Algorithmische Graphentheorie

Teil 4

Mesh generation, Quad-trees und VLSI-outline etc.

Was ist ein *mesh*, *mesh-network*?

- from WordNet:

  1: the number of opening per inch of a screen; measures size of particles; "a 100 mesh screen" or "100 mesh powdered cellulose"
  2: contact by fitting together; "the engagement of the clutch"; "the meshing of gears" [syn: engagement, meshing, interlocking]
  3: an interconnected or intersecting configuration or system of components; "there was a hole in the network where some of the strands were broken"; "he used a copper frame with copper meshing" [syn: network, net, meshing, meshwork, reticulation]
  4: an open fabric woven together at regular intervals [syn: net]
  5: the act of interlocking or meshing; "an interlocking of arms by the police held the crowd in check" [syn: meshing, interlock, interlocking]

- Wörterbuch der Datenverarbeitung:
  Masche (to mesh: ineinandergreifen, kämmen - z.B. bei Zahnrädern)

Was ist das Problem?

- Komponenten erhitzen sich unterschiedlich und benötigen genügend Abstand

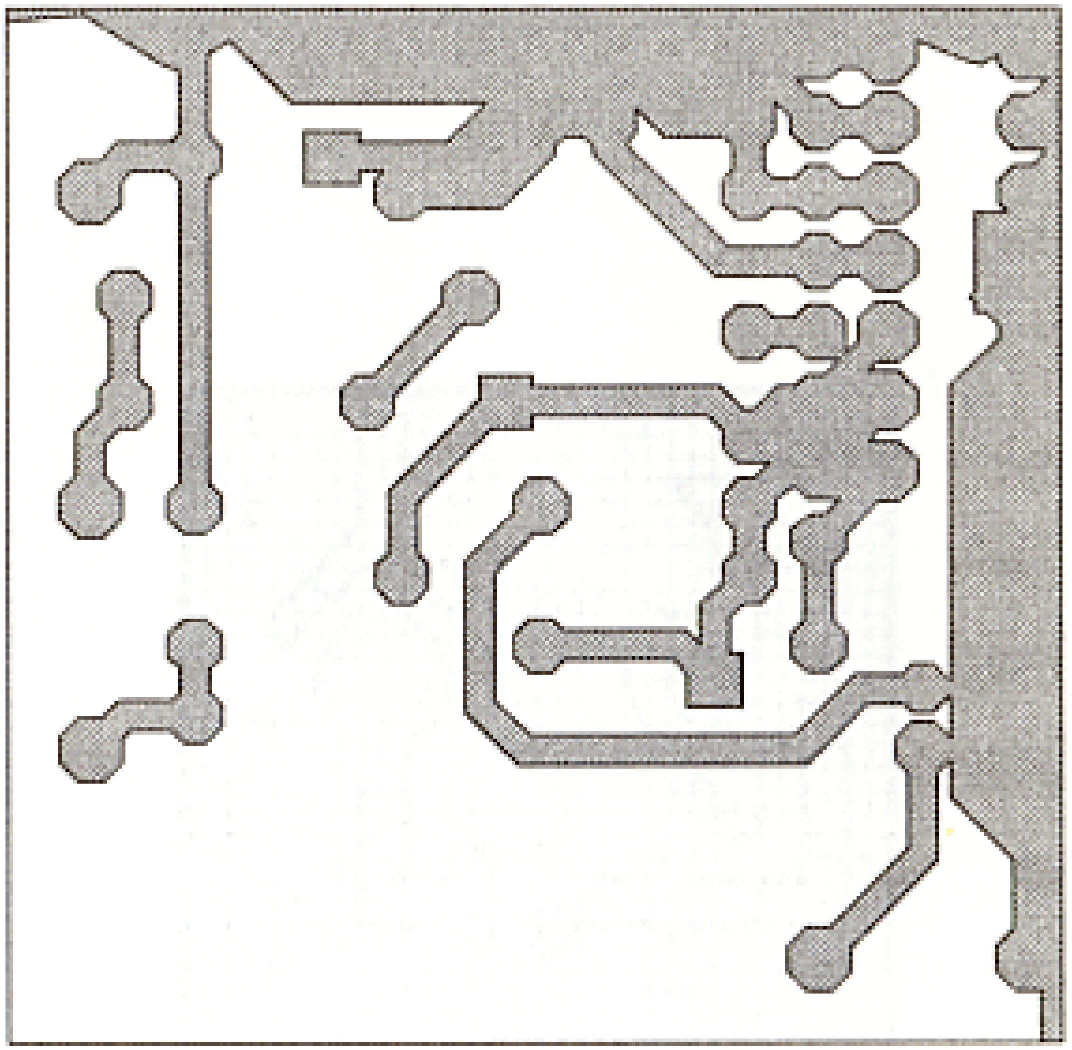
- Hitzeverteilung ist in Werkstoffen unterschiedlich und schwierig zu berechnen, hier mit Approximation mittels *finite element* Methode. Dazu

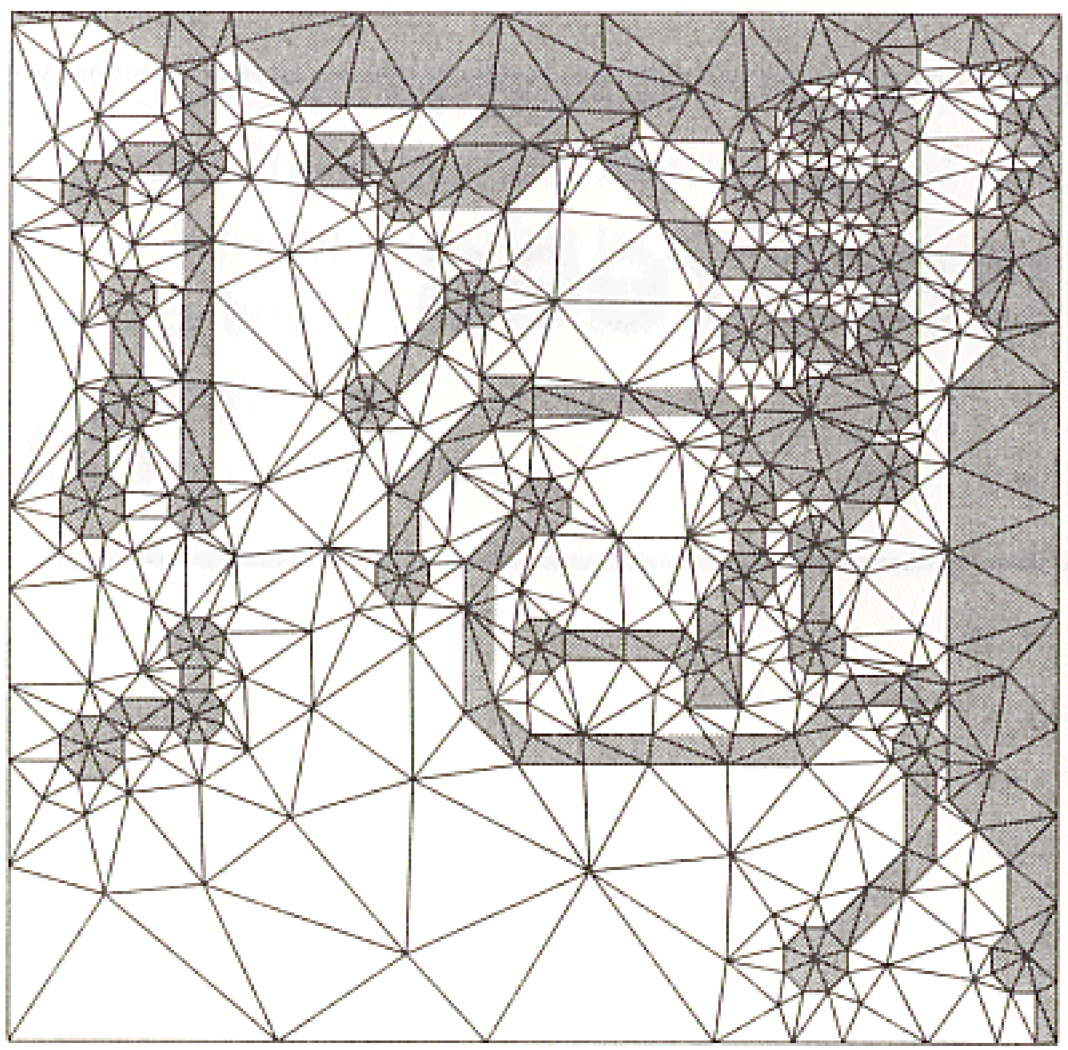
- Fläche in kleine Dreiecke und Vierecke (*quadrilateral* = Vierseit). Man nimmt die Wärmeausstrahlung aller Bausteinelemente an und die Beeinflussung der Nachbarzellen. Die Berechnung des großen Gleichungssystems hängt von der Güte des ***mesh*** (Maschennetzwerks) ab:
  je feiner umso genauer **aber dann** **Rechnung extrem aufwendig!**

- **Also:** dort feines *mesh*, wo es nötig ist, sonst so einfach wie möglich.

- Fein muss es bei Wechsel der Werkstoffe sein, sonst so große Winkel wie möglich.

domain of mesh *triangular mesh*





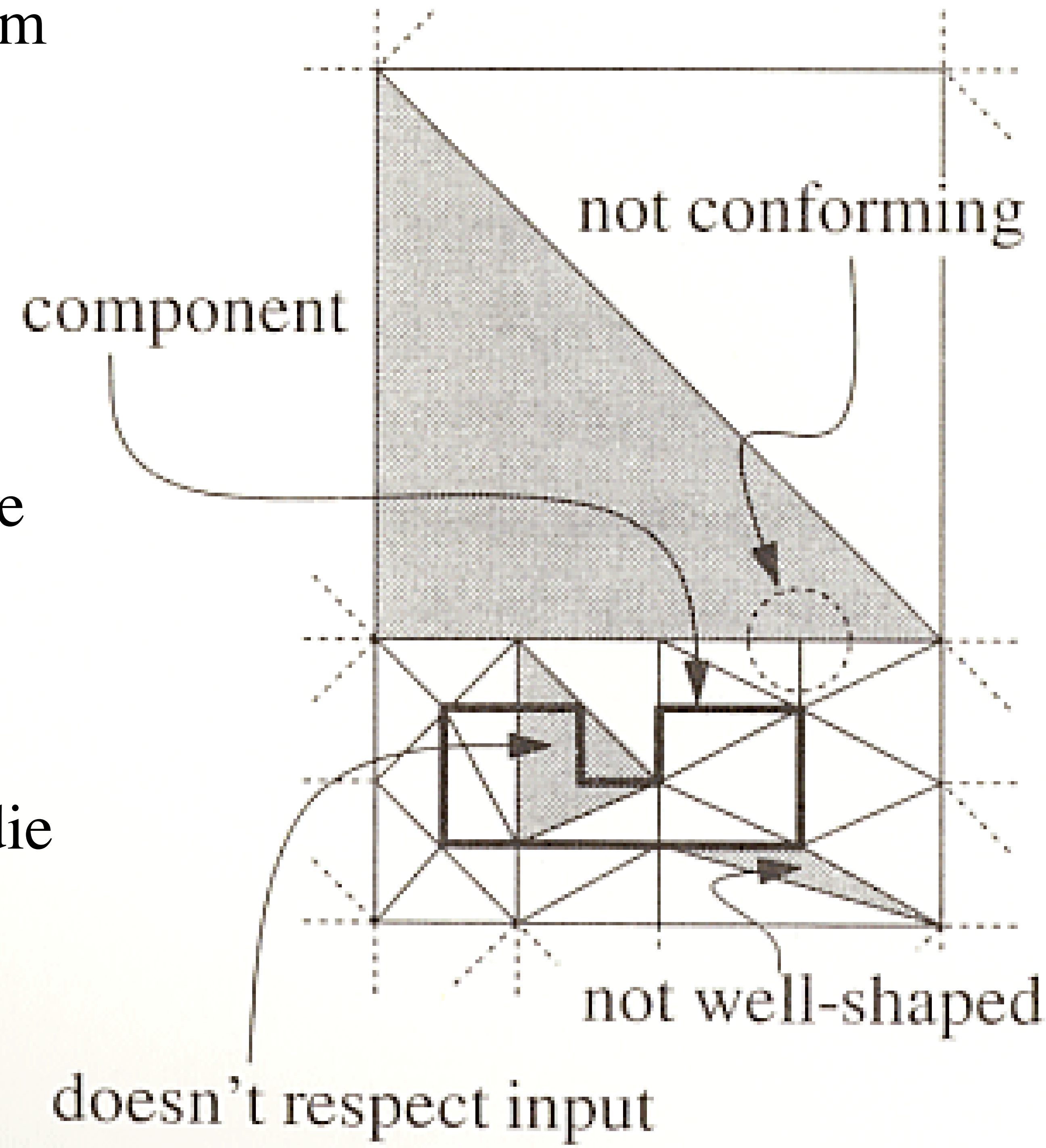
Wichtige Eigenschaften eines *triangular-mesh*:

- Es muss konform (*conforming*) sein: kein Dreieck darf mit einer Ecke einem anderen in die Seite stoßen,

- das *mesh* muss die Eingabe respektieren: alle Kanten der Komponenten müssen in der Vereinigung aller Kanten der Dreiecke vorkommen,

