# Formale Grundlagen der Informatik 1
# Kapitel 15
# Folgerbarkeit, Äquivalenzen und Normalformen

Frank Heitmann
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

8. Juni 2015

# Syntax

## Definition (Syntax der Aussagenlogik)

Mit $AS_{AL}$ sei die Menge der *Aussagensymbol* der Aussagenlogik bezeichnet. Wir notieren diese üblicherweise als $A_1, A_2, A_3, \ldots$ oder $A, B, C, \ldots$.

Die Menge $\mathcal{L}_{AL}$ der Formeln der Aussagenlogik definieren wir mittels

1. Jedes $A \in AS_{AL}$ ist eine (atomare) Formel.
2. Ist $F$ eine Formel, so ist auch $\neg F$ eine Formel.
3. Sind $F$ und $G$ Formeln, so sind auch $(F \vee G), (F \wedge G), (F \Rightarrow G)$ und $(F \Leftrightarrow G)$ Formeln.
4. Es gibt keine anderen Formeln, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-3 erzeugt werden.

# Semantik

## Definition (Semantik der Aussagenlogik)

Eine **Belegung** ist eine Funktion $\mathcal{A}_{AS} : AS_{AL} \to \{0,1\}$, die jedem Aussagesymbol einen Wahrheitswert zuordnet.
Zu dieser wird rekursiv eine Funktion $\mathcal{A} : \mathcal{L}_{AL} \to \{0,1\}$ definiert, die alle Formeln bewertet. Es ist für jedes $A \in AS_{AL}$ ist $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}_{AS}(A)$ und für alle Formeln $F, G \in \mathcal{L}_{AL}$ sei

- $\mathcal{A}(\neg F) = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{A}(F) = 0$
- $\mathcal{A}((F \vee G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$ oder $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \wedge G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \Rightarrow G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 0$ oder $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \Leftrightarrow G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$

# Semantik - Wahrheitstafeln

**Wahrheitstafeln** geben für die atomaren Formeln alle möglichen Belegungen an und für die anderen Formeln die entsprechenden Bewertungen. Sie stellen die Definition von eben übersichtlich dar.

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $A \vee B$ | $A \wedge B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Wichtige Anmerkung**

Hier und auf den nachfolgenden Folien verwenden wir bereits Klammerersparnisregeln. Wir führen diese später auch noch genauer ein. Insb. lassen wir äussere Klammern weg.

# Kategorien

## Definition

- Eine Belegung heißt **passend** zu einer Formel $F$, wenn sie jedem Aussagesymbol in $F$ einen Wahrheitswert zuweist.
- Eine Belegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$ nennt man ein **Modell** für $F$ oder eine *erfüllende Belegung* von $F$. Ist $\mathcal{A}(F) = 0$, so ist $\mathcal{A}$ eine *falsifizierende Belegung* von $F$.
- Ist ferner $M$ eine (evtl. sogar unendliche) Formelmenge. So nennt man eine Belegung $\mathcal{A}$, die alle Formeln $F$ aus $M$ wahr macht, ebenfalls ein *Modell* für $M$ und schreibt dafür bisweilen auch kurz $\mathcal{A}(M) = 1$.
- Zudem ist jede Belegung Modell der leeren Menge. Die leere Menge ist also erfüllbar.

# Kategorien

## Definition

- Besitzt $F$ mindestens eine erfüllende Belegung (ein Modell) $\mathcal{A}$, so heißt $F$ **erfüllbare** Formel. Notation: $\mathcal{A} \models F$
- Besitzt $F$ mindestens eine falsifizierende Belegung $\mathcal{A}$, so heißt $F$ **falsifizierbare** Formel. Notation: $\mathcal{A} \not\models F$
- Besitzt $F$ mindestens eine erfüllende und mindestens eine falsifizierende Belegung so heißt $F$ **kontingente** Formel.
- Besitzt $F$ kein Modell, so heißt $F$ **unerfüllbare** Formel oder **Kontradiktion**. Notation: $F \models$
- Ist $F$ unter jeder möglichen Belegung „wahr", so heißt $F$ **(allgemein-)gültig** oder **Tautologie**. Notation: $\models F$

# Fragen

Sei $K$ eine Kontradiktion, $T$ eine Tautologie und $F$ eine kontingente Formel, was ist dann

$$(K \vee F) \wedge T$$

1. Unerfüllbar!
2. Allgemeingültig!
3. Kontingent!
4. Weiß ich nicht ...

# Fragen

Sei $K$ eine Kontradiktion, $T$ eine Tautologie und $F$ eine kontingente Formel, was ist dann

$$(K \wedge F) \vee T$$

1. Unerfüllbar!
2. Allgemeingültig!
3. Kontingent!
4. Weiß ich nicht ...

# Fragen

Ist die folgende Wahrheitstafel korrekt?

| $A$ | $B$ | $\neg B$ | $A \Leftrightarrow B$ | $A \Rightarrow B$ | $\neg B \Rightarrow A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

1. Ja!
2. Nein!
3. Nein! Fehler in ...
4. Ich seh' da nur 0en und 1en ...

# Zur Nachbereitung

## Zur Nachbereitung

1. Kontingent
2. Allgemeingültig
3. Fehler in der letzten Spalte, letzten Zeile

# Folgerung

## Definition (Folgerung)

Eine Formel $F$ **folgt** genau dann aus einer Formelmenge $M$, wenn jede Belegung, die Modell für $M$ ist, auch Modell für $F$ ist.
Notation: $M \models F$.

## Anmerkung

Im Falle einer einelementigen Menge $M = \{G\}$ notiert man auch $G \models F$ und sagt, $F$ **folgt** aus $G$.

# Folgerung

## Definition (Folgerung)

Eine Formel $F$ **folgt** genau dann aus einer Formelmenge $M$, wenn jede Belegung, die Modell für $M$ ist, auch Modell für $F$ ist.
Notation: $M \models F$.

## Anmerkung

Im Falle einer einelementigen Menge $M = \{G\}$ notiert man auch $G \models F$ und sagt, $F$ **folgt** aus $G$.

# Folgerung: Beispiel 1

## Definition (Folgerung)

Eine Formel $F$ **folgt** genau dann aus einer Formelmenge $M$, wenn jede Belegung, die Modell für $M$ ist, auch Modell für $F$ ist.

Beweis von $A \wedge B \models A \vee B$ mit Wahrheitstafel:

# Folgerung: Beispiel 1

## Definition (Folgerung)

Eine Formel $F$ **folgt** genau dann aus einer Formelmenge $M$, wenn jede Belegung, die Modell für $M$ ist, auch Modell für $F$ ist.

Beweis von $A \wedge B \models A \vee B$ mit Wahrheitstafel:

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Jede Belegung, die Modell für $A \wedge B$ ist (nur die vierte Zeile) ist auch Modell für $A \vee B$, daher gilt $A \wedge B \models A \vee B$. (Das $A \vee B$ auch woanders wahr ist, ist egal!)

# Folgerung: Beispiel 2

Beweis von $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\} \models A \Rightarrow C$ mit Wahrheitstafel:

# Folgerung: Beispiel 2

Beweis von $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\} \models A \Rightarrow C$ mit Wahrheitstafel:

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \Rightarrow B$ | $B \Rightarrow C$ | $A \Rightarrow C$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Folgerung: Beispiel 2

Beweis von $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\} \models A \Rightarrow C$ mit Wahrheitstafel:

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \Rightarrow B$ | $B \Rightarrow C$ | $A \Rightarrow C$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Jede Belegung, die Modell für $A \Rightarrow B$ **und** Modell für $B \Rightarrow C$ ist (erste, zweite, vierte und achte Zeile) ist auch Modell für $A \Rightarrow C$, also gilt die Folgerbarkeitsbeziehung.

# Folgerung: Beispiel 3

**Beweis von $A \wedge B \wedge C \wedge D \models C \vee \neg D$ ohne Wahrheitstafel:**

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $A \wedge B \wedge C \wedge D$. Nach der semantischen Definition von $\wedge$ muss dann $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = \mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(D) = 1$ gelten womit wegen $\mathcal{A}(C) = 1$ und der Definition der Semantik von $\vee$ auch $\mathcal{A}(C \vee \neg D) = 1$ gilt. Folglich ist jedes Modell von $A \wedge B \wedge C \wedge D$ auch Modell von $C \vee \neg D$.

# Folgerung: Beispiel 3

**Beweis von $A \land B \land C \land D \models C \lor \neg D$ ohne Wahrheitstafel:**

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $A \land B \land C \land D$. Nach der semantischen Definition von $\land$ muss dann $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = \mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(D) = 1$ gelten womit wegen $\mathcal{A}(C) = 1$ und der Definition der Semantik von $\lor$ auch $\mathcal{A}(C \lor \neg D) = 1$ gilt. Folglich ist jedes Modell von $A \land B \land C \land D$ auch Modell von $C \lor \neg D$.

# Folgerung: Beispiel 3

**Beweis von $A \wedge B \wedge C \wedge D \models C \vee \neg D$ ohne Wahrheitstafel:**

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $A \wedge B \wedge C \wedge D$. Nach der semantischen Definition von $\wedge$ muss dann $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = \mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(D) = 1$ gelten womit wegen $\mathcal{A}(C) = 1$ und der Definition der Semantik von $\vee$ auch $\mathcal{A}(C \vee \neg D) = 1$ gilt. Folglich ist jedes Modell von $A \wedge B \wedge C \wedge D$ auch Modell von $C \vee \neg D$.

# Folgerung: Beispiel 3

**Beweis von $A \wedge B \wedge C \wedge D \models C \vee \neg D$ ohne Wahrheitstafel:**

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $A \wedge B \wedge C \wedge D$. Nach der semantischen Definition von $\wedge$ muss dann $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = \mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(D) = 1$ gelten womit wegen $\mathcal{A}(C) = 1$ und der Definition der Semantik von $\vee$ auch $\mathcal{A}(C \vee \neg D) = 1$ gilt. Folglich ist jedes Modell von $A \wedge B \wedge C \wedge D$ auch Modell von $C \vee \neg D$.

# Folgerung: Beispiel 3

**Beweis von $A \wedge B \wedge C \wedge D \models C \vee \neg D$ ohne Wahrheitstafel:**

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $A \wedge B \wedge C \wedge D$. Nach der semantischen Definition von $\wedge$ muss dann $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = \mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(D) = 1$ gelten womit wegen $\mathcal{A}(C) = 1$ und der Definition der Semantik von $\vee$ auch $\mathcal{A}(C \vee \neg D) = 1$ gilt. Folglich ist jedes Modell von $A \wedge B \wedge C \wedge D$ auch Modell von $C \vee \neg D$.

# Äquivalenz

## Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F$ und $G$ heißen **äquivalent** genau dann, wenn jede Belegung beiden Formeln den gleichen Wahrheitswert zuweist, wenn also $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt.
Notation: $F \equiv G$.

## Anmerkung

1. Alternativ: Zwei Formeln sind genau dann äquivalent, wenn sie dieselben Modelle besitzen, also $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(G) = 1$ gilt.
2. Äquivalente Formeln haben denselben Warhheitswerteverlauf!

# Äquivalenz

## Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F$ und $G$ heißen **äquivalent** genau dann, wenn jede Belegung beiden Formeln den gleichen Wahrheitswert zuweist, wenn also $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt.
Notation: $F \equiv G$.

## Anmerkung

1. Alternativ: Zwei Formeln sind genau dann äquivalent, wenn sie dieselben Modelle besitzen, also $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(G) = 1$ gilt.
2. Äquivalente Formeln haben denselben Warhheitswerteverlauf!

# Äquivalenz: Beispiel 1

Beweis von $A \Leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ mit Wahrheitstafel:

# Äquivalenz: Beispiel 1

Beweis von $A \Leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ mit Wahrheitstafel:

| $A$ | $B$ | $A \Leftrightarrow B$ | $A \wedge B$ | $\neg A \wedge \neg B$ | $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

# Äquivalenz: Beispiel 1

Beweis von $A \Leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ mit Wahrheitstafel:

| $A$ | $B$ | $A \Leftrightarrow B$ | $A \wedge B$ | $\neg A \wedge \neg B$ | $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

In der dritten und letzten Spalte sieht man, dass $A \Leftrightarrow B$ und $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ den gleichen Wahrheitswerteverlauf haben. Damit sind die beiden Formeln äquivalent.

# Äquivalenz: Beispiel 2

Widerlegung von $A \wedge B \equiv A \vee B$ durch Angabe eines Gegenbeispiels:

$A \wedge B$ und $A \vee B$ sind nicht äquivalent, da z.B. $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(A) = 0$ und $\mathcal{A}(B) = 1$ zwar ein Modell von $A \vee B$ nicht aber eines von $A \wedge B$ ist. Damit haben die beiden Formeln nicht die gleichen Modelle und sind damit nicht äquivalent.

**Wichtige Anmerkung**

Ebenso widerlegt man Folgerbarkeitsbeziehungen $F \models G$ durch Angabe eines Gegenbeispiels also durch Angabe einer Belegung $\mathcal{A}$, die Modell für $F$ ist, aber nicht für $G$.

# Äquivalenz: Beispiel 2

Widerlegung von $A \wedge B \equiv A \vee B$ durch Angabe eines Gegenbeispiels:

$A \wedge B$ und $A \vee B$ sind nicht äquivalent, da z.B. $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(A) = 0$ und $\mathcal{A}(B) = 1$ zwar ein Modell von $A \vee B$ nicht aber eines von $A \wedge B$ ist. Damit haben die beiden Formeln nicht die gleichen Modelle und sind damit nicht äquivalent.

**Wichtige Anmerkung**

Ebenso widerlegt man Folgerbarkeitsbeziehungen $F \models G$ durch Angabe eines Gegenbeispiels also durch Angabe einer Belegung $\mathcal{A}$, die Modell für $F$ ist, aber nicht für $G$.

# Äquivalenz: Beispiel 2

Widerlegung von $A \wedge B \equiv A \vee B$ durch Angabe eines Gegenbeispiels:

$A \wedge B$ und $A \vee B$ sind nicht äquivalent, da z.B. $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(A) = 0$ und $\mathcal{A}(B) = 1$ zwar ein Modell von $A \vee B$ nicht aber eines von $A \wedge B$ ist. Damit haben die beiden Formeln nicht die gleichen Modelle und sind damit nicht äquivalent.

**Wichtige Anmerkung**

Ebenso widerlegt man Folgerbarkeitsbeziehungen $F \models G$ durch Angabe eines Gegenbeispiels also durch Angabe einer Belegung $\mathcal{A}$, die Modell für $F$ ist, aber nicht für $G$.

# Äquivalenz: Beispiel 2

Widerlegung von $A \wedge B \equiv A \vee B$ durch Angabe eines Gegenbeispiels:

$A \wedge B$ und $A \vee B$ sind nicht äquivalent, da z.B. $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(A) = 0$ und $\mathcal{A}(B) = 1$ zwar ein Modell von $A \vee B$ nicht aber eines von $A \wedge B$ ist. Damit haben die beiden Formeln nicht die gleichen Modelle und sind damit nicht äquivalent.

**Wichtige Anmerkung**

Ebenso widerlegt man Folgerbarkeitsbeziehungen $F \models G$ durch Angabe eines Gegenbeispiels also durch Angabe einer Belegung $\mathcal{A}$, die Modell für $F$ ist, aber nicht für $G$.

# Äquivalenz: Beispiel 2

Widerlegung von $A \wedge B \equiv A \vee B$ durch Angabe eines Gegenbeispiels:

$A \wedge B$ und $A \vee B$ sind nicht äquivalent, da z.B. $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(A) = 0$ und $\mathcal{A}(B) = 1$ zwar ein Modell von $A \vee B$ nicht aber eines von $A \wedge B$ ist. Damit haben die beiden Formeln nicht die gleichen Modelle und sind damit nicht äquivalent.

**Wichtige Anmerkung**

Ebenso widerlegt man Folgerbarkeitsbeziehungen $F \models G$ durch Angabe eines Gegenbeispiels also durch Angabe einer Belegung $\mathcal{A}$, die Modell für $F$ ist, aber nicht für $G$.

# Äquivalenz: Beispiel 2

Widerlegung von $A \wedge B \equiv A \vee B$ durch Angabe eines Gegenbeispiels:

$A \wedge B$ und $A \vee B$ sind nicht äquivalent, da z.B. $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(A) = 0$ und $\mathcal{A}(B) = 1$ zwar ein Modell von $A \vee B$ nicht aber eines von $A \wedge B$ ist. Damit haben die beiden Formeln nicht die gleichen Modelle und sind damit nicht äquivalent.

**Wichtige Anmerkung**

Ebenso widerlegt man Folgerbarkeitsbeziehungen $F \models G$ durch Angabe eines Gegenbeispiels also durch Angabe einer Belegung $\mathcal{A}$, die Modell für $F$ ist, aber nicht für $G$.

# Wichtige Äquivalenzen

| | | | |
|---|---|---|---|
| Kommutativität: | $(F \wedge G)$ | $\equiv$ | $(G \wedge F)$ |
| | $(F \vee G)$ | $\equiv$ | $(G \vee F)$ |
| Assoziativität: | $(F \wedge (G \wedge H))$ | $\equiv$ | $((F \wedge G) \wedge H)$ |
| | $(F \vee (G \vee H))$ | $\equiv$ | $((F \vee G) \vee H)$ |
| Distributivität: | $(F \wedge (G \vee H))$ | $\equiv$ | $((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$ |
| | $(F \vee (G \wedge H))$ | $\equiv$ | $((F \vee G) \wedge (F \vee H))$ |
| Doppelnegation: | $\neg\neg F$ | $\equiv$ | $F$ |
| de Morgans Regeln: | $\neg(F \wedge G)$ | $\equiv$ | $(\neg F \vee \neg G)$ |
| | $\neg(F \vee G)$ | $\equiv$ | $(\neg F \wedge \neg G)$ |
| Elimination von $\Leftrightarrow$: | $(F \Leftrightarrow G)$ | $\equiv$ | $(F \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow F)$ |
| | $(F \Leftrightarrow G)$ | $\equiv$ | $(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$ |
| Elimination von $\Rightarrow$: | $(F \Rightarrow G)$ | $\equiv$ | $(\neg F \vee G)$ |

# Weitere wichtige Äquivalenzen

| | | | |
|---|---|---|---|
| Absorption: | $(F \land (F \lor G))$ | $\equiv$ | $F$ |
| | $(F \lor (F \land G))$ | $\equiv$ | $F$ |
| Idempotenz: | $(F \land F)$ | $\equiv$ | $F$ |
| | $(F \lor F)$ | $\equiv$ | $F$ |
| Tautologieregeln | $(F \land \top)$ | $\equiv$ | $F$ |
| | $(F \lor \top)$ | $\equiv$ | $\top$ |
| Kontradiktionsregeln: | $(F \land \bot)$ | $\equiv$ | $\bot$ |
| | $(F \lor \bot)$ | $\equiv$ | $F$ |
| Komplement: | $(F \land \neg F)$ | $\equiv$ | $\bot$ |
| | $(F \lor \neg F)$ | $\equiv$ | $\top$ |

# Anmerkung

## Wichtige Anmerkung

1. Auf der letzten Folien waren $\perp$ und $\top$ Konstanten. Man müsste sie streng formal als neue syntaktische Konstrukte einführen. Sie sind dann atomare Formeln, die immer zu 0 (bei $\perp$) bzw. immer zu 1 (bei $\top$) ausgewertet werden.
2. Alle obigen Äquivalenzen kann man z.B. mit Wahrheitstafeln schnell beweisen.

# Klammerersparnisregeln

Aufgrund der Äquivalenzen können wir uns auf folgende Regeln zur Klammerersparnis einigen:

1. Die äußersten Klammern entfallen: $A \vee B$ statt $(A \vee B)$
2. Bei mehrfacher Konjuktion oder Disjunktion entfällt die mehrfache Klammerung:
   $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C)) \equiv A \vee B \vee C$
3. Weiterhin **nicht** erlaubt sind $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ oder $A \vee B \wedge C$

**Bemerkung**

In einigen Büchern findet man auch die Regel, dass $\neg$ am stärksten bindet, dann $\wedge$ und $\vee$ und als dritte $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$. Damit wäre dann z.B. auch $A \wedge B \Rightarrow C$ möglich. Wir wollen dies i.A. aber nicht benutzen. Eine Ausnahme sind Hornformeln in Implikationsschreibweise, zu denen wir später noch kommen.

