Aufgaben zur Klausurvorbereitung FGI-1

Jan Henrik Röwekamp (8roeweka)

Universität Hamburg

Diese Aufgaben dienen der Vorbereitung auf die FGI-1 Klausur. Gedacht sind sie zur Bearbeitung ***ohne Skript, Folienkopien oder anderer Literatur***. Generell sind einige Aufgaben auf einem hohen Niveau, sodass es durchaus sein kann, dass diese sehr schwer erscheinen, auch wenn alle Übungszettel bearbeitet wurden. Dies ist so gewollt und beabsichtigt. Die Aufgaben sind zwar in die Teile von FGI-1 gegliedert (Aussagenlogik, Prädikatenlogik, Automaten, Berechenbarkeit & Komplexität), sind jedoch innerhalb dieser Teile ungeordnet. Analog zum Repetitorium selber gilt: Die Aufgaben decken **nicht** erschöpfend alle Themen der Vorlesung ab. Es können Dinge gefragt werden, die hier nicht aufgeführt sind!

Die Aufgaben wurden von mir (Jan Henrik Röwekamp) ausgearbeitet und damit explizit *nicht* offiziell von den Prüfenden des Moduls FGI-1 ausgearbeitet bzw. gestellt.

Viel Erfolg!

Update v2: Aufgabe 2 auf Seite 3 korrigiert.

1 Aussagenlogik

- Geben Sie eine rekursive Funktion an, die für beliebige $F \in L_{AL}$ die Funktion $At(F)$ berechnet. Dabei bezeichne $At(F)$ die *Anzahl der atomaren Aussagesymbole* in F. Sollte die Formel F mehrere Vorkommen des selben Aussagensymbols aufweisen, so ist dieses Aussagensymbol auch mehrfach zu zählen.
- Bezeichne $g(F)$ den Grad einer Formel $F \in L_{AL}$ und sei rekursiv wie folgt gegeben:
  Seien $A \in AS_{AL}$ und $F, G \in L_{AL}$.
  $g(A) = 0$
  $g(\neg F) = g(F) + 1$
  $g(F \wedge G) = g(F \vee G) = g(F \Rightarrow G) = g(F \Leftrightarrow G) = g(F) + g(G) + 1$
  Beweisen Sie den folgenden Zusammenhang für alle $F \in L_{AL}$ mittels struktureller Induktion: $g(F) \geq At(F) - 1$

- Sei $M \subseteq L_{AL}$ und $F \in L_{AL}$. Was sagt $M \models F$ aus? Nur die Übersetzung ins Natürlichsprachliche genügt hier nicht!

- Wie ist die Korrektheit einer Inferenzregel definiert?

- Testen Sie die drei folgenden Inferenzregeln auf Korrektheit:
  $\frac{(A \wedge B)\ (A \Rightarrow C)}{(A \wedge C)}$ $\qquad$ $\frac{A, (B \Rightarrow A)}{B}$ $\qquad$ $\frac{\neg A, (A \Rightarrow B), (A \wedge B)}{B}$

- Verwenden Sie die Resolution um die Korrektheit der folgenden Inferenzregel zu beweisen:
  $\frac{(A \vee B), \neg B, (\neg A \vee C), (\neg A \vee D \vee E), (\neg E \vee B)}{(\neg B \wedge C \wedge D)}$
  Hinweis: Die Resolution selbst anzugeben ist nur ein kleiner Teil der Aufgabenstellung. Insbesondere ist es wichtig herauszustellen, wie und warum die Resolution verwendet werden kann, und wie sich aus der durchgeführten Resolution und ihrem Ergebnis die Korrektheit der Inferenzregel begründen lässt.

- Wie ist eine Hornformel definiert?

- Was sind $\top$ und $\bot$ und was für Eigenschaften haben sie?

- Wenden Sie den Markierungsalgorithmus auf folgende Formel an:
  $(\neg A \vee D \vee \neg B) \wedge B \wedge (\neg D \vee \neg C \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg D \vee C) \wedge A$

- Beweise oder Widerlege: Wenn in einer Hornformel jede Hornklausel ein positives Literal enthält, dann ist die Formel immer erfüllbar.

- Wie ist Kontingenz von Formeln definiert?

– Ist „Unerfüllbarkeit“ ein Begriff, der eher der Syntax oder der Semantik zuzuordnen ist? Begründe!

– Seien $F, G \in L_{AL}$. Was kann F theoretisch sein (kontingent, gültig und/oder unerfüllbar), damit die folgenden Bedingungen je gleichzeitig erfüllt sind:
  - $(F \vee G)$ gültig, G kontingent
  - $(F \Rightarrow G)$ kontingent, G gültig (Ja, ist so gemeint.)
  - $G \models F$, G unerfüllbar
  - $F \models G$, G unerfüllbar
  - $(F \Rightarrow G)$ gültig, G kontingent

– Angenommen für eine Formel F soll eine Eigenschaft gezeigt werden. Genügt hierzu ein Beispiel (bzw. mehrere) oder muss ein allgemeiner Beweis formuliert werden?
  - Unerfüllbarkeit
  - Falsifizierbarkeit
  - Kontingenz
  - Erfüllbarkeit
  - Allgemeingültigkeit

– Verwenden Sie die beiden Inferenzregeln MP (Modus Ponens) und DE, um aus der Formelmenge $M = \{A, (A \vee D) \Rightarrow B\}$ die Formel B zu folgern. Geben Sie hierzu auch die Substitutionen bei der Inferenzregelanwendung explizit an.
  DE: $\frac{A}{(A \vee B)}$

– Wie sind P- und N-Resolution definiert?
– Benötigen P- und N-Resolution eine bestimmte Formelart (auf die sie ausschließlich angewendet werden können), oder sind sie auf jede Formel in KNF anwendbar?

– Bilden Sie KNF und DNF zu folgender Formel: $((A \Leftrightarrow B) \vee C)$

– Sei $F = (A \vee B) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (\neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (\neg D \vee C)$
  Ist F erfüllbar? Verwenden Sie Resolution und dabei so viele Vereinfachungen wie möglich, um die Resolutionsableitung kurz zu halten.

2 Prädikatenlogik

- Was ist die Interpretation eines Prädikatensymbols formