \models$ gilt, dann gilt $F \equiv G$
- ⑤ $F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$
- ⑥ Wenn $F_1 \equiv F_2$ und $G_1 \equiv G_2$ gilt, dann gilt $F_1 \models G_1$ genau dann, wenn $F_2 \models G_2$ gilt.
- ⑦ $F \equiv G$ genau dann, wenn $\models F \Leftrightarrow G$
- ⑧ $F \models G$ genau dann, wenn $\models F \Rightarrow G$
- ⑨ $F \models G$ genau dann, wenn $F \wedge \neg G \models$
- ⑩ $M \cup \{F\} \models G$ genau dann, wenn $M \models F \Rightarrow G$
- ⑪ $M \models G$ genau dann, wenn $M \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar ist.

Normalformen

Wir wollen jetzt

- die Äquivalenzen nutzen, um Teilformeln zu ersetzen und
- so zu einer Normalform kommen

Die Normalform hat verschiedene Vorteile:

- Einfach strukturiert (daher gut für Beweis, Algorithmen, ...)
- Eigenschaften lassen sich bisweilen leichter ablesen/ermitteln.

Ersetzungen

Unser Ziel ist es zunächst Teilformeln ersetzen zu dürfen, also aus

$$A \wedge (B \Rightarrow C)$$

z.B.

$$A \wedge (\neg B \vee C)$$

zu machen. Die Rechtfertigung dafür wird die Äquivalenz $B \Rightarrow C \equiv \neg B \vee C$ sein. Dass wir dies tatsächlich in Teilformeln so ersetzen dürfen, sagt uns das *Ersetzbarkeitstheorem*.

Ersetzbarkeitstheorem

Satz (Ersetzbarkeitstheorem)

Seien F und G äquivalente Formeln und sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Formel F als Teilformel. Gehe H' aus H hervor, indem ein Vorkommen von F (in H) durch G ersetzt wird. Dann sind H und H' äquivalent.

Ersetzt man also eine Teilformel F einer Formel H durch eine äquivalente Formel, so ist die entstehende Formel H' zur ursprünglichen H äquivalent.

Der Satz ist die Rechtfertigung für die Schreibweise $A \wedge (B \Rightarrow C) \equiv A \wedge (\neg B \vee C)$.

Der Beweis erfolgt nun mittels struktureller Induktion...

Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

Beweis

Induktionsanfang. Sei H eine atomare Formel und gehe H' durch Ersetzen von F durch G aus H hervor. Dann muss $H = F$ und $H' = G$ gelten und aus $F \equiv G$ folgt dann sofort $H = F \equiv G = H'$ also $H \equiv H'$.

Induktionsannahme. Wir nehmen an, dass H_1 und H_2 Formeln sind, für die gilt: Für jede Formel H'_1 bzw. H'_2 , die durch Ersetzung von F durch G aus H_1 bzw. H_2 hervorgegangen ist, gilt $H_1 \equiv H'_1$ bzw. $H_2 \equiv H'_2$.

Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

Induktionsschritt. Ist $F = H$, so verfahren wir wie im Induktionsanfang und sind fertig. Nachfolgend genügt es also den Fall zu betrachten, dass F eine echte Teilformel von H ist.
Fall $H = \neg H_1$. Dann ist F eine Teilformel von H_1 und es gibt H'_1 , das aus H_1 durch Ersetzen von F durch G entsteht und so, dass $H' = \neg H'_1$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H'_1$. Sei nun \mathcal{A} eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H'_1) = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H'_1$ und wegen der Definition der Semantik von \neg ist dann auch $\mathcal{A}(\neg H'_1) = \mathcal{A}(\neg H_1)$ also auch $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H')$ und damit $H \equiv H'$.

Äquivalenzumformungen

Ergebnis

Wir dürfen nun dank des Ersetzbarkeitstheorems Teilformeln durch andere Formeln ersetzen, sofern diese zu der gewählten Teilformel äquivalent sind.

$$\neg A \Rightarrow \neg \neg B \equiv \neg A \Rightarrow B \equiv \neg \neg A \vee B \equiv A \vee B$$

Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

Induktionsschritt (Fortsetzung). Fall $H = H_1 \vee H_2$.
Angenommen F ist eine Teilformel von H_1 (der andere Fall ist analog). Dann gibt es wieder ein H'_1 , das aus H_1 durch Ersetzen von F durch G entsteht und so, dass $H' = H'_1 \vee H_2$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H'_1$. Sei nun \mathcal{A} eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H'_1) = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H'_1$ und ähnlich wie eben folgt wegen der Definition der Semantik von \vee dann $\mathcal{A}(H') = \mathcal{A}(H'_1 \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2) = \mathcal{A}(H)$ und damit $H' \equiv H$. Die anderen Fälle gehen ganz analog, was den Beweis abschließt.

Anmerkung

Wichtig ist hier, dass $\mathcal{A}(H'_1 \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2)$ gilt. Dies folgt aus der Definition von \vee und wegen $\mathcal{A}(H'_1) = \mathcal{A}(H_1)$. Man überlegt sich, was passiert, wenn die einzelnen Teilformeln zu 0 oder 1 ausgewertet werden und dass tatsächlich immer das gleiche rauskommt.

Normalformen - Motivation

Wir wollen nun eine **Normalform** für aussagenlogische Formeln einführen, d.h. eine Form

- in die wir jede aussagenlogische Formel durch Äquivalenzumformungen bringen können und
- die eine praktische Form hat (z.B. für Berechnungen)

Dazu erst ein paar Begriffe ...

Normalformen - Begriffe

Definition

- ① Ein **Literal** ist eine atomare Formel oder eine negierte atomare Formel.
- ② Ein **positives Literal** ist eine atomare Formel, ein **negatives Literal** eine negierte atomare Formel.
- ③ Zwei Literale heißen **komplementär**, wenn sie positives und negatives Literal der gleichen atomaren Formel sind. Bspw. ist A das komplementäre Literal zu $\neg A$ und umgekehrt.
- ④ Literale und Disjunktionen von Literalen werden als **Klauseln** bezeichnet.
- ⑤ Literale und Konjunktionen von Literalen werden als **duale Klauseln** bezeichnet.

Normalformen - Begriffe 2

Definition

- ① Eine Formel F ist in **konjunktiver Normalform** (KNF), wenn sie eine Konjunktion von Klauseln ist, also eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, z.B.

$$(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge B \wedge (\neg C \vee \neg B) \wedge (A \vee B \vee C)$$

- ② Eine Formel F ist in **disjunktiver Normalform** (DNF), wenn sie eine Disjunktion von dualen Klauseln ist, also eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen, z.B.

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg A \wedge C)$$

Eigenschaften der KNF und DNF

Merkhilfe

KNF: $(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge B \wedge (\neg C \vee \neg B)$

DNF: $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg A \wedge C)$

Satz

- ① Eine KNF ist gültig gdw. alle ihre Klauseln gültig sind gdw. in allen Klauseln mindestens ein Paar komplementäre Literale vorkommt.
- ② Eine DNF ist unerfüllbar gdw. alle ihre dualen Klauseln unerfüllbar sind gdw. in allen dualen Klauseln mindestens ein Paar komplementäre Literale vorkommt.
- ③ Ein Erfüllbarkeitstest für DNFs ist effizient implementierbar (Laufzeit ist in P). (Für KNFs gilt dies wahrscheinlich nicht! Hier war SAT NP-vollständig.)

KNF und DNF

Satz

Zu jeder Formel F gibt es (mindestens) eine konjunktive Normalform und (mindestens) eine disjunktive Normalform, d.h. es gibt Formeln K in konjunktiver Normalform und D in disjunktiver Normalform mit $F \equiv K \equiv D$.

Verfahren für die Erstellung von KNF und DNF

- 1 Ersetze alle Teilformeln der Form
 - $(G \Leftrightarrow H)$ durch $(\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G)$ [Elimination von \Leftrightarrow]
 - $(G \Rightarrow H)$ durch $(\neg G \vee H)$ [Elimination von \Rightarrow]
- 2 Ersetze alle Teilformeln der Form
 - $\neg\neg G$ durch G [Doppelte Negation]
 - $\neg(G \wedge H)$ durch $(\neg G \vee \neg H)$ [de Morgan]
 - $\neg(G \vee H)$ durch $(\neg G \wedge \neg H)$ [de Morgan]
- 3 Um die KNF zu bilden ersetze alle Teilformeln der Form
 - $(F \vee (G \wedge H))$ durch $((F \vee G) \wedge (F \vee H))$ [Distributivität]
 - $((F \wedge G) \vee H)$ durch $((F \vee H) \wedge (G \vee H))$ [Distributivität]
- 4 Um die DNF zu bilden ersetze alle Teilformeln der Form
 - $(F \wedge (G \vee H))$ durch $((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$ [Distributivität]
 - $((F \vee G) \wedge H)$ durch $((F \wedge H) \vee (G \wedge H))$ [Distributivität]

Beispiel

$$\begin{aligned}
 &(A \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow D \\
 &\equiv (A \wedge (\neg B \vee C)) \Rightarrow D \\
 &\equiv \neg(A \wedge (\neg B \vee C)) \vee D \\
 &\equiv (\neg A \vee \neg(\neg B \vee C)) \vee D \\
 &\equiv (\neg A \vee (\neg\neg B \wedge \neg C)) \vee D \\
 &\equiv (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \vee D \\
 &\equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee D \\
 &\equiv ((\neg A \vee B) \vee D) \wedge ((\neg A \vee \neg C) \vee D) \\
 &\equiv (\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D)
 \end{aligned}$$

Elimination von \Rightarrow
 Elimination von \Rightarrow
 de Morgan
 de Morgan
 Doppelte Negation
 Distributivität
 Distributivität
 Klammern

Zusammenfassung

Heute haben wir

- Folgerbarkeit und Äquivalenz eingeführt
 - Nachweis mit Wahrheitstafeln
 - Nachweis ohne Wahrheitstafeln
 - Gegenbeispiel (mit und ohne Wahrheitstafeln)
- etliche Sätze zur Folgerbarkeit und Äquivalenz gesehen
- das Ersetzbarkeitstheorem eingeführt und mit struktureller Induktion bewiesen
- Literal, Klausel, duale Klausel, DNF und KNF definiert
- gesehen, wie ein KNF und DNF hergestellt werden kann

Morgen:

- Beweisen wir formal die Existenz von KNF und DNF
- lernen noch ein zweites Verfahren zur Herstellung der KNF und DNF kennen
- ...