# Klammerersparnisregeln

Aufgrund der Äquivalenzen können wir uns auf folgende Regeln zur Klammerersparnis einigen:

1. Die äußersten Klammern entfallen: $A \vee B$ statt $(A \vee B)$
2. Bei mehrfacher Konjuktion oder Disjunktion entfällt die mehrfache Klammerung:
   $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C)) \equiv A \vee B \vee C$
3. Weiterhin **nicht** erlaubt sind $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ oder $A \vee B \wedge C$

## Bemerkung

In einigen Büchern findet man auch die Regel, dass $\neg$ am stärksten bindet, dann $\wedge$ und $\vee$ und als dritte $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$. Damit wäre dann z.B. auch $A \wedge B \Rightarrow C$ möglich. Wir wollen dies i.A. aber nicht benutzen. Eine Ausnahme sind Hornformeln in Implikationsschreibweise, zu denen wir später noch kommen.

# Folgerung und Äquivalenz (Wdh.)

## Definition (Folgerung)

Eine Formel $F$ **folgt** genau dann aus einer Formelmenge $M$, wenn jede Belegung, die Modell für $M$ ist, auch Modell für $F$ ist.
Notation: $M \models F$ bzw. $G \models F$, wenn $M = \{G\}$.

## Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln $F$ und $G$ heißen **äquivalent** genau dann, wenn jede Belegung beiden Formeln den gleichen Wahrheitswert zuweist, wenn also $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt.
Notation: $F \equiv G$.

# Fragen

Wenn $F \equiv G$ und $\models G$ gilt, dann gilt auch $\models F$

1. Ja!
2. Nein!
3. Weiß ich nicht …

# Fragen

Wenn $F \models$ und $G \models$ gilt, dann gilt $F \equiv G$

1. Ja!
2. Nein!
3. Weiß ich nicht ...

# Einige Sätze

**Satz**

1. *Wenn* $F \equiv G$ *und* $\models G$ *gilt, dann gilt auch* $\models F$
2. *Wenn* $F \equiv G$ *und* $G \models$ *gilt, dann gilt auch* $F \models$
3. *Wenn* $\models F$ *und* $\models G$ *gilt, dann gilt* $F \equiv G$
4. *Wenn* $F \models$ *und* $G \models$ *gilt, dann gilt* $F \equiv G$

**Beweis.**

1. und 4. nachfolgend. 2. und 3. in den Präsenzaufgaben. $\square$

# Einige Sätze

**Satz**

*Wenn $F \equiv G$ und $\models G$ gilt, dann gilt auch $\models F$.*

**Beweis.**

Sie $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Da $G$ eine Tautologie ist, gilt $\mathcal{A}(G) = 1$. Da ferner $F \equiv G$ gilt, gilt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$, also auch $\mathcal{A}(F) = 1$. Damit ist jede Belegung Modell für $F$ und folglich $F$ eine Tautologie. $\square$

# Einige Sätze

**Satz**

*Wenn $F \equiv G$ und $\models G$ gilt, dann gilt auch $\models F$.*

**Beweis.**

Sie $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Da $G$ eine Tautologie ist, gilt $\mathcal{A}(G) = 1$. Da ferner $F \equiv G$ gilt, gilt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$, also auch $\mathcal{A}(F) = 1$. Damit ist jede Belegung Modell für $F$ und folglich $F$ eine Tautologie. $\square$

# Einige Sätze

**Satz**

*Wenn $F \equiv G$ und $\models G$ gilt, dann gilt auch $\models F$.*

**Beweis.**

Sie $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Da $G$ eine Tautologie ist, gilt $\mathcal{A}(G) = 1$. Da ferner $F \equiv G$ gilt, gilt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$, also auch $\mathcal{A}(F) = 1$. Damit ist jede Belegung Modell für $F$ und folglich $F$ eine Tautologie. $\square$

# Einige Sätze

**Satz**

*Wenn $F \equiv G$ und $\models G$ gilt, dann gilt auch $\models F$.*

**Beweis.**

Sie $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Da $G$ eine Tautologie ist, gilt $\mathcal{A}(G) = 1$. Da ferner $F \equiv G$ gilt, gilt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$, also auch $\mathcal{A}(F) = 1$. Damit ist jede Belegung Modell für $F$ und folglich $F$ eine Tautologie. □

# Einige Sätze

**Satz**

*Wenn $F \equiv G$ und $\models G$ gilt, dann gilt auch $\models F$.*

**Beweis.**

Sie $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Da $G$ eine Tautologie ist, gilt $\mathcal{A}(G) = 1$. Da ferner $F \equiv G$ gilt, gilt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$, also auch $\mathcal{A}(F) = 1$. Damit ist jede Belegung Modell für $F$ und folglich $F$ eine Tautologie. □

# Einige Sätze

**Satz**

*Wenn $F \equiv G$ und $\models G$ gilt, dann gilt auch $\models F$.*

**Beweis.**

Sie $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Da $G$ eine Tautologie ist, gilt $\mathcal{A}(G) = 1$. Da ferner $F \equiv G$ gilt, gilt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$, also auch $\mathcal{A}(F) = 1$. Damit ist jede Belegung Modell für $F$ und folglich $F$ eine Tautologie. $\square$

# Einige Sätze

**Satz**

*Wenn $F \models$ und $G \models$ gilt, dann gilt $F \equiv G$*

**Beweis.**

Wir zeigen, dass $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt. Sei dazu $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Da sowohl $F$ als auch $G$ Kontradiktionen sind, gilt stets $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) = 0$ womit bereits alles gezeigt ist. □

# Einige Sätze

**Satz**

*Wenn $F \models$ und $G \models$ gilt, dann gilt $F \equiv G$*

**Beweis.**

Wir zeigen, dass $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt. Sei dazu $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Da sowohl $F$ als auch $G$ Kontradiktionen sind, gilt stets $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) = 0$ womit bereits alles gezeigt ist. □

# Einige Sätze

**Satz**

*Wenn $F \models$ und $G \models$ gilt, dann gilt $F \equiv G$*

**Beweis.**

Wir zeigen, dass $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt. Sei dazu $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Da sowohl $F$ als auch $G$ Kontradiktionen sind, gilt stets $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) = 0$ womit bereits alles gezeigt ist. □

# Einige Sätze

### Satz

*Wenn $F \models$ und $G \models$ gilt, dann gilt $F \equiv G$*

### Beweis.

Wir zeigen, dass $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt. Sei dazu $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Da sowohl $F$ als auch $G$ Kontradiktionen sind, gilt stets $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) = 0$ womit bereits alles gezeigt ist. $\square$

# Einige Sätze

**Satz**

*Wenn $F \models$ und $G \models$ gilt, dann gilt $F \equiv G$*

**Beweis.**

Wir zeigen, dass $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt. Sei dazu $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Da sowohl $F$ als auch $G$ Kontradiktionen sind, gilt stets $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) = 0$ womit bereits alles gezeigt ist. $\square$

# Sätze mit Folgerbarkeit

**Satz**

*$F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$*

**Beweis.**

Sei $F \equiv G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \equiv G$ ist $\mathcal{A}$ auch ein Modell für $G$ und damit gilt $F \models G$. Analog gilt auch $G \models F$.
Gelte nun andersherum $F \models G$ und $G \models F$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \models G$ gilt dann auch $\mathcal{A}(G) = 1$. Ist $\mathcal{A}'$ ein Modell für $G$, dann ist $\mathcal{A}'$ wegen $G \models F$ auch ein Modell für $F$. Damit haben $F$ und $G$ genau dieselben Modelle und folglich gilt $F \equiv G$.
(Verallgemeinerung als Übungsaufgabe.) $\square$

# Sätze mit Folgerbarkeit

**Satz**

*$F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$*

**Beweis.**

Sei $F \equiv G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \equiv G$ ist $\mathcal{A}$ auch ein Modell für $G$ und damit gilt $F \models G$. Analog gilt auch $G \models F$.
Gelte nun andersherum $F \models G$ und $G \models F$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \models G$ gilt dann auch $\mathcal{A}(G) = 1$. Ist $\mathcal{A}'$ ein Modell für $G$, dann ist $\mathcal{A}'$ wegen $G \models F$ auch ein Modell für $F$. Damit haben $F$ und $G$ genau dieselben Modelle und folglich gilt $F \equiv G$.
(Verallgemeinerung als Übungsaufgabe.) $\square$

# Sätze mit Folgerbarkeit

**Satz**

*$F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$*

**Beweis.**

Sei $F \equiv G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \equiv G$ ist $\mathcal{A}$ auch ein Modell für $G$ und damit gilt $F \models G$. Analog gilt auch $G \models F$. Gelte nun andersherum $F \models G$ und $G \models F$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \models G$ gilt dann auch $\mathcal{A}(G) = 1$. Ist $\mathcal{A}'$ ein Modell für $G$, dann ist $\mathcal{A}'$ wegen $G \models F$ auch ein Modell für $F$. Damit haben $F$ und $G$ genau dieselben Modelle und folglich gilt $F \equiv G$. (Verallgemeinerung als Übungsaufgabe.) $\square$

# Sätze mit Folgerbarkeit

**Satz**

*$F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$*

**Beweis.**

Sei $F \equiv G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \equiv G$ ist $\mathcal{A}$ auch ein Modell für $G$ und damit gilt $F \models G$. Analog gilt auch $G \models F$.
Gelte nun andersherum $F \models G$ und $G \models F$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \models G$ gilt dann auch $\mathcal{A}(G) = 1$. Ist $\mathcal{A}'$ ein Modell für $G$, dann ist $\mathcal{A}'$ wegen $G \models F$ auch ein Modell für $F$. Damit haben $F$ und $G$ genau dieselben Modelle und folglich gilt $F \equiv G$.
(Verallgemeinerung als Übungsaufgabe.) □

# Sätze mit Folgerbarkeit

**Satz**

*$F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$*

**Beweis.**

Sei $F \equiv G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \equiv G$ ist $\mathcal{A}$ auch ein Modell für $G$ und damit gilt $F \models G$. Analog gilt auch $G \models F$.
Gelte nun andersherum $F \models G$ und $G \models F$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \models G$ gilt dann auch $\mathcal{A}(G) = 1$. Ist $\mathcal{A}'$ ein Modell für $G$, dann ist $\mathcal{A}'$ wegen $G \models F$ auch ein Modell für $F$. Damit haben $F$ und $G$ genau dieselben Modelle und folglich gilt $F \equiv G$.
(Verallgemeinerung als Übungsaufgabe.) □

