Formale Grundlagen der Informatik 1
Kapitel 3
Mehr zu regulären Sprachen

Frank Heitmann
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

8. April 2014

Der deterministische, endliche Automat

Definition (DFA)

Ein **deterministischer, endlicher Automat** (DFA) ist ein 5-Tupel

$$A = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z_{end})$$

mit:

- Der endlichen Menge von *Zuständen* Z.
- Dem endlichen Alphabet Σ von *Eingabesymbolen*.
- Der *Überführungsfunktion* $\delta : Z \times \Sigma \to Z$.
- Dem *Startzustand* $z_0 \in Z$.
- Der Menge der *Endzustände* $Z_{end} \subseteq Z$.

Der nichtdeterministische, endliche Automat

Definition (NFA)

Ein **nichtdeterministischer, endlicher Automat** (NFA) ist ein 5-Tupel

$$A = (Z, \Sigma, \delta, Z_{start}, Z_{end})$$

mit:

- Der endlichen Menge von *Zuständen* Z.
- Dem endlichen Alphabet Σ von *Eingabesymbolen*.
- Der *Überführungsfunktion* $\delta : Z \times \Sigma \to 2^Z$.
- Der Menge der *Startzustände* $Z_{start} \subseteq Z$.
- Der Menge der *Endzustände* $Z_{end} \subseteq Z$.

Der nichtdeterministische, endliche Automat

Definition (NFA - Alternative)

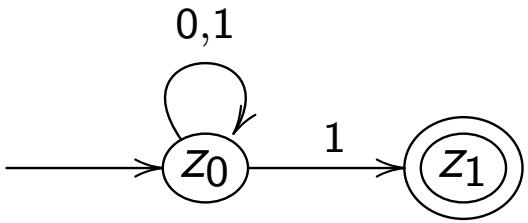
Ein **nichtdeterministischer, endlicher Automat** (NFA) ist ein 5-Tupel

$$A = (Z, \Sigma, K, Z_{start}, Z_{end})$$

mit:

- Der endlichen Menge von *Zuständen* Z.
- Dem endlichen Alphabet Σ von *Eingabesymbolen*.
- Der **Zustandsübergangsrelation** $K \subseteq Z \times \Sigma \times Z$
- Der Menge der *Startzustände* $Z_{start} \in Z$.
- Der Menge der *Endzustände* $Z_{end} \subseteq Z$.

Der NFA - Ein Beispiel

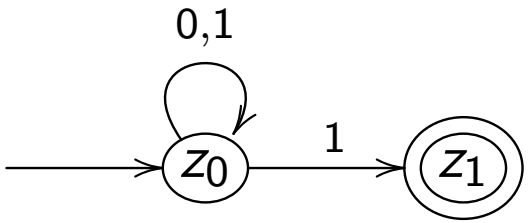


Alle möglichen Rechnungen auf dem Wort 011:

- $(z_0, 011) \vdash (z_0, 11) \vdash (z_1, 1)$ – blockiert
- $(z_0, 011) \vdash (z_0, 11) \vdash (z_0, 1) \vdash (z_0, \lambda)$ – ablehnen
- $(z_0, 011) \vdash (z_0, 11) \vdash (z_0, 1) \vdash (z_1, \lambda)$ – akzeptieren!

Da es (mindestens) eine akzeptierende Rechnung gibt, akzeptiert der Automat die Eingabe!

Der NFA - Ein Beispiel



Alle möglichen Rechnungen auf dem Wort 011:

- $(z_0, 011) \vdash (z_0, 11) \vdash (z_1, 1)$ – blockiert
- $(z_0, 011) \vdash (z_0, 11) \vdash (z_0, 1) \vdash (z_0, \lambda)$ – ablehnen
- $(z_0, 011) \vdash (z_0, 11) \vdash (z_0, 1) \vdash (z_1, \lambda)$ – akzeptieren!

Da es (mindestens) eine akzeptierende Rechnung gibt, akzeptiert der Automat die Eingabe!

DFA = NFA

Satz

NFAs und DFAs sind äquivalent, d.h. zu jedem DFA kann ein NFA konstruiert werden, der die gleiche Sprache akzeptiert und andersherum ebenso.

DFA → NFA

Jeder DFA kann auch als spezieller NFA gesehen werden, indem man

$$\delta_N(z, x) = \{\delta_D(z, x)\} \text{ und } Z_{start} = \{z_0\}$$

setzt (δ_N ist die Überführungsfunktion des NFA, δ_D die des DFA).

NFA → DFA

Andersherum geht es mit der Potenzautomatenkonstruktion.

DFA = NFA

Satz

NFAs und DFAs sind äquivalent, d.h. zu jedem DFA kann ein NFA konstruiert werden, der die gleiche Sprache akzeptiert und andersherum ebenso.

DFA → NFA

Jeder DFA kann auch als spezieller NFA gesehen werden, indem man

$$\delta_N(z, x) = \{\delta_D(z, x)\} \text{ und } Z_{start} = \{z_0\}$$

setzt (δ_N ist die Überführungsfunktion des NFA, δ_D die des DFA).

NFA → DFA

Andersherum geht es mit der Potenzautomatenkonstruktion.

DFA = NFA

Satz

NFAs und DFAs sind äquivalent, d.h. zu jedem DFA kann ein NFA konstruiert werden, der die gleiche Sprache akzeptiert und andersherum ebenso.

DFA → NFA

Jeder DFA kann auch als spezieller NFA gesehen werden, indem man

$$\delta_N(z, x) = \{\delta_D(z, x)\} \text{ und } Z_{start} = \{z_0\}$$

setzt (δ_N ist die Überführungsfunktion des NFA, δ_D die des DFA).

NFA → DFA

Andersherum geht es mit der Potenzautomatenkonstruktion.

Der Potenzautomat

Satz

Zu jeder von einem NFA A akzeptierte Menge L kann ein DFA B konstruiert werden mit $L(B) = L$.

Die Konstruktion

Sei $A = (Z, \Sigma, \delta, Z_{start}, Z_{end})$ der NFA. Wir definieren $B = (Z', \Sigma', \delta', z_0, Z'_{end})$ mit

1. $Z' := 2^Z$
2. $\Sigma' := \Sigma$
3. $\delta'(M, x) := \cup_{z \in M} \delta(z, x)$ oder alternativ
   $\delta'(M, x) := \cup_{z \in M} \{z' \in Z \mid (z, x, z') \in K$
4. $z_0 := Z_{start}$
5. $Z'_{end} := \{M \in 2^Z \mid M \cap Z_{end} \neq \emptyset\}$

Der Potenzautomat

Satz

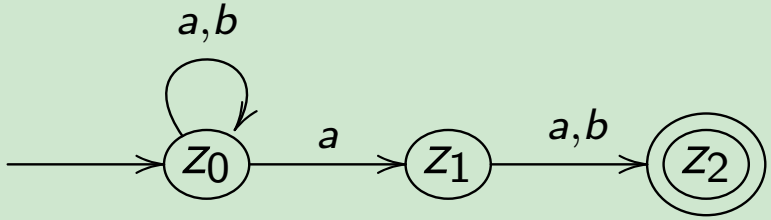
Zu jeder von einem NFA A akzeptierte Menge L kann ein DFA B konstruiert werden mit $L(B) = L$.

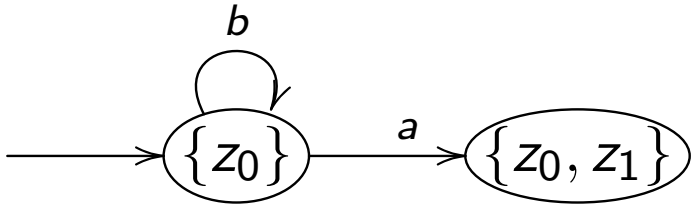
Die Konstruktion

Sei $A = (Z, \Sigma, \delta, Z_{start}, Z_{end})$ der NFA. Wir definieren $B = (Z', \Sigma', \delta', z_0, Z'_{end})$ mit

1. $Z' := 2^Z$
2. $\Sigma' := \Sigma$
3. $\delta'(M, x) := \cup_{z \in M} \delta(z, x)$ oder alternativ
   $\delta'(M, x) := \cup_{z \in M} \{z' \in Z \mid (z, x, z') \in K$
4. $z_0 := Z_{start}$
5. $Z'_{end} := \{M \in 2^Z \mid M \cap Z_{end} \neq \emptyset\}$

Der Potenzautomat - Ein Beispiel

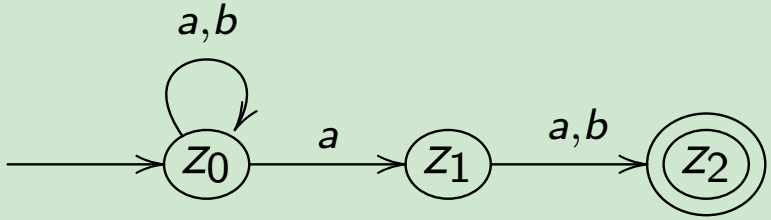


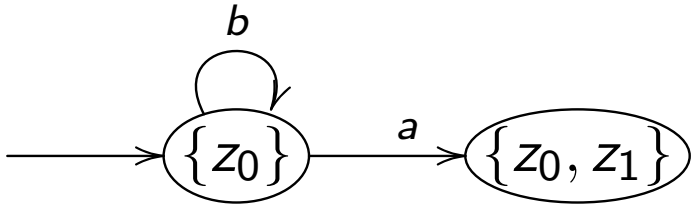


Wohin nun von $\{z_0, z_1\}$ mit a und b?

Verfahren: Man geht alle Zustände der Menge durch (hier z_0 und z_1), guckt für jeden wohin man im NFA (!) mit dem jeweiligen Symbol (z.B. a) kommt und tut alle dabei herauskommende Zustände in eine Menge. Dies ist der Nachfolgezustand im DFA.

Der Potenzautomat - Ein Beispiel

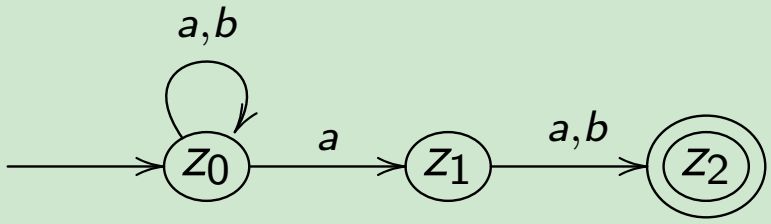




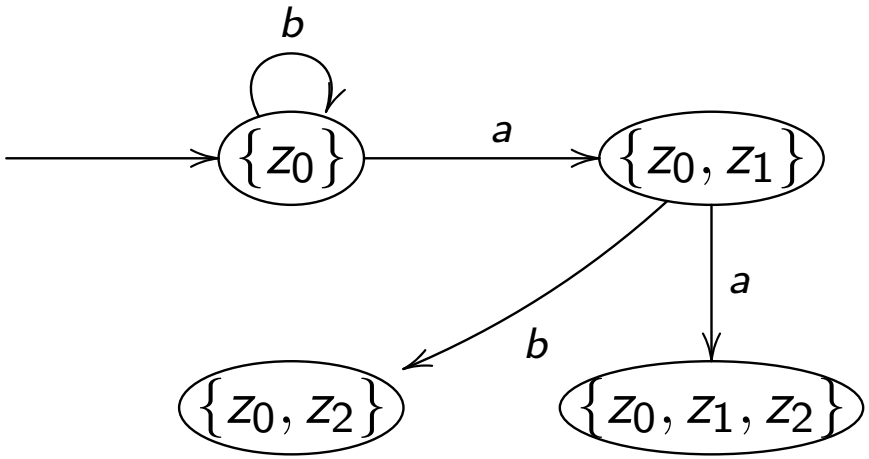
Wohin nun von $\{z_0, z_1\}$ mit a und b?

Verfahren: Man geht alle Zustände der Menge durch (hier z_0 und z_1), guckt für jeden wohin man im NFA (!) mit dem jeweiligen Symbol (z.B. a) kommt und tut alle dabei herauskommende Zustände in eine Menge. Dies ist der Nachfolgezustand im DFA.

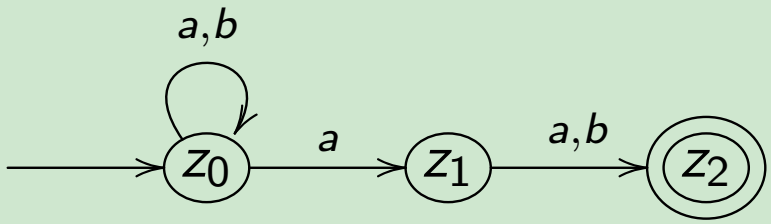
Der Potenzautomat - Ein Beispiel



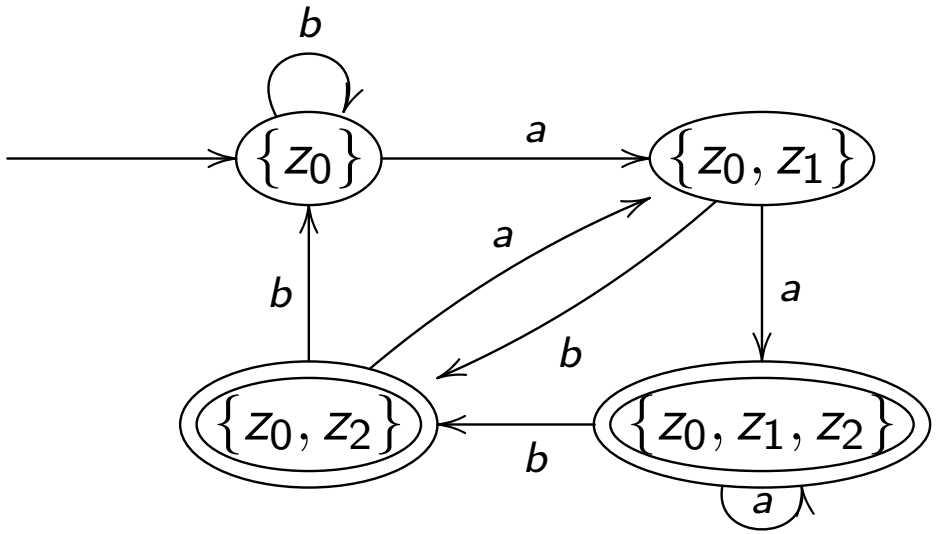
Es ist $\delta(z_0, a) = \{z_0, z_1\}$ und $\delta(z_1, a) = z_2$ also insgesamt $\delta'(\{z_0, z_1\}, a) = \{z_0, z_1, z_2\}$ und ähnlich für b:



Der Potenzautomat - Ein Beispiel



Und fertig!



Zusammenfassung

Wichtige Anmerkung

- Jeder DFA *akzeptiert* eine Sprache. Man kann auch sagen, dass er eine (kompakte) *Beschreibung* dieser Sprache ist bzw. jener Wörter, die in der Sprache enthalten sind.
- Eine Menge/Sprache ist gerade dann **regulär**, wenn es einen DFA gibt, der sie akzeptiert. Regulär zu "sein" ist also gerade über die Automaten definiert!
- Die **Familie der regulären Sprachen** ist dann die "Ansammlung" all jener Sprachen für die es einen DFA gibt, der sie akzeptiert.
- Wir haben nun gelernt: Der NFA tut auch genau dies! Die Aussage eine Sprache ist regulär ist also gleichbedeutend damit, dass es einen DFA gibt, der sie akzeptiert oder damit, dass es einen NFA gibt, der sie akzeptiert.

Zusammenfassung

Wichtige Anmerkung

- Jeder DFA *akzeptiert* eine Sprache. Man kann auch sagen, dass er eine (kompakte) *Beschreibung* dieser Sprache ist bzw. jener Wörter, die in der Sprache enthalten sind.
- Eine Menge/Sprache ist gerade dann **regulär**, wenn es einen DFA gibt, der sie akzeptiert. Regulär zu "sein" ist also gerade über die Automaten definiert!
- Die **Familie der regulären Sprachen** ist dann die "Ansammlung" all jener Sprachen für die es einen DFA gibt, der sie akzeptiert.
- Wir haben nun gelernt: Der NFA tut auch genau dies! Die Aussage eine Sprache ist regulär ist also gleichbedeutend damit, dass es einen DFA gibt, der sie akzeptiert oder damit, dass es einen NFA gibt, der sie akzeptiert.

Zusammenfassung

Wichtige Anmerkung

- Jeder DFA *akzeptiert* eine Sprache. Man kann auch sagen, dass er eine (kompakte) *Beschreibung* dieser Sprache ist bzw. jener Wörter, die in der Sprache enthalten sind.
- Eine Menge/Sprache ist gerade dann **regulär**, wenn es einen DFA gibt, der sie akzeptiert. Regulär zu "sein" ist also gerade über die Automaten definiert!
- Die **Familie der regulären Sprachen** ist dann die "Ansammlung" all jener Sprachen für die es einen DFA gibt, der sie akzeptiert.
- Wir haben nun gelernt: Der NFA tut auch genau dies! Die Aussage eine Sprache ist regulär ist also gleichbedeutend damit, dass es einen DFA gibt, der sie akzeptiert oder damit, dass es einen NFA gibt, der sie akzeptiert.

Zusammenfassung

Wichtige Anmerkung

- Jeder DFA *akzeptiert* eine Sprache. Man kann auch sagen, dass er eine (kompakte) *Beschreibung* dieser Sprache ist bzw. jener Wörter, die in der Sprache enthalten sind.
- Eine Menge/Sprache ist gerade dann **regulär**, wenn es einen DFA gibt, der sie akzeptiert. Regulär zu "sein" ist also gerade über die Automaten definiert!
- Die **Familie der regulären Sprachen** ist dann die "Ansammlung" all jener Sprachen für die es einen DFA gibt, der sie akzeptiert.
- Wir haben nun gelernt: Der NFA tut auch genau dies! Die Aussage eine Sprache ist regulär ist also gleichbedeutend damit, dass es einen DFA gibt, der sie akzeptiert oder damit, dass es einen NFA gibt, der sie akzeptiert.

Lambda-Kanten

Man kann einem NFA zusätzlich zu dem bisherigen noch erlauben

- λ-Kanten (oder ϵ-Kanten)

zu benutzen. Nutzt man diese, liest man nichts vom Eingabeband (und der Lesekopf auf dem Eingabeband geht nicht weiter). Es findet nur ein Zustandswechsel statt.

Lambda-Kanten

Man kann einem NFA zusätzlich zu dem bisherigen noch erlauben

- λ-Kanten (oder ϵ-Kanten)

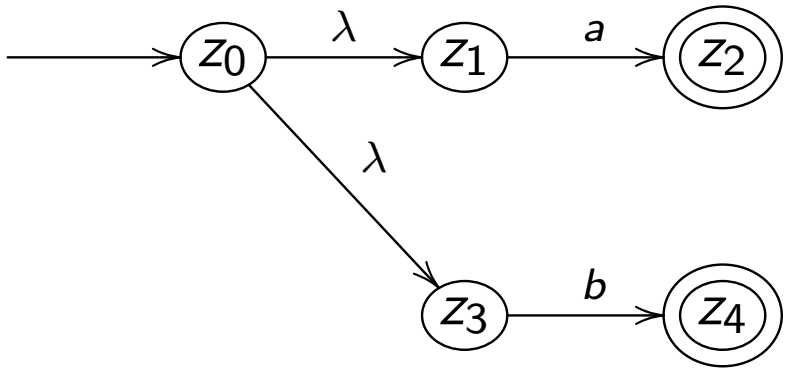
zu benutzen. Nutzt man diese, liest man nichts vom Eingabeband (und der Lesekopf auf dem Eingabeband geht nicht weiter). Es findet nur ein Zustandswechsel statt.

Lambda-Kanten

Man kann einem NFA zusätzlich zu dem bisherigen noch erlauben

- λ-Kanten (oder ϵ-Kanten)

zu benutzen. Nutzt man diese, liest man nichts vom Eingabeband (und der Lesekopf auf dem Eingabeband geht nicht weiter). Es findet nur ein Zustandswechsel statt.



Lambda-Kanten

Lasst euch von der Einfachheit des Beispiels nicht täuschen. Die Kanten können sehr nützlich sein.

Begriffe wie Rechnung etc. wären nun anzupassen

Wissen

Man kann zeigen, dass man einen NFA mit λ-Kanten in einen λ-freien NFA umwandeln kann (und letztendlich dann auch in einen DFA).

Lambda-Kanten

Lasst euch von der Einfachheit des Beispiels nicht täuschen. Die Kanten können sehr nützlich sein.

Begriffe wie Rechnung etc. wären nun anzupassen

Wissen

Man kann zeigen, dass man einen NFA mit λ-Kanten in einen λ-freien NFA umwandeln kann (und letztendlich dann auch in einen DFA).

Lambda-Kanten

Lasst euch von der Einfachheit des Beispiels nicht täuschen. Die Kanten können sehr nützlich sein.

Begriffe wie Rechnung etc. wären nun anzupassen

Wissen

Man kann zeigen, dass man einen NFA mit λ-Kanten in einen λ-freien NFA umwandeln kann (und letztendlich dann auch in einen DFA).

Lambda-Kanten

Vorgehen

Wir wollen λ-Kanten in bestimmten Kontexten benutzen. Wir wissen dann, dass wir solch einen NFA auch in einen DFA umwandeln können, die Sprache also regulär ist. Wir werden aber weder formal die λ-Kanten einführen, noch den Beweis führen, dass auch NFA mit ihnen wieder genau die regulären Sprachen akzeptieren. Wir werden sie einfach informal benutzen.

Literaturhinweis

Interessierte finden die Konstruktion im Skript und in [HMU] (siehe Literaturhinweis zu Anfang).

Lambda-Kanten

Vorgehen

Wir wollen λ-Kanten in bestimmten Kontexten benutzen. Wir wissen dann, dass wir solch einen NFA auch in einen DFA umwandeln können, die Sprache also regulär ist. Wir werden aber weder formal die λ-Kanten einführen, noch den Beweis führen, dass auch NFA mit ihnen wieder genau die regulären Sprachen akzeptieren. Wir werden sie einfach informal benutzen.

Literaturhinweis

Interessierte finden die Konstruktion im Skript und in [HMU] (siehe Literaturhinweis zu Anfang).

Reguläre Sprachen

Bisher kennen wir zur Beschreibung einer regulären Sprache

- DFAs
- NFAs
- NFAs mit λ-Kanten

Wir lernen jetzt noch eine dritte Möglichkeit kennen...

Reguläre Sprachen

Bisher kennen wir zur Beschreibung einer regulären Sprache

- DFAs
- NFAs
- NFAs mit λ-Kanten

Wir lernen jetzt noch eine dritte Möglichkeit kennen...

Zu regulären Ausdrücken

Wir wollen Sprachen mit Ausdrücken der Art

- a^+
- $(a + (b \cdot c))^*$
- usw.

beschreiben...

Man kennt das vielleicht aus Programmiersprachen...

Reguläre Ausdrücke

Definition (Reguläre Ausdrücke)

Sei Σ ein Alphabet. Die **regulären Ausdrücke über** Σ sind induktiv definiert durch:

1. $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck, der die Menge $M_\emptyset = \emptyset$ beschreibt.
2. Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck, der die Menge $M_a = \{a\}$ beschreibt.
3. Sind X und Y reguläre Ausdrücke, die die Mengen M_X und M_Y beschreiben, dann beschreibt
   - $(X + Y)$ die Menge $M_X \cup M_Y$
   - $(X \cdot Y)$ die Menge $M_X \cdot M_Y$
   - X^* die Menge M_X^* und
   - X^+ die Menge M_X^+.
4. Nur die so erzeugten Ausdrücke sind reguläre Ausdrücke.

Reguläre Ausdrücke

Definition (Reguläre Ausdrücke)

Sei Σ ein Alphabet. Die **regulären Ausdrücke über** Σ sind induktiv definiert durch:

1. $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck, der die Menge $M_\emptyset = \emptyset$ beschreibt.
2. Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck, der die Menge $M_a = \{a\}$ beschreibt.
3. Sind X und Y reguläre Ausdrücke, die die Mengen M_X und M_Y beschreiben, dann beschreibt
   - $(X + Y)$ die Menge $M_X \cup M_Y$
   - $(X \cdot Y)$ die Menge $M_X \cdot M_Y$
   - X^* die Menge M_X^* und
   - X^+ die Menge M_X^+.
4. Nur die so erzeugten Ausdrücke sind reguläre Ausdrücke.

Reguläre Ausdrücke

Definition (Reguläre Ausdrücke)

Sei Σ ein Alphabet. Die **regulären Ausdrücke über** Σ sind induktiv definiert durch:

1. $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck, der die Menge $M_\emptyset = \emptyset$ beschreibt.
2. Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck, der die Menge $M_a = \{a\}$ beschreibt.
3. Sind X und Y reguläre Ausdrücke, die die Mengen M_X und M_Y beschreiben, dann beschreibt
   - $(X + Y)$ die Menge $M_X \cup M_Y$
   - $(X \cdot Y)$ die Menge $M_X \cdot M_Y$
   - X^* die Menge M_X^* und
   - X^+ die Menge M_X^+.
4. Nur die so erzeugten Ausdrücke sind reguläre Ausdrücke.

Reguläre Ausdrücke

Definition (Reguläre Ausdrücke)

Sei Σ ein Alphabet. Die **regulären Ausdrücke über** Σ sind induktiv definiert durch:

1. $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck, der die Menge $M_\emptyset = \emptyset$ beschreibt.
2. Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck, der die Menge $M_a = \{a\}$ beschreibt.
3. Sind X und Y reguläre Ausdrücke, die die Mengen M_X und M_Y beschreiben, dann beschreibt
   - $(X + Y)$ die Menge $M_X \cup M_Y$
   - $(X \cdot Y)$ die Menge $M_X \cdot M_Y$
   - X^* die Menge M_X^* und
   - X^+ die Menge M_X^+.
4. Nur die so erzeugten Ausdrücke sind reguläre Ausdrücke.

Reguläre Ausdrücke

Definition (Reguläre Ausdrücke)

Sei Σ ein Alphabet. Die **regulären Ausdrücke über** Σ sind induktiv definiert durch:

1. $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck, der die Menge $M_\emptyset = \emptyset$ beschreibt.
2. Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck, der die Menge $M_a = \{a\}$ beschreibt.
3. Sind X und Y reguläre Ausdrücke, die die Mengen M_X und M_Y beschreiben, dann beschreibt
   - $(X + Y)$ die Menge $M_X \cup M_Y$
   - $(X \cdot Y)$ die Menge $M_X \cdot M_Y$
   - X^* die Menge M_X^* und
   - X^+ die Menge M_X^+.
4. Nur die so erzeugten Ausdrücke sind reguläre Ausdrücke.

Beispiele

Beispiele ($\equiv$ für "beschreibt die Menge"):

- $(a + b)^* \equiv (\{a\} \cup \{b\})^* = \{a, b\}^*$
- $(a \cdot b) \equiv \{a\} \cdot \{b\} = \{ab\}$
- $a \cdot b^* + b \cdot a^* \equiv \{a\} \cdot \{b\}^* \cup \{b\} \cdot \{a\}^*$
- $\emptyset^* \equiv \emptyset^* = \{\lambda\}$

Anmerkung

- Abgesehen von $+$ für $\cup$ also recht ähnlich zu den Mengenoperationen, die wir schon kennen!
- Wir benutzen die üblichen Klammerersparnis regeln wie $\cdot$ vor $+$ und hoch $+$ bzw. hoch $*$ vor $\cdot$.

Beispiele

Beispiele ($\equiv$ für "beschreibt die Menge"):

- $(a + b)^* \equiv (\{a\} \cup \{b\})^* = \{a, b\}^*$
- $(a \cdot b) \equiv \{a\} \cdot \{b\} = \{ab\}$
- $a \cdot b^* + b \cdot a^* \equiv \{a\} \cdot \{b\}^* \cup \{b\} \cdot \{a\}^*$
- $\emptyset^* \equiv \emptyset^* = \{\lambda\}$

Anmerkung

- Abgesehen von $+$ für $\cup$ also recht ähnlich zu den Mengenoperationen, die wir schon kennen!
- Wir benutzen die üblichen Klammerersparnis regeln wie $\cdot$ vor $+$ und hoch $+$ bzw. hoch $*$ vor $\cdot$.

Beispiele

Beispiele ($\equiv$ für "beschreibt die Menge"):

- $(a + b)^* \equiv (\{a\} \cup \{b\})^* = \{a, b\}^*$
- $(a \cdot b) \equiv \{a\} \cdot \{b\} = \{ab\}$
- $a \cdot b^* + b \cdot a^* \equiv \{a\} \cdot \{b\}^* \cup \{b\} \cdot \{a\}^*$
- $\emptyset^* \equiv \emptyset^* = \{\lambda\}$

Anmerkung

- Abgesehen von $+$ für $\cup$ also recht ähnlich zu den Mengenoperationen, die wir schon kennen!
- Wir benutzen die üblichen Klammerersparnis regeln wie $\cdot$ vor $+$ und hoch $+$ bzw. hoch $*$ vor $\cdot$.

