OE-Vorlesung 2018
Einführung in Petrinetze

Dr. Daniel Moldt
Moldt@Informatik.Uni-Hamburg.de
Folien: Dr. Frank Heitmann

Fachbereich Informatik
MIN-Fakultät
Universität Hamburg

Informatik-OE 2018

Warum Modellierung?

Frage
Warum modellieren wir überhaupt?

- Gedanken machen, Dinge konkretisieren
- Kommunikation
- Schon am Modell Eigenschaften überprüfen

Was macht man in der Informatikl?

Modellieren

Was ist ein Modell?

Stachowiak (1973): Allgemeine Modelltheorie
Ein Modell hat drei Hauptmerkmale:
- Abbildung $\longrightarrow$ Analogie
- Verkürzung $\longrightarrow$ Abstraktion
- Pragmatismus $\longrightarrow$ Nützlichkeit

Wer spricht denn da?

Daniel Moldt

- Praktikum Industrie
- Studium: UHH (Vordiplom Informatik/BWL)
- Studium: Birmingham, GB, (BSc Computer Science/Software Engnineering)
- Freiberufler: Informatik
- Studium: UHH (Diplom Informatik/BWL)
- Studium: UHH (Promotion Informatik)
- Wimi: UHH

Und warum Petrinetze?

Das Mittel der Wahl

Petrinetze sind eine *Modellierungstechnik*.

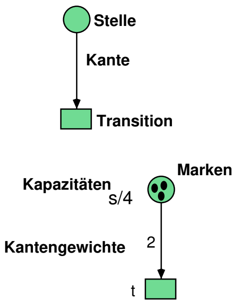
- Mit Petrinetzen ist *Nebenläufigkeit* modellierbar
- Petrinetze sind graphisch
  - ⇒ Gut zu verstehen
- Petrinetze haben einen formalen Unterbau
  - ⇒ Exaktheit
  - ⇒ Eigenschaften formal (und automatisch) überprüfbar

Anmerkung

Im letzten Punkt steckt, warum eine (mathematische) *Theorie* sinnvoll ist/sein kann. Dinge sind *exakt* und *eindeutig* ausdrückbar. Dinge können exakt *nachgewiesen* oder *widerlegt* werden.

Petrinetze - Grundlagen

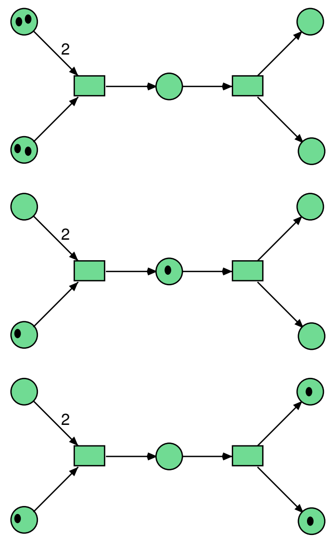
- **Stellen** (Plätze) als passive Komponenten
- **Transitionen** als aktive Komponenten
- gerichtete **Kanten** zwischen Stellen und Transitionen (und andersherum)



- Kante von Stelle s zu Transition t: s ist *Eingangs*stelle von t.
- Kante von Transition t zu Stelle s: s ist *Ausgangs*stelle von t.

Petrinetze: Dynamik

Marken auf den Stellen ermöglichen den Transitionen zu **schalten**:



Petrinetze: Dynamik

Definition (Aktiviertheit)

Eine Transition ist genau dann **aktiviert**, wenn

1. alle Eingangsstellen ausreichend Marken beinhalten
2. und die Kapazität jeder Ausgangsstellen ausreicht, um entsprechend viele zusätzliche Marken aufzunehmen.

Definition (Schalten)

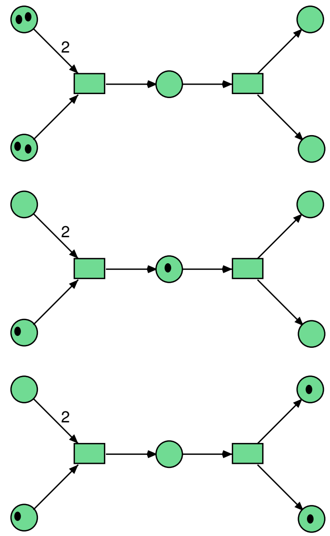
Ist eine Transition aktiviert, so *kann* sie **schalten**. Dabei

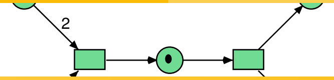
1. werden von allen Eingangsstellen Marken entfernt und
2. zu allen Ausgangsstellen Marken gelegt.

Dies geschieht entsprechend der Kantengewichtung.

Petrinetze: Dynamik

Marken auf den Stellen ermöglichen den Transitionen zu **schalten**:





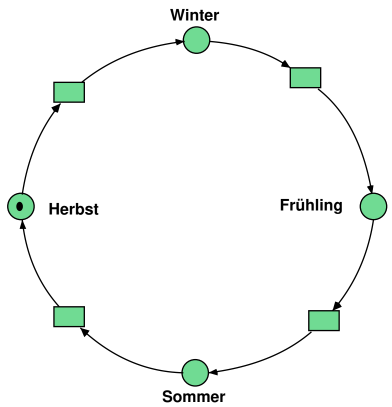
Zwischenfazit

- Statische Struktur:
  - Stellen (Kreise)
  - Transitionen (Vierecke)
  - Kanten - gerichteter Pfeil
    - von Stelle zu Transition oder
    - von Transition zu Stelle
  - Kantengewichte
  - Kapazitäten
  - Marken auf den Stellen
- Dynamik:
  - Transitionen können aktiviert sein
  - aktivierte Transitionen können schalten

Petrinetze: Beispiel

Einfaches Modell der vier Jahreszeiten:

- Modellierung eines dynamischen Systems als S/T-Netz
- Marke als Zustandsmarker



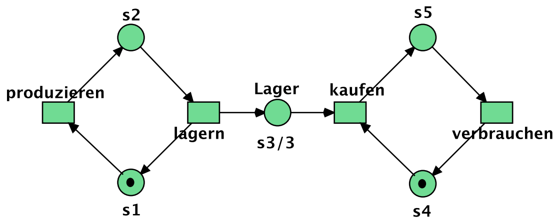
Besonderheiten dieses einfachen Systems:

- Genau eine Marke im Netz (**Invariante**)
- Netz stellt **Kausalitäten** dar
- Transitionen schalten **sequentiell**

Nicht alle "Systeme" haben diese Eigenschaften.

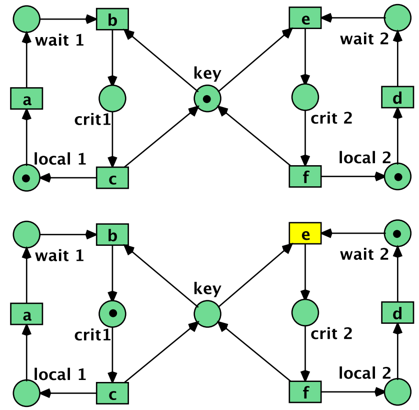
Problemstellung: Producer-Consumer

Ein *Prozess* **produziert** eine Ressource.
Ein (anderer) *Prozess* **konsumiert** eine Ressource.