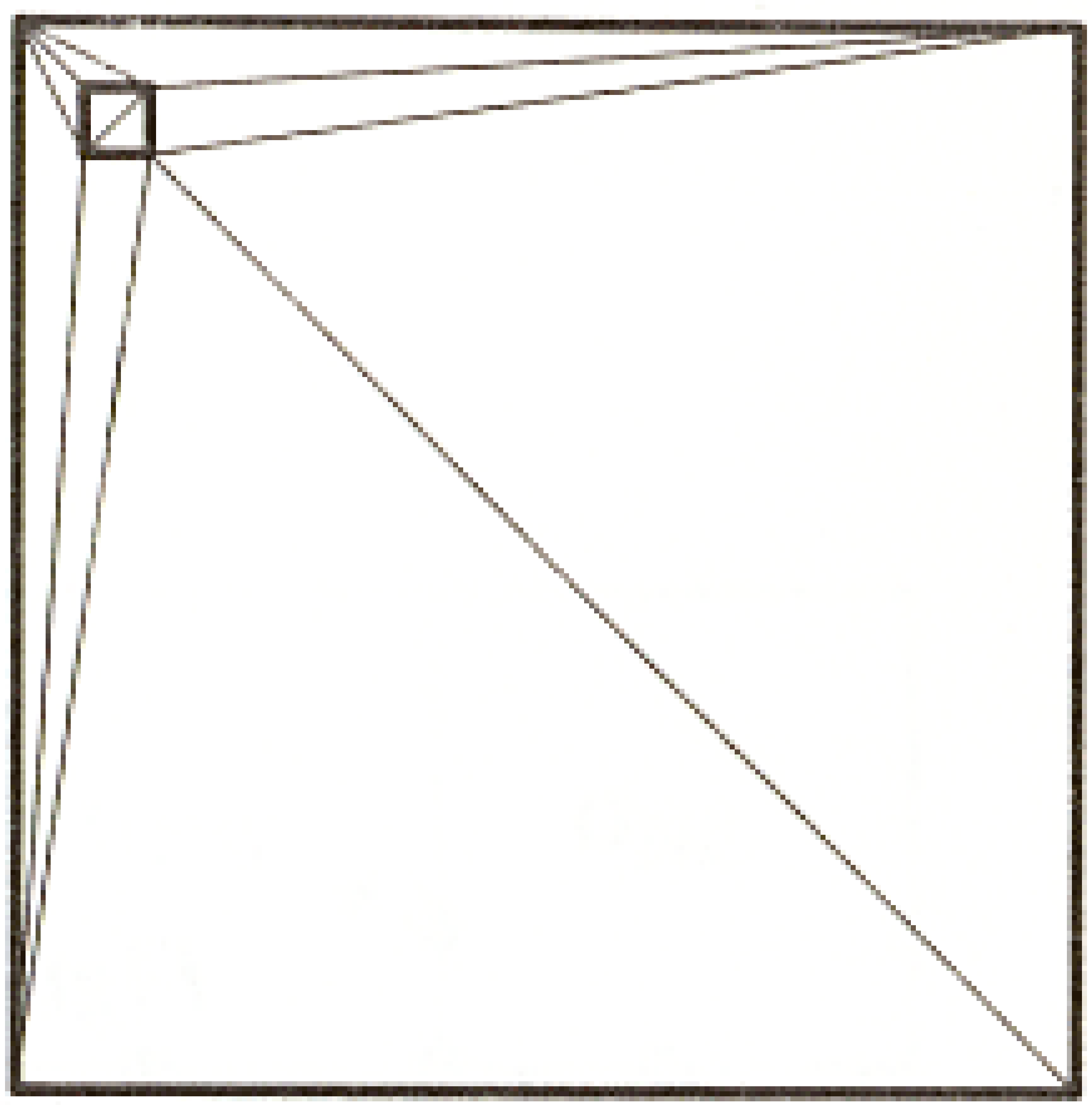
- die *mesh*-Dreiecke sollen weder zu kleine noch zu große Winkel haben: die Winkel sollen zwischen 45° und 90° betragen.

- das *mesh* sollte nicht uniform sein: nahe der Kanten von Komponenten fein und bei wachsendem Abstand gröber.

