Spezifikation und Verifikation
Kapitel 3
Automatenbasiertes LTL und CTL Model Checking

Frank Heitmann
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

23. Mai 2014

LTL: Syntax

Definition (Syntax von LTL)

Die (wohlgeformten) Formeln der Linear Temporal Logic (LTL) werden durch die folgende Grammatik definiert:

$$
\begin{aligned}
\phi \quad ::= \quad & v \mid \neg\phi \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid \\
& X\phi \mid F\phi \mid G\phi \mid (\phi U \phi)
\end{aligned}
$$

wobei $v \in V$ ein aussagenlogisches Atom ist.

Die neuen Operatoren sind ne**X**t, **F**inally, **G**lobally und **U**ntil.

LTL: Syntax (Alternative)

Definition (Syntax von LTL (alternative))

Die *wohlgeformten Ausdrücke/Formeln* von LTL werden induktiv definiert durch

1. Jedes $v \in V$ ist eine (atomare) LTL Formel.
2. Wenn ϕ_1 und ϕ_2 Formeln sind, dann auch $\neg\phi_1, (\phi_1 \wedge \phi_2)$ und $(\phi_1 \vee \phi_2)$.
3. Wenn ϕ_1 und ϕ_2 Formeln sind, dann auch $X\phi_1, F\phi_1, G\phi_1$ and $(\phi_1 U \phi_2)$.
4. Nur Formeln, die durch endliche häufige Anwendungen der Regeln 1-3 entstehen, sind wohlgeformte Formeln von LTL.

Zum Klammersparen binden die unären Junktoren $\neg, X, G$ and F stärker als U und dann $\wedge$ und $\vee$.

LTL: Semantik

LTL Formeln werden entlang der Pfade eines Transitionssystems interpretiert. Das Transitionssystem übernimmt also die Rolle des Models in der Aussagenlogik.

LTL: Semantik

Definition (Transitionssystem)

Ein *labelled transition system* (LTS) ist ein Tupel $TS = (S, s_0, R, L)$mit

- einer endlichen Menge von Zuständen S,
- einem Startzustand $s_0 \in S$,
- einer links-totalen Übergangsrelation $R \subseteq S \times S$ und
- einer labelling function $L : S \to \mathcal{P}(V)$, die jedem Zustand s die Menge der atomaren Formeln $L(s) \subseteq V$ zuweist, die in s gelten.

Linkstotal bedeutet, dass es zu jedem $s \in S$ stets ein s' mit $(s, s') \in R$ gibt.

LTL: Semantik

Definition (Pfad im LTS)

Ein *Pfad* π in einem LTS $TS = (S, s_0, R, L)$ ist eine unendliche Sequenz von Zuständen

$$\pi = s_1 s_2 s_3 \dots$$

derart, dass $(s_i, s_{i+1}) \in R$ für alle $i \geq 1$.

- Mit π^i, $i \geq 1$ bezeichnen wir den Suffix, der an s_i startet, d.h. den Pfad $\pi^i = s_i s_{i+1} \dots$
- Mit $\pi(i)$, $i \geq 1$, bezeichnen wir den i-ten Zustand in π, d.h. $\pi(i) = s_i$.
- Wenn s_1 der Startzustand s_0 von TS ist, wird π auch als Rechnung bezeichnet.

LTL: Semantik

Definition (Semantik von LTL (I))

Sei $M = (S, s_0, R, L)$ ein LTS und $\pi = s_1 s_2 \ldots$ ein Pfad in M. π erfüllt eine LTL formula ϕ (in M), wenn $M, \pi \models \phi$ gilt, wobei die Relation $\models$ induktiv definiert ist:

$$
\begin{array}{lll}
M, \pi \models v & \text{gdw.} & v \in L(s_1) \text{ für } v \in V \\
M, \pi \models \neg\phi & \text{gdw.} & M, \pi \not\models \phi \\
M, \pi \models \phi_1 \wedge \phi_2 & \text{gdw.} & M, \pi \models \phi_1 \textit{ und } M, \pi \models \phi_2 \\
M, \pi \models \phi_1 \vee \phi_2 & \text{gdw.} & M, \pi \models \phi_1 \textit{ oder } M, \pi \models \phi_2
\end{array}
$$

LTL: Semantik

Definition (Semantik von LTL (I))

Sei $M = (S, s_0, R, L)$ ein LTS und $\pi = s_1 s_2 \dots$ ein Pfad in M. π erfüllt eine LTL formula ϕ (in M), wenn $M, \pi \models \phi$ gilt, wobei die Relation $\models$ induktiv definiert ist:

$$
\begin{array}{lll}
M, \pi \models v & \text{gdw.} & v \in L(s_1) \text{ für } v \in V \\
M, \pi \models \neg\phi & \text{gdw.} & M, \pi \not\models \phi \\
M, \pi \models \phi_1 \wedge \phi_2 & \text{gdw.} & M, \pi \models \phi_1 \textit{ und } M, \pi \models \phi_2 \\
M, \pi \models \phi_1 \vee \phi_2 & \text{gdw.} & M, \pi \models \phi_1 \textit{ oder } M, \pi \models \phi_2
\end{array}
$$

LTL: Semantik

Definition (Semantik von LTL (II))

$$
\begin{array}{lll}
M, \pi \models X\phi & \text{gdw.} & M, \pi^2 \models \phi \\
M, \pi \models F\phi & \text{gdw.} & M, \pi^i \models \phi \text{ für ein } i \geq 1 \\
M, \pi \models G\phi & \text{gdw.} & M, \pi^i \models \phi \text{ für alle } i \geq 1 \\
M, \pi \models \phi_1 U \phi_2 & \text{gdw.} & \text{ein } i \geq 1 \text{ existiert mit } M, \pi^i \models \phi_2 \\
 & & \text{und für alle } j < i \; M, \pi^j \models \phi_1 \text{ gilt.}
\end{array}
$$

LTL: Semantik

Definition (Semantik von LTL (III))

Sei $M = (S, s_0, R, L)$ ein LTS. Sei ϕ eine LTL Formel und $s \in S$ ein Zustand von M.

- $M, s \models \phi$, wenn $M, \pi \models \phi$ gilt für jeden Pfad π in M, der in s startet.
- Wenn $M, s_0 \models \phi$ gilt, wir schreiben $M \models \phi$. M ist dann ein *Model* für ϕ oder dass ϕ *erfüllt ist* in M.
- Zwei LTL Formeln ϕ und ψ sind *äquivalent*, $\phi \equiv \psi$, wenn für alle Modele M und alle Pfade π in M auch $M, \pi \models \phi$ gdw. $M, \pi \models \psi$ gilt.

LTL: Äquivalenzen

Bisweilen werden weitere Junktoren wie z.B. $\Rightarrow$ für die Implikation oder R für "release" benutzt. Diese können durch die Äquivalenzen $\phi_1 \Rightarrow \phi_2 \equiv \neg\phi_1 \vee \phi_2$ und $\phi_1 R \phi_2 \equiv \neg(\neg\phi_1 U \neg\phi_2)$ ausgedrückt werden. Unsere Junktoren bilden ein "adequate set of connectives" für LTL, d.h. alle andern Junktoren können durch sie ausgedrückt werden. Tatsächlich gibt es sogar kleinere Sets.

$$\{\neg, \wedge, X, U\}$$

ist ein solches. F und G werden dann durch $F\phi := \top U \phi$ and $G\phi := \neg F \neg \phi$ definiert. Eine kleine Anzahl an Junktoren ist insb. bei Model Checking Algorithmen hilfreich, da man sich um weniger Fälle kümmern muss.

LTL: Äquivalenzen

Bisweilen werden weitere Junktoren wie z.B. $\Rightarrow$ für die Implikation oder R für "release" benutzt. Diese können durch die Äquivalenzen $\phi_1 \Rightarrow \phi_2 \equiv \neg\phi_1 \vee \phi_2$ und $\phi_1 R \phi_2 \equiv \neg(\neg\phi_1 U \neg\phi_2)$ ausgedrückt werden. Unsere Junktoren bilden ein "adequate set of connectives" für LTL, d.h. alle andern Junktoren können durch sie ausgedrückt werden. Tatsächlich gibt es sogar kleinere Sets.

$$\{\neg, \wedge, X, U\}$$

ist ein solches. F und G werden dann durch $F\phi := \top U \phi$ and $G\phi := \neg F \neg \phi$ definiert. Eine kleine Anzahl an Junktoren ist insb. bei Model Checking Algorithmen hilfreich, da man sich um weniger Fälle kümmern muss.

LTL: Äquivalenzen

Bisweilen werden weitere Junktoren wie z.B. $\Rightarrow$ für die Implikation oder R für "release" benutzt. Diese können durch die Äquivalenzen $\phi_1 \Rightarrow \phi_2 \equiv \neg\phi_1 \vee \phi_2$ und $\phi_1 R \phi_2 \equiv \neg(\neg\phi_1 U \neg\phi_2)$ ausgedrückt werden. Unsere Junktoren bilden ein "adequate set of connectives" für LTL, d.h. alle andern Junktoren können durch sie ausgedrückt werden. Tatsächlich gibt es sogar kleinere Sets.

$$\{\neg, \wedge, X, U\}$$

ist ein solches. F und G werden dann durch $F\phi := \top U \phi$ and $G\phi := \neg F \neg\phi$ definiert. Eine kleine Anzahl an Junktoren ist insb. bei Model Checking Algorithmen hilfreich, da man sich um weniger Fälle kümmern muss.

Das Model-Checking-Problem

Das Problem

Das *model checking problem* für LTL oder CTL fragt, gegeben ein LTS M und eine Formel ϕ, ob $M \models \phi$ gilt, d.h. ob M ein Model für ϕ ist.

Eingabe: Ein LTS M und eine LTL oder CTL Formel ϕ.

Frage: Gilt $M \models \phi$?

Model Checking. Ergebnisse

Satz

Sei M ein LTS.

1. *Sei ϕ eine LTL Formel. Das model checking problem für LTL, d.h. die Frage, ob $M \models \phi$ gilt, ist* PSPACE*-vollständig und kann in $O(|M| \cdot 2^{|\phi|})$ Zeit entschieden werden.*
2. *Sei ϕ eine CTL Formel. Das model checking problem für CTL, d.h. die Frage, ob $M \models \phi$ gilt, kann in $O(|M| \cdot |\phi|)$ Zeit entschieden werden.*

Wichtige Anmerkung

Das Modell M wird allerdings i.A. sehr schnell sehr groß. Daher ist $|M|$ der dominante Faktor, was zu dem berühmten Problem der Zustandsraumexplosion führt.

Die Idee

Sei M ein LTS und ϕ eine LTL Formel.

- Zu $\neg\phi$ (der Negation der Spezifikation!) konstruieren wir einen (Büchi-)Automaten $A_{\neg\phi}$.
- $A_{\neg\phi}$ akzeptiert genau die Wörter w mit $w \models \neg\phi$.
- Bilde den "Produktautomaten" $M \cap A_{\neg\phi}$.
- Prüfe, ob die akzeptierte Sprache von $M \cap A_{\neg\phi}$ leer ist.

Die Idee

Sei M ein LTS und ϕ eine LTL Formel.

- Zu $\neg\phi$ (der Negation der Spezifikation!) konstruieren wir einen (Büchi-)Automaten $A_{\neg\phi}$.
- $A_{\neg\phi}$ akzeptiert genau die Wörter w mit $w \models \neg\phi$.
- Bilde den "Produktautomaten" $M \cap A_{\neg\phi}$.
- Prüfe, ob die akzeptierte Sprache von $M \cap A_{\neg\phi}$ leer ist.

Die Idee

Sei M ein LTS und ϕ eine LTL Formel.

- Zu $\neg\phi$ (der Negation der Spezifikation!) konstruieren wir einen (Büchi-)Automaten $A_{\neg\phi}$.
- $A_{\neg\phi}$ akzeptiert genau die Wörter w mit $w \models \neg\phi$.
- Bilde den "Produktautomaten" $M \cap A_{\neg\phi}$.
- Prüfe, ob die akzeptierte Sprache von $M \cap A_{\neg\phi}$ leer ist.

Die Idee

Sei M ein LTS und ϕ eine LTL Formel.

- Zu $\neg\phi$ (der Negation der Spezifikation!) konstruieren wir einen (Büchi-)Automaten $A_{\neg\phi}$.
- $A_{\neg\phi}$ akzeptiert genau die Wörter w mit $w \models \neg\phi$.
- Bilde den "Produktautomaten" $M \cap A_{\neg\phi}$.
- Prüfe, ob die akzeptierte Sprache von $M \cap A_{\neg\phi}$ leer ist.

Die Idee

Sei M ein LTS und ϕ eine LTL Formel.

- Zu $\neg\phi$ (der Negation der Spezifikation!) konstruieren wir einen (Büchi-)Automaten $A_{\neg\phi}$.
- $A_{\neg\phi}$ akzeptiert genau die Wörter w mit $w \models \neg\phi$.
- Bilde den "Produktautomaten" $M \cap A_{\neg\phi}$.
- Prüfe, ob die akzeptierte Sprache von $M \cap A_{\neg\phi}$ leer ist.

Das weitere Vorgehen

Wir benötigen jetzt also:

1. Büchi-Automaten (und drumherum)
2. Eine alternative (aber äquivalente) Semantik für LTL
3. Den “Produktautomaten”
4. Den Leerheitstest

Büchi-Automaten und ω-Wörter

- *Syntaktisch* sind Büchi-Automaten wie endliche Automaten definiert.
- *Semantisch* lesen sie *unendliche lange* Wörter!

Büchi-Automaten und ω-Wörter

- *Syntaktisch* sind Büchi-Automaten wie endliche Automaten definiert.
- *Semantisch* lesen sie *unendliche lange* Wörter!

ω-Wörter

Definition (ω-Wörter und -Sprachen)

- Sei Σ ein *endliches* Alphabet. Ein *unendliches Wort über* Σ (oder ω-Wort) ist eine unendliche Folge $w = a_0 a_1 a_2 \dots$ von Buchstaben $a_i \in \Sigma$.
- Die Menge aller unendlichen Wörter über Σ wird mit Σ^ω bezeichnet. Eine Menge $L \subseteq \Sigma^\omega$ wird als ω-Sprache bezeichnet.
- Mit $|w|_a$ ($w \in \Sigma^\omega$, $a \in \Sigma$) wird die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens a im Wort w bezeichnet.
- Konkatenation etc. wird erweitert. Es ist allerdings nicht möglich zwei ω-Wörter zu konkatenieren, sondern nur ein endliches Wort v und ein ω-Wort w zu $v \cdot w$ zu machen.
- Ähnlich macht v^ω nur für $v \in \Sigma^*$ Sinn und ist auf L^ω für Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ erweiterbar.

ω-Wörter

Definition (ω-Wörter und -Sprachen)

- Sei Σ ein *endliches* Alphabet. Ein *unendliches Wort über* Σ (oder ω-Wort) ist eine unendliche Folge $w = a_0 a_1 a_2 \dots$ von Buchstaben $a_i \in \Sigma$.
- Die Menge aller unendlichen Wörter über Σ wird mit Σ^ω bezeichnet. Eine Menge $L \subseteq \Sigma^\omega$ wird als ω-Sprache bezeichnet.
- Mit $|w|_a$ ($w \in \Sigma^\omega$, $a \in \Sigma$) wird die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens a im Wort w bezeichnet.
- Konkatenation etc. wird erweitert. Es ist allerdings nicht möglich zwei ω-Wörter zu konkatenieren, sondern nur ein endliches Wort v und ein ω-Wort w zu $v \cdot w$ zu machen.
- Ähnlich macht v^ω nur für $v \in \Sigma^*$ Sinn und ist auf L^ω für Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ erweiterbar.

ω-Wörter

Definition (ω-Wörter und -Sprachen)

- Sei Σ ein *endliches* Alphabet. Ein *unendliches Wort über* Σ (oder ω-Wort) ist eine unendliche Folge $w = a_0 a_1 a_2 \dots$ von Buchstaben $a_i \in \Sigma$.
- Die Menge aller unendlichen Wörter über Σ wird mit Σ^ω bezeichnet. Eine Menge $L \subseteq \Sigma^\omega$ wird als ω-Sprache bezeichnet.
- Mit $|w|_a$ ($w \in \Sigma^\omega$, $a \in \Sigma$) wird die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens a im Wort w bezeichnet.
- Konkatenation etc. wird erweitert. Es ist allerdings nicht möglich zwei ω-Wörter zu konkatenieren, sondern nur ein endliches Wort v und ein ω-Wort w zu $v \cdot w$ zu machen.
- Ähnlich macht v^ω nur für $v \in \Sigma^*$ Sinn und ist auf L^ω für Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ erweiterbar.

ω-Wörter

Definition (ω-Wörter und -Sprachen)

- Sei Σ ein *endliches* Alphabet. Ein *unendliches Wort über* Σ (oder ω-Wort) ist eine unendliche Folge $w = a_0 a_1 a_2 \ldots$ von Buchstaben $a_i \in \Sigma$.
- Die Menge aller unendlichen Wörter über Σ wird mit Σ^ω bezeichnet. Eine Menge $L \subseteq \Sigma^\omega$ wird als ω-Sprache bezeichnet.
- Mit $|w|_a$ ($w \in \Sigma^\omega$, $a \in \Sigma$) wird die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens a im Wort w bezeichnet.
- Konkatenation etc. wird erweitert. Es ist allerdings nicht möglich zwei ω-Wörter zu konkatenieren, sondern nur ein endliches Wort v und ein ω-Wort w zu $v \cdot w$ zu machen.
- Ähnlich macht v^ω nur für $v \in \Sigma^*$ Sinn und ist auf L^ω für Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ erweiterbar.

ω-Wörter

Definition (ω-Wörter und -Sprachen)

- Sei Σ ein *endliches* Alphabet. Ein *unendliches Wort über* Σ (oder ω-Wort) ist eine unendliche Folge $w = a_0 a_1 a_2 \ldots$ von Buchstaben $a_i \in \Sigma$.
- Die Menge aller unendlichen Wörter über Σ wird mit Σ^ω bezeichnet. Eine Menge $L \subseteq \Sigma^\omega$ wird als ω-Sprache bezeichnet.
- Mit $|w|_a$ ($w \in \Sigma^\omega$, $a \in \Sigma$) wird die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens a im Wort w bezeichnet.
- Konkatenation etc. wird erweitert. Es ist allerdings nicht möglich zwei ω-Wörter zu konkatenieren, sondern nur ein endliches Wort v und ein ω-Wort w zu $v \cdot w$ zu machen.
- Ähnlich macht v^ω nur für $v \in \Sigma^*$ Sinn und ist auf L^ω für Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ erweiterbar.

ω-reguläre Sprachen

Definition (ω-reguläre Sprachen)

Sei $L \subseteq \Sigma^\omega$. L ist ω-regulär, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert und reguläre Sprachen $U_0, U_1, \dots, U_{n-1}, V_0, V_1, \dots, V_{n-1} \subseteq \Sigma^*$ mit $\lambda \notin V_i$ für alle i, so dass

$$L = \cup_{i=0}^{n-1} U_i V_i^\omega$$

gilt.

Satz

Die Klasse der ω-regulären Sprachen ist abgeschlossen unter Vereinigung und Linkskonkatenation mit regulären Sprachen.

ω-reguläre Sprachen

Definition (ω-reguläre Sprachen)

Sei $L \subseteq \Sigma^\omega$. L ist ω-regulär, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert und reguläre Sprachen $U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}, V_0, V_1, \ldots, V_{n-1} \subseteq \Sigma^*$ mit $\lambda \notin V_i$ für alle i, so dass

$$L = \cup_{i=0}^{n-1} U_i V_i^\omega$$

gilt.

Satz

Die Klasse der ω-regulären Sprachen ist abgeschlossen unter Vereinigung und Linkskonkatenation mit regulären Sprachen.

Büchi-Automaten

Definition (NBA)

Ein **Büchi-Automat** (NBA) ist ein 5-Tupel

$$A = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z_{end})$$

mit:

- Der endlichen Menge von *Zuständen* Z.
- Dem endlichen Alphabet Σ von *Eingabesymbolen*.
- Der *Überführungsfunktion* $\delta : Z \times \Sigma \to 2^Z$.
- Dem *Startzustand* $z_0 \in Z$.
- Der Menge der *Endzustände* $Z_{end} \subseteq Z$.

Büchi-Automaten

Definition (NBA - Fortsetzung)

- Sei $w = a_0 a_1 a_2 \ldots \in \Sigma^\omega$ ein Wort. Ein Lauf von A auf w ist eine unendliche Folge von Zuständen $\rho = z_0 z_1 z_2 \ldots$, die am Anfangszustand beginnt und die $z_{i+1} \in \delta(z_i, a_i)$ für alle $i \geq 0$ erfüllt.
- Mit $inf(\rho)$ wird die Menge der in ρ unendlich oft vorkommenden Zustände bezeichnet.
- Ein Lauf ist **akzeptierend** wenn $inf(\rho) \cap F \neq \emptyset$ gilt.
- $L(A)$ ist die Menge jener Wörter, für die ein akzeptierender Lauf in A existiert.
- Ist $|\delta(z, a)| = 1$ für alle $z \in Z$ und $a \in \Sigma$, dann ist der NBA *deterministische* (d.h. ein DBA).

Büchi-Automaten

Definition (NBA - Fortsetzung)

- Sei $w = a_0 a_1 a_2 \ldots \in \Sigma^\omega$ ein Wort. Ein Lauf von A auf w ist eine unendliche Folge von Zuständen $\rho = z_0 z_1 z_2 \ldots$, die am Anfangszustand beginnt und die $z_{i+1} \in \delta(z_i, a_i)$ für alle $i \geq 0$ erfüllt.
- Mit $inf(\rho)$ wird die Menge der in ρ unendlich oft vorkommenden Zustände bezeichnet.
- Ein Lauf ist **akzeptierend** wenn $inf(\rho) \cap F \neq \emptyset$ gilt.
- $L(A)$ ist die Menge jener Wörter, für die ein akzeptierender Lauf in A existiert.
- Ist $|\delta(z, a)| = 1$ für alle $z \in Z$ und $a \in \Sigma$, dann ist der NBA *deterministische* (d.h. ein DBA).

Büchi-Automaten

Definition (NBA - Fortsetzung)

- Sei $w = a_0 a_1 a_2 \ldots \in \Sigma^\omega$ ein Wort. Ein Lauf von A auf w ist eine unendliche Folge von Zuständen $\rho = z_0 z_1 z_2 \ldots$, die am Anfangszustand beginnt und die $z_{i+1} \in \delta(z_i, a_i)$ für alle $i \geq 0$ erfüllt.
- Mit $\mathit{inf}(\rho)$ wird die Menge der in ρ unendlich oft vorkommenden Zustände bezeichnet.
- Ein Lauf ist **akzeptierend** wenn $\mathit{inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset$ gilt.
- $L(A)$ ist die Menge jener Wörter, für die ein akzeptierender Lauf in A existiert.
- Ist $|\delta(z, a)| = 1$ für alle $z \in Z$ und $a \in \Sigma$, dann ist der NBA *deterministische* (d.h. ein DBA).

Frank Heitmann heitmann@informatik.uni-hamburg.de

Büchi-Automaten

Definition (NBA - Fortsetzung)

- Sei $w = a_0 a_1 a_2 \ldots \in \Sigma^\omega$ ein Wort. Ein Lauf von A auf w ist eine unendliche Folge von Zuständen $\rho = z_0 z_1 z_2 \ldots$, die am Anfangszustand beginnt und die $z_{i+1} \in \delta(z_i, a_i)$ für alle $i \geq 0$ erfüllt.
- Mit $\mathit{inf}(\rho)$ wird die Menge der in ρ unendlich oft vorkommenden Zustände bezeichnet.
- Ein Lauf ist **akzeptierend** wenn $\mathit{inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset$ gilt.
- $L(A)$ ist die Menge jener Wörter, für die ein akzeptierender Lauf in A existiert.
- Ist $|\delta(z, a)| = 1$ für alle $z \in Z$ und $a \in \Sigma$, dann ist der NBA *deterministische* (d.h. ein DBA).