Beispiele

Beispiele ($\equiv$ für "beschreibt die Menge"):

- $(a + b)^* \equiv (\{a\} \cup \{b\})^* = \{a, b\}^*$
- $(a \cdot b) \equiv \{a\} \cdot \{b\} = \{ab\}$
- $a \cdot b^* + b \cdot a^* \equiv \{a\} \cdot \{b\}^* \cup \{b\} \cdot \{a\}^*$
- $\emptyset^* \equiv \emptyset^* = \{\lambda\}$

Anmerkung

- Abgesehen von $+$ für $\cup$ also recht ähnlich zu den Mengenoperationen, die wir schon kennen!
- Wir benutzen die üblichen Klammerersparnis regeln wie $\cdot$ vor $+$ und hoch $+$ bzw. hoch $*$ vor $\cdot$.

Äquivalenzbeweis

Man kann nun zeigen:

Satz

Sei A ein regulärer Ausdruck und M_A die von A beschriebene Menge. Dann gibt es einen DFA A' mit $L(A') = M_A$.

Satz

Sei A' ein DFA. Dann gibt es einen regulären Ausdruck A so dass $L(A') = M_A$ für die von A beschriebene Menge M_A.

Bemerkung

Die beiden Modelle sind also wieder äquivalent. Auch mit regulären Ausdrücken lassen sich also genau die regulären Sprachen beschreiben.

Äquivalenzbeweis

Man kann nun zeigen:

Satz

Sei A ein regulärer Ausdruck und M_A die von A beschriebene Menge. Dann gibt es einen DFA A' mit $L(A') = M_A$.

Satz

Sei A' ein DFA. Dann gibt es einen regulären Ausdruck A so dass $L(A') = M_A$ für die von A beschriebene Menge M_A.

Bemerkung

Die beiden Modelle sind also wieder äquivalent. Auch mit regulären Ausdrücken lassen sich also genau die regulären Sprachen beschreiben.

Äquivalenzbeweis

Man kann nun zeigen:

Satz

Sei A ein regulärer Ausdruck und M_A die von A beschriebene Menge. Dann gibt es einen DFA A' mit $L(A') = M_A$.

Satz

Sei A' ein DFA. Dann gibt es einen regulären Ausdruck A so dass $L(A') = M_A$ für die von A beschriebene Menge M_A.

Bemerkung

Die beiden Modelle sind also wieder äquivalent. Auch mit regulären Ausdrücken lassen sich also genau die regulären Sprachen beschreiben.

Äquivalenzbeweis

Hinweis

Wir skizzieren jetzt recht knapp beide Richtungen. Für später genügt es, wenn ihr wisst, dass die Äquivalenz besteht. Trotzdem hier jetzt einmal die Idee(n) und die Literaturhinweise für Interessierte...

Äquivalenzbeweis - Die Idee 1

Die Richtung "regulärer Ausdruck $\rightarrow$ DFA" ist relativ einfach.

- Zu jeder Operation bei der Erstellung eines regulären Ausdrucks gibt man ein Verfahren an, wie man einen NFA konstruieren kann.

Z.B. zum rationalen Ausdruck a einfach

Äquivalenzbeweis - Die Idee 1

Die Richtung "regulärer Ausdruck $\rightarrow$ DFA" ist relativ einfach.

- Zu jeder Operation bei der Erstellung eines regulären Ausdrucks gibt man ein Verfahren an, wie man einen NFA konstruieren kann.

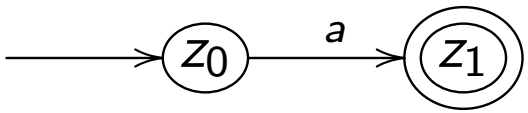
Z.B. zum rationalen Ausdruck a einfach

Äquivalenzbeweis - Die Idee 1

Die Richtung "regulärer Ausdruck $\rightarrow$ DFA" ist relativ einfach.

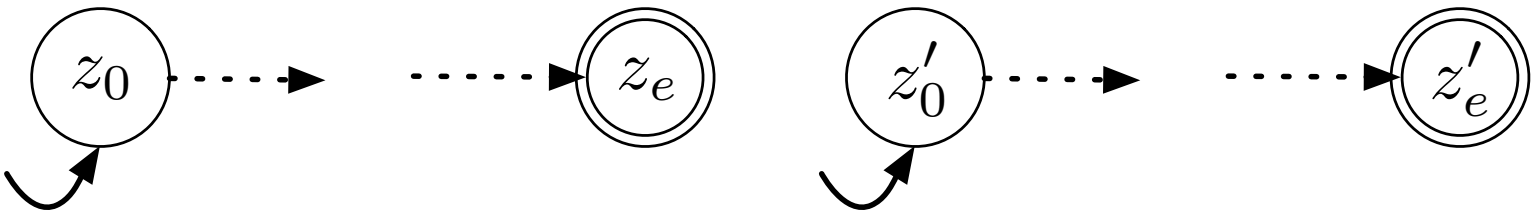
- Zu jeder Operation bei der Erstellung eines regulären Ausdrucks gibt man ein Verfahren an, wie man einen NFA konstruieren kann.