# Sätze mit Folgerbarkeit

## Satz

*$F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$*

## Beweis.

Sei $F \equiv G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \equiv G$ ist $\mathcal{A}$ auch ein Modell für $G$ und damit gilt $F \models G$. Analog gilt auch $G \models F$. Gelte nun andersherum $F \models G$ und $G \models F$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \models G$ gilt dann auch $\mathcal{A}(G) = 1$. Ist $\mathcal{A}'$ ein Modell für $G$, dann ist $\mathcal{A}'$ wegen $G \models F$ auch ein Modell für $F$. Damit haben $F$ und $G$ genau dieselben Modelle und folglich gilt $F \equiv G$. (Verallgemeinerung als Übungsaufgabe.) $\square$

# Sätze mit Folgerbarkeit

**Satz**

*$F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$*

**Beweis.**

Sei $F \equiv G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \equiv G$ ist $\mathcal{A}$ auch ein Modell für $G$ und damit gilt $F \models G$. Analog gilt auch $G \models F$. Gelte nun andersherum $F \models G$ und $G \models F$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \models G$ gilt dann auch $\mathcal{A}(G) = 1$. Ist $\mathcal{A}'$ ein Modell für $G$, dann ist $\mathcal{A}'$ wegen $G \models F$ auch ein Modell für $F$. Damit haben $F$ und $G$ genau dieselben Modelle und folglich gilt $F \equiv G$. (Verallgemeinerung als Übungsaufgabe.) □

# Sätze mit Folgerbarkeit

**Satz**

*$F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$*

**Beweis.**

Sei $F \equiv G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \equiv G$ ist $\mathcal{A}$ auch ein Modell für $G$ und damit gilt $F \models G$. Analog gilt auch $G \models F$.
Gelte nun andersherum $F \models G$ und $G \models F$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \models G$ gilt dann auch $\mathcal{A}(G) = 1$. Ist $\mathcal{A}'$ ein Modell für $G$, dann ist $\mathcal{A}'$ wegen $G \models F$ auch ein Modell für $F$. Damit haben $F$ und $G$ genau dieselben Modelle und folglich gilt $F \equiv G$.
(Verallgemeinerung als Übungsaufgabe.) □

# Sätze mit Folgerbarkeit

**Satz**

*$F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$*

**Beweis.**

Sei $F \equiv G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \equiv G$ ist $\mathcal{A}$ auch ein Modell für $G$ und damit gilt $F \models G$. Analog gilt auch $G \models F$.
Gelte nun andersherum $F \models G$ und $G \models F$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \models G$ gilt dann auch $\mathcal{A}(G) = 1$. Ist $\mathcal{A}'$ ein Modell für $G$, dann ist $\mathcal{A}'$ wegen $G \models F$ auch ein Modell für $F$. Damit haben $F$ und $G$ genau dieselben Modelle und folglich gilt $F \equiv G$.
(Verallgemeinerung als Übungsaufgabe.) □

# Sätze mit Folgerbarkeit

**Satz**

*$F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$*

**Beweis.**

Sei $F \equiv G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \equiv G$ ist $\mathcal{A}$ auch ein Modell für $G$ und damit gilt $F \models G$. Analog gilt auch $G \models F$. Gelte nun andersherum $F \models G$ und $G \models F$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen $F \models G$ gilt dann auch $\mathcal{A}(G) = 1$. Ist $\mathcal{A}'$ ein Modell für $G$, dann ist $\mathcal{A}'$ wegen $G \models F$ auch ein Modell für $F$. Damit haben $F$ und $G$ genau dieselben Modelle und folglich gilt $F \equiv G$. (Verallgemeinerung als Übungsaufgabe.) $\square$

# Drei wichtige Sätze

## Satz

1. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
2. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
3. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$

## Beweis.

1. ist Präsenzaufgabe. Zu 2: Gelte $F \models G$ und sei $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Ist $\mathcal{A}(F) = 0$, so ist $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ aufgrund der Definition der Semantik von $\Rightarrow$. Ist $\mathcal{A}(F) = 1$, so ist wegen $F \models G$ auch $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit wieder $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ und folglich gilt $\models F \Rightarrow G$.
Sei umgekehrt $\models F \Rightarrow G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen der Definition der Semantik von $\Rightarrow$ folgt aus $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ (es gilt ja $\models F \Rightarrow G$) sofort $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit ist jedes Modell von $F$ auch Modell von $G$ und wir sind fertig. □

# Drei wichtige Sätze

**Satz**

1. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
2. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
3. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$

**Beweis.**

1. ist Präsenzaufgabe. Zu 2: Gelte $F \models G$ und sei $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Ist $\mathcal{A}(F) = 0$, so ist $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ aufgrund der Definition der Semantik von $\Rightarrow$. Ist $\mathcal{A}(F) = 1$, so ist wegen $F \models G$ auch $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit wieder $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ und folglich gilt $\models F \Rightarrow G$.
Sei umgekehrt $\models F \Rightarrow G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen der Definition der Semantik von $\Rightarrow$ folgt aus $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ (es gilt ja $\models F \Rightarrow G$) sofort $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit ist jedes Modell von $F$ auch Modell von $G$ und wir sind fertig. $\square$

# Drei wichtige Sätze

**Satz**

1. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
2. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
3. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$

**Beweis.**

1. ist Präsenzaufgabe. Zu 2: Gelte $F \models G$ und sei $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Ist $\mathcal{A}(F) = 0$, so ist $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ aufgrund der Definition der Semantik von $\Rightarrow$. Ist $\mathcal{A}(F) = 1$, so ist wegen $F \models G$ auch $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit wieder $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ und folglich gilt $\models F \Rightarrow G$.
Sei umgekehrt $\models F \Rightarrow G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen der Definition der Semantik von $\Rightarrow$ folgt aus $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ (es gilt ja $\models F \Rightarrow G$) sofort $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit ist jedes Modell von $F$ auch Modell von $G$ und wir sind fertig. □

# Drei wichtige Sätze

## Satz

1. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
2. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
3. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$

## Beweis.

1. ist Präsenzaufgabe. Zu 2: Gelte $F \models G$ und sei $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Ist $\mathcal{A}(F) = 0$, so ist $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ aufgrund der Definition der Semantik von $\Rightarrow$. Ist $\mathcal{A}(F) = 1$, so ist wegen $F \models G$ auch $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit wieder $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ und folglich gilt $\models F \Rightarrow G$.

Sei umgekehrt $\models F \Rightarrow G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen der Definition der Semantik von $\Rightarrow$ folgt aus $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ (es gilt ja $\models F \Rightarrow G$) sofort $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit ist jedes Modell von $F$ auch Modell von $G$ und wir sind fertig. $\square$

# Drei wichtige Sätze

**Satz**

1. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
2. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
3. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$

**Beweis.**

1. ist Präsenzaufgabe. Zu 2: Gelte $F \models G$ und sei $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Ist $\mathcal{A}(F) = 0$, so ist $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ aufgrund der Definition der Semantik von $\Rightarrow$. Ist $\mathcal{A}(F) = 1$, so ist wegen $F \models G$ auch $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit wieder $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ und folglich gilt $\models F \Rightarrow G$.

Sei umgekehrt $\models F \Rightarrow G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen der Definition der Semantik von $\Rightarrow$ folgt aus $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ (es gilt ja $\models F \Rightarrow G$) sofort $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit ist jedes Modell von $F$ auch Modell von $G$ und wir sind fertig. □

# Drei wichtige Sätze

## Satz

1. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
2. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
3. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \land \neg G \models$

## Beweis.

1. ist Präsenzaufgabe. Zu 2: Gelte $F \models G$ und sei $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Ist $\mathcal{A}(F) = 0$, so ist $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ aufgrund der Definition der Semantik von $\Rightarrow$. Ist $\mathcal{A}(F) = 1$, so ist wegen $F \models G$ auch $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit wieder $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ und folglich gilt $\models F \Rightarrow G$.

Sei umgekehrt $\models F \Rightarrow G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen der Definition der Semantik von $\Rightarrow$ folgt aus $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ (es gilt ja $\models F \Rightarrow G$) sofort $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit ist jedes Modell von $F$ auch Modell von $G$ und wir sind fertig. □

# Drei wichtige Sätze

## Satz

1. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
2. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
3. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$

## Beweis.

1. ist Präsenzaufgabe. Zu 2: Gelte $F \models G$ und sei $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Ist $\mathcal{A}(F) = 0$, so ist $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ aufgrund der Definition der Semantik von $\Rightarrow$. Ist $\mathcal{A}(F) = 1$, so ist wegen $F \models G$ auch $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit wieder $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ und folglich gilt $\models F \Rightarrow G$.
Sei umgekehrt $\models F \Rightarrow G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen der Definition der Semantik von $\Rightarrow$ folgt aus $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ (es gilt ja $\models F \Rightarrow G$) sofort $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit ist jedes Modell von $F$ auch Modell von $G$ und wir sind fertig. □

# Drei wichtige Sätze

## Satz

1. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
2. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
3. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$

## Beweis.

1. ist Präsenzaufgabe. Zu 2: Gelte $F \models G$ und sei $\mathcal{A}$ eine zu $F$ und $G$ passende Belegung. Ist $\mathcal{A}(F) = 0$, so ist $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ aufgrund der Definition der Semantik von $\Rightarrow$. Ist $\mathcal{A}(F) = 1$, so ist wegen $F \models G$ auch $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit wieder $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ und folglich gilt $\models F \Rightarrow G$.
Sei umgekehrt $\models F \Rightarrow G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$. Wegen der Definition der Semantik von $\Rightarrow$ folgt aus $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ (es gilt ja $\models F \Rightarrow G$) sofort $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit ist jedes Modell von $F$ auch Modell von $G$ und wir sind fertig. $\square$

# Drei wichtige Sätze

**Satz**

1. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
2. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
3. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$

**Beweis.**

3. folgt aus 2. sofort aus der Äquivalenz $F \Rightarrow G \equiv \neg F \vee G$ und da die Negation einer Tautologie eine Kontradiktion ist (und umgekehrt) und da $\neg(\neg F \vee G) \equiv F \wedge \neg G$. □

# Drei wichtige Sätze

**Satz**

1. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
2. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
3. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$

**Beweis.**

3. folgt aus 2. sofort aus der Äquivalenz $F \Rightarrow G \equiv \neg F \vee G$ und da die Negation einer Tautologie eine Kontradiktion ist (und umgekehrt) und da $\neg(\neg F \vee G) \equiv F \wedge \neg G$. □

# Drei wichtige Sätze

**Satz**

1. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
2. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
3. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$

**Beweis.**

3. folgt aus 2. sofort aus der Äquivalenz $F \Rightarrow G \equiv \neg F \vee G$ und da die Negation einer Tautologie eine Kontradiktion ist (und umgekehrt) und da $\neg(\neg F \vee G) \equiv F \wedge \neg G$. □

# Drei wichtige Sätze

**Satz**

1. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
2. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
3. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$

**Beweis.**

3. folgt aus 2. sofort aus der Äquivalenz $F \Rightarrow G \equiv \neg F \vee G$ und da die Negation einer Tautologie eine Kontradiktion ist (und umgekehrt) und da $\neg(\neg F \vee G) \equiv F \wedge \neg G$. $\square$

# Verallgemeinerung

Die Aussagen

1. $F \models G$ genau dann, wenn $\models F \Rightarrow G$
2. $F \models G$ genau dann, wenn $F \wedge \neg G \models$

können verallgemeinert werden. Sei $M$ eine beliebige Formelmenge, dann gilt:

1. $M \cup \{F\} \models G$ genau dann, wenn $M \models F \Rightarrow G$
2. $M \models G$ genau dann, wenn $M \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar ist.