Büchi-Automaten

Definition (NBA - Fortsetzung)

- Sei $w = a_0 a_1 a_2 \ldots \in \Sigma^\omega$ ein Wort. Ein Lauf von A auf w ist eine unendliche Folge von Zuständen $\rho = z_0 z_1 z_2 \ldots$, die am Anfangszustand beginnt und die $z_{i+1} \in \delta(z_i, a_i)$ für alle $i \geq 0$ erfüllt.
- Mit $\mathit{inf}(\rho)$ wird die Menge der in ρ unendlich oft vorkommenden Zustände bezeichnet.
- Ein Lauf ist **akzeptierend** wenn $\mathit{inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset$ gilt.
- $L(A)$ ist die Menge jener Wörter, für die ein akzeptierender Lauf in A existiert.
- Ist $|\delta(z, a)| = 1$ für alle $z \in Z$ und $a \in \Sigma$, dann ist der NBA *deterministische* (d.h. ein DBA).

Büchi-Automaten

Satz

Zu jedem NBA mit mehreren Startzuständen existiert ein äquivalenter NBA mit nur einem Startzustand (und nur einem Zustand mehr).

Beweis.

Wie bei NFAs: Führe einen neuen (einzigen) Startzustand z_{neu} ein und eine a-Kante von z_{neu} zu z, wenn es eine a-Kante von einem früheren Startzustand zu z gab. □

Büchi-Automaten

Satz

Zu jedem NBA mit mehreren Startzuständen existiert ein äquivalenter NBA mit nur einem Startzustand (und nur einem Zustand mehr).

Beweis.

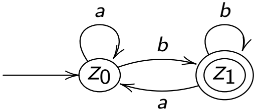
Wie bei NFAs: Führe einen neuen (einzigen) Startzustand z_{neu} ein und eine a-Kante von z_{neu} zu z, wenn es eine a-Kante von einem früheren Startzustand zu z gab. $\square$

Ein Beispiel

Ein DBA für $L_1 = (a^* b)^\omega$?

Ein Beispiel

Ein DBA für $L_1 = (a^* b)^\omega$?

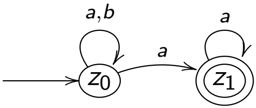


Noch ein Beispiel

Ein Büchi-Automat für $L_2 = (a + b)^* a^\omega$?

Noch ein Beispiel

Ein Büchi-Automat für $L_2 = (a+b)^* a^\omega$?



Der erste Automat war deterministisch, dieser nicht...

DBA $\lneq$ NBA

Satz

NBAs sind echt mächtiger als DBAs, d.h. es gibt ω-Sprachen, die von einem NBA akzeptiert werden können, nicht aber von einem DBA.

Beweis.

Man kann dies gerade an obigem $L_2 = \{w \in \{a,b\}^\omega \mid |w|_b < \infty\}$ zeigen. L_2 kann nach obigem von einem NBA akzeptiert werden. Angenommen $A = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z_{end})$ ist nun ein DBA mit $L(A) = L_2$, dann

□

DBA $\lneq$ NBA

Satz

NBAs sind echt mächtiger als DBAs, d.h. es gibt ω-Sprachen, die von einem NBA akzeptiert werden können, nicht aber von einem DBA.

Beweis.

Man kann dies gerade an obigem $L_2 = \{w \in \{a,b\}^\omega \mid |w|_b < \infty\}$ zeigen. L_2 kann nach obigem von einem NBA akzeptiert werden. Angenommen $A = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z_{end})$ ist nun ein DBA mit $L(A) = L_2$, dann $\square$

DBA $\lneq$ NBA

Satz

NBAs sind echt mächtiger als DBAs, d.h. es gibt ω-Sprachen, die von einem NBA akzeptiert werden können, nicht aber von einem DBA.

Beweis.

Man kann dies gerade an obigem $L_2 = \{w \in \{a,b\}^\omega \mid |w|_b < \infty\}$ zeigen. L_2 kann nach obigem von einem NBA akzeptiert werden. Angenommen $A = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z_{end})$ ist nun ein DBA mit $L(A) = L_2$, dann ... Hausaufgabe! :) $\square$

Leerheitsproblem

Satz

Das Leerheitsproblem für NBA ist in Zeit $O(n)$ lösbar, wobei n die Anzahl der Transitionen des NBA ist.

Beweis.

Sei $A = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z_{end})$ ein NBA und sei außerdem jedes $z \in Z$ erreichbar.

$\square$

Leerheitsproblem

Satz

Das Leerheitsproblem für NBA ist in Zeit $O(n)$ lösbar, wobei n die Anzahl der Transitionen des NBA ist.

Beweis.

Sei $A = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z_{end})$ ein NBA und sei außerdem jedes $z \in Z$ erreichbar. Es gilt $L(A) \neq \emptyset$ gdw. es einen Pfad von z_0 zu einem $z \in Z_{end}$ gibt und danach einen (nicht-leeren) Pfad von z nach z.

□

Leerheitsproblem

Satz

Das Leerheitsproblem für NBA ist in Zeit $O(n)$ lösbar, wobei n die Anzahl der Transitionen des NBA ist.

Beweis.

Sei $A = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z_{end})$ ein NBA und sei außerdem jedes $z \in Z$ erreichbar. Es gilt $L(A) \neq \emptyset$ gdw. es einen Pfad von z_0 zu einem $z \in Z_{end}$ gibt und danach einen (nicht-leeren) Pfad von z nach z.

1. Berechne eine Zerlegung des Zustandsdiagramms in maximale strenge Zusammenhangskomponenten (SCC) in $O(n)$.
2. Prüfe für jedes $z \in Z_{end}$ ob es in einer nicht-trivialen (mindestens eine Kante) SCC liegt.

Ist der zweite Schritt erfolgreich gilt $L(A) \neq \emptyset$, sonst ist die akzeptierte Sprache leer. $\square$

NBA und ω-reguläre Sprachen

Satz

1. *Seien A, B zwei NBAs und C ein NFA, dann existieren NBAs D und E mit $L(D) = L(A) \cup L(B)$ und $L(E) = L(C) \cdot L(A)$. Ist außerdem $\lambda \notin L(C)$, dann existiert ein NBA F mit $L(F) = L(C)^\omega$.*
2. *Eine Sprache L ist ω-regulär gdw. ein Büchi-Automat A existiert mit $L(A) = L$.*

NBA und ω-reguläre Sprachen

Satz

1. *Seien A, B zwei NBAs und C ein NFA, dann existieren NBAs D und E mit $L(D) = L(A) \cup L(B)$ und $L(E) = L(C) \cdot L(A)$. Ist außerdem $\lambda \notin L(C)$, dann existiert ein NBA F mit $L(F) = L(C)^\omega$.*
2. *Eine Sprache L ist ω-regulär gdw. ein Büchi-Automat A existiert mit $L(A) = L$.*

NBA Schnitt

Satz

Seien A und B NBAs mit n bzw. m Zuständen. Dann existiert ein NBA C mit $L(C) = L(A) \cap L(B)$ und $3 \cdot n \cdot m$ Zuständen.

Beweis

Sei $A = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z_{end})$ und $B = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, Z'_{end})$. Wir definieren:

...

NBA Schnitt

Sei $A = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z_{end})$ und $B = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, Z'_{end})$. Wir definieren:

$$C := (Z \times Z' \times \{0,1,2\}, \Sigma, \delta'', (z_0, z'_0, 0), Z \times Z' \times \{2\})$$

mit $\delta''((z, z', i), a) := \{(u, u', j) \mid u \in \delta(z, a), u' \in \delta'(z', a)\}$ wobei

$$j := \begin{cases} 1 & \text{, falls } i = 0 \text{ und } u \in Z_{end} \text{ oder } i = 1 \text{ und } u' \notin Z'_{end} \\ 2 & \text{, falls } i = 1 \text{ und } u' \in Z'_{end} \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Weiteres als Hausaufgabe...