Z.B. zum rationalen Ausdruck a einfach



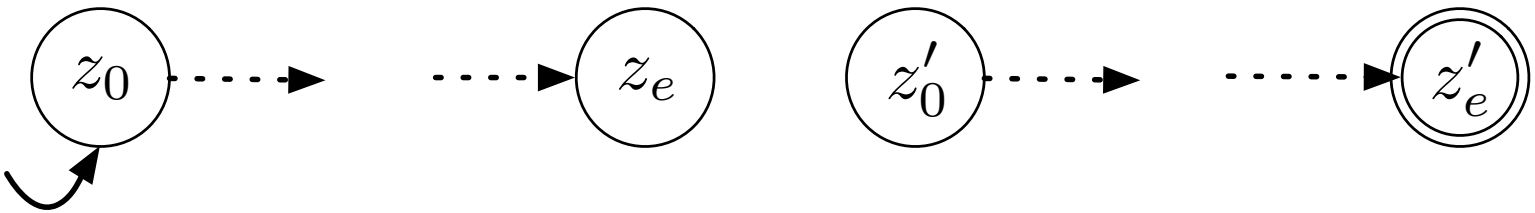
Äquivalenzbeweis - Die Idee 1

Z.B. zum rationalen Ausdruck $A \cdot B$



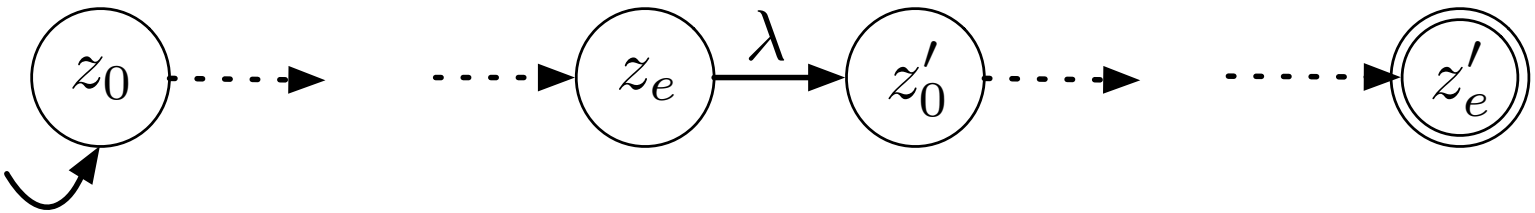
Äquivalenzbeweis - Die Idee 1

Z.B. zum rationalen Ausdruck $A \cdot B$



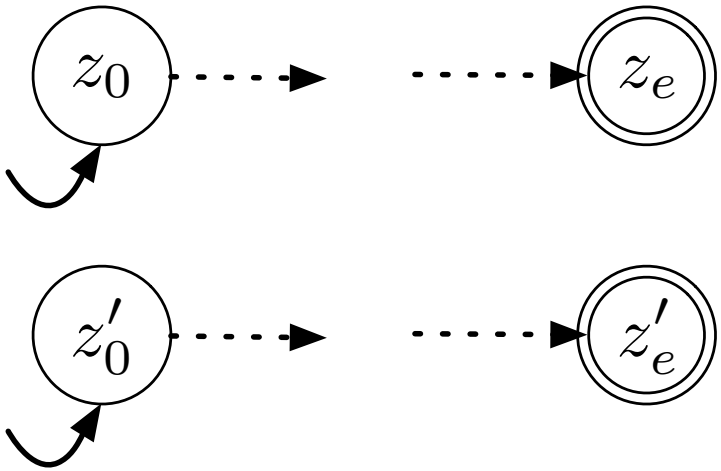
Äquivalenzbeweis - Die Idee 1

Z.B. zum rationalen Ausdruck $A \cdot B$



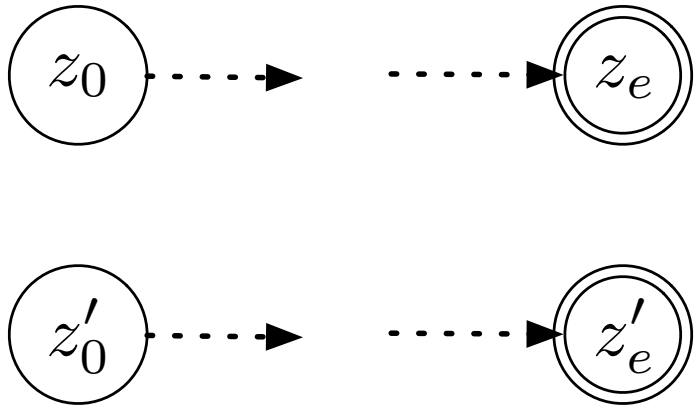
Äquivalenzbeweis - Die Idee 1

Z.B. zum rationalen Ausdruck $A + B$



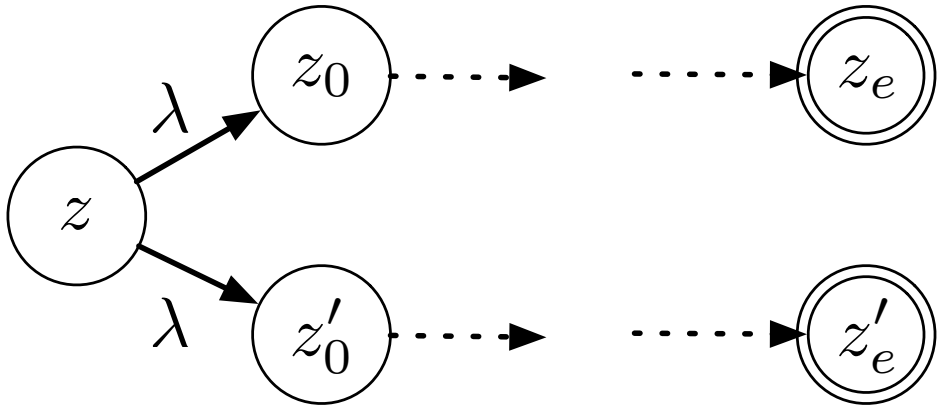
Äquivalenzbeweis - Die Idee 1

Z.B. zum rationalen Ausdruck $A + B$



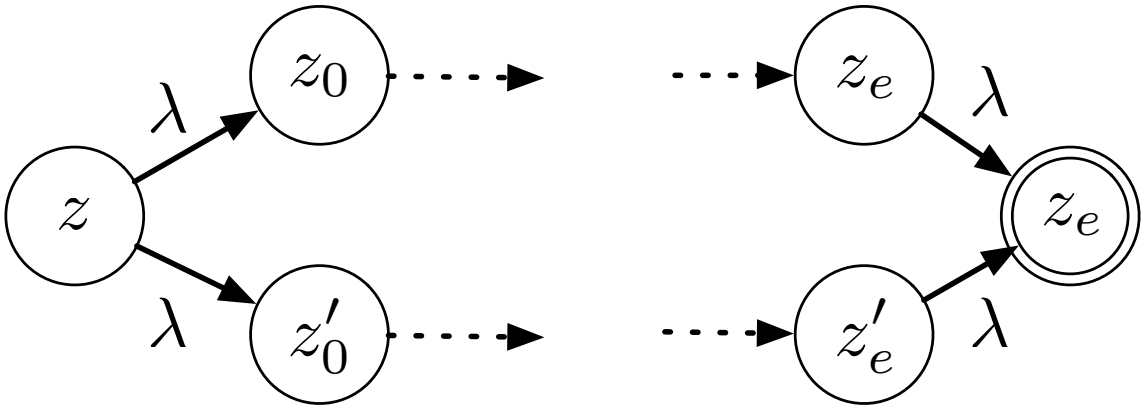
Äquivalenzbeweis - Die Idee 1

Z.B. zum rationalen Ausdruck $A + B$



Äquivalenzbeweis - Die Idee 1

Z.B. zum rationalen Ausdruck $A + B$



Äquivalenzbeweis - Die Idee 1

Anmerkung

- Dies kann man für alle Operatoren machen und kann dann so wie der reguläre Ausdruck Stück für Stück aufgebaut ist, auch den Automaten dafür Stück für Stück aufbauen.
- Im richtigen Verfahren wird noch auf Dinge geachtet, wie dass man nur einen Startzustand und Endzustand hat etc. (so wie oben).

Literaturhinweis

Interessierte finden die Konstruktion in [HMU] (und auf andere Weise im Skript).

Äquivalenzbeweis - Die Idee 1

Anmerkung

- Dies kann man für alle Operatoren machen und kann dann so wie der reguläre Ausdruck Stück für Stück aufgebaut ist, auch den Automaten dafür Stück für Stück aufbauen.
- Im richtigen Verfahren wird noch auf Dinge geachtet, wie dass man nur einen Startzustand und Endzustand hat etc. (so wie oben).

Literaturhinweis

Interessierte finden die Konstruktion in [HMU] (und auf andere Weise im Skript).

Äquivalenzbeweis - Die Idee 2

Die andere Richtung (DFA $\rightarrow$ regulärer Ausdruck) ist schwieriger!

Die Idee

Mittels einer Rekursionsformel werden Worte beschrieben, die auf bestimmten Pfaden im Automaten liegen. Damit lassen sich letztendlich alle akzeptierten Worte beschreiben (also die akzeptierte Sprache) und (!) wir benötigen dafür nur endlich oft die einfachen Operationen $\cup$, $\cdot$ und $*$, was mit regulären Ausdrücken geht.

Äquivalenzbeweis - Die Idee 2

Die andere Richtung (DFA $\rightarrow$ regulärer Ausdruck) ist schwieriger!

Die Idee

Mittels einer Rekursionsformel werden Worte beschrieben, die auf bestimmten Pfaden im Automaten liegen. Damit lassen sich letztendlich alle akzeptierten Worte beschreiben (also die akzeptierte Sprache) und (!) wir benötigen dafür nur endlich oft die einfachen Operationen $\cup$, $\cdot$ und $*$, was mit regulären Ausdrücken geht.

Äquivalenzbeweis - Die Idee 2

Kern des Beweises ist es die Zustände durchzunummerieren $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (z_1 ist der Startzustand) und dann folgende Rekursionsformel zu benutzen

$$R_{i,j}^k = \begin{cases} \{x \mid \delta(z_i, x) = z_j \text{ oder } (x = \lambda) \wedge (i = j)\}, & \text{falls } k = 0 \\ R_{i,j}^{k-1} \cup R_{i,k}^{k-1} \cdot (R_{k,k}^{k-1})^* \cdot R_{k,j}^{k-1}, & \text{falls } k \geq 1 \end{cases}$$

In $R_{i,j}^k$ sind genau jene Worte enthalten, die gelesen werden können, wenn

- in z_i begonnen wird
- in z_j geendet wird und
- dabei nur Zustände aus $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ besucht werden.

Man berechnet dann gerade die $R_{1,x}^n$ mit $z_x \in Z_{end}$, vereinigt diese und ist fertig.

Literaturhinweis

Interessierte finden die Konstruktion im Detail inkl. Beweis im Skript und in [HMU].

Äquivalenzbeweis - Die Idee 2

Kern des Beweises ist es die Zustände durchzunummerieren $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (z_1 ist der Startzustand) und dann folgende Rekursionsformel zu benutzen

$$R_{i,j}^k = \begin{cases} \{x \mid \delta(z_i, x) = z_j \text{ oder } (x = \lambda) \wedge (i = j)\}, & \text{falls } k = 0 \\ R_{i,j}^{k-1} \cup R_{i,k}^{k-1} \cdot (R_{k,k}^{k-1})^* \cdot R_{k,j}^{k-1}, & \text{falls } k \geq 1 \end{cases}$$

In $R_{i,j}^k$ sind genau jene Worte enthalten, die gelesen werden können, wenn

- in z_i begonnen wird
- in z_j geendet wird und
- dabei nur Zustände aus $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ besucht werden.

Man berechnet dann gerade die $R_{1,x}^n$ mit $z_x \in Z_{end}$, vereinigt diese und ist fertig.

Literaturhinweis

Interessierte finden die Konstruktion im Detail inkl. Beweis im Skript und in [HMU].

Äquivalenzbeweis - Die Idee 2

Kern des Beweises ist es die Zustände durchzunummerieren $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (z_1 ist der Startzustand) und dann folgende Rekursionsformel zu benutzen

$$R_{i,j}^k = \begin{cases} \{x \mid \delta(z_i, x) = z_j \text{ oder } (x = \lambda) \wedge (i = j)\}, & \text{falls } k = 0 \\ R_{i,j}^{k-1} \cup R_{i,k}^{k-1} \cdot (R_{k,k}^{k-1})^* \cdot R_{k,j}^{k-1}, & \text{falls } k \geq 1 \end{cases}$$

In $R_{i,j}^k$ sind genau jene Worte enthalten, die gelesen werden können, wenn

- in z_i begonnen wird
- in z_j geendet wird und
- dabei nur Zustände aus $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ besucht werden.

Man berechnet dann gerade die $R_{1,x}^n$ mit $z_x \in Z_{end}$, vereinigt diese und ist fertig.

Literaturhinweis

Interessierte finden die Konstruktion im Detail inkl. Beweis im Skript und in [HMU].

Äquivalenzbeweis - Die Idee 2

Kern des Beweises ist es die Zustände durchzunummerieren $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (z_1 ist der Startzustand) und dann folgende Rekursionsformel zu benutzen

$$R_{i,j}^k = \begin{cases} \{x \mid \delta(z_i, x) = z_j \text{ oder } (x = \lambda) \wedge (i = j)\}, & \text{falls } k = 0 \\ R_{i,j}^{k-1} \cup R_{i,k}^{k-1} \cdot (R_{k,k}^{k-1})^* \cdot R_{k,j}^{k-1}, & \text{falls } k \geq 1 \end{cases}$$

In $R_{i,j}^k$ sind genau jene Worte enthalten, die gelesen werden können, wenn

- in z_i begonnen wird
- in z_j geendet wird und
- dabei nur Zustände aus $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ besucht werden.

Man berechnet dann gerade die $R_{1,x}^n$ mit $z_x \in Z_{end}$, vereinigt diese und ist fertig.

Literaturhinweis

Interessierte finden die Konstruktion im Detail inkl. Beweis im Skript und in [HMU].

Äquivalenzbeweis - Die Idee 2

Kern des Beweises ist es die Zustände durchzunummerieren $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (z_1 ist der Startzustand) und dann folgende Rekursionsformel zu benutzen

$$R_{i,j}^k = \begin{cases} \{x \mid \delta(z_i, x) = z_j \text{ oder } (x = \lambda) \wedge (i = j)\}, & \text{falls } k = 0 \\ R_{i,j}^{k-1} \cup R_{i,k}^{k-1} \cdot (R_{k,k}^{k-1})^* \cdot R_{k,j}^{k-1}, & \text{falls } k \geq 1 \end{cases}$$

In $R_{i,j}^k$ sind genau jene Worte enthalten, die gelesen werden können, wenn

- in z_i begonnen wird
- in z_j geendet wird und
- dabei nur Zustände aus $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ besucht werden.

Man berechnet dann gerade die $R_{1,x}^n$ mit $z_x \in Z_{end}$, vereinigt diese und ist fertig.

Literaturhinweis

Interessierte finden die Konstruktion im Detail inkl. Beweis im Skript und in [HMU].