Problemstellung: Wechselseitiger Ausschluss

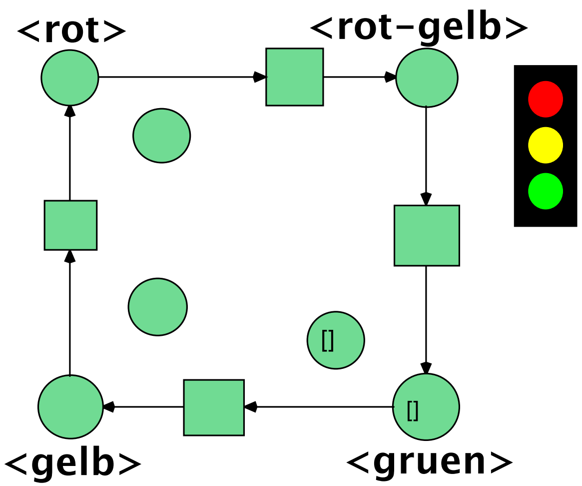
Zwei Prozesse, die in einem *kritischen Bereich* eine Ressource (alleine!) nutzen wollen.



Petrinetze: Beispiel

Ampel-Beispiel: Verschiedene Lösungen

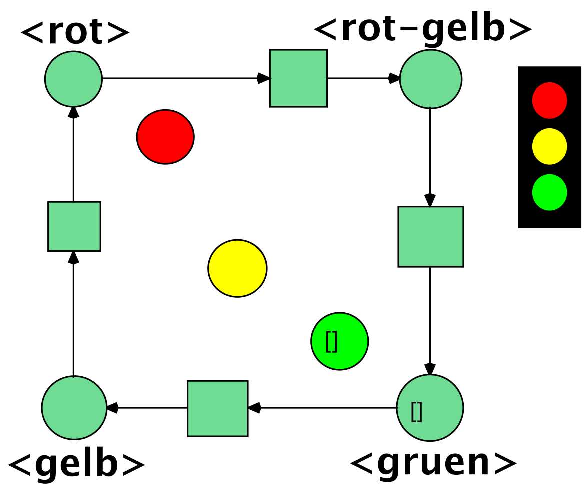
- Modellierung einer einfachen Ampel
- erste Idee