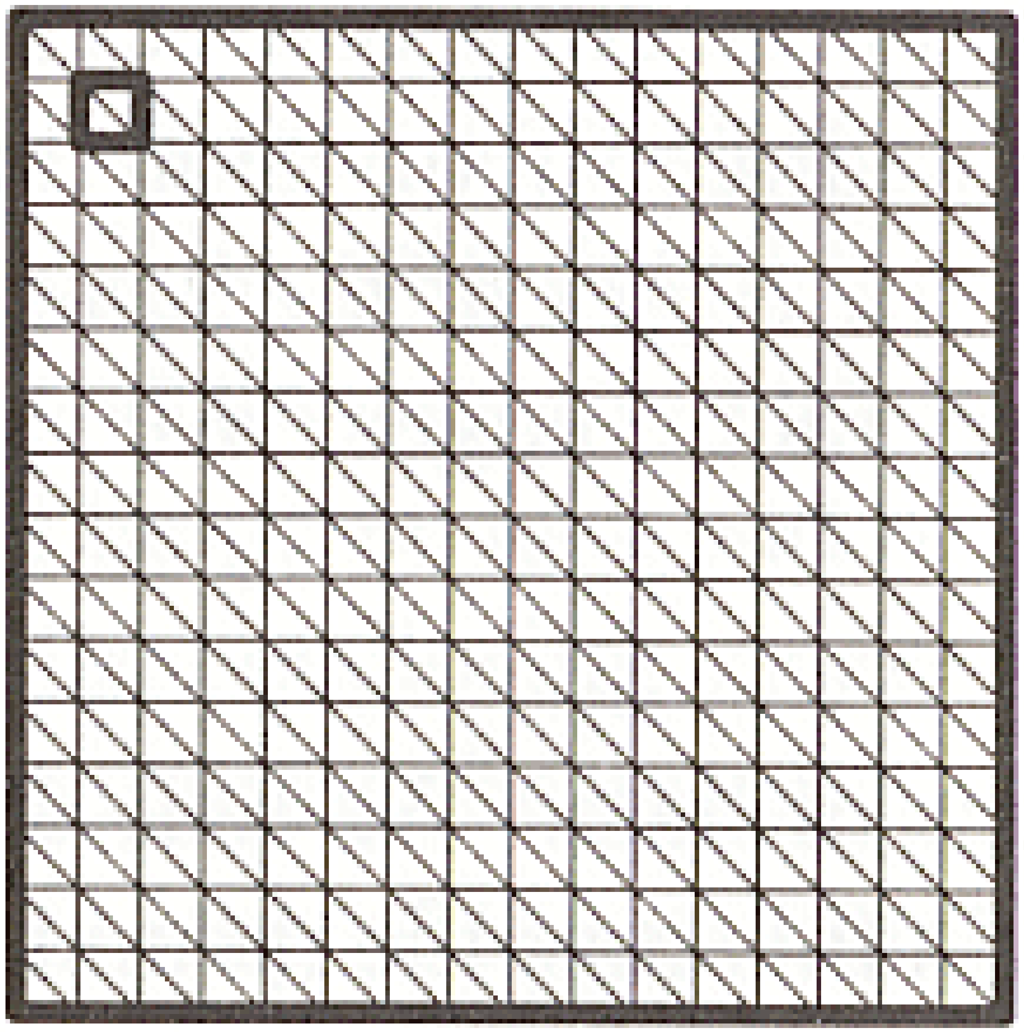


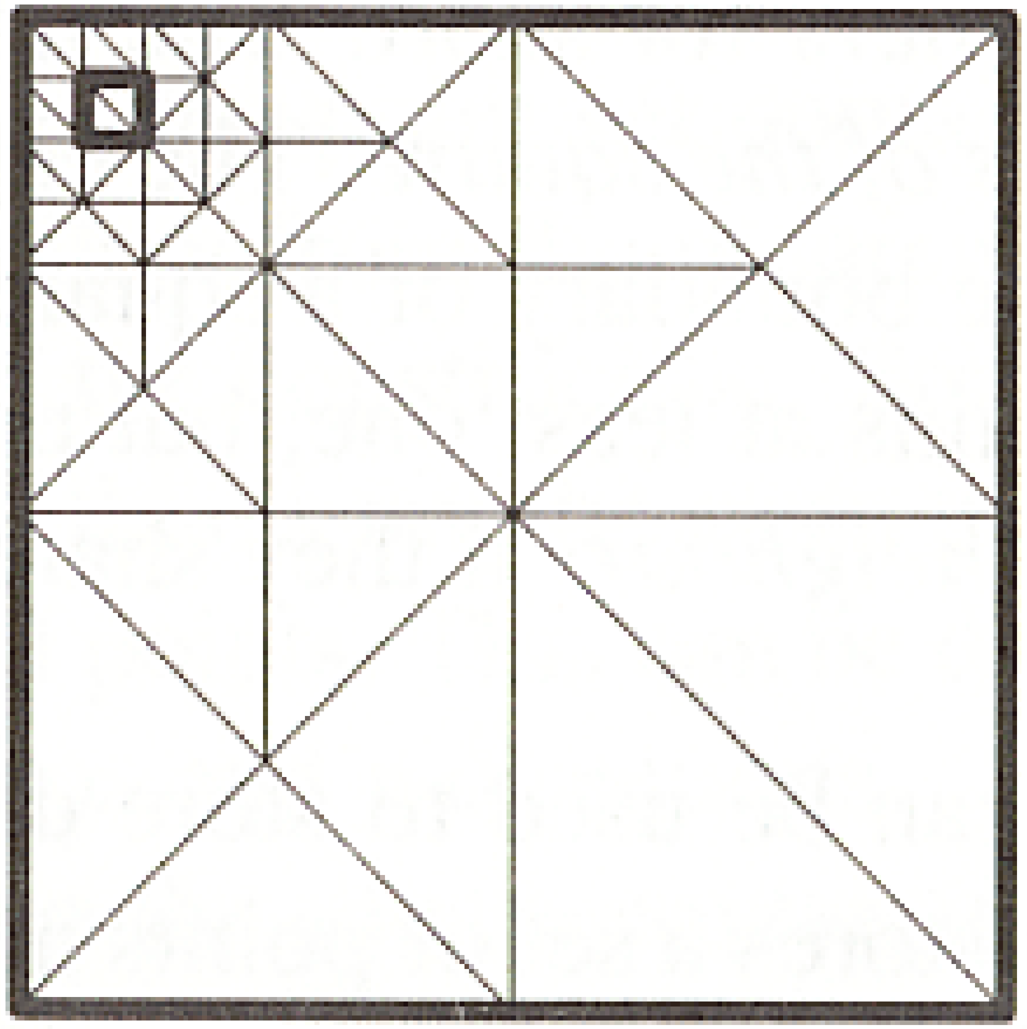
unterschiedliche *triangular-meshes*

Wenn man nun glaubt, die Delaunay-Triangulation erfülle dies, wenn die Ecken der Komponenten die zu verbindenden Punkte sind, betrachte folgende Delaunay-Triangulation:



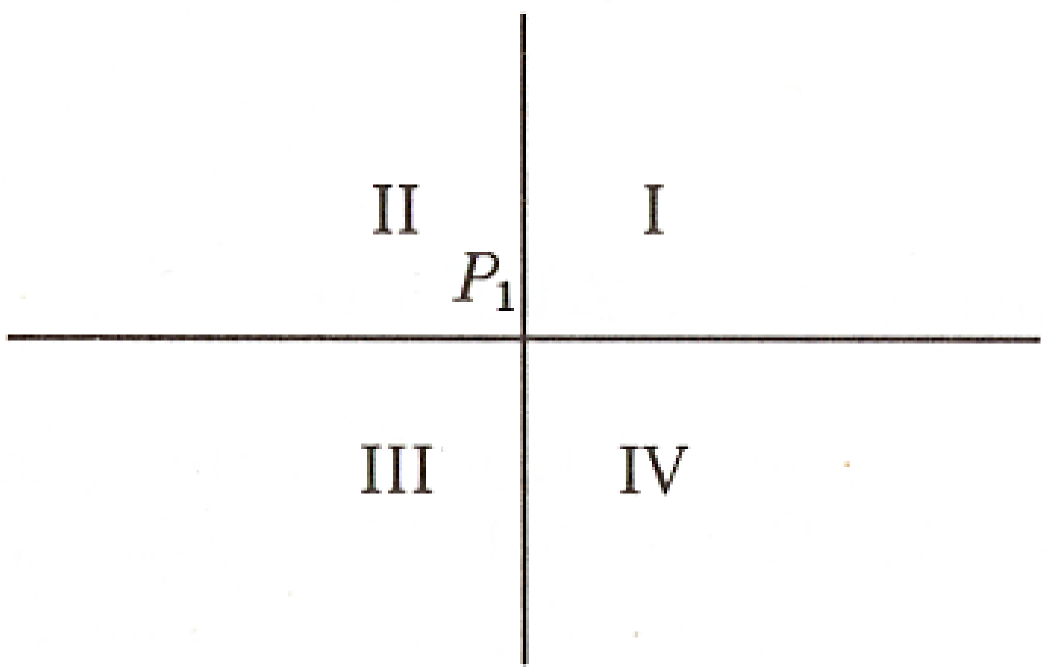
uniformes *mesh* | nicht uniformes *mesh*