Zusammenfassung

Zusammenfassung

Zu jeder regulären Sprache L gibt es

- einen DFA A mit $L(A) = L$
- einen NFA B mit $L(B) = L$
- einen NFA mit λ-Kanten C mit $L(C) = L$
- einen regulären Ausdruck D, der L beschreibt ($M_D = L$).

DFAs, NFAs, NFAs mit λ-Kanten und reguläre Ausdrücke sind also äquivalent.

Abschlusseigenschaften

Definition

Sei f_1 eine einstellige Operation auf Mengen und f_2 eine zweistellige Operationen. D.h. wenn M_1, M_2 zwei Mengen sind, dann sind auch $f_1(M_1)$ und $f_2(M_1, M_2)$ Mengen.

- Eine Sprachfamilie $\mathcal{C}$ ist **abgeschlossen** gegenüber der Operation f_1 bzw. f_2, wenn für jedes $R \in \mathcal{C}$ auch $f_1(R) \in \mathcal{C}$ gilt bzw. wenn für $R_1, R_2 \in \mathcal{C}$ auch $f_2(R_1, R_2) \in \mathcal{C}$ gilt.

Beispiel

Oft schreibt man die Operatoren in Infix-Notation (d.h. den Operator zwischen die Argumente). Beispiele in einem anderen Kontext sind z.B. die Addition bei den natürlichen Zahlen.

Abschlusseigenschaften

Definition

Sei f_1 eine einstellige Operation auf Mengen und f_2 eine zweistellige Operationen. D.h. wenn M_1, M_2 zwei Mengen sind, dann sind auch $f_1(M_1)$ und $f_2(M_1, M_2)$ Mengen.

- Eine Sprachfamilie $\mathcal{C}$ ist **abgeschlossen** gegenüber der Operation f_1 bzw. f_2, wenn für jedes $R \in \mathcal{C}$ auch $f_1(R) \in \mathcal{C}$ gilt bzw. wenn für $R_1, R_2 \in \mathcal{C}$ auch $f_2(R_1, R_2) \in \mathcal{C}$ gilt.

Beispiel

Oft schreibt man die Operatoren in Infix-Notation (d.h. den Operator zwischen die Argumente). Beispiele in einem anderen Kontext sind z.B. die Addition bei den natürlichen Zahlen.

Abschlusseigenschaften

Ziel

Wir wollen jetzt Abschlusseigenschaften für die regulären Sprachen untersuchen, also z.B. ob für zwei reguläre Sprachen $L_1, L_2 \in \text{REG}$ auch

- $L_1 \cup L_2 \in \text{REG}$
- $L_1^+ \in \text{REG}$
- $\overline{L} \in \text{REG}$
- ...

gilt.

Vorgehen

Die Argumentation ist dann immer "Seien L_1 und L_2 reguläre Sprachen, dann ..., also ist auch $L_1 \circ L_2$ regulär".

Abschlusseigenschaften

Ziel

Wir wollen jetzt Abschlusseigenschaften für die regulären Sprachen untersuchen, also z.B. ob für zwei reguläre Sprachen $L_1, L_2 \in \text{REG}$ auch

- $L_1 \cup L_2 \in \text{REG}$
- $L_1^+ \in \text{REG}$
- $\overline{L} \in \text{REG}$
- ...

gilt.

Vorgehen

Die Argumentation ist dann immer "Seien L_1 und L_2 reguläre Sprachen, dann ..., also ist auch $L_1 \circ L_2$ regulär".

Einfache Abschlusseigenschaften

Viele Abschlusseigenschaften kriegen wir durch reguläre Ausdrücke "geschenkt", da wir ja wissen, dass diese reguläre Sprachen beschreiben.

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen gegenüber $\cup, \cdot, +, *$.

Beweis.

Seien $L_1, L_2 \in \text{REG}$. Dann gibt es reguläre Ausdrücke A_1, A_2, die L_1 bzw. L_2 beschreiben. Nach Definition sind nun auch $A_1 + A_2$, $A_1 \cdot A_2$, A_1^+, A_1^* reguläre Ausdrücke, die die Mengen $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cdot L_2$, L_1^+ und L_1^* beschreiben. Diese sind folglich auch regulär. (Da jede Sprache, die von einem regulären Ausdruck beschrieben werden kann, regulär ist.) □

Einfache Abschlusseigenschaften

Viele Abschlusseigenschaften kriegen wir durch reguläre Ausdrücke "geschenkt", da wir ja wissen, dass diese reguläre Sprachen beschreiben.

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen gegenüber $\cup, \cdot, +, *$.

Beweis.

Seien $L_1, L_2 \in \text{REG}$. Dann gibt es reguläre Ausdrücke A_1, A_2, die L_1 bzw. L_2 beschreiben. Nach Definition sind nun auch $A_1 + A_2$, $A_1 \cdot A_2$, A_1^+, A_1^* reguläre Ausdrücke, die die Mengen $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cdot L_2$, L_1^+ und L_1^* beschreiben. Diese sind folglich auch regulär. (Da jede Sprache, die von einem regulären Ausdruck beschrieben werden kann, regulär ist.) □

Einfache Abschlusseigenschaften

Viele Abschlusseigenschaften kriegen wir durch reguläre Ausdrücke "geschenkt", da wir ja wissen, dass diese reguläre Sprachen beschreiben.

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen gegenüber $\cup, \cdot, +, *$.

Beweis.

Seien $L_1, L_2 \in \text{REG}$. Dann gibt es reguläre Ausdrücke A_1, A_2, die L_1 bzw. L_2 beschreiben. Nach Definition sind nun auch $A_1 + A_2$, $A_1 \cdot A_2$, A_1^+, A_1^* reguläre Ausdrücke, die die Mengen $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cdot L_2$, L_1^+ und L_1^* beschreiben. Diese sind folglich auch regulär. (Da jede Sprache, die von einem regulären Ausdruck beschrieben werden kann, regulär ist.) □

Einfache Abschlusseigenschaften

Viele Abschlusseigenschaften kriegen wir durch reguläre Ausdrücke "geschenkt", da wir ja wissen, dass diese reguläre Sprachen beschreiben.

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen gegenüber $\cup, \cdot, +, *$.

Beweis.

Seien $L_1, L_2 \in \text{REG}$. Dann gibt es reguläre Ausdrücke A_1, A_2, die L_1 bzw. L_2 beschreiben. Nach Definition sind nun auch $A_1 + A_2$, $A_1 \cdot A_2$, A_1^+, A_1^* reguläre Ausdrücke, die die Mengen $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cdot L_2$, L_1^+ und L_1^* beschreiben. Diese sind folglich auch regulär. (Da jede Sprache, die von einem regulären Ausdruck beschrieben werden kann, regulär ist.) □

Einfache Abschlusseigenschaften

Viele Abschlusseigenschaften kriegen wir durch reguläre Ausdrücke "geschenkt", da wir ja wissen, dass diese reguläre Sprachen beschreiben.

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen gegenüber $\cup, \cdot, +, *$.

Beweis.

Seien $L_1, L_2 \in \text{REG}$. Dann gibt es reguläre Ausdrücke A_1, A_2, die L_1 bzw. L_2 beschreiben. Nach Definition sind nun auch $A_1 + A_2$, $A_1 \cdot A_2$, A_1^+, A_1^* reguläre Ausdrücke, die die Mengen $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cdot L_2$, L_1^+ und L_1^* beschreiben. Diese sind folglich auch regulär. (Da jede Sprache, die von einem regulären Ausdruck beschrieben werden kann, regulär ist.) □

Komplement

Und Komplementbildung ... ?

Definition

Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Dann ist

$$\overline{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$$

das Komplement von L.

Ideen ?!

Komplement

Und Komplementbildung ... ?

Definition

Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Dann ist

$$\overline{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$$

das Komplement von L.

Ideen ?!

Komplement

Und Komplementbildung ... ?

Definition

Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Dann ist

$$\overline{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$$

das Komplement von L.

Ideen ?!

Komplement

Und Komplementbildung ... ?

Definition

Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Dann ist

$$\overline{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$$

das Komplement von L.

Ideen ?!

Mit vollständigen DFAs?

Komplement

Satz

Die regulären Sprachen sind gegenüber Komplementbildung abgeschlossen, d.h. ist $L \in REG$, dann auch $\overline{L} \in REG$.

Beweis.

Sei $L \in$ REG. Dann gibt es einen vollständigen DFA A mit $L(A) = L$. Wir konstruieren nun einen vollständigen DFA A' aus A wie folgt:

- Alles von A übernehmen
- $z \in Z$ in A Endzustand, dann in A' nicht
- $z \in Z$ in A kein Endzustand, dann einer in A'

Komplement

Satz

Die regulären Sprachen sind gegenüber Komplementbildung abgeschlossen, d.h. ist $L \in REG$, dann auch $\overline{L} \in REG$.

Beweis.

Sei $L \in$ REG. Dann gibt es einen vollständigen DFA A mit $L(A) = L$. Wir konstruieren nun einen vollständigen DFA A' aus A wie folgt:

- Alles von A übernehmen
- $z \in Z$ in A Endzustand, dann in A' nicht
- $z \in Z$ in A kein Endzustand, dann einer in A'

Komplement

Satz

Die regulären Sprachen sind gegenüber Komplementbildung abgeschlossen, d.h. ist $L \in REG$, dann auch $\overline{L} \in REG$.

Beweis.

Sei $L \in$ REG. Dann gibt es einen vollständigen DFA A mit $L(A) = L$. Wir konstruieren nun einen vollständigen DFA A' aus A wie folgt:

- Alles von A übernehmen
- $z \in Z$ in A Endzustand, dann in A' nicht
- $z \in Z$ in A kein Endzustand, dann einer in A'

Komplement

Satz

Die regulären Sprachen sind gegenüber Komplementbildung abgeschlossen, d.h. ist $L \in REG$, dann auch $\overline{L} \in REG$.

Beweis.