Petrinetze: Beispiel

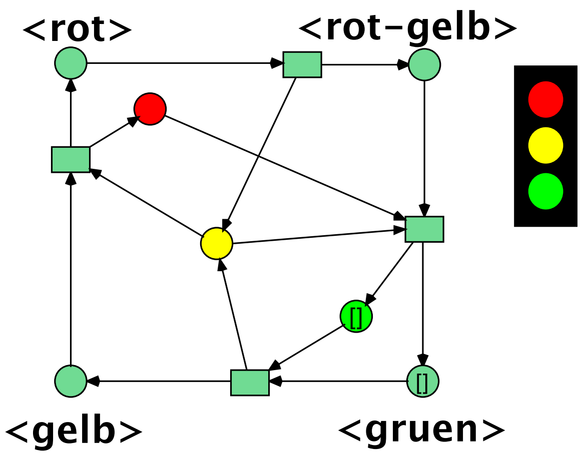
Ampel-Beispiel: Verschiedene Lösungen

- Modellierung einer einfachen Ampel
- Ampelbezug



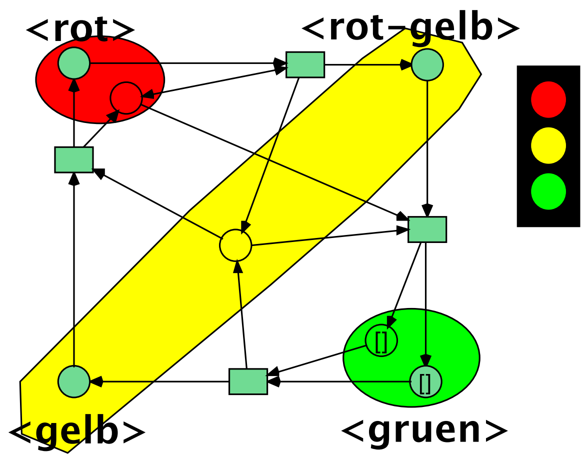
Ampel-Beispiel: Verschiedene Lösungen

- Modellierung einer einfachen Ampel
- Lösung



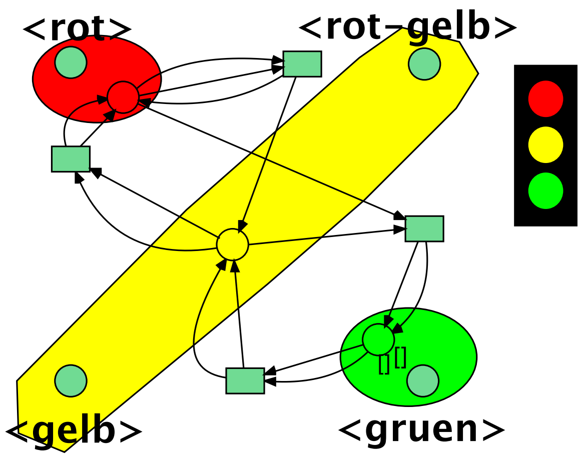
Ampel-Beispiel: Verschiedene Lösungen

- Modellierung einer einfachen Ampel
- Lösung mit Vergröberung



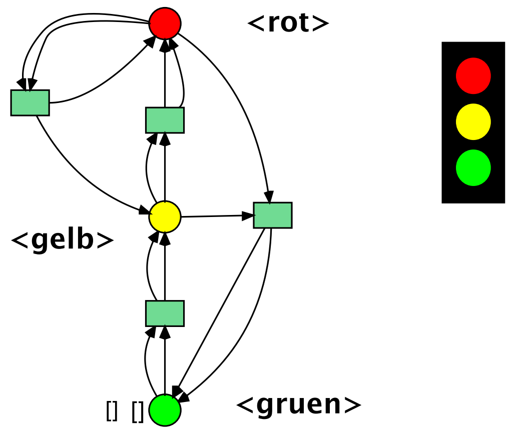
Ampel-Beispiel: Verschiedene Lösungen

- Modellierung einer einfachen Ampel
- Lösung mit nur drei Stellen



Ampel-Beispiel: Verschiedene Lösungen

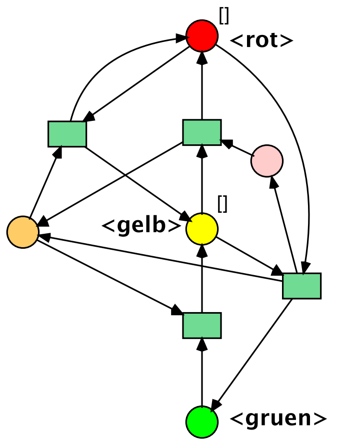
- Modellierung einer einfachen Ampel
- Lösung mit nur drei Stellen anders angeordnet

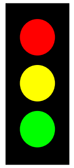


Petrinetze: Beispiel

Ampel-Beispiel: Verschiedene Lösungen

- Modellierung einer einfachen Ampel
- Lösung mit komplementärer Stelle (siehe Kapazitäten)

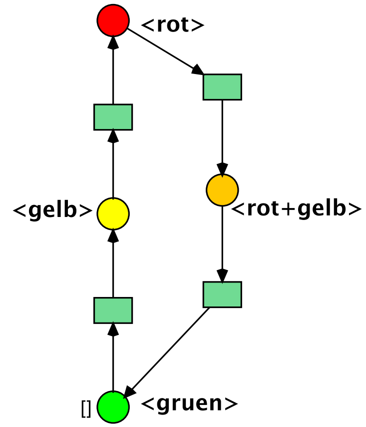


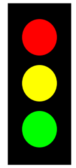


Petrinetze: Beispiel

Ampel-Beispiel: Verschiedene Lösungen

- Modellierung einer einfachen Ampel
- Lösung als endlicher Automat; erfordert andere technische Unterstützung

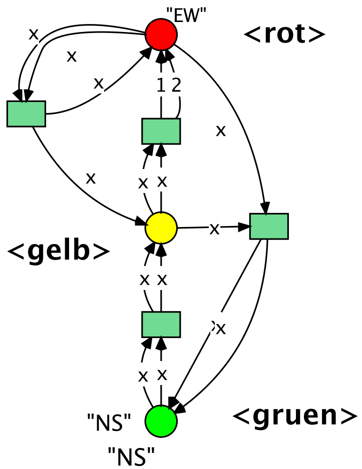


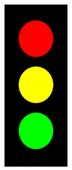


Petrinetze: Beispiel

Ampel-Beispiel: Verschiedene Lösungen

- Modellierung zweier Ampeln für eine Kreuzung
- Lösung für eine Kreuzung mit zwei Richtungen (NS, EW) als gefärbtes Netz





Grundlagen: Mengenlehre

Notation

- Eine Menge ist eine Ansammlung von Elementen z.B. $M_1 = \{1, 2, 3\}$ und $M_2 = \{2, \Box\}$
- Enthaltensein eines Elementes: $1 \in M_1$, $1 \notin M_2$
- Teilmenge: $\{1, 2\} \subseteq M_1$, $M_1 \not\subseteq M_2$, $M_2 \not\subseteq M_1$
- Vereinigung: $M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 3, \Box\}$
- Schnitt: $M_1 \cap M_2 = \{2\}$
- Kartesisches Produkt: $M_1 \times M_2 = \{(1, 2), (1, \Box), (2, 2), (2, \Box), (3, 2), (3, \Box)\}$

Grundlagen: Abbildungen

Notation

Eine Abbildung, notiert als

$$f : A \to B$$

weist einem Element $a \in A$ ein Element $f(a) \in B$ zu.

Beispiele:

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n \mapsto n^2$.
- $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $x \mapsto |x|$.
- $h : \{\square, \circ\} \to \{1, 2\}$ mit $h(\square) = h(\circ) = 1$.

P/T-Netz: Definition

Definition (P/T-Netz)

Ein *P/T-Netz* ist ein Tupel $N = (P, T, F, W, m_0)$ mit:

- Einer endlichen Menge P von **Plätzen** (Stellen)
- Einer endlichen Menge T von **Transitionen** mit $P \cap T = \emptyset$
- Einer **Flussrelation** $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
- Einer **Kantenbewertung** $W : (P \times T) \cup (T \times P) \to \mathbb{N}$ mit $W(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) \notin F$
- Einer **Anfangsmarkierung** $m_0 : P \to \mathbb{N}$

P/T-Netz: Kapazitäten

Erweiterung um Kapazitäten:

Definition (P/T-Netz mit Kapazitäten)

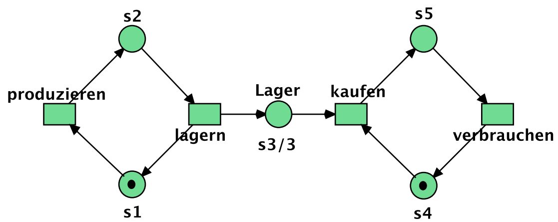
Ein *P/T-Netz mit Kapazitäten* ist ein Tupel $N = (P, T, F, W, K, m_0)$ mit:

- Einem *P/T-Netz* $N' = (P, T, F, W, m_0)$.
- Einer **Kapazitätsfunktion** $K : P \to \mathbb{N} \cup \{\omega\}$
- Zusätzlich gilt: $m_0(p) \leq K(p)$ für alle $p \in P$.

Anmerkung

Ist $K(p) = \omega$, so ist die Markenzahl auf Platz p nicht beschränkt.