Generalisierter NBA

Definition (Generalisierter NBA (GNBA))

- Ein generalisierter NBA (GNBA) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \delta, Z_{start}, Z^1_{end}, Z^2_{end}, \dots, Z^k_{end})$, der wie ein NBA definiert ist mit Ausnahme einer Startzustands*menge* $Z_{start} \subseteq Z$ und mehreren Endzustandsmengen.
- Ein Lauf ist wie beim NBA definiert mit der Ausnahme, dass der Lauf bei einem beliebigen $z \in Z_{start}$ beginnen kann.
- Ein Lauf ρ ist akzeptierend, falls $inf(\rho) \cap Z^i_{end} \neq \emptyset$ für alle i gilt.

Generalisierter NBA

Satz

Zu jedem GNBA $A = (Z, \Sigma, \delta, Z_{start}, Z_{end}^0, \dots, Z_{end}^{k-1})$ *lässt sich ein NBA* A' *konstruieren mit* $L(A') = L(A)$ *und* $|A'| = 1 + |Z| \cdot (k+1)$.

Beweis

Generalisierter NBA

Satz

Zu jedem GNBA $A = (Z, \Sigma, \delta, Z_{start}, Z_{end}^0, \dots, Z_{end}^{k-1})$ lässt sich ein NBA A' konstruieren mit $L(A') = L(A)$ und $|A'| = 1 + |Z| \cdot (k+1)$.

Beweis

Wir definieren
$A' = (Z \times \{0, \dots, k-1\}, \Sigma, \Delta, Z_{start} \times \{0\}, Z_{end}^0 \times \{0\})$ mit
$\Delta((z,i),a) = \{(z',j) \mid z' \in \delta(z,a)\}$ wobei

$$j := \begin{cases} i+1 \mod k & \text{, falls } z \in F_i \\ i & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Generalisierter NBA

Beweis.

- In der ersten Zustandskomponente wird A simuliert.
- In der zweiten Zustandskomponente wird angegeben aus welcher Endzustandsmenge *als nächstes* ein Endzustand besucht werden soll.

Letzteres funktioniert, da in einem akzeptierenden Lauf A aus allen Mengen F_i unendlich oft einen Zustand besucht. Daraus folgt, dass wenn A einen Zustand aus F_i besucht, irgendwann einer aus $F_{i+1 \mod k}$ besucht werden muss (auch wenn dazwischen vielleicht bereits welche aus einem F_j besucht werden). Damit lässt sich dann leicht argumentieren, dass ein akzeptierender Lauf in A auch einer in A' ist und umgekehrt. □

Generalisierter NBA

Beweis.

- In der ersten Zustandskomponente wird A simuliert.
- In der zweiten Zustandskomponente wird angegeben aus welcher Endzustandsmenge *als nächstes* ein Endzustand besucht werden soll.

Letzteres funktioniert, da in einem akzeptierenden Lauf A aus allen Mengen F_i unendlich oft einen Zustand besucht. Daraus folgt, dass wenn A einen Zustand aus F_i besucht, irgendwann einer aus $F_{i+1 \mod k}$ besucht werden muss (auch wenn dazwischen vielleicht bereits welche aus einem F_j besucht werden). Damit lässt sich dann leicht argumentieren, dass ein akzeptierender Lauf in A auch einer in A' ist und umgekehrt. □

Die Idee

Wie war noch gleich der Plan?!

Sei M ein LTS und ϕ eine LTL Formel.

- Zu $\neg\phi$ (der Negation der Spezifikation!) konstruieren wir einen (Büchi-)Automaten $A_{\neg\phi}$.
- $A_{\neg\phi}$ akzeptiert genau die Wörter w mit $w \models \neg\phi$.
- Bilde den "Produktautomaten" $M \cap A_{\neg\phi}$.
- Prüfe, ob die akzeptierte Sprache von $M \cap A_{\neg\phi}$ leer ist.

Die Idee

Wie war noch gleich der Plan?!

Sei M ein LTS und ϕ eine LTL Formel.

- Zu $\neg\phi$ (der Negation der Spezifikation!) konstruieren wir einen (Büchi-)Automaten $A_{\neg\phi}$.
- $A_{\neg\phi}$ akzeptiert genau die Wörter w mit $w \models \neg\phi$.
- Bilde den "Produktautomaten" $M \cap A_{\neg\phi}$.
- Prüfe, ob die akzeptierte Sprache von $M \cap A_{\neg\phi}$ leer ist.

LTL - alternative Definition

Sei $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$ eine Menge von atomaren Formeln. Sei

$$\phi ::= p \mid \neg\phi \mid (\phi \vee \phi) \mid X\phi \mid \phi U \phi$$

und als Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \phi R \psi &:= \neg(\neg\phi U \neg\psi) \\ F\phi &:= \top U \phi \\ G\phi &:= \neg F \neg\phi \end{aligned}$$

Dabei wird $\phi R \psi$ erfüllt, wenn entweder ψ immer gilt oder ψ bis zu einem Moment gilt, in dem sowohl ϕ als auch ψ gelten.

LTL - alternativ

Definition (LTL - alternativ)

Sei $w = a_0 a_1 \ldots \in (2^P)^\omega$. Die Semantik ist induktiv für alle $i \in \mathbb{N}$ definiert durch:

$$
\begin{array}{lll}
w, i \models p & \text{gdw.} & p \in a_i \\
w, i \models \neg\phi & \text{gdw.} & w, i \not\models \phi \\
w, i \models \phi_1 \vee \phi_2 & \text{gdw.} & w, i \models \phi_1 \textit{ oder } w, i \models \phi_2 \\
w, i \models X\phi & \text{gdw.} & w, i+1 \models \phi \\
w, i \models \phi_1 U \phi_2 & \text{gdw.} & \text{ein } k \geq i \text{ existiert mit } w, k \models \phi_2 \text{ und} \\
 & & \text{für alle } j \text{ mit } i \leq j < k \text{ gilt } w, j \models \phi_1
\end{array}
$$

Ein Wort entspricht dabei den Labels jener Zustand, die bei einem Lauf durch ein LTS besucht werden.

LTL - alternativ

Definition

Sei $\Sigma = (2^P)$, $v \in \Sigma^\omega$ und ϕ eine LTL-Formel. Es ist $v \models \phi$, falls $v, 0 \models \phi$ und $L(\phi) = \{u \mid u \models \phi\}$. Zwei Formeln ϕ und ψ sind äquivalent, $\phi \equiv \psi$, falls $L(\phi) = L(\psi)$ gilt.

Ist z.B. $P = \{C, D\}$, dann ist $\Sigma = \{\emptyset, \{C\}, \{D\}, \{C, D\}\}$. Will man nun an ein bestimmtes $a \in \Sigma$ herankommen, so kann man *charakteristische Formeln* χ_a verwenden:

$$\chi_a := (\bigwedge_{p \in a} p) \wedge (\bigwedge_{p \notin a} \neg p)$$

Will man z.B. eine Formel für die Sprache, die nur aus dem Wort $(\{C\}\{D\})^\omega$ besteht, so geht dies mit:

$$\chi_C \wedge G((\chi_C \Rightarrow X\chi_D) \wedge (\chi_D \Rightarrow X\chi_C))$$

LTL - alternativ

Definition

Sei $\Sigma = (2^P)$, $v \in \Sigma^\omega$ und ϕ eine LTL-Formel. Es ist $v \models \phi$, falls $v, 0 \models \phi$ und $L(\phi) = \{u \mid u \models \phi\}$. Zwei Formeln ϕ und ψ sind äquivalent, $\phi \equiv \psi$, falls $L(\phi) = L(\psi)$ gilt.

Ist z.B. $P = \{C, D\}$, dann ist $\Sigma = \{\emptyset, \{C\}, \{D\}, \{C, D\}\}$. Will man nun an ein bestimmtes $a \in \Sigma$ herankommen, so kann man *charakteristische Formeln* χ_a verwenden:

$$\chi_a := (\bigwedge_{p \in a} p) \wedge (\bigwedge_{p \notin a} \neg p)$$

Will man z.B. eine Formel für die Sprache, die nur aus dem Wort $(\{C\}\{D\})^\omega$ besteht, so geht dies mit:

$$\chi_C \wedge G((\chi_C \Rightarrow X\chi_D) \wedge (\chi_D \Rightarrow X\chi_C))$$

Normalform

Definition (Positive Normalform)

Eine LTL-Formel ist in *positiver Normalform*, wenn sie nur aus Literalen $p, \neg p$ (für ein $p \in P$) und den Operatoren $\vee, \wedge, X, U$ und R aufgebaut ist.