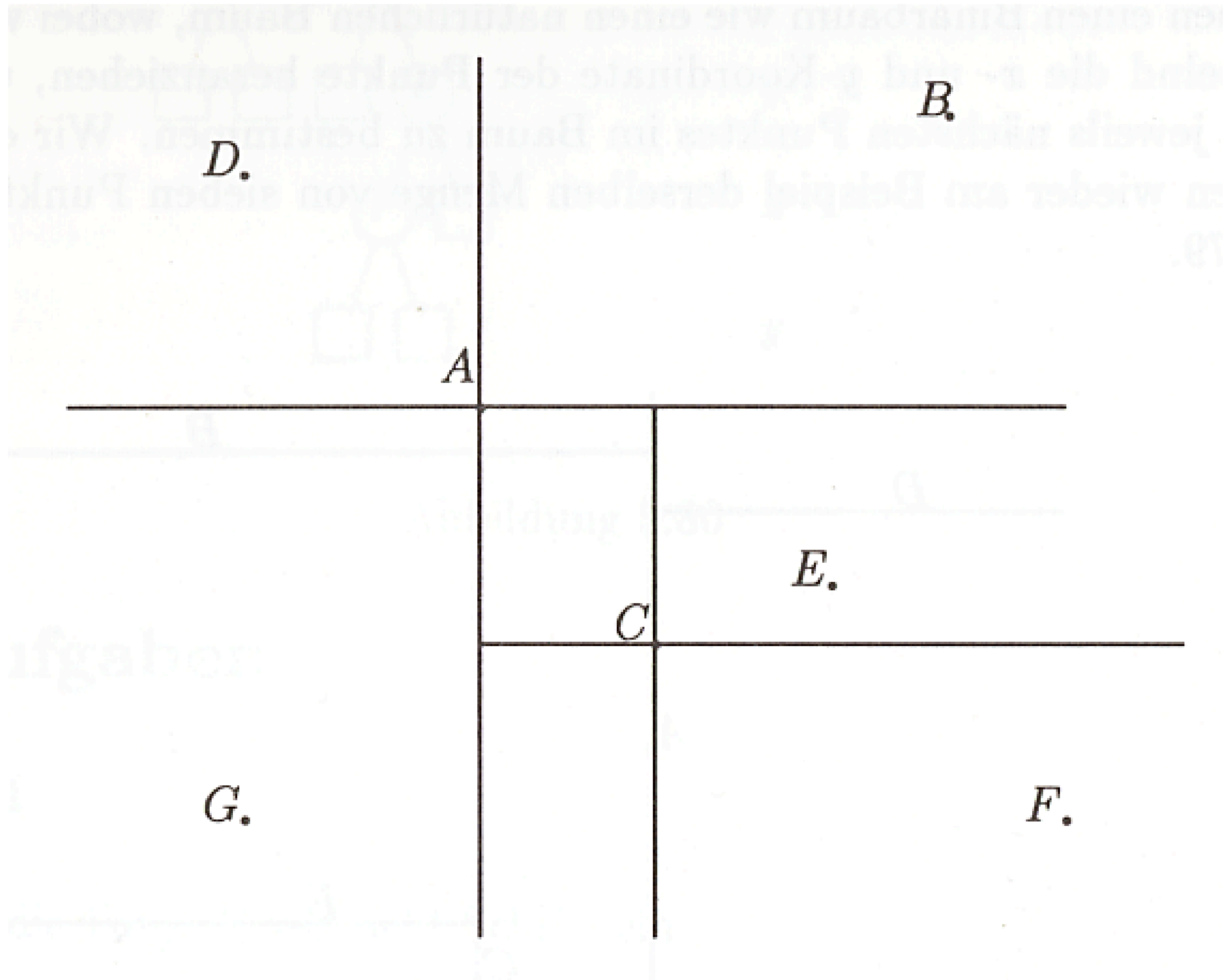




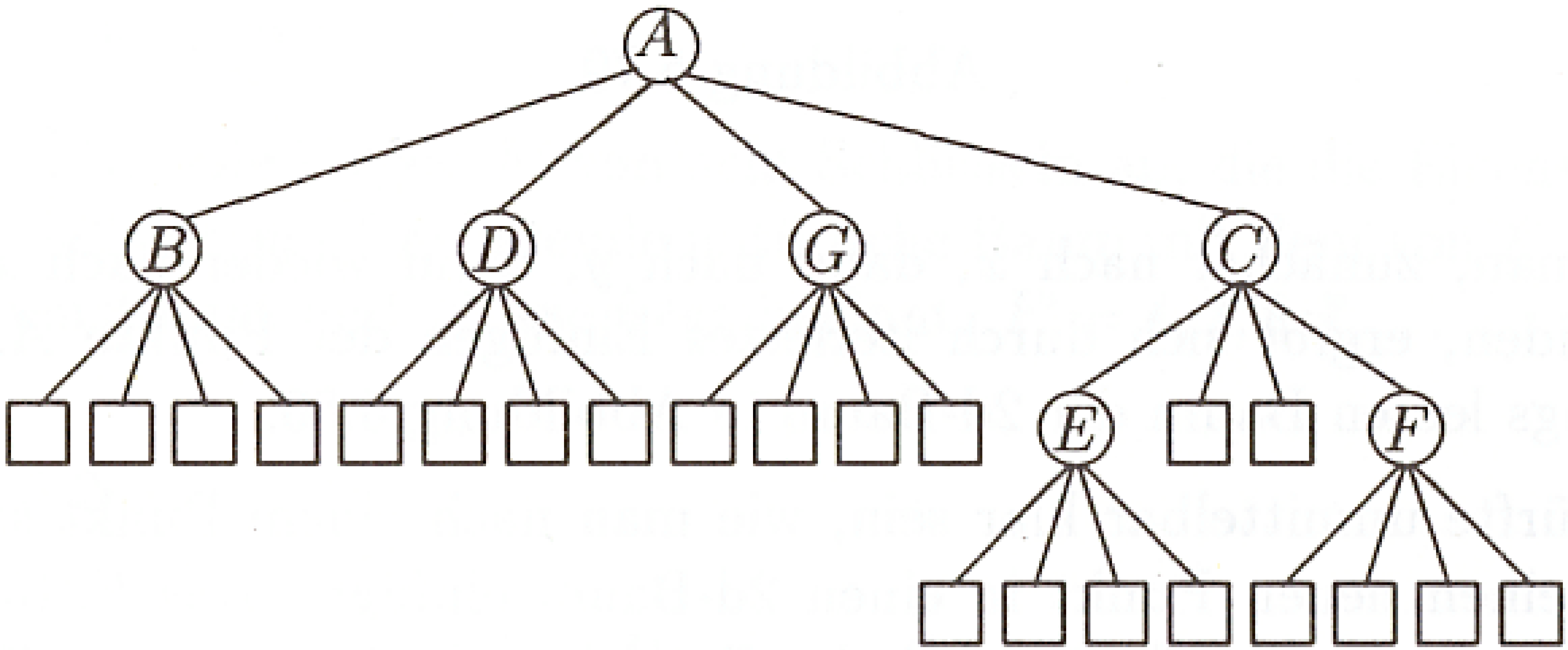
Das uniforme *mesh* hat 512, das nicht uniforme *mesh* hat 52 Dreiecke!