Ein Beispiel



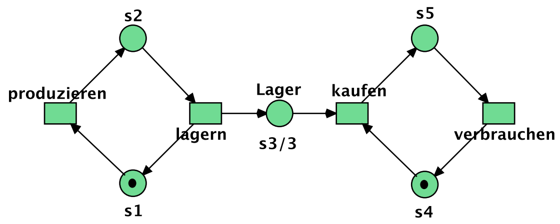
$$\begin{aligned} P &= \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\} \\ T &= \{lagern, produzieren, kaufen, verbrauchen\} \\ F &= \{(lagern, s_1), (s_1, produzieren), \ldots\} \end{aligned}$$

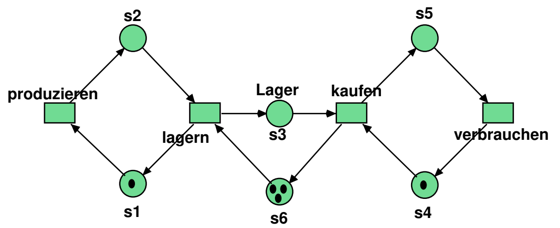
W ist gegeben durch $W(x, y) = 1$ für alle $(x, y) \in F$ und $W(x, y) = 0$ sonst.

m_0 ist gegeben durch $m(s_1) = m(s_4) = 1$ und $m(s_2) = m(s_3) = m(s_5) = 0$.

$K(s_1) = K(s_2) = K(s_4) = K(s_5) = \omega$.

Exkurs: Simulation von Kapazitäten





P/T-Netze mit und ohne Kapazitäten sind äquivalent!

Definition: Aktivierung

Gegeben:

- ein P/T-Netz $N = (P, T, F, W, m_0)$,
- eine Transition $t \in T$ und
- eine Markierung m_1.

Definition (Aktivierung)

Die Transition t ist **aktiviert** in m_1, falls für alle $p \in P$

$$m_1(p) \geq W(p, t)$$

gilt. Notation: $m_1 \xrightarrow{t}$

Definition: Aktivierung 2

Gegeben:

- ein P/T-Netz mit Kapazitäten $N = (P, T, F, W, K, m_0)$,
- eine Transition $t \in T$ und
- eine Markierung m_1.

Definition (Aktivierung (2))

Die Transition t ist **aktiviert** in m_1, falls für alle $p \in P$

$$m_1(p) \geq W(p, t)$$

gilt *und* für alle $p \in P$

$$m_1(p) - W(p, t) + W(t, p) \leq K(p)$$

gilt. Notation: $m_1 \xrightarrow{t}$

Definition: Schalten

Definition (Schalten)

Sei $N_1 = (P, T, F, W, K, m_0)$ ein P/T-Netz, $t \in T$ eine Transition und m_1, m_2 Markierungen. Die Transition t **schaltet** m_1 zu m_2, falls

1. t in m_1 aktiviert ist und
2. $\forall p \in P : m_2(p) = m_1(p) - W(p, t) + W(t, p)$ gilt.

Notation: $m_1 \xrightarrow{t} m_2$. m_2 heißt auch **Folgemarkierung**.

Anmerkung

Kapazitäten werden nicht besonders behandelt. Dies geschieht schon in der Definition der Aktivierbarkeit.

Definition: Schaltfolge

Eine **Schaltfolge** ist ein endliches Wort

$$w = t_1 t_2 t_3 \dots t_n$$

mit $t_i \in T$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Definition (Schaltfolge)

Schaltfolge w schaltet m zu m', falls

1. entweder $w = \lambda$ (leeres Wort mit $n = 0$) und $m = m'$
2. oder $w = (u \cdot t)$ für $u \in T^*$ und $t \in T$, so dass $m \xrightarrow{u} m_1$ und $m_1 \xrightarrow{t} m'$ für eine Markierung m_1 gilt.

Notation: $m \xrightarrow{w} m'$. Ist nur die *Existenz* der Schaltfolge wichtig, so notieren wir auch: $m \xrightarrow{*} m'$.