Satz

Zu jeder LTL-Formel ϕ gibt es eine äquivalente LTL-Formel ϕ' in positiver Normalform. Ferner ist $|\phi'| \leq 2 \cdot |\phi|$.

Beweis.

Zum Beweis betrachtet man jeden Operator in negierter und nicht-negierter Form und zeigt, dass man ihn wie angegeben ausdrücken kann. Z.B. ist
$Gp \equiv \neg F \neg p \equiv \neg(\top U \neg p) \equiv \neg(\neg\bot U \neg p) \equiv \bot R p$ und
$\neg(pRq) \equiv \neg\neg(\neg p U \neg q) \equiv (\neg p U \neg q)$. □

Normalform

Definition (Positive Normalform)

Eine LTL-Formel ist in *positiver Normalform*, wenn sie nur aus Literalen $p, \neg p$ (für ein $p \in P$) und den Operatoren $\vee, \wedge, X, U$ und R aufgebaut ist.

Satz

Zu jeder LTL-Formel ϕ gibt es eine äquivalente LTL-Formel ϕ' in positiver Normalform. Ferner ist $|\phi'| \leq 2 \cdot |\phi|$.

Beweis.

Zum Beweis betrachtet man jeden Operator in negierter und nicht-negierter Form und zeigt, dass man ihn wie angegeben ausdrücken kann. Z.B. ist
$Gp \equiv \neg F \neg p \equiv \neg(\top U \neg p) \equiv \neg(\neg\bot U \neg p) \equiv \bot Rp$ und
$\neg(pRq) \equiv \neg\neg(\neg pU\neg q) \equiv (\neg pU\neg q)$. □

Normalform

Definition (Positive Normalform)

Eine LTL-Formel ist in *positiver Normalform*, wenn sie nur aus Literalen $p, \neg p$ (für ein $p \in P$) und den Operatoren $\vee, \wedge, X, U$ und R aufgebaut ist.

Satz

Zu jeder LTL-Formel ϕ gibt es eine äquivalente LTL-Formel ϕ' in positiver Normalform. Ferner ist $|\phi'| \leq 2 \cdot |\phi|$.

Beweis.

Zum Beweis betrachtet man jeden Operator in negierter und nicht-negierter Form und zeigt, dass man ihn wie angegeben ausdrücken kann. Z.B. ist
$Gp \equiv \neg F \neg p \equiv \neg(\top U \neg p) \equiv \neg(\neg \bot U \neg p) \equiv \bot Rp$ und
$\neg(pRq) \equiv \neg\neg(\neg pU \neg q) \equiv (\neg pU \neg q)$. $\square$

Abwicklung von U und R

Satz

Es gilt $pUq \equiv q \vee (p \wedge X(pUq))$.

Beweis.

Sei $w, i \models pUq$. Dann gibt es ein $k \geq i$ mit $w, k \models q$ und $w, j \models p$ für alle j mit $i \leq j < k$. Zwei Fälle:

1. $k = i$. Dann gilt $w, i \models q$.
2. $k > i$. Dann ist $w, i \models p$ und $w, i+1 \models pUq$ (Warum?) und daher $w, i \models X(pUq)$.

Damit gilt $w, i \models q \vee (p \wedge X(pUq))$. □

Abwicklung von U und R

Satz

Es gilt $pUq \equiv q \vee (p \wedge X(pUq))$.

Beweis.

Sei $w, i \models pUq$. Dann gibt es ein $k \geq i$ mit $w, k \models q$ und $w, j \models p$ für alle j mit $i \leq j < k$. Zwei Fälle:

1. $k = i$. Dann gilt $w, i \models q$.
2. $k > i$. Dann ist $w, i \models p$ und $w, i + 1 \models pUq$ (Warum?) und daher $w, i \models X(pUq)$.

Damit gilt $w, i \models q \vee (p \wedge X(pUq))$. □

Abwicklung von U und R

Satz

Es gilt $pUq \equiv q \vee (p \wedge X(pUq))$.

Beweis.

Sei $w, i \models pUq$. Dann gibt es ein $k \geq i$ mit $w, k \models q$ und $w, j \models p$ für alle j mit $i \leq j < k$. Zwei Fälle:

1. $k = i$. Dann gilt $w, i \models q$.
2. $k > i$. Dann ist $w, i \models p$ und $w, i+1 \models pUq$ (Warum?) und daher $w, i \models X(pUq)$.

Damit gilt $w, i \models q \vee (p \wedge X(pUq))$. □

Abwicklung von U und R

Die Rückrichtung zeigt man analog. Ebenso wie die Abwicklung von R:

Satz

Es gilt $pRq \equiv q \wedge (p \vee X(pRq))$.

Beweis.

Zur Übung... □

Von LTL zum NBA - Die Idee

Wir konstruieren nun einen NBA, der genau die Menge aller Modelle für eine LTL Formel ϕ erkennt.

- Die Idee ist als Zustände Hintikka-Mengen zu benutzen. Diese enthalten gerade die (Unter-)Formeln, die an einer bestimmten Stelle im Modell gelten müssen.
- Diese werden in jedem Schritt nichtdeterministisch geraten.
- Durch die Konsistenz der Hintikka-Mengen wird ausgeschlossen, dass etwas geraten wird, was bereits der Aussagenlogik widerspricht.
- U und R Formeln werden entsprechend ihrer Abwicklung behandelt.
- Dass U nicht unendlich lange abgewickelt wird, wird durch die Akzeptanzbedingung sichergestellt.
- Der X Operator wird durch die Übergänge behandelt.

Von LTL zum NBA - Die Idee

Wir konstruieren nun einen NBA, der genau die Menge aller Modelle für eine LTL Formel ϕ erkennt.

- Die Idee ist als Zustände Hintikka-Mengen zu benutzen. Diese enthalten gerade die (Unter-)Formeln, die an einer bestimmten Stelle im Modell gelten müssen.
- Diese werden in jedem Schritt nichtdeterministisch geraten.
- Durch die Konsistenz der Hintikka-Mengen wird ausgeschlossen, dass etwas geraten wird, was bereits der Aussagenlogik widerspricht.
- U und R Formeln werden entsprechend ihrer Abwicklung behandelt.
- Dass U nicht unendlich lange abgewickelt wird, wird durch die Akzeptanzbedingung sichergestellt.
- Der X Operator wird durch die Übergänge behandelt.

Von LTL zum NBA - Die Idee

Wir konstruieren nun einen NBA, der genau die Menge aller Modelle für eine LTL Formel ϕ erkennt.

- Die Idee ist als Zustände Hintikka-Mengen zu benutzen. Diese enthalten gerade die (Unter-)Formeln, die an einer bestimmten Stelle im Modell gelten müssen.
- Diese werden in jedem Schritt nichtdeterministisch geraten.
- Durch die Konsistenz der Hintikka-Mengen wird ausgeschlossen, dass etwas geraten wird, was bereits der Aussagenlogik widerspricht.
- U und R Formeln werden entsprechend ihrer Abwicklung behandelt.
- Dass U nicht unendlich lange abgewickelt wird, wird durch die Akzeptanzbedingung sichergestellt.
- Der X Operator wird durch die Übergänge behandelt.

Von LTL zum NBA - Die Idee

Wir konstruieren nun einen NBA, der genau die Menge aller Modelle für eine LTL Formel ϕ erkennt.

- Die Idee ist als Zustände Hintikka-Mengen zu benutzen. Diese enthalten gerade die (Unter-)Formeln, die an einer bestimmten Stelle im Modell gelten müssen.
- Diese werden in jedem Schritt nichtdeterministisch geraten.
- Durch die Konsistenz der Hintikka-Mengen wird ausgeschlossen, dass etwas geraten wird, was bereits der Aussagenlogik widerspricht.
- U und R Formeln werden entsprechend ihrer Abwicklung behandelt.
- Dass U nicht unendlich lange abgewickelt wird, wird durch die Akzeptanzbedingung sichergestellt.
- Der X Operator wird durch die Übergänge behandelt.