Quadtrees zur *mesh* Erzeugung praktisch

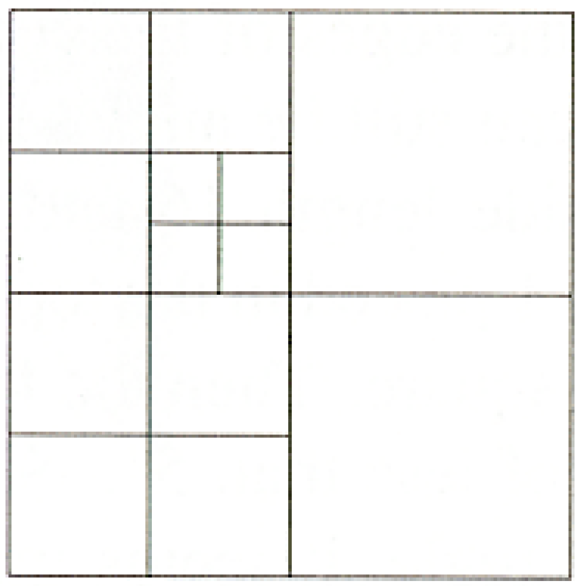


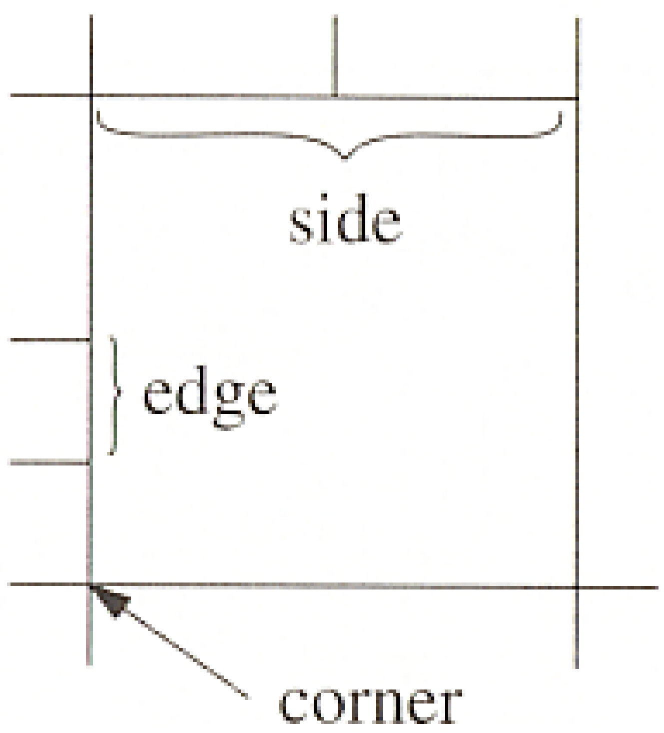


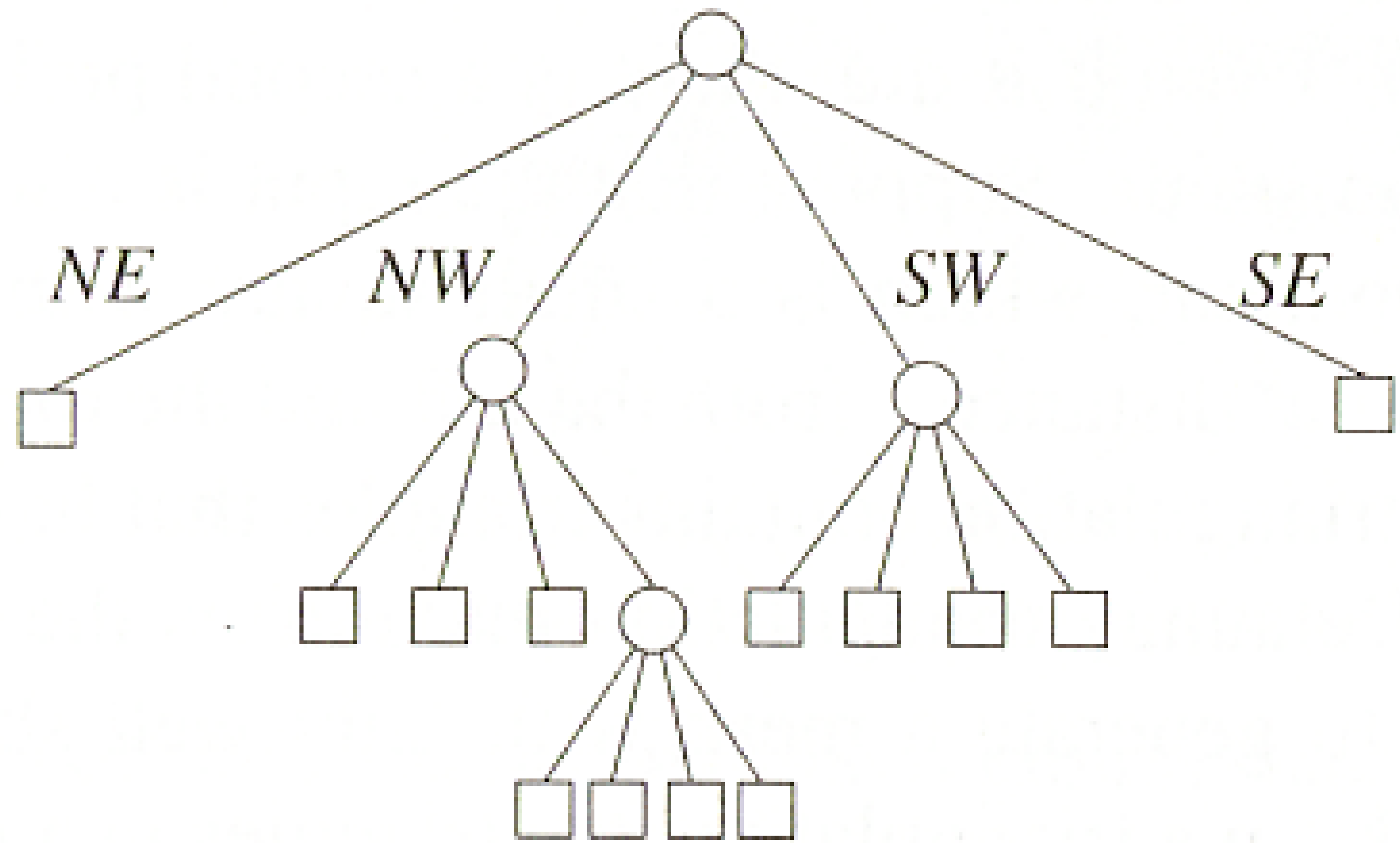
ein Quadranten-Baum (*quadtree*)



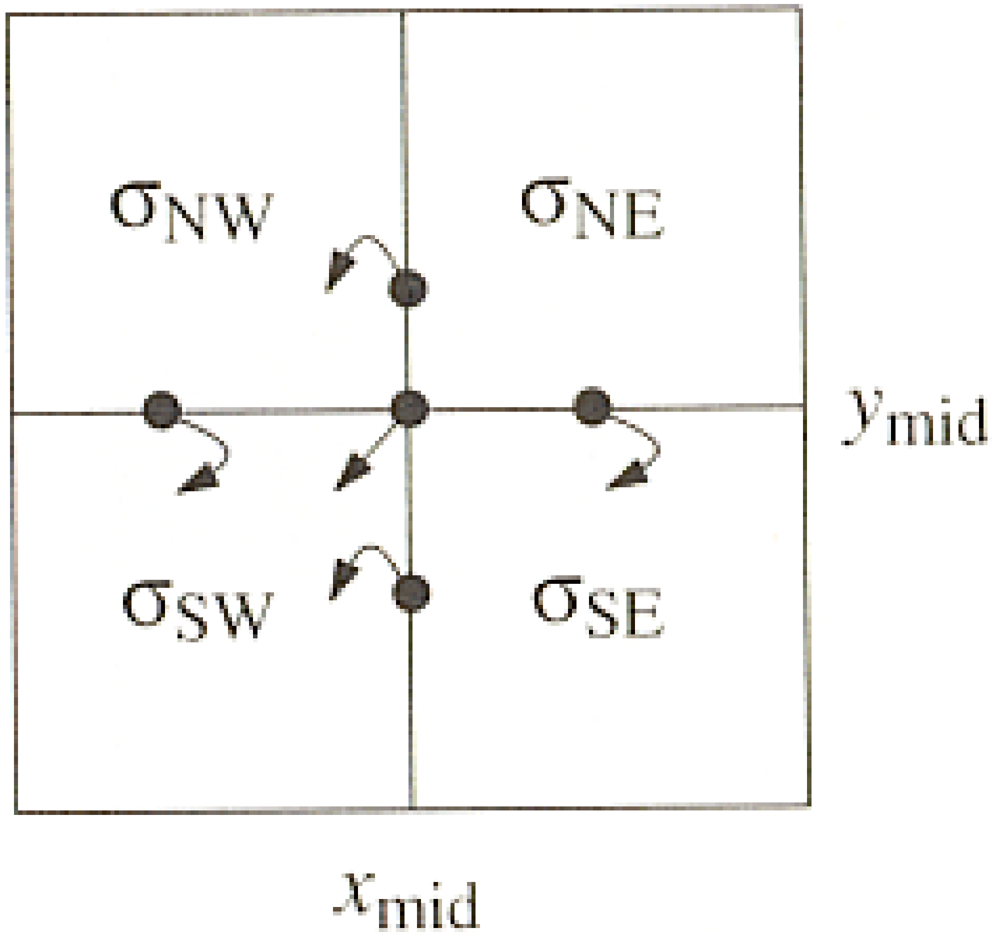
andere Darstellungen von Quadranten-Bäumen (*quadtrees*)

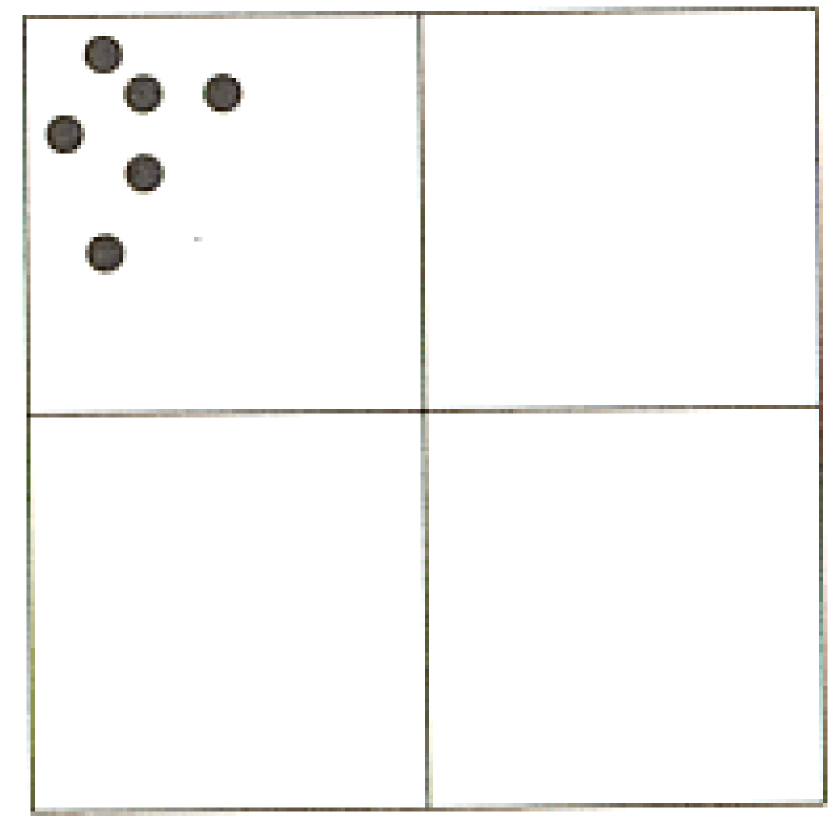






Die Einteilung der Wurzel —> Nachfolger-Knoten



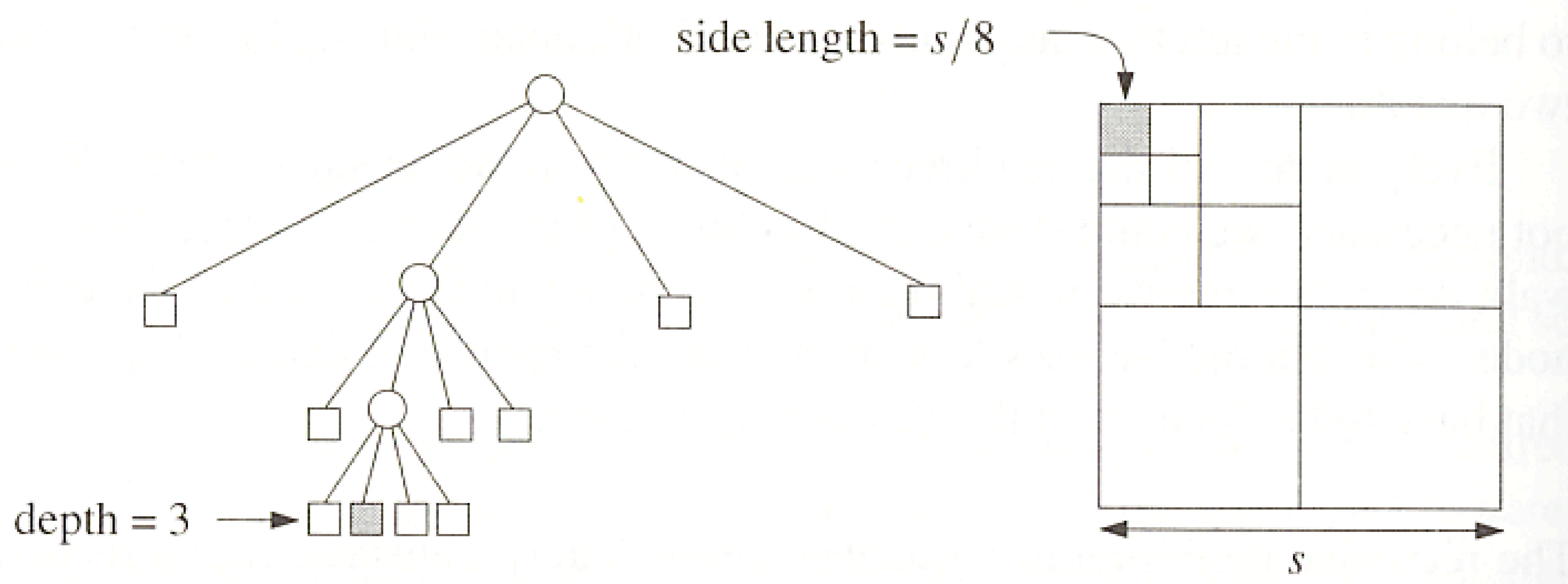


Ein Quadranten-Baum kann unausgeglichen sein. Seine Größe und Tiefe ist keine Funktion der Punktezahl. Es gilt:

Satz

Die Tiefe eines Quadranten-Baums zu einer Punktemenge P der Ebene ist maximal $\ell og(s/c) + 3/2$,
wobei c kleinster Punkteabstand in P ist und s die Seitenlänge des P enthaltenden Quadrates.

Zuordnung von Orten und Knoten im Quadranten-Baum



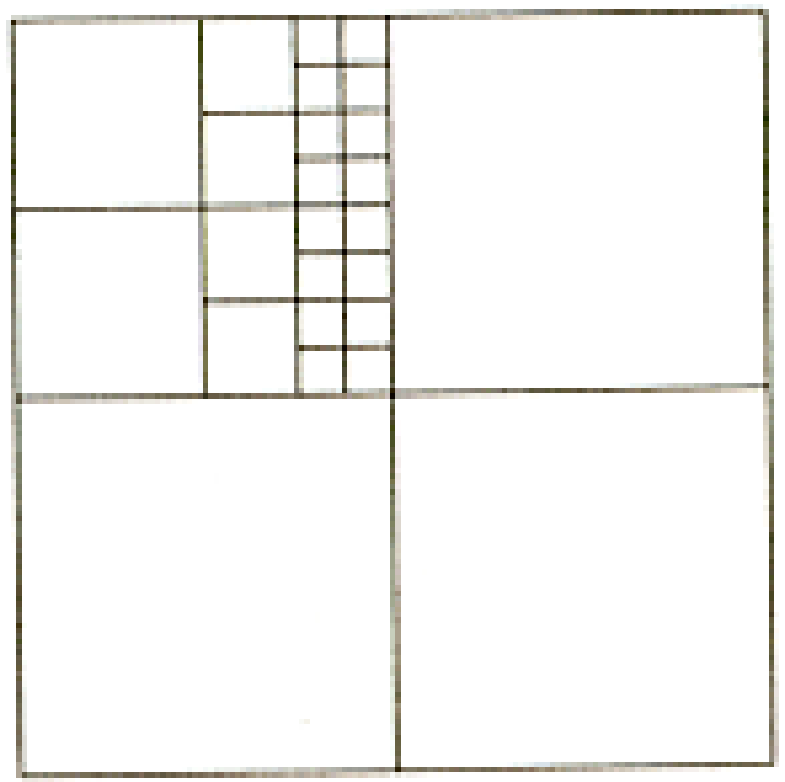
Satz

Ein Quadranten-Baum der Tiefe d der n Punkte speichert besitzt $O((d+1)n)$ Knoten und kann in $O((d+1)n)$ Zeit konstruiert werden.

Satz

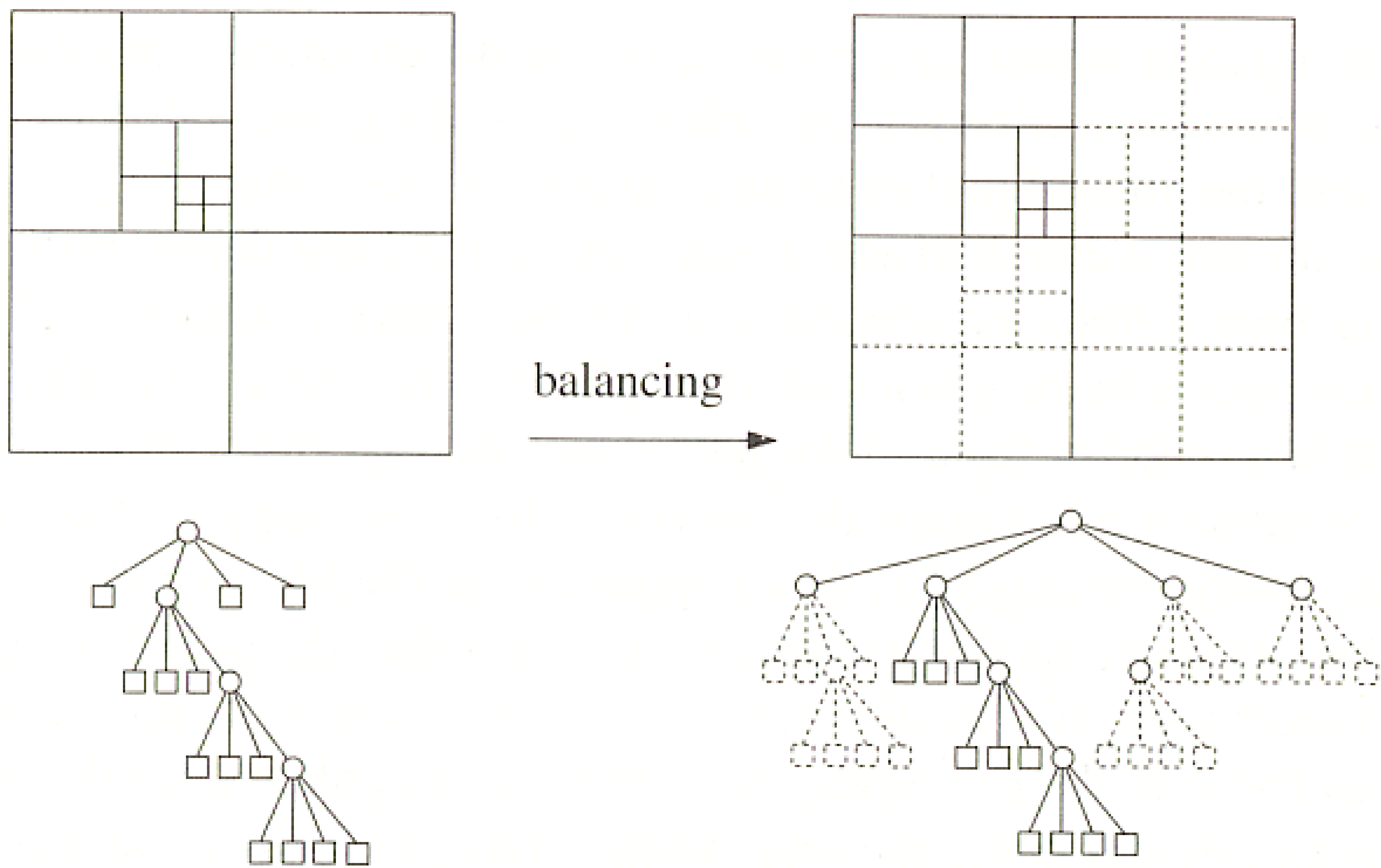
In einem Quadranten-Baum der Tiefe d kann der Nachbar eines Knotens in einer bestimmten Richtung in $O(d+1)$ Zeit gefunden werden.

Wegen der möglichen Unausgewogenheit der Quadranten-Bäume betrachtet man balanzierte Quadranten-Bäume!



balanzierter Quadrandten-Baum

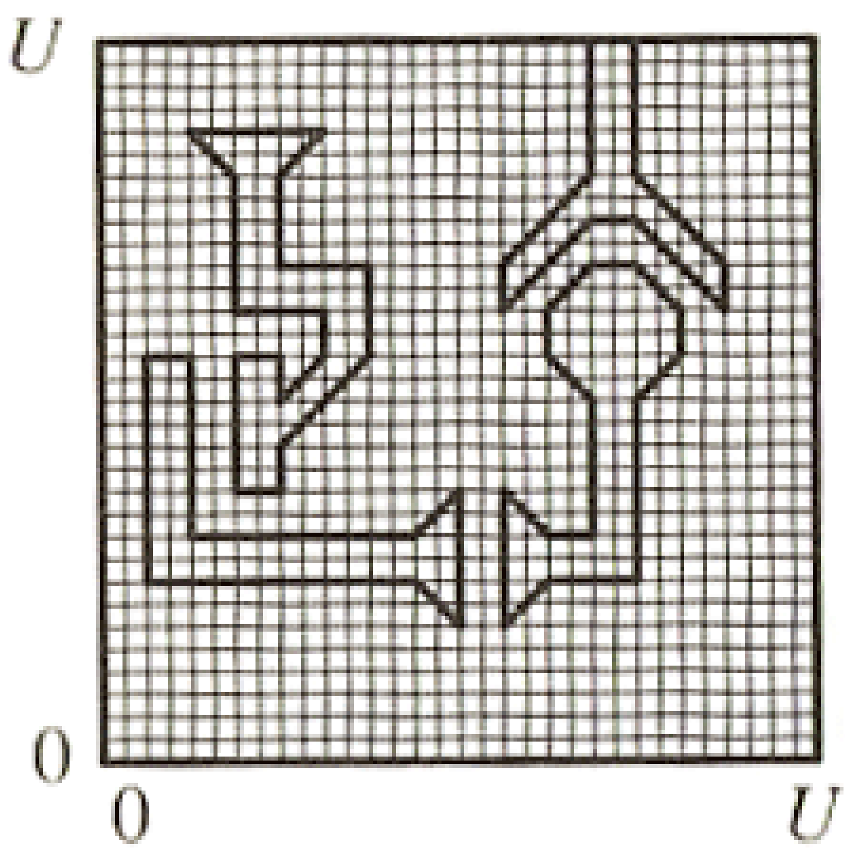
Eine Quadranten-Teilung ist balanziert, wenn sich je zwei benachbarte Quadrate in der Größe höchstens um den Faktor 2 unterscheiden!

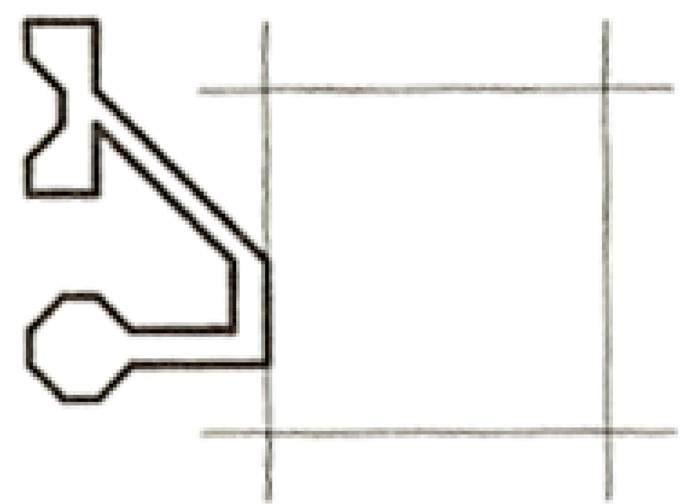


Konstruktionskomplexität des balanzierten Quadranten-Baums

Satz
Sei t ein Quadranten-Baum mit m Knoten und Tiefe d, dann hat die balanzierte Version ebenfalls m Knoten und kann in $O((d+1)m)$ Zeit konstruiert werden.

Sei Rechteck $[0:U]\times[0:U]$ gegeben mit Polygonen mit Winkeln $0^\circ,\ 45^\circ,\ 90^\circ,\ 135^\circ$ zur x-Achse. Quadranten-Teilung Verfeinern und Teilung eines Recht- oder Dreiecks beenden, wenn es weniger als zwei Punkte enthält.





Theorem:
Sei S eine Menge von disjunkten (Polygon-)Komponenten im Rechteck $[0\!:\!U]\times[0\!:\!U]$ (mit den beschriebenen Einschränkungen), dann gibt es nicht-uniformes triangulares *mesh*, das conform ist, die Eingabe respektiert und $O(p(S)\cdot\ell og\ U)$ richtig gewinkelte Dreiecke besitzt.
Hierbei ist $p(S)$ die Summe der Randlängen (Umfänge, *perimeter*) der Komponenten.
Dies *mesh* kann $O(p(S)\cdot\ell og^2\ U)$ Zeit konstruiert werden.

In höheren Dimensionen heißt das Pendant zum *quadtree* dann *octree*.
1974 wurden *quadtrees* von Finkel und Bentley erfunden und seither viel benutzt, obwohl zur Bereichssuche bessere Datenstrukturen (*range trees*) verwendet werden! Die Beweise in [de Berg et. al.] sind eher informal und formulieren die jeweils einigermaßen offensichtlichen, rekursiven Verfahren.