AuK

Berndt Farwer
14. Juli 2003

Erweiterte Berechenbarkeitsbegriffe

Motivation

Wozu brauchen wir einen Berechenbarkeitsbegriff für Funktionen auf $\mathbb{R}$?

- Umlaufbahnen von Satelliten
- Ausbreitung von Wellen
- Schwingungszustände von Brücken
- Strömungen an Autos und Flugzeugen

Turingmaschinen

Warum können wir nicht einfach TM verwenden?

- Kodierung durch Turingmaschinen schlägt fehl, da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

  Formal:

  Theorem 1 *Sei $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.*

  Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so daß $x \notin \mathrm{Bild}(\nu)$.

Registermaschinen

real-RAM

Erweiterung der RAM mit reellen Zahlen

- Berechenbarkeitsmodell in der *algorithmischen Geometrie*
- Nachteil: unrealistisch
- lassen sich nicht physikalisch realisieren
- bisher keine physikalische Maschine denkbar, welches die real-RAM-berechenbare Funktion

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

exakt berechnet!

andere Modelle

Erweiterungen der Turingmaschine

- Modifizierte Turingmaschinen (A. Grzegorczyk, 1955)
- Berechenbarkeit auf Σ^ω
- unendliche Symbolfolgen als *Namen* reeller Zahlen
- Definition der Berechenbarkeit von Funktionen der Form

$$f :\subseteq (\Sigma^\omega)^k \to \Sigma^\omega$$

Typ-2-Maschinen

Eine Typ-2-Maschine M besteht aus:

- k einseitig unendlichen Eingabebändern
- endlich vielen (beidseitig) unendlichen Arbeitsbändern
- einem einseitig unendlichen Einweg-Ausgabeband
- einer endlichen Steuerung

Berechnete Funktion

einer Typ-2-Maschine

Definition 1
Die von M berechnete Funktion

$$f_M :\subseteq (\Sigma^\omega)^k \to \Sigma^\omega$$

ist gegeben durch:

$$f_M(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \beta$$

gdw. M bei Eingabe von $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ unendlich lange rechnet und dabei allmählich $\beta \in \Sigma^\omega$ auf das Ausgabeband schreibt.

Typ-2-Berechenbarkeit

Es gibt eine Typ-2-Mashine M, die zwei unendliche Dezimalbrüche durch 3 teilt.

- Die Eingaben werden von links nach rechts gelesen
- Division nach der Schulmethode
- Es werden *keine* Arbeitbänder benötigt.

Ein weiteres Beispiel

Es existiert eine einstellige Typ-2-Maschine M, die jedes Symbol 0 vom Eingabeband auf die Ausgabe kopiert.

- Es gilt $\quad \mathrm{Bild}(f_M) = \{0^\omega\}$
- und $\quad \mathrm{Def}(f_M) = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \alpha$ enthält unendlich viele Nullen $\}$

Eigenschaften

von Typ-2-Maschinen

- Typ-2-Maschinen produzieren nach endlich vielen Schritten ein endliches Anfangsstück der *idealen* Ausgabe.
- Dies ist physikalisch realisierbar!
- Typ-2-Maschinen sind ein realistisches Berechenbarkeitsmodell.
- Übertragung auf andere Mengen mit Σ^ω als *Namen*.

Darstellungen

vs. Numerierungen

- Eine *Darstellung* einer Menge M ist eine surjektive Funktion $\delta :\subseteq \Sigma^\omega \to M$.
- Seien $\delta_0 :\subseteq \Sigma^\omega \to M_k, \ldots \delta_k :\subseteq \Sigma^\omega \to M$ Darstellungen von $M_1, \ldots, M_k$.
- $f :\subseteq M_1 \times \cdots \times M_k \to M_0$ heißt $(\delta_1, \ldots, \delta_k, \delta_0)$-berechenbar, gdw. eine berechenbare Funktion $g :\subseteq (\Sigma^\omega)^k \to \Sigma^\omega$ existiert, so daß

$$f(\delta_1(\alpha_1), \ldots, \delta_k(\alpha_k)) = \delta_0 g(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$$

Einige Darstellungen

- Dezimaldarstellung δ_{dez}
- Dualdarstellung δ_{du}
  - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{x}{3}$ ist $(\delta_{\mathrm{dez}}, \delta_{\mathrm{dez}})$-berechenbar.
  - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 3 \cdot x$ ist *nicht* $(\delta_{\mathrm{dez}}, \delta_{\mathrm{dez}})$-berechenbar.
  - Warum?

Gibt es Alternativen?

... für einen Berechenbarkeitsbegriff

- Cauchy-Darstellung der reellen Zahlen
- reelle Zahl dargestellt als konvergierende unendliche Folge *rationaler Zahlen*
- spezielles Konvergenzkriterium

Cauchy-Darstellung

der reellen Zahlen

- Sei ν_{rat} eine Numerierung von $\mathbb{Q}$.

Definition 3
Für $w \in \text{Def}(\nu_{\text{rat}})$ *sei* $\bar{w} \overset{def}{=} \nu_{\text{rat}}(w)$.
Die Cauchy-Darstelung $\rho :\subseteq \Sigma^\omega \to \mathbb{R}$ der reelen Zahlen *ist:*

$$\rho(\alpha) = x$$

gdw.

$$\begin{aligned} &\exists u_0, u_1, \dots \in \text{Def}(\nu_{\text{rat}}).\alpha = u_0\#u_1\#\dots \\ \wedge \quad &\forall k \in \mathbb{N}.\forall i > k.|\bar{u}_i - \bar{u}_k|) \leq 2^{-k} \\ \wedge \quad &x = \lim_{k\to\infty} \bar{u}_k. \end{aligned}$$

Berechenbarkeit

mit der Cauchy-Darstellung

Definition 4
Eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *heißt berechenbar, gdw. sie* $(\rho, \dots, \rho, \rho)$*-berechenbar ist.*

Beispiele

Einige berechenbare reelle Funktionen:

- $x \mapsto -x$
- $(x, y) \mapsto x + y$
- $(x, y) \mapsto x \cdot y$
- $(x, y) \mapsto \max(x, y)$
- $x \mapsto \frac{1}{x}$
- $x \mapsto \sqrt{x}$
- $x \mapsto e^x$
- $x \mapsto \sin x$

Charakterisierung

der berechenbaren reellen Funktionen

Theorem 2
Jede $(\rho, \ldots, \rho, \rho)$*-berechenbare Funktion* $f :\subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *ist stetig.*