Von LTL zum NBA - Die Idee

Wir konstruieren nun einen NBA, der genau die Menge aller Modelle für eine LTL Formel ϕ erkennt.

- Die Idee ist als Zustände Hintikka-Mengen zu benutzen. Diese enthalten gerade die (Unter-)Formeln, die an einer bestimmten Stelle im Modell gelten müssen.
- Diese werden in jedem Schritt nichtdeterministisch geraten.
- Durch die Konsistenz der Hintikka-Mengen wird ausgeschlossen, dass etwas geraten wird, was bereits der Aussagenlogik widerspricht.
- U und R Formeln werden entsprechend ihrer Abwicklung behandelt.
- Dass U nicht unendlich lange abgewickelt wird, wird durch die Akzeptanzbedingung sichergestellt.
- Der X Operator wird durch die Übergänge behandelt.

Von LTL zum NBA - Die Idee

Wir konstruieren nun einen NBA, der genau die Menge aller Modelle für eine LTL Formel ϕ erkennt.

- Die Idee ist als Zustände Hintikka-Mengen zu benutzen. Diese enthalten gerade die (Unter-)Formeln, die an einer bestimmten Stelle im Modell gelten müssen.
- Diese werden in jedem Schritt nichtdeterministisch geraten.
- Durch die Konsistenz der Hintikka-Mengen wird ausgeschlossen, dass etwas geraten wird, was bereits der Aussagenlogik widerspricht.
- U und R Formeln werden entsprechend ihrer Abwicklung behandelt.
- Dass U nicht unendlich lange abgewickelt wird, wird durch die Akzeptanzbedingung sichergestellt.
- Der X Operator wird durch die Übergänge behandelt.

Von LTL zum NBA - Vorarbeiten

Definition (Fischer-Ladner-Abschluss)

Sei ϕ eine LTL-Formel in positiver Normalform. Der Fischer-Ladner-Abschluss von ϕ ist die kleinste Menge $FL(\phi)$, die ϕ enthält und für die folgendes gilt:

1. $p \vee q \in FL(\phi) \Rightarrow \{p, q\} \subseteq FL(\phi)$
2. $p \wedge q \in FL(\phi) \Rightarrow \{p, q\} \subseteq FL(\phi)$
3. $Xp \in FL(\phi) \Rightarrow p \in FL(\phi)$
4. $pUq \in FL(\phi) \Rightarrow \{p, q, q \vee (p \wedge X(pUq)), p \wedge X(pUq), X(pUq)\}$
5. $pRq \in FL(\phi) \Rightarrow \{p, q, q \wedge (p \vee X(pRq)), p \vee X(pRq), X(pRq)\}$

Von LTL zum NBA - Vorarbeiten

Definition (Hintikka-Mengen)

Sei ϕ eine LTL-Formel in positiver Normalform. Eine Hintikka-Menge für ϕ ist eine Menge $M \subseteq FL(\phi)$ mit

1. $p \vee q \in M \Rightarrow p \in M$ oder $q \in M$
2. $p \wedge q \in M \Rightarrow p \in M$ und $q \in M$
3. $pUq \in M \Rightarrow q \in M$ oder $(p \in M$ und $X(pUq) \in M)$
4. $pRq \in M \Rightarrow q \in M$ und $(p \in M$ oder $X(pRq) \in M)$

Von LTL zum NBA - Vorarbeiten

Definition (Hintikka-Mengen (Teil 2))

- Eine Hintikka-Menge M heißt konsistent, falls es kein $p \in P$ mit $\{p, \neg p\} \subseteq M$ gibt.
- Mit $H(\phi)$ wird die Menge aller konsistenten Hintikka-Mengen bezeichnet.
- Mit $P^+(M)$ wird die Menge aller positiven Literale in M bezeichnet (also $P^+(M) = M \cap P$).
- Mit $P^-(M)$ wird die Menge aller negativen Literale in M bezeichnet.

Von LTL zum NBA - Vorarbeiten

Definition (Hintikka-Mengen (Teil 2))

- Eine Hintikka-Menge M heißt konsistent, falls es kein $p \in P$ mit $\{p, \neg p\} \subseteq M$ gibt.
- Mit $H(\phi)$ wird die Menge aller konsistenten Hintikka-Mengen bezeichnet.
- Mit $P^+(M)$ wird die Menge aller positiven Literale in M bezeichnet (also $P^+(M) = M \cap P$).
- Mit $P^-(M)$ wird die Menge aller negativen Literale in M bezeichnet.

Von LTL zum NBA - Vorarbeiten

Definition (Hintikka-Mengen (Teil 2))

- Eine Hintikka-Menge M heißt konsistent, falls es kein $p \in P$ mit $\{p, \neg p\} \subseteq M$ gibt.
- Mit $H(\phi)$ wird die Menge aller konsistenten Hintikka-Mengen bezeichnet.
- Mit $P^+(M)$ wird die Menge aller positiven Literale in M bezeichnet (also $P^+(M) = M \cap P$).
- Mit $P^-(M)$ wird die Menge aller negativen Literale in M bezeichnet.

Von LTL zum NBA - Vorarbeiten

Definition (Hintikka-Mengen (Teil 2))

- Eine Hintikka-Menge M heißt konsistent, falls es kein $p \in P$ mit $\{p, \neg p\} \subseteq M$ gibt.
- Mit $H(\phi)$ wird die Menge aller konsistenten Hintikka-Mengen bezeichnet.
- Mit $P^+(M)$ wird die Menge aller positiven Literale in M bezeichnet (also $P^+(M) = M \cap P$).
- Mit $P^-(M)$ wird die Menge aller negativen Literale in M bezeichnet.

Von LTL zum NBA - Der Satz

Satz

Zu jeder LTL-Formel ϕ in positiver Normalform kann ein NBA A_ϕ konstruiert werden mit $L(A_\phi) = L(\phi)$. Ferner ist $|A_\phi| \leq 2^{2 \cdot |\phi|}$.

Korollar

Zu jeder LTL-Formel ϕ kann ein NBA A_ϕ konstruiert werden mit $L(A_\phi) = L(\phi)$. Ferner ist $|A_\phi| \leq 2^{O(|\phi|)}$.

Von LTL zum NBA - Der Satz

Satz

Zu jeder LTL-Formel ϕ in positiver Normalform kann ein NBA A_ϕ konstruiert werden mit $L(A_\phi) = L(\phi)$. Ferner ist $|A_\phi| \leq 2^{2 \cdot |\phi|}$.

Korollar

Zu jeder LTL-Formel ϕ kann ein NBA A_ϕ konstruiert werden mit $L(A_\phi) = L(\phi)$. Ferner ist $|A_\phi| \leq 2^{O(|\phi|)}$.

Von LTL zum NBA - Die Konstruktion

Seien $p_1 U q_1, p_2 U q_2, \ldots, p_k U q_k$ alle in $FL(\phi)$ vorkommenden U-Formeln. Wir definieren

$$A := (H(\phi), \Sigma, \delta, Z_{start}, Z^1_{end}, \ldots, Z^k_{end})$$

wobei:

$$\begin{array}{rcl} Z_{start} & := & \{M \mid \phi \in M\} \\ Z^i_{end} & := & \{M \mid p_i U q_i \in M \Rightarrow q_i \in M\} \end{array}$$

Ferner ist

$$\delta(M, a) := \{M' \mid \forall Xq \in M : q \in M'\}$$

im Fall $P^+(M) \subseteq a$ und $P^-(M) \cap a = \emptyset$ und sonst

$$\delta(M, a) := \emptyset.$$

Von LTL zum NBA - Korrektheit

Satz

Zu jeder LTL-Formel ϕ in positiver Normalform kann ein NBA A_ϕ konstruiert werden mit $L(A_\phi) = L(\phi)$. Ferner ist $|A_\phi| \leq 2^{2 \cdot |\phi|}$.

Beweis.

Beweis der Korrektheit der Konstruktion

□

Von LTL zum NBA - Korrektheit

Satz

Zu jeder LTL-Formel ϕ in positiver Normalform kann ein NBA A_ϕ konstruiert werden mit $L(A_\phi) = L(\phi)$. Ferner ist $|A_\phi| \leq 2^{2 \cdot |\phi|}$.

Beweis.

Beweis der Korrektheit der Konstruktion
... als Hausaufgabe $\square$

Der Schluss...

Wir nähern uns dem Ende. Das System wird eher mit einem Transitionssystem modelliert (oder mit einem Formalismus, der in dieses übersetzt wird). Daher nochmal...

Transitionssysteme

Definition (Transitionssystem)

Ein *labelled transition system* (LTS) ist ein Tupel $TS = (S, s_0, R, L)$mit

- einer endlichen Menge von Zuständen S,
- einem Startzustand $s_0 \in S$,
- einer links-totalen Übergangsrelation $R \subseteq S \times S$ und
- einer labelling function $L : S \to 2^P$, die jedem Zustand s die Menge der atomaren Formeln $L(s) \subseteq P$ zuweist, die in s gelten.

Transitionssysteme

Definition (Pfad im LTS)

- Ein *Pfad* π in einem LTS $TS = (S, s_0, R, L)$ ist eine unendliche Sequenz von Zuständen

$$\pi = s_1 s_2 s_3 \ldots$$

  derart, dass $(s_i, s_{i+1}) \in R$ für alle $i \geq 1$.
- Ein *Lauf* in TS ist ein unendliches Wort $a_0 a_1 \ldots \in (2^P)^\omega$, so dass ein Pfad $s_0 s_1 \ldots$ existiert mit $a_i = L(s_i)$ für alle i. Mit $L(TS)$ wird die Menge der Läufe von TS bezeichnet.

Ein weiterer Produktautomat

Definition

Sei $TS = (S, s_0, R, L)$ ein LTS über P und $A = (Z, 2^P, \delta, z_0, Z_{end})$ ein NBA. Wir definieren deren *Produkt* als NBA $C := (S \times Z, \{\bullet\}, \Delta, (s_0, z_0), S \times Z_{end})$, wobei

$$\Delta((s,z),\bullet) = \{(s',z') \mid (s,s') \in R \wedge z' \in \delta(z, \lambda(s))\}$$

Satz

Ist TS ein LTS, A ein NBA und C der aus obiger Definition hervorgegangener NBA. Es gilt $L(C) = \emptyset$ gdw. $L(TS) \cap L(A) = \emptyset$.

Beweis.

Zur Übung... □

Ein weiterer Produktautomat

Definition

Sei $TS = (S, s_0, R, L)$ ein LTS über P und $A = (Z, 2^P, \delta, z_0, Z_{end})$ ein NBA. Wir definieren deren *Produkt* als NBA $C := (S \times Z, \{\bullet\}, \Delta, (s_0, z_0), S \times Z_{end})$, wobei

$$\Delta((s,z),\bullet) = \{(s',z') \mid (s,s') \in R \land z' \in \delta(z, \lambda(s))\}$$

Satz

Ist TS ein LTS, A ein NBA und C der aus obiger Definition hervorgegangener NBA. Es gilt $L(C) = \emptyset$ gdw. $L(TS) \cap L(A) = \emptyset$.

Beweis.

Zur Übung... $\square$

Finale!

Satz

Das Model-Checking-Problem mit LTS TS und LTL-Formel ϕ lässt sich in Zeit $|TS| \cdot 2^{O(|\phi|)}$ entscheiden.

Beweis.

1. Betrachte $\neg\phi$ und konstruiere NBA $A_{\neg\phi}$ mit $L(A_{\neg\phi}) = L(\neg\phi) = \overline{L(A_\phi)}$. Es ist $|A_{\neg\phi}| = 2^{O(|\phi|)}$.
2. Bilde das Produkt C aus LTS TS und $A_{\neg\phi}$. Nach obigem ist $|C| = |TS| \cdot 2^{O(|\phi|)}$.
3. Nun ist nach dem vorherigen Satz $L(C) = \emptyset$ gdw. $L(TS) \cap L(A) = \emptyset$ und wir können das Leerheitsproblem in linearer Zeit, d.h. hier in $O(|TS| \cdot 2^{O(|\phi|)})$ lösen.

$\square$

Finale!

Satz

Das Model-Checking-Problem mit LTS TS und LTL-Formel ϕ lässt sich in Zeit $|TS| \cdot 2^{O(|\phi|)}$ entscheiden.

Beweis.

1. Betrachte $\neg\phi$ und konstruiere NBA $A_{\neg\phi}$ mit $L(A_{\neg\phi}) = L(\neg\phi) = \overline{L(A_\phi)}$. Es ist $|A_{\neg\phi}| = 2^{O(|\phi|)}$.
2. Bilde das Produkt C aus LTS TS und $A_{\neg\phi}$. Nach obigem ist $|C| = |TS| \cdot 2^{O(|\phi|)}$.
3. Nun ist nach dem vorherigen Satz $L(C) = \emptyset$ gdw. $L(TS) \cap L(A) = \emptyset$ und wir können das Leerheitsproblem in linearer Zeit, d.h. hier in $O(|TS| \cdot 2^{O(|\phi|)})$ lösen.

□

Finale!

Satz

Das Model-Checking-Problem mit LTS TS und LTL-Formel ϕ lässt sich in Zeit $|TS| \cdot 2^{O(|\phi|)}$ entscheiden.

Beweis.

1. Betrachte $\neg\phi$ und konstruiere NBA $A_{\neg\phi}$ mit $L(A_{\neg\phi}) = L(\neg\phi) = \overline{L(A_\phi)}$. Es ist $|A_{\neg\phi}| = 2^{O(|\phi|)}$.
2. Bilde das Produkt C aus LTS TS und $A_{\neg\phi}$. Nach obigem ist $|C| = |TS| \cdot 2^{O(|\phi|)}$.
3. Nun ist nach dem vorherigen Satz $L(C) = \emptyset$ gdw. $L(TS) \cap L(A) = \emptyset$ und wir können das Leerheitsproblem in linearer Zeit, d.h. hier in $O(|TS| \cdot 2^{O(|\phi|)})$ lösen.

$\square$

Finale!

Satz

Das Model-Checking-Problem mit LTS TS und LTL-Formel ϕ lässt sich in Zeit $|TS| \cdot 2^{O(|\phi|)}$ entscheiden.

Beweis.

1. Betrachte $\neg\phi$ und konstruiere NBA $A_{\neg\phi}$ mit $L(A_{\neg\phi}) = L(\neg\phi) = \overline{L(A_\phi)}$. Es ist $|A_{\neg\phi}| = 2^{O(|\phi|)}$.
2. Bilde das Produkt C aus LTS TS und $A_{\neg\phi}$. Nach obigem ist $|C| = |TS| \cdot 2^{O(|\phi|)}$.
3. Nun ist nach dem vorherigen Satz $L(C) = \emptyset$ gdw. $L(TS) \cap L(A) = \emptyset$ und wir können das Leerheitsproblem in linearer Zeit, d.h. hier in $O(|TS| \cdot 2^{O(|\phi|)})$ lösen.

□

Für zu Hause

Für zu Hause:

1. DBA $\lneq$ NBA [bisschen knifflig, aber geht]
2. Korrektheit beim Produktautomaten zweier NBAs [einfach]
3. Beweis des Satzes zum Produkt aus NBA und TS [einfach]
4. Beweis der Konstruktion LTL $\rightarrow$ NBA [schwierig]

Zur Lektüre

Literaturhinweis

Der Inhalt der heutigen Vorlesung ist aus *Automatentheorie und Logik* von Martin Hofmann und Martin Lange. Erschienen im Springer-Verlag, 2011.

Dort

- Kapitel 5 (komplett) für Büchi-Automaten
- Satz 9.4 und Korollar 9.5 aus Kapitel 9 zum Leerheitsproblem
- Kapitel 11 (ohne 11.3) für LTL, die Konvertierung zu NBAs und letztendlich für das Model-Checking-Problem für LTL.