(Wir haben gerade End- und Nicht-Endzustände getauscht.)
Wurde ein Wort nun von A akzeptiert (die Rechnung endet in einem Endzustand), so wird es von A' nicht akzeptiert (kein Endzustand). Wurde ein Wort von A nicht akzeptiert (Rechnung endet in einem Nicht-Endzustand), so wird es von A' akzeptiert (Endzustand). Damit gilt $L(A') = \overline{L}$. □

Komplement

Satz

Die regulären Sprachen sind gegenüber Komplementbildung abgeschlossen, d.h. ist $L \in REG$, dann auch $\overline{L} \in REG$.

Beweis.

(Wir haben gerade End- und Nicht-Endzustände getauscht.) Wurde ein Wort nun von A akzeptiert (die Rechnung endet in einem Endzustand), so wird es von A' nicht akzeptiert (kein Endzustand). Wurde ein Wort von A nicht akzeptiert (Rechnung endet in einem Nicht-Endzustand), so wird es von A' akzeptiert (Endzustand). Damit gilt $L(A') = \overline{L}$. □

Komplement

Satz

Die regulären Sprachen sind gegenüber Komplementbildung abgeschlossen, d.h. ist $L \in REG$, dann auch $\overline{L} \in REG$.

Beweis.

(Wir haben gerade End- und Nicht-Endzustände getauscht.) Wurde ein Wort nun von A akzeptiert (die Rechnung endet in einem Endzustand), so wird es von A' nicht akzeptiert (kein Endzustand). Wurde ein Wort von A nicht akzeptiert (Rechnung endet in einem Nicht-Endzustand), so wird es von A' akzeptiert (Endzustand). Damit gilt $L(A') = \overline{L}$. □

Komplement

Satz

Die regulären Sprachen sind gegenüber Komplementbildung abgeschlossen, d.h. ist $L \in REG$, dann auch $\overline{L} \in REG$.

Beweis.

(Wir haben gerade End- und Nicht-Endzustände getauscht.) Wurde ein Wort nun von A akzeptiert (die Rechnung endet in einem Endzustand), so wird es von A' nicht akzeptiert (kein Endzustand). Wurde ein Wort von A nicht akzeptiert (Rechnung endet in einem Nicht-Endzustand), so wird es von A' akzeptiert (Endzustand). Damit gilt $L(A') = \overline{L}$. □

Produkt/Durchschnitt

Satz

Seien $L_1, L_2 \in REG$, dann ist auch $L_1 \cap L_2 \in REG$.

Ideen?

Produkt/Durchschnitt

Satz

Seien $L_1, L_2 \in REG$, dann ist auch $L_1 \cap L_2 \in REG$.

Ideen?

Die Idee

Wir gehen von zwei Automaten aus (für L_1 und L_2). Ein neuer Automat muss dann die Wörter akzeptieren, die *beide* Automaten akzeptieren. Dazu merken wir uns in einem Zustand des neuen Automaten jeweils in welchem Zustand der erste *und* in welchem der zweite Automat ist.

Der Produktautomat

Beweis.

Seien $A_1 = (Z_1, \Sigma_1, \delta_1, z_{1,0}, Z_{1,end})$ $A_2 = (Z_2, \Sigma_2, \delta_2, z_{2,0}, Z_{2,end})$ vollständige DFAs mit $L(A_1) = L_1$ und $L(A_2) = L_2$. Wir konstruieren $C = (Z_3, \Sigma_3, \delta_3, z_{3,0}, Z_{3,end})$ mit

$$\begin{aligned} Z_3 &:= Z_1 \times Z_2 \\ \Sigma_3 &:= \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \\ z_{3,0} &:= (z_{1,0}, z_{2,0}) \\ Z_{3,end} &:= Z_{1,end} \times Z_{2,end} \end{aligned}$$

Der Produktautomat

Beweis.

Seien $A_1 = (Z_1, \Sigma_1, \delta_1, z_{1,0}, Z_{1,end})$ $A_2 = (Z_2, \Sigma_2, \delta_2, z_{2,0}, Z_{2,end})$ vollständige DFAs mit $L(A_1) = L_1$ und $L(A_2) = L_2$. Wir konstruieren $C = (Z_3, \Sigma_3, \delta_3, z_{3,0}, Z_{3,end})$ mit

$$\begin{aligned} Z_3 &:= Z_1 \times Z_2 \\ \Sigma_3 &:= \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \\ z_{3,0} &:= (z_{1,0}, z_{2,0}) \\ Z_{3,end} &:= Z_{1,end} \times Z_{2,end} \end{aligned}$$

Der Produktautomat

Beweis.

Seien $A_1 = (Z_1, \Sigma_1, \delta_1, z_{1,0}, Z_{1,end})$ $A_2 = (Z_2, \Sigma_2, \delta_2, z_{2,0}, Z_{2,end})$ vollständige DFAs mit $L(A_1) = L_1$ und $L(A_2) = L_2$. Wir konstruieren $C = (Z_3, \Sigma_3, \delta_3, z_{3,0}, Z_{3,end})$ mit

$$\begin{aligned} Z_3 &:= Z_1 \times Z_2 \\ \Sigma_3 &:= \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \\ z_{3,0} &:= (z_{1,0}, z_{2,0}) \\ Z_{3,end} &:= Z_{1,end} \times Z_{2,end} \end{aligned}$$

□

Der Produktautomat

Beweis.

Seien $A_1 = (Z_1, \Sigma_1, \delta_1, z_{1,0}, Z_{1,end})$ $A_2 = (Z_2, \Sigma_2, \delta_2, z_{2,0}, Z_{2,end})$ vollständige DFAs mit $L(A_1) = L_1$ und $L(A_2) = L_2$. Wir konstruieren $C = (Z_3, \Sigma_3, \delta_3, z_{3,0}, Z_{3,end})$ mit

$$\begin{aligned} Z_3 &:= Z_1 \times Z_2 \\ \Sigma_3 &:= \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \\ z_{3,0} &:= (z_{1,0}, z_{2,0}) \\ Z_{3,end} &:= Z_{1,end} \times Z_{2,end} \\ \delta_3((z_1, z_2), x) &:= (\delta_1(z_1, x), \delta(z_2, x)) \end{aligned}$$

□

Der Produktautomat

Im Produktautomaten C wird also

- in der ersten Komponente eine Rechnung von A_1 und
- in der zweiten Komponente eine Rechnung von A_2

gemacht. Daraus folgt schnell die Korrektheit:

$$\hat{\delta}_3(z_{3,0}, w) \in Z_{3,end} \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(z_{1,0}, w) \in Z_{1,end} \wedge \hat{\delta}_2(z_{2,0}, w) \in Z_{2,end}$$

Der Produktautomat

Im Produktautomaten C wird also

- in der ersten Komponente eine Rechnung von A_1 und
- in der zweiten Komponente eine Rechnung von A_2

gemacht. Daraus folgt schnell die Korrektheit:

$$\hat{\delta}_3(z_{3,0}, w) \in Z_{3,end} \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(z_{1,0}, w) \in Z_{1,end} \wedge \hat{\delta}_2(z_{2,0}, w) \in Z_{2,end}$$

Der Produktautomat - Konstruktion

Will man einen Produktautomaten konstruieren, so

- beginnt man in $(z_{1,0}, z_{2,0})$
- berechnet $\delta(z_{1,0}, x)$ und $\delta(z_{2,0}, x)$ für jedes $x \in \Sigma$ (sind für ein x beide definiert, ist dies ein neuer Nachfolgezustand)
- So fährt man dann fort ...

Bemerkung

Im Grund genommen ähnlich zur Potenzautomatenkonstruktion, nur dass man hier im ersten Tupelelement immer wie im ersten Automaten und im zweiten Tupelelement immer wie im zweiten Automaten rechnet.

Der Produktautomat - Konstruktion

Will man einen Produktautomaten konstruieren, so

- beginnt man in $(z_{1,0}, z_{2,0})$
- berechnet $\delta(z_{1,0}, x)$ und $\delta(z_{2,0}, x)$ für jedes $x \in \Sigma$ (sind für ein x beide definiert, ist dies ein neuer Nachfolgezustand)
- So fährt man dann fort ...

Bemerkung

Im Grund genommen ähnlich zur Potenzautomatenkonstruktion, nur dass man hier im ersten Tupelelement immer wie im ersten Automaten und im zweiten Tupelelement immer wie im zweiten Automaten rechnet.

Der Produktautomat - Konstruktion

Will man einen Produktautomaten konstruieren, so

- beginnt man in $(z_{1,0}, z_{2,0})$
- berechnet $\delta(z_{1,0}, x)$ und $\delta(z_{2,0}, x)$ für jedes $x \in \Sigma$ (sind für ein x beide definiert, ist dies ein neuer Nachfolgezustand)
- So fährt man dann fort ...

Bemerkung

Im Grund genommen ähnlich zur Potenzautomatenkonstruktion, nur dass man hier im ersten Tupelelement immer wie im ersten Automaten und im zweiten Tupelelement immer wie im zweiten Automaten rechnet.

Der Produktautomat - Konstruktion

Will man einen Produktautomaten konstruieren, so

- beginnt man in $(z_{1,0}, z_{2,0})$
- berechnet $\delta(z_{1,0}, x)$ und $\delta(z_{2,0}, x)$ für jedes $x \in \Sigma$ (sind für ein x beide definiert, ist dies ein neuer Nachfolgezustand)
- So fährt man dann fort ...

Bemerkung

Im Grund genommen ähnlich zur Potenzautomatenkonstruktion, nur dass man hier im ersten Tupelelement immer wie im ersten Automaten und im zweiten Tupelelement immer wie im zweiten Automaten rechnet.

Abschlusseigenschaften - Zusammenfassung

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen gegenüber

- *Vereinigung* $\cup$
- *Konkatenation* $\cdot$
- *"hoch* $+$*"*
- *"hoch* $*$*"*
- *Komplementbildung*
- *Durchschnitt* $\cap$

Für Interessierte

Es gelten weitere Abschlusseigenschaften. Siehe z.B. [HMU].

Eine Anmerkung

Bemerkung

Im Skript wird dies teilweise andersherum gemacht. Wir haben hier mittels regulären Ausdrücken einige der Abschlusseigenschaften sofort gekriegt. Im Skript wird zunächst gezeigt, dass z.B. REG gegenüber $\cup$ abgeschlossen ist und dies dann beim Beweis benutzt, dass die regulären Ausdrücke und DFAs äquivalent sind.

Möglichkeiten und Grenzen

Wir können nun sehr viele Sprachen konstruieren, die alle regulär sind. Sind z.B. L_1, L_2 regulär. Dann auch (in etwas schluderiger Schreibweise)

- $(L_1 + L_2)^* \cdot L_1 \cdot L_2^+ \cdot L_1^*$
- $(L_1^* \cdot a^3 \cdot L_2^*)^+$
- ...

dennoch wissen wir, dass wir nur endlich viele Informationen speichern können (der DFA hat nur endlich viele Zustände).

Intermezzo

Intermezzo ...

Naive Wortsuche

- Die naive Wortsuche dauert $O(n \cdot m)$ Schritte
- Verbesserungen sind möglich (z.B. mit booleschen Flags welche Buchstaben man schon entdeckt hat), aber dies ist fehleranfällig und im Grunde baut man Automaten nach.

Wortsuche mit Automaten

- Wortsuche mit Automaten braucht nur $O(n)$ Schritte!
- Vorher muss der Automat aus dem Pattern erzeugt werden.
- Zur Info: Dies kann man in $O(m \cdot |\Sigma|)$ machen.
- Wenig fehleranfällig. Methoden für den Automaten müssen nur einmal geschrieben werden!

Deswegen ...

Deswegen z.B. auch die ganzen Konstruktionen. Man könnte jetzt ein Tool schreiben, in dem

- jemand einen regulären Ausdruck eingibt
- dieser wird in einen Automaten umgewandelt (automatisch)
- bzw. in Code (so dass wir eine Methode für δ haben)
- der dann für eine effiziente Wortsuche benutzt werden kann

Anwendungen z.B.:

- Suchen in Texten
- Suchen nach Schlüsselworten beim Kompilieren
- Suchen in DNA-Sequenzen
- ...

Deswegen ...

Deswegen z.B. auch die ganzen Konstruktionen. Man könnte jetzt ein Tool schreiben, in dem

- jemand einen regulären Ausdruck eingibt
- dieser wird in einen Automaten umgewandelt (automatisch)
- bzw. in Code (so dass wir eine Methode für δ haben)
- der dann für eine effiziente Wortsuche benutzt werden kann

Anwendungen z.B.:

- Suchen in Texten
- Suchen nach Schlüsselworten beim Kompilieren
- Suchen in DNA-Sequenzen
- ...

Deswegen ...

Deswegen z.B. auch die ganzen Konstruktionen. Man könnte jetzt ein Tool schreiben, in dem

- jemand einen regulären Ausdruck eingibt
- dieser wird in einen Automaten umgewandelt (automatisch)
- bzw. in Code (so dass wir eine Methode für δ haben)
- der dann für eine effiziente Wortsuche benutzt werden kann

Anwendungen z.B.:

- Suchen in Texten
- Suchen nach Schlüsselworten beim Kompilieren
- Suchen in DNA-Sequenzen
- ...

Eine Sprache, die nicht geht, oder?

Wir können nun sehr viele Sprachen konstruieren, die alle regulär sind. Sind z.B. L_1, L_2 regulär. Dann auch

- $(L_1 + L_2)^* \cdot L_1 \cdot L_2^+ \cdot L_1^*$
- $(L_1^* \cdot a^3 \cdot L_2^*)^+$
- ...

dennoch wissen wir, dass wir nur endlich viele Informationen speichern können (der DFA hat nur endlich viele Zustände).

Eine Sprache, die nicht geht, oder?

$$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Ideen für einen DFA?

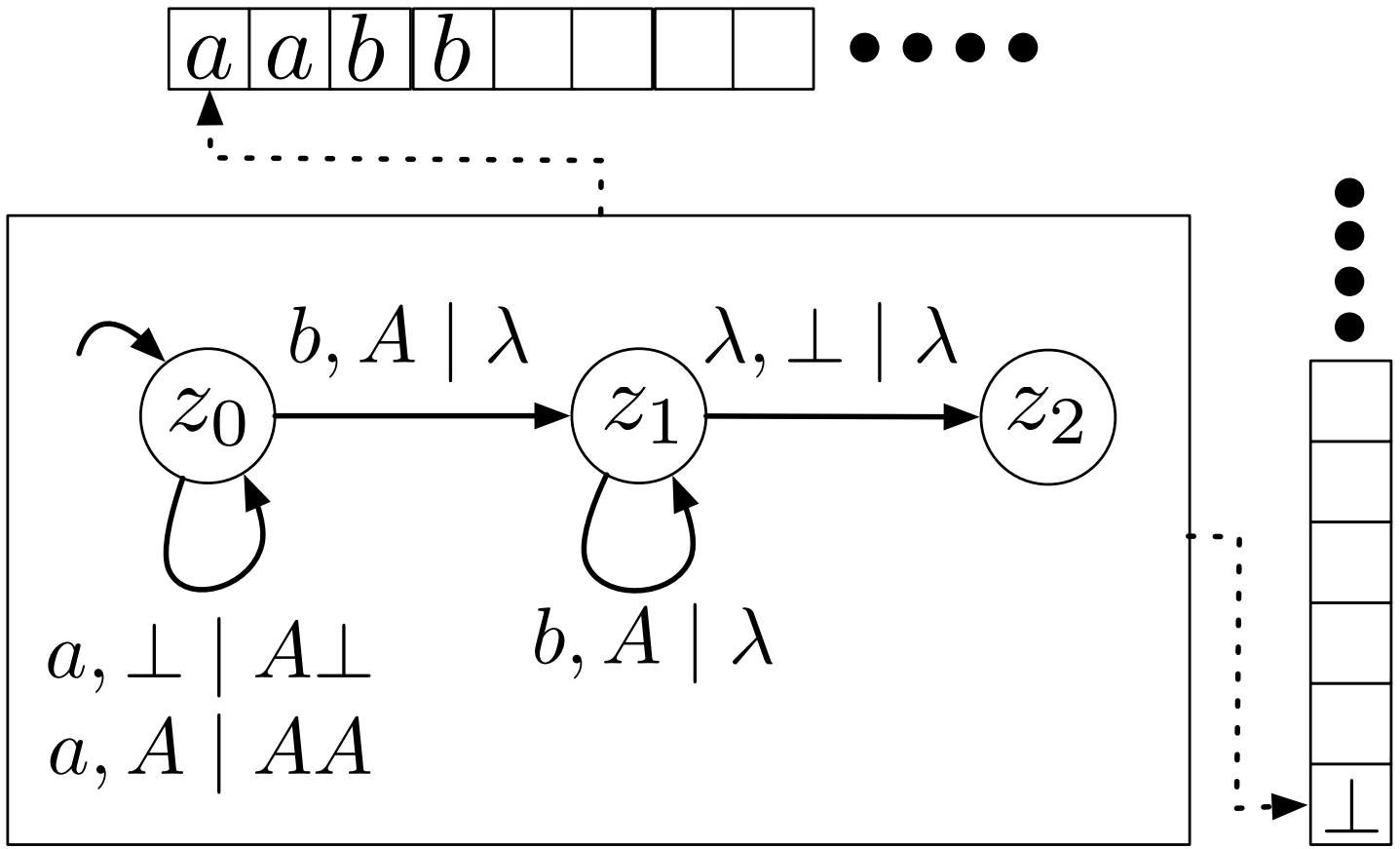
Was ist das Problem?

Eine Sprache, die nicht geht, oder?

$$L := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Ideen für einen DFA?
Was ist das Problem?

Der Kellerautomat



Ausblick

Nächstes Mal:

- Kellerautomat richtig einführen
- Werkzeuge kennenlernen, um zu zeigen, dass es wirklich nicht mit DFAs geht

Zusammenfassung

Wir haben heute

- NFA mit λ-Kanten und
- reguläre Ausdrücke

eingeführt.

Sollt ihr wissen

Beide solltet ihr lesen können und bei beiden solltet ihr Wissen, dass man die in DFAs umwandeln kann.

Könnt ihr wissen...

Interessierte können die Konstruktionen im Detail und die zugehörigen Beweise im Skript finden.

Zusammenfassung

Zusammenfassung

Zu jeder regulären Sprache L gibt es

- einen DFA A mit $L(A) = L$
- einen NFA B mit $L(B) = L$
- einen NFA mit λ-Kanten C mit $L(C) = L$
- einen regulären Ausdruck D, der L beschreibt ($M_D = L$).

DFAs, NFAs, NFAs mit λ-Kanten und reguläre Ausdrücke sind also äquivalent.

Zusammenfassung

Wir haben uns dann noch Abschlusseigenschaften angesehen:

Satz

Die regulären Sprachen sind (u.a.) abgeschlossen gegenüber

- *Vereinigung* $\cup$
- *Konkatenation* $\cdot$
- *"hoch* $+$*"*
- *"hoch* $*$*"*
- *Komplementbildung*
- *Durchschnitt* $\cap$
- *...*

Zusammenfassung

Was ihr bis zur nächsten Woche kennen solltet:

- Was DFAs sind und wie die funktionieren
- Was NFAs sind und wie die funktionieren
- Was reguläre Ausdrücke sind und wie man damit Sprachen beschreibt.
- λ-Kanten kennen
- Wissen, dass DFA, NFA, NFA mit λ-Kanten und reguläre Ausdrücke im Prinzip "das Gleiche" sind.
- Konstruktionsmethoden (zu einer Sprache M einen Automaten A machen)
- und der Beweis $L(A) = M$.
- Potenzautomatenkonstruktion (die Konstruktion)
- Abschlusseigenschaften für REG. Welche gelten? Wie gehen die Konstruktionen?