Dabei ist eine Formelmenge unerfüllbar, wenn es keine Belegung gibt, die alle Formeln der Menge wahr macht.

# Verallgemeinerung

Die Aussagen

1. $F \models G$ genau dann, wenn $\models F \Rightarrow G$
2. $F \models G$ genau dann, wenn $F \wedge \neg G \models$

können verallgemeinert werden. Sei $M$ eine beliebige Formelmenge, dann gilt:

1. $M \cup \{F\} \models G$ genau dann, wenn $M \models F \Rightarrow G$
2. $M \models G$ genau dann, wenn $M \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar ist.

Dabei ist eine Formelmenge unerfüllbar, wenn es keine Belegung gibt, die alle Formeln der Menge wahr macht.

# Alle Sätze im Überblick

## Satz

1. *Wenn* $F \equiv G$ *und* $\models G$ *gilt, dann gilt auch* $\models F$
2. *Wenn* $F \equiv G$ *und* $G \models$ *gilt, dann gilt auch* $F \models$
3. *Wenn* $\models F$ *und* $\models G$ *gilt, dann gilt* $F \equiv G$
4. *Wenn* $F \models$ *und* $G \models$ *gilt, dann gilt* $F \equiv G$
5. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $F \models G$ *und* $G \models F$
6. *Wenn* $F_1 \equiv F_2$ *und* $G_1 \equiv G_2$ *gilt, dann gilt* $F_1 \models G_1$ *genau dann, wenn* $F_2 \models G_2$ *gilt.*
7. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
8. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
9. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$
10. $M \cup \{F\} \models G$ *genau dann, wenn* $M \models F \Rightarrow G$
11. $M \models G$ *genau dann, wenn* $M \cup \{\neg G\}$ *unerfüllbar ist.*

# Normalformen

Wir wollen jetzt

- die Äquivalenzen nutzen, um Teilformeln zu ersetzen und
- so zu einer Normalform kommen

Die Normalform hat verschiedene Vorteile:

- Einfach strukturiert (daher gut für Beweis, Algorithmen, ...)
- Eigenschaften lassen sich bisweilen leichter ablesen/ermitteln.

# Ersetzungen

Unser Ziel ist es zunächst Teilformeln ersetzen zu dürfen, also aus

$$A \land (B \Rightarrow C)$$

z.B.

$$A \land (\neg B \lor C)$$

zu machen. Die Rechtfertigung dafür wird die Äquivalenz $B \Rightarrow C \equiv \neg B \lor C$ sein. Dass wir dies tatsächlich in Teilformeln so ersetzen dürfen, sagt uns das *Ersetzbarkeitstheorem*.

# Ersetzungen

Unser Ziel ist es zunächst Teilformeln ersetzen zu dürfen, also aus

$$A \wedge (B \Rightarrow C)$$

z.B.

$$A \wedge (\neg B \vee C)$$

zu machen. Die Rechtfertigung dafür wird die Äquivalenz $B \Rightarrow C \equiv \neg B \vee C$ sein. Dass wir dies tatsächlich in Teilformeln so ersetzen dürfen, sagt uns das *Ersetzbarkeitstheorem*.

# Ersetzbarkeitstheorem

**Satz (Ersetzbarkeitstheorem)**

*Seien $F$ und $G$ äquivalente Formeln und sei $H$ eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Formel $F$ als Teilformel. Gehe $H'$ aus $H$ hervor, indem ein Vorkommen von $F$ (in $H$) durch $G$ ersetzt wird. Dann sind $H$ und $H'$ äquivalent.*

Ersetzt man also eine Teilformel $F$ einer Formel $H$ durch eine äquivalente Formel, so ist die entstehende Formel $H'$ zur ursprünglichen $H$ äquivalent.

Der Satz ist die Rechtfertigung für die Schreibweise $A \wedge (B \Rightarrow C) \equiv A \wedge (\neg B \vee C)$.

Der Beweis erfolg nun mittels struktureller Induktion...

# Ersetzbarkeitstheorem

**Satz (Ersetzbarkeitstheorem)**

*Seien $F$ und $G$ äquivalente Formeln und sei $H$ eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Formel $F$ als Teilformel. Gehe $H'$ aus $H$ hervor, indem ein Vorkommen von $F$ (in $H$) durch $G$ ersetzt wird. Dann sind $H$ und $H'$ äquivalent.*

Ersetzt man also eine Teilformel $F$ einer Formel $H$ durch eine äquivalente Formel, so ist die entstehende Formel $H'$ zur ursprünglichen $H$ äquivalent.

Der Satz ist die Rechtfertigung für die Schreibweise $A \wedge (B \Rightarrow C) \equiv A \wedge (\neg B \vee C)$.

Der Beweis erfolg nun mittels struktureller Induktion...

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

## Beweis

**Induktionsanfang.** Sei $H$ eine atomare Formel und gehe $H'$ durch ersetzen von $F$ durch $G$ aus $H$ hervor. Dann muss $H = F$ und $H' = G$ gelten und aus $F \equiv G$ folgt dann sofort $H = F \equiv G = H'$ also $H \equiv H'$.

**Induktionsannahme.** Wir nehmen an, dass $H_1$ und $H_2$ Formeln sind, für die gilt: Für jede Formel $H_1'$ bzw. $H_2'$, die durch Ersetzung von $F$ durch $G$ aus $H_1$ bzw. $H_2$ hervorgegangen ist, gilt $H_1 \equiv H_1'$ bzw. $H_2 \equiv H_2'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

## Beweis

**Induktionsanfang.** Sei $H$ eine atomare Formel und gehe $H'$ durch ersetzen von $F$ durch $G$ aus $H$ hervor. Dann muss $H = F$ und $H' = G$ gelten und aus $F \equiv G$ folgt dann sofort $H = F \equiv G = H'$ also $H \equiv H'$.

**Induktionsannahme.** Wir nehmen an, dass $H_1$ und $H_2$ Formeln sind, für die gilt: Für jede Formel $H_1'$ bzw. $H_2'$, die durch Ersetzung von $F$ durch $G$ aus $H_1$ bzw. $H_2$ hervorgegangen ist, gilt $H_1 \equiv H_1'$ bzw. $H_2 \equiv H_2'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

## Beweis

**Induktionsanfang.** Sei $H$ eine atomare Formel und gehe $H'$ durch ersetzen von $F$ durch $G$ aus $H$ hervor. Dann muss $H = F$ und $H' = G$ gelten und aus $F \equiv G$ folgt dann sofort $H = F \equiv G = H'$ also $H \equiv H'$.

**Induktionsannahme.** Wir nehmen an, dass $H_1$ und $H_2$ Formeln sind, für die gilt: Für jede Formel $H_1'$ bzw. $H_2'$, die durch Ersetzung von $F$ durch $G$ aus $H_1$ bzw. $H_2$ hervorgegangen ist, gilt $H_1 \equiv H_1'$ bzw. $H_2 \equiv H_2'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

## Beweis

**Induktionsanfang.** Sei $H$ eine atomare Formel und gehe $H'$ durch ersetzen von $F$ durch $G$ aus $H$ hervor. Dann muss $H = F$ und $H' = G$ gelten und aus $F \equiv G$ folgt dann sofort $H = F \equiv G = H'$ also $H \equiv H'$.

**Induktionsannahme.** Wir nehmen an, dass $H_1$ und $H_2$ Formeln sind, für die gilt: Für jede Formel $H_1'$ bzw. $H_2'$, die durch Ersetzung von $F$ durch $G$ aus $H_1$ bzw. $H_2$ hervorgegangen ist, gilt $H_1 \equiv H_1'$ bzw. $H_2 \equiv H_2'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

## Beweis

**Induktionsanfang.** Sei $H$ eine atomare Formel und gehe $H'$ durch ersetzen von $F$ durch $G$ aus $H$ hervor. Dann muss $H = F$ und $H' = G$ gelten und aus $F \equiv G$ folgt dann sofort $H = F \equiv G = H'$ also $H \equiv H'$.

**Induktionsannahme.** Wir nehmen an, dass $H_1$ und $H_2$ Formeln sind, für die gilt: Für jede Formel $H_1'$ bzw. $H_2'$, die durch Ersetzung von $F$ durch $G$ aus $H_1$ bzw. $H_2$ hervorgegangen ist, gilt $H_1 \equiv H_1'$ bzw. $H_2 \equiv H_2'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

## Beweis

**Induktionsanfang.** Sei $H$ eine atomare Formel und gehe $H'$ durch ersetzen von $F$ durch $G$ aus $H$ hervor. Dann muss $H = F$ und $H' = G$ gelten und aus $F \equiv G$ folgt dann sofort $H = F \equiv G = H'$ also $H \equiv H'$.

**Induktionsannahme.** Wir nehmen an, dass $H_1$ und $H_2$ Formeln sind, für die gilt: Für jede Formel $H_1'$ bzw. $H_2'$, die durch Ersetzung von $F$ durch $G$ aus $H_1$ bzw. $H_2$ hervorgegangen ist, gilt $H_1 \equiv H_1'$ bzw. $H_2 \equiv H_2'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

## Beweis

**Induktionsanfang.** Sei $H$ eine atomare Formel und gehe $H'$ durch ersetzen von $F$ durch $G$ aus $H$ hervor. Dann muss $H = F$ und $H' = G$ gelten und aus $F \equiv G$ folgt dann sofort $H = F \equiv G = H'$ also $H \equiv H'$.

**Induktionsannahme.** Wir nehmen an, dass $H_1$ und $H_2$ Formeln sind, für die gilt: Für jede Formel $H_1'$ bzw. $H_2'$, die durch Ersetzung von $F$ durch $G$ aus $H_1$ bzw. $H_2$ hervorgegangen ist, gilt $H_1 \equiv H_1'$ bzw. $H_2 \equiv H_2'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt.** Ist $F = H$, so verfahren wir wie im Induktionsanfang und sind fertig. Nachfolgend genügt es also den Fall zu betrachten, dass $F$ eine echte Teilformel von $H$ ist.
Fall $H = \neg H_1$. Dann ist $F$ eine Teilformel von $H_1$ und es gibt $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = \neg H_1'$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und wegen der Definition der Semantik von $\neg$ ist dann auch $\mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1)$ also auch $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H')$ und damit $H \equiv H'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt.** Ist $F = H$, so verfahren wir wie im Induktionsanfang und sind fertig. Nachfolgend genügt es also den Fall zu betrachten, dass $F$ eine echte Teilformel von $H$ ist.

Fall $H = \neg H_1$. Dann ist $F$ eine Teilformel von $H_1$ und es gibt $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = \neg H_1'$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und wegen der Definition der Semantik von $\neg$ ist dann auch $\mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1)$ also auch $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H')$ und damit $H \equiv H'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt.** Ist $F = H$, so verfahren wir wie im Induktionsanfang und sind fertig. Nachfolgend genügt es also den Fall zu betrachten, dass $F$ eine echte Teilformel von $H$ ist.

Fall $H = \neg H_1$. Dann ist $F$ eine Teilformel von $H_1$ und es gibt $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = \neg H_1'$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und wegen der Definition der Semantik von $\neg$ ist dann auch $\mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1)$ also auch $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H')$ und damit $H \equiv H'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt.** Ist $F = H$, so verfahren wir wie im Induktionsanfang und sind fertig. Nachfolgend genügt es also den Fall zu betrachten, dass $F$ eine echte Teilformel von $H$ ist.

Fall $H = \neg H_1$. Dann ist $F$ eine Teilformel von $H_1$ und es gibt $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = \neg H_1'$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und wegen der Definition der Semantik von $\neg$ ist dann auch $\mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1)$ also auch $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H')$ und damit $H \equiv H'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt.** Ist $F = H$, so verfahren wir wie im Induktionsanfang und sind fertig. Nachfolgend genügt es also den Fall zu betrachten, dass $F$ eine echte Teilformel von $H$ ist.

Fall $H = \neg H_1$. Dann ist $F$ eine Teilformel von $H_1$ und es gibt $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = \neg H_1'$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und wegen der Definition der Semantik von $\neg$ ist dann auch $\mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1)$ also auch $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H')$ und damit $H \equiv H'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt.** Ist $F = H$, so verfahren wir wie im Induktionsanfang und sind fertig. Nachfolgend genügt es also den Fall zu betrachten, dass $F$ eine echte Teilformel von $H$ ist.
Fall $H = \neg H_1$. Dann ist $F$ eine Teilformel von $H_1$ und es gibt $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = \neg H_1'$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und wegen der Definition der Semantik von $\neg$ ist dann auch $\mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1)$ also auch $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H')$ und damit $H \equiv H'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt.** Ist $F = H$, so verfahren wir wie im Induktionsanfang und sind fertig. Nachfolgend genügt es also den Fall zu betrachten, dass $F$ eine echte Teilformel von $H$ ist.
Fall $H = \neg H_1$. Dann ist $F$ eine Teilformel von $H_1$ und es gibt $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = \neg H_1'$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und wegen der Definition der Semantik von $\neg$ ist dann auch $\mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1)$ also auch $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H')$ und damit $H \equiv H'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt.** Ist $F = H$, so verfahren wir wie im Induktionsanfang und sind fertig. Nachfolgend genügt es also den Fall zu betrachten, dass $F$ eine echte Teilformel von $H$ ist.
Fall $H = \neg H_1$. Dann ist $F$ eine Teilformel von $H_1$ und es gibt $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = \neg H_1'$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und wegen der Definition der Semantik von $\neg$ ist dann auch $\mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1)$ also auch $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H')$ und damit $H \equiv H'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt.** Ist $F = H$, so verfahren wir wie im Induktionsanfang und sind fertig. Nachfolgend genügt es also den Fall zu betrachten, dass $F$ eine echte Teilformel von $H$ ist.
Fall $H = \neg H_1$. Dann ist $F$ eine Teilformel von $H_1$ und es gibt $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = \neg H_1'$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und wegen der Definition der Semantik von $\neg$ ist dann auch $\mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1)$ also auch $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H')$ und damit $H \equiv H'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt.** Ist $F = H$, so verfahren wir wie im Induktionsanfang und sind fertig. Nachfolgend genügt es also den Fall zu betrachten, dass $F$ eine echte Teilformel von $H$ ist.
Fall $H = \neg H_1$. Dann ist $F$ eine Teilformel von $H_1$ und es gibt $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = \neg H_1'$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und wegen der Definition der Semantik von $\neg$ ist dann auch $\mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1)$ also auch $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H')$ und damit $H \equiv H'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt.** Ist $F = H$, so verfahren wir wie im Induktionsanfang und sind fertig. Nachfolgend genügt es also den Fall zu betrachten, dass $F$ eine echte Teilformel von $H$ ist.
Fall $H = \neg H_1$. Dann ist $F$ eine Teilformel von $H_1$ und es gibt $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = \neg H_1'$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und wegen der Definition der Semantik von $\neg$ ist dann auch $\mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1)$ also auch $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H')$ und damit $H \equiv H'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt.** Ist $F = H$, so verfahren wir wie im Induktionsanfang und sind fertig. Nachfolgend genügt es also den Fall zu betrachten, dass $F$ eine echte Teilformel von $H$ ist.
Fall $H = \neg H_1$. Dann ist $F$ eine Teilformel von $H_1$ und es gibt $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = \neg H_1'$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und wegen der Definition der Semantik von $\neg$ ist dann auch $\mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1)$ also auch $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H')$ und damit $H \equiv H'$.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt (Fortsetzung).** Fall $H = H_1 \vee H_2$.
Angenommen $F$ ist eine Teilformel von $H_1$ (der andere Fall ist analog). Dann gibt es wieder ein $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = H_1' \vee H_2$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und ähnlich wie eben folgt wegen der Definition der Semantik von $\vee$ dann $\mathcal{A}(H') = \mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2) = \mathcal{A}(H)$ und damit $H' \equiv H$.
Die anderen Fälle gehen ganz analog, was den Beweis abschließt.

**Anmerkung**

Wichtig ist hier, dass $\mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2)$ gilt. Dies folgt aus der Definition von $\vee$ und wegen $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$. Man überlegt sich, was passiert, wenn die einzelnen Teilformeln zu 0 oder 1 ausgewertet werden und dass tatsächlich immer das gleiche rauskommt.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt (Fortsetzung).** Fall $H = H_1 \vee H_2$.
Angenommen $F$ ist eine Teilformel von $H_1$ (der andere Fall ist analog). Dann gibt es wieder ein $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = H_1' \vee H_2$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und ähnlich wie eben folgt wegen der Definition der Semantik von $\vee$ dann $\mathcal{A}(H') = \mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2) = \mathcal{A}(H)$ und damit $H' \equiv H$. Die anderen Fälle gehen ganz analog, was den Beweis abschließt.

**Anmerkung**

Wichtig ist hier, dass $\mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2)$ gilt. Dies folgt aus der Definition von $\vee$ und wegen $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$. Man überlegt sich, was passiert, wenn die einzelnen Teilformeln zu 0 oder 1 ausgewertet werden und dass tatsächlich immer das gleiche rauskommt.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt (Fortsetzung).** Fall $H = H_1 \vee H_2$. Angenommen $F$ ist eine Teilformel von $H_1$ (der andere Fall ist analog). Dann gibt es wieder ein $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = H_1' \vee H_2$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und ähnlich wie eben folgt wegen der Definition der Semantik von $\vee$ dann $\mathcal{A}(H') = \mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2) = \mathcal{A}(H)$ und damit $H' \equiv H$. Die anderen Fälle gehen ganz analog, was den Beweis abschließt.

**Anmerkung**

Wichtig ist hier, dass $\mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2)$ gilt. Dies folgt aus der Definition von $\vee$ und wegen $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$. Man überlegt sich, was passiert, wenn die einzelnen Teilformeln zu 0 oder 1 ausgewertet werden und dass tatsächlich immer das gleiche rauskommt.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt (Fortsetzung).** Fall $H = H_1 \vee H_2$. Angenommen $F$ ist eine Teilformel von $H_1$ (der andere Fall ist analog). Dann gibt es wieder ein $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = H_1' \vee H_2$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und ähnlich wie eben folgt wegen der Definition der Semantik von $\vee$ dann $\mathcal{A}(H') = \mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2) = \mathcal{A}(H)$ und damit $H' \equiv H$. Die anderen Fälle gehen ganz analog, was den Beweis abschließt.

### Anmerkung

Wichtig ist hier, dass $\mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2)$ gilt. Dies folgt aus der Definition von $\vee$ und wegen $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$. Man überlegt sich, was passiert, wenn die einzelnen Teilformeln zu 0 oder 1 ausgewertet werden und dass tatsächlich immer das gleiche rauskommt.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt (Fortsetzung).** Fall $H = H_1 \vee H_2$.
Angenommen $F$ ist eine Teilformel von $H_1$ (der andere Fall ist analog). Dann gibt es wieder ein $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = H_1' \vee H_2$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und ähnlich wie eben folgt wegen der Definition der Semantik von $\vee$ dann $\mathcal{A}(H') = \mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2) = \mathcal{A}(H)$ und damit $H' \equiv H$.
Die anderen Fälle gehen ganz analog, was den Beweis abschließt.

**Anmerkung**

Wichtig ist hier, dass $\mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2)$ gilt. Dies folgt aus der Definition von $\vee$ und wegen $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$. Man überlegt sich, was passiert, wenn die einzelnen Teilformeln zu 0 oder 1 ausgewertet werden und dass tatsächlich immer das gleiche rauskommt.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt (Fortsetzung).** Fall $H = H_1 \vee H_2$. Angenommen $F$ ist eine Teilformel von $H_1$ (der andere Fall ist analog). Dann gibt es wieder ein $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = H_1' \vee H_2$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und ähnlich wie eben folgt wegen der Definition der Semantik von $\vee$ dann $\mathcal{A}(H') = \mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2) = \mathcal{A}(H)$ und damit $H' \equiv H$. Die anderen Fälle gehen ganz analog, was den Beweis abschließt.

### Anmerkung

Wichtig ist hier, dass $\mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2)$ gilt. Dies folgt aus der Definition von $\vee$ und wegen $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$. Man überlegt sich, was passiert, wenn die einzelnen Teilformeln zu 0 oder 1 ausgewertet werden und dass tatsächlich immer das gleiche rauskommt.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt (Fortsetzung).** Fall $H = H_1 \vee H_2$. Angenommen $F$ ist eine Teilformel von $H_1$ (der andere Fall ist analog). Dann gibt es wieder ein $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = H_1' \vee H_2$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und ähnlich wie eben folgt wegen der Definition der Semantik von $\vee$ dann $\mathcal{A}(H') = \mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2) = \mathcal{A}(H)$ und damit $H' \equiv H$. Die anderen Fälle gehen ganz analog, was den Beweis abschließt.

**Anmerkung**

Wichtig ist hier, dass $\mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2)$ gilt. Dies folgt aus der Definition von $\vee$ und wegen $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$. Man überlegt sich, was passiert, wenn die einzelnen Teilformeln zu 0 oder 1 ausgewertet werden und dass tatsächlich immer das gleiche rauskommt.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt (Fortsetzung).** Fall $H = H_1 \vee H_2$. Angenommen $F$ ist eine Teilformel von $H_1$ (der andere Fall ist analog). Dann gibt es wieder ein $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = H_1' \vee H_2$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und ähnlich wie eben folgt wegen der Definition der Semantik von $\vee$ dann $\mathcal{A}(H') = \mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2) = \mathcal{A}(H)$ und damit $H' \equiv H$.
Die anderen Fälle gehen ganz analog, was den Beweis abschließt.

## Anmerkung

Wichtig ist hier, dass $\mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2)$ gilt. Dies folgt aus der Definition von $\vee$ und wegen $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$. Man überlegt sich, was passiert, wenn die einzelnen Teilformeln zu 0 oder 1 ausgewertet werden und dass tatsächlich immer das gleiche rauskommt.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt (Fortsetzung).** Fall $H = H_1 \vee H_2$. Angenommen $F$ ist eine Teilformel von $H_1$ (der andere Fall ist analog). Dann gibt es wieder ein $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = H_1' \vee H_2$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und ähnlich wie eben folgt wegen der Definition der Semantik von $\vee$ dann $\mathcal{A}(H') = \mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2) = \mathcal{A}(H)$ und damit $H' \equiv H$. Die anderen Fälle gehen ganz analog, was den Beweis abschließt.

## Anmerkung

Wichtig ist hier, dass $\mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2)$ gilt. Dies folgt aus der Definition von $\vee$ und wegen $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$. Man überlegt sich, was passiert, wenn die einzelnen Teilformeln zu 0 oder 1 ausgewertet werden und dass tatsächlich immer das gleiche rauskommt.

# Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

**Induktionsschritt (Fortsetzung).** Fall $H = H_1 \vee H_2$.
Angenommen $F$ ist eine Teilformel von $H_1$ (der andere Fall ist analog). Dann gibt es wieder ein $H_1'$, das aus $H_1$ durch Ersetzen von $F$ durch $G$ entsteht und so, dass $H' = H_1' \vee H_2$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und ähnlich wie eben folgt wegen der Definition der Semantik von $\vee$ dann $\mathcal{A}(H') = \mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2) = \mathcal{A}(H)$ und damit $H' \equiv H$.
Die anderen Fälle gehen ganz analog, was den Beweis abschließt.

## Anmerkung

Wichtig ist hier, dass $\mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2)$ gilt. Dies folgt aus der Definition von $\vee$ und wegen $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$. Man überlegt sich, was passiert, wenn die einzelnen Teilformeln zu 0 oder 1 ausgewertet werden und dass tatsächlich immer das gleiche rauskommt.

# Äquivalenzumformungen

**Ergebnis**

Wir dürfen nun dank des Ersetzbarkeitstheorems Teilformeln durch andere Formeln ersetzen, sofern diese zu der gewählten Teilformel äquivalent sind.

$$\neg A \Rightarrow \neg\neg B \equiv \neg A \Rightarrow B \equiv \neg\neg A \lor B \equiv A \lor B$$

# Äquivalenzumformungen

**Ergebnis**

Wir dürfen nun dank des Ersetzbarkeitstheorems Teilformeln durch andere Formeln ersetzen, sofern diese zu der gewählten Teilformel äquivalent sind.

$$\neg A \Rightarrow \neg\neg B \equiv \neg A \Rightarrow B \equiv \neg\neg A \vee B \equiv A \vee B$$

# Normalformen - Motivation

Wir wollen nun eine **Normalform** für aussagenlogische Formeln einführen, d.h. eine Form

- in die wir jede aussagenlogische Formel durch Äquivalenzumformungen bringen können und
- die eine praktische Form hat (z.B. für Berechnungen)

Dazu erst ein paar Begriffe ...

# Normalformen - Begriffe

## Definition

1. Ein **Literal** ist eine atomare Formel oder eine negierte atomare Formel.
2. Ein **positives Literal** ist eine atomare Formel, ein **negatives Literal** eine negierte atomare Formel.
3. Zwei Literale heißen **komplementär**, wenn sie positives und negatives Literal der gleichen atomaren Formel sind. Bspw. ist $A$ das komplementäre Literal zu $\neg A$ und umgekehrt.
4. Literale und Disjunktionen von Literalen werden als **Klauseln** bezeichnet.
5. Literale und Konjunktionen von Literalen werden als **duale Klauseln** bezeichnet.

# Normalformen - Begriffe

## Definition

1. Ein **Literal** ist eine atomare Formel oder eine negierte atomare Formel.
2. Ein **positives Literal** ist eine atomare Formel, ein **negatives Literal** eine negierte atomare Formel.
3. Zwei Literale heißen **komplementär**, wenn sie positives und negatives Literal der gleichen atomaren Formel sind. Bspw. ist $A$ das komplementäre Literal zu $\neg A$ und umgekehrt.
4. Literale und Disjunktionen von Literalen werden als **Klauseln** bezeichnet.
5. Literale und Konjunktionen von Literalen werden als **duale Klauseln** bezeichnet.

# Normalformen - Begriffe

## Definition

1. Ein **Literal** ist eine atomare Formel oder eine negierte atomare Formel.
2. Ein **positives Literal** ist eine atomare Formel, ein **negatives Literal** eine negierte atomare Formel.
3. Zwei Literale heißen **komplementär**, wenn sie positives und negatives Literal der gleichen atomaren Formel sind. Bspw. ist $A$ das komplementäre Literal zu $\neg A$ und umgekehrt.
4. Literale und Disjunktionen von Literalen werden als **Klauseln** bezeichnet.
5. Literale und Konjunktionen von Literalen werden als **duale Klauseln** bezeichnet.

# Normalformen - Begriffe

## Definition

1. Ein **Literal** ist eine atomare Formel oder eine negierte atomare Formel.
2. Ein **positives Literal** ist eine atomare Formel, ein **negatives Literal** eine negierte atomare Formel.
3. Zwei Literale heißen **komplementär**, wenn sie positives und negatives Literal der gleichen atomaren Formel sind. Bspw. ist $A$ das komplementäre Literal zu $\neg A$ und umgekehrt.
4. Literale und Disjunktionen von Literalen werden als **Klauseln** bezeichnet.
5. Literale und Konjunktionen von Literalen werden als **duale Klauseln** bezeichnet.

# Normalformen - Begriffe

## Definition

1. Ein **Literal** ist eine atomare Formel oder eine negierte atomare Formel.
2. Ein **positives Literal** ist eine atomare Formel, ein **negatives Literal** eine negierte atomare Formel.
3. Zwei Literale heißen **komplementär**, wenn sie positives und negatives Literal der gleichen atomaren Formel sind. Bspw. ist $A$ das komplementäre Literal zu $\neg A$ und umgekehrt.
4. Literale und Disjunktionen von Literalen werden als **Klauseln** bezeichnet.
5. Literale und Konjunktionen von Literalen werden als **duale Klauseln** bezeichnet.

# Normalformen - Begriffe 2

## Definition

1. Eine Formel $F$ ist in **konjunktiver Normalform** (KNF), wenn sie eine Konjunktion von Klauseln ist, also eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, z.B.

$$(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge B \wedge (\neg C \vee \neg B) \wedge (A \vee B \vee C)$$

2. Eine Formel $F$ ist in **disjunktiver Normalform** (DNF), wenn sie eine Disjunktion von dualen Klauseln ist, also eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen, z.B.

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg A \wedge C)$$

# Normalformen - Begriffe 2

## Definition

1. Eine Formel $F$ ist in **konjunktiver Normalform** (KNF), wenn sie eine Konjunktion von Klauseln ist, also eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, z.B.

$$(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge B \wedge (\neg C \vee \neg B) \wedge (A \vee B \vee C)$$

2. Eine Formel $F$ ist in **disjunktiver Normalform** (DNF), wenn sie eine Disjunktion von dualen Klauseln ist, also eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen, z.B.

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg A \wedge C)$$

# Eigenschaften der KNF und DNF

## Merkhilfe

KNF: $(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge B \wedge (\neg C \vee \neg B)$
DNF: $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg A \wedge C)$

## Satz

1. *Eine KNF ist gültig gdw. alle ihre Klauseln gültig sind gdw. in allen Klauseln mindestens ein Paar komplementäre Literale vorkommt.*
2. *Eine DNF ist unerfüllbar gdw. alle ihre dualen Klauseln unerfüllbar sind gdw. in allen dualen Klauseln mindestens ein Paar komplementäre Literale vorkommt.*
3. *Ein Erfüllbarkeitstest für DNFs ist effizient implementierbar (Laufzeit ist in P). (Für KNFs gilt dies wahrscheinlich nicht! Hier war SAT NP-vollständig.)*

# Eigenschaften der KNF und DNF

## Merkhilfe

KNF: $(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge B \wedge (\neg C \vee \neg B)$
DNF: $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg A \wedge C)$

## Satz

1. *Eine KNF ist gültig gdw. alle ihre Klauseln gültig sind gdw. in allen Klauseln mindestens ein Paar komplementäre Literale vorkommt.*
2. *Eine DNF ist unerfüllbar gdw. alle ihre dualen Klauseln unerfüllbar sind gdw. in allen dualen Klauseln mindestens ein Paar komplementäre Literale vorkommt.*
3. *Ein Erfüllbarkeitstest für DNFs ist effizient implementierbar (Laufzeit ist in P). (Für KNFs gilt dies wahrscheinlich nicht! Hier war SAT NP-vollständig.)*

# Eigenschaften der KNF und DNF

## Merkhilfe

KNF: $(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge B \wedge (\neg C \vee \neg B)$
DNF: $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg A \wedge C)$

## Satz

1. *Eine KNF ist gültig gdw. alle ihre Klauseln gültig sind gdw. in allen Klauseln mindestens ein Paar komplementäre Literale vorkommt.*
2. *Eine DNF ist unerfüllbar gdw. alle ihre dualen Klauseln unerfüllbar sind gdw. in allen dualen Klauseln mindestens ein Paar komplementäre Literale vorkommt.*
3. *Ein Erfüllbarkeitstest für DNFs ist effizient implementierbar (Laufzeit ist in $P$). (Für KNFs gilt dies wahrscheinlich nicht! Hier war SAT NP-vollständig.)*

# KNF und DNF

**Satz**

*Zu jeder Formel $F$ gibt es (mindestens) eine konjunktive Normalform und (mindestens) eine disjunktive Normalform, d.h. es gibt Formeln $K$ in konjunktiver Normalform und $D$ in disjunktiver Normalform mit $F \equiv K \equiv D$.*

# Verfahren für die Erstellung von KNF und DNF

1. Ersetze alle Teilformeln der Form
   - $(G \Leftrightarrow H)$ durch $(\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G)$ [Elimination von $\Leftrightarrow$]
   - $(G \Rightarrow H)$ durch $(\neg G \vee H)$ [Elimination von $\Rightarrow$]
2. Ersetze alle Teilformeln der Form
   - $\neg\neg G$ durch $G$ [Doppelte Negation]
   - $\neg(G \wedge H)$ durch $(\neg G \vee \neg H)$ [de Morgan]
   - $\neg(G \vee H)$ durch $(\neg G \wedge \neg H)$ [de Morgan]
3. Um die KNF zu bilden ersetze alle Teilformeln der Form
   - $(F \vee (G \wedge H))$ durch $((F \vee G) \wedge (F \vee H))$ [Distributivität]
   - $((F \wedge G) \vee H)$ durch $((F \vee H) \wedge (G \vee H))$ [Distributivität]
4. Um die DNF zu bilden ersetze alle Teilformeln der Form
   - $(F \wedge (G \vee H))$ durch $((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$ [Distributivität]
   - $((F \vee G) \wedge H)$ durch $((F \wedge H) \vee (G \wedge H))$ [Distributivität]

# Beispiel

| | |
|---|---|
| $(A \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow D$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $\equiv (A \wedge (\neg B \vee C)) \Rightarrow D$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $\equiv \neg(A \wedge (\neg B \vee C)) \vee D$ | de Morgen |
| $\equiv (\neg A \vee \neg(\neg B \vee C)) \vee D$ | de Morgen |
| $\equiv (\neg A \vee (\neg\neg B \wedge \neg C)) \vee D$ | Doppelte Negation |
| $\equiv (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \vee D$ | Distributivität |
| $\equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee D$ | Distributivität |
| $\equiv ((\neg A \vee B) \vee D) \wedge ((\neg A \vee \neg C) \vee D)$ | Klammern |
| $\equiv (\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D)$ | |

# Beispiel

| | |
|---|---|
| $(A \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow D$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $\equiv (A \wedge (\neg B \vee C)) \Rightarrow D$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $\equiv \neg(A \wedge (\neg B \vee C)) \vee D$ | de Morgen |
| $\equiv (\neg A \vee \neg(\neg B \vee C)) \vee D$ | de Morgen |
| $\equiv (\neg A \vee (\neg\neg B \wedge \neg C)) \vee D$ | Doppelte Negation |
| $\equiv (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \vee D$ | Distributivität |
| $\equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee D$ | Distributivität |
| $\equiv ((\neg A \vee B) \vee D) \wedge ((\neg A \vee \neg C) \vee D)$ | Klammern |
| $\equiv (\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D)$ | |

# Beispiel

| | |
|---|---|
| $(A \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow D$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $\equiv (A \wedge (\neg B \vee C)) \Rightarrow D$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $\equiv \neg(A \wedge (\neg B \vee C)) \vee D$ | de Morgen |
| $\equiv (\neg A \vee \neg(\neg B \vee C)) \vee D$ | de Morgen |
| $\equiv (\neg A \vee (\neg\neg B \wedge \neg C)) \vee D$ | Doppelte Negation |
| $\equiv (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \vee D$ | Distributivität |
| $\equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee D$ | Distributivität |
| $\equiv ((\neg A \vee B) \vee D) \wedge ((\neg A \vee \neg C) \vee D)$ | Klammern |
| $\equiv (\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D)$ | |

# Beispiel

| | |
|---|---|
| $(A \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow D$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $\equiv (A \wedge (\neg B \vee C)) \Rightarrow D$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $\equiv \neg(A \wedge (\neg B \vee C)) \vee D$ | de Morgen |
| $\equiv (\neg A \vee \neg(\neg B \vee C)) \vee D$ | de Morgen |
| $\equiv (\neg A \vee (\neg\neg B \wedge \neg C)) \vee D$ | Doppelte Negation |
| $\equiv (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \vee D$ | Distributivität |
| $\equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee D$ | Distributivität |
| $\equiv ((\neg A \vee B) \vee D) \wedge ((\neg A \vee \neg C) \vee D)$ | Klammern |
| $\equiv (\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D)$ | |

# Beispiel

| | |
|---|---|
| $(A \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow D$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $\equiv (A \wedge (\neg B \vee C)) \Rightarrow D$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $\equiv \neg(A \wedge (\neg B \vee C)) \vee D$ | de Morgen |
| $\equiv (\neg A \vee \neg(\neg B \vee C)) \vee D$ | de Morgen |
| $\equiv (\neg A \vee (\neg\neg B \wedge \neg C)) \vee D$ | Doppelte Negation |
| $\equiv (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \vee D$ | Distributivität |
| $\equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee D$ | Distributivität |
| $\equiv ((\neg A \vee B) \vee D) \wedge ((\neg A \vee \neg C) \vee D)$ | Klammern |
| $\equiv (\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D)$ | |

# Beispiel

| | |
|---|---|
| $(A \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow D$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $\equiv (A \wedge (\neg B \vee C)) \Rightarrow D$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $\equiv \neg(A \wedge (\neg B \vee C)) \vee D$ | de Morgen |
| $\equiv (\neg A \vee \neg(\neg B \vee C)) \vee D$ | de Morgen |
| $\equiv (\neg A \vee (\neg\neg B \wedge \neg C)) \vee D$ | Doppelte Negation |
| $\equiv (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \vee D$ | Distributivität |
| $\equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee D$ | Distributivität |
| $\equiv ((\neg A \vee B) \vee D) \wedge ((\neg A \vee \neg C) \vee D)$ | Klammern |
| $\equiv (\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D)$ | |

# Beispiel

| | |
|---|---|
| $(A \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow D$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $\equiv (A \wedge (\neg B \vee C)) \Rightarrow D$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $\equiv \neg(A \wedge (\neg B \vee C)) \vee D$ | de Morgen |
| $\equiv (\neg A \vee \neg(\neg B \vee C)) \vee D$ | de Morgen |
| $\equiv (\neg A \vee (\neg\neg B \wedge \neg C)) \vee D$ | Doppelte Negation |
| $\equiv (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \vee D$ | Distributivität |
| $\equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee D$ | Distributivität |
| $\equiv ((\neg A \vee B) \vee D) \wedge ((\neg A \vee \neg C) \vee D)$ | Klammern |
| $\equiv (\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D)$ | |

# Beispiel

| | |
|---|---|
| $(A \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow D$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $\equiv (A \wedge (\neg B \vee C)) \Rightarrow D$ | Elimination von $\Rightarrow$ |
| $\equiv \neg(A \wedge (\neg B \vee C)) \vee D$ | de Morgen |
| $\equiv (\neg A \vee \neg(\neg B \vee C)) \vee D$ | de Morgen |
| $\equiv (\neg A \vee (\neg\neg B \wedge \neg C)) \vee D$ | Doppelte Negation |
| $\equiv (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \vee D$ | Distributivität |
| $\equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee D$ | Distributivität |
| $\equiv ((\neg A \vee B) \vee D) \wedge ((\neg A \vee \neg C) \vee D)$ | Klammern |
| $\equiv (\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D)$ | |

# Beispiel

$$
\begin{array}{ll}
(A \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow D & \text{Elimination von } \Rightarrow \\
\equiv (A \wedge (\neg B \vee C)) \Rightarrow D & \text{Elimination von } \Rightarrow \\
\equiv \neg(A \wedge (\neg B \vee C)) \vee D & \text{de Morgen} \\
\equiv (\neg A \vee \neg(\neg B \vee C)) \vee D & \text{de Morgen} \\
\equiv (\neg A \vee (\neg\neg B \wedge \neg C)) \vee D & \text{Doppelte Negation} \\
\equiv (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \vee D & \text{Distributivität} \\
\equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee D & \text{Distributivität} \\
\equiv ((\neg A \vee B) \vee D) \wedge ((\neg A \vee \neg C) \vee D) & \text{Klammern} \\
\equiv (\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D) &
\end{array}
$$

# Zusammenfassung

Heute haben wir

- Folgerbarkeit und Äquivalenz eingeführt
  - Nachweis mit Wahrheitstafeln
  - Nachweis ohne Wahrheitstafeln
  - Gegenbeispiel (mit und ohne Wahrheitstafeln)
- etliche Sätze zur Folgerbarkeit und Äquivalenz gesehen
- das Ersetzbarkeitstheorem eingeführt und mit struktureller Induktion bewiesen
- Literal, Klausel, duale Klausel, DNF und KNF definiert
- gesehen, wie ein KNF und DNF hergestellt werden kann

Morgen:

- Beweisen wir formal die Existenz von KNF und DNF
- lernen noch ein zweites Verfahren zur Herstellung der KNF und DNF kennen
- ...