P/T-Netze: Eigenschaften

Definition (Wichtige Eigenschaften)

1. m ist *erreichbar*, wenn es eine Schaltfolge w gibt mit $m_0 \xrightarrow{w} m$. Die Menge aller erreichbaren Markierungen wird mit $R(N)$ bezeichnet.
2. $t \in T$ ist *aktivierbar*, wenn es eine erreichbare Markierung m gibt mit $m \xrightarrow{t}$.
3. $t \in T$ ist *tot*, wenn t nicht (mehr) aktivierbar ist.
4. $t \in T$ ist *lebendig*, wenn t immer wieder aktiviert werden kann, d.h. wenn es in jeder erreichbaren Markierung m eine Schaltfolge w gibt mit $m \xrightarrow{wt}$. Ein Netz ist lebendig, wenn alle Transitionen lebendig sind.

P/T-Netze: Eigenschaften 2

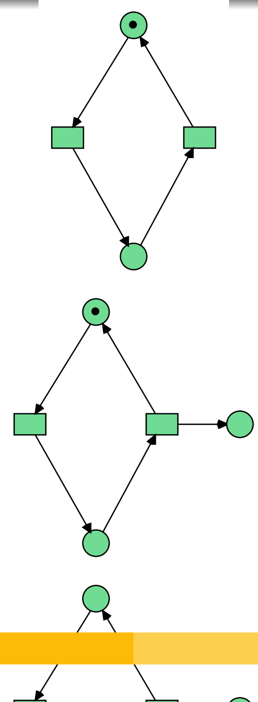
Definition (Wichtige Eigenschaften)

1. Ein Netz heißt *beschränkt*, wenn zu jedem Platz $p \in P$ eine natürliche Zahl n_p existiert, so dass in jeder erreichbaren Markierung nie mehr als n_p Marken auf p liegen. Ein Netz ist k*-beschränkt* oder k*-sicher*, wenn $n_p = k$ für jeden Platz $p \in P$.
2. Ein Netz ist *rücksetzbar*, wenn m_0 aus jeder erreichbaren Markierung heraus wieder erreichbar ist.

Zur Übung

Netze überlegen, die jeweils einige der Begriffe lebendig, beschränkt und rücksetzbar erfüllen, andere nicht (8 Möglichkeiten).

Ein Beispiel

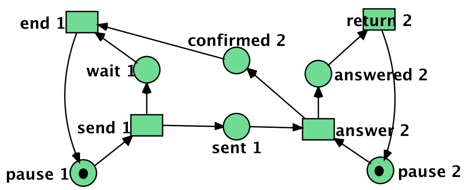


Der Crosstalk-Algortihmus

Der Crosstalk-Algorithmus. Das Setting:

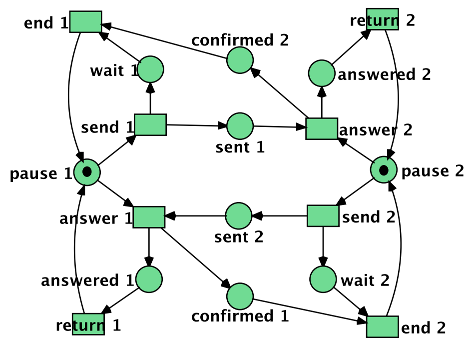
- Zwei Agenten kommunizieren über einen Kanal.
- Der Kanal ist nur bei *einer* Nachricht zuverlässig. Sonst kommt es zu *crosstalk* und die Nachrichten überschreiben sich.
- Der Algorithmus soll crosstalk nicht verhindern, *aber für die Agenten erkennbar machen*.
- Der Algorithmus arbeitet in Runden:
  - In einer Runde sendet entweder ein Agent eine Nachricht, die der andere korrekt empfängt, oder
  - beide Agenten erkennen crosstalk.

Lösungs(ansatz): Crosstalk-Algorithmus



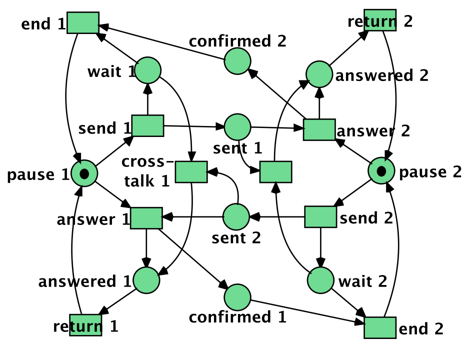
Senden mit Bestätigung.

Lösungs(ansatz): Crosstalk-Algorithmus



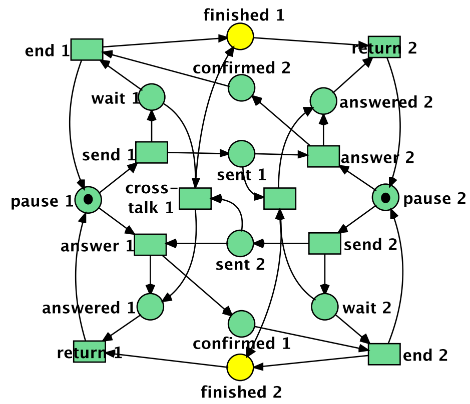
Wechselseitiges Senden mit Bestätigung.

Lösungs(ansatz): Crosstalk-Algorithmus



Crosstalk kann erkannt werden.

Lösungs(ansatz): Crosstalk-Algorithmus



Einführen einer zweiten Bestätigung.
Versehentliches Detektieren von Crosstalk durch nicht abgeholte Bestätigungen wird vermieden.

P/T-Netze: Eigenschaften prüfen

Der Sinn der Formalisierung:

- Eigenschaften sind **exakt ausdrückbar** und
- können formal (!) **nachgewiesen werden**.

Fehler sind weiterhin möglich! Aber die Zuversicht wächst!

Wiederholung und Zusammenfassung

- Petrinetze als graphisches Modell
- Petrinetze als mathematischer Formalismus
- Begriffe:
  - P/T-Netz, Platz, Transition, Kante, Kantengewicht, Kapazität, Startmarkierung
  - Aktiviert, Schalten, Schaltfolge, (Nach-)Folgemarkierung
  - Erreichbar, Aktivierbar, Tot, Lebendig
- Beispiele:
  - Producer-Consumer
  - Wechselseitiger Ausschluss
  - (Crosstalk-Algorithmus)

Literaturhinweis

Mehr zu Petrinetzen in:

- Wolfgang Reisig. *Petrinetze. Modellierungstechnik, Analysemethoden, Fallstudien.* Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2010.

Außerdem

Werkzeug-Unterstützung Renew (`http://www.renew.de`)

- Entwickelt am Fachbereich (Java Open Source)
- Implementierung / Modellierung (Petrinetze, UML, ...)
- Verifikation / Validierung / Simulation

Vorlesung: FGI 2 Formale Grundlagen der Informatik II (3. Sem.)

- Petrinetze, Prozessalgebra, unendliche Sprachen
- Verifikation
- Geschäftsprozesse (Workflows)

AOSE Praktika / Projekt: Anwendungen realisieren

- Implementieren durch Modellieren
- Arbeiten im Team
- Reale Einsatzbedingungen / neuste Techniken & Werkzeuge

Schlusswort

Was noch?
School is over now.

Tipps und Tricks (unvollständig!)

- „Vokabeln lernen"
- Lesen, Lesen, Lesen
- Probieren geht über Studieren;-)
- Im Team arbeiten
- Nicht den Veranstalter „austricksen" durch schummeln / vermeiden / ausweichen; damit trickst man sich nur selbst aus!
- Kernveranstaltungen zuerst; (Pro)-Seminare, Praktika, Projekte zuletzt Weniger ist mitunter mehr.
- Ausgeschlafen zur allen Veranstaltungen gehen
- Das BSc-Studium ist ein mindestens dreijähriges Projekt: Anwendung des informatischen Projektmanagements auf das eigene Studium
- Persönliche Einbindung in den Fachbereich: In der Fachschaft engagieren!

Viel Spaß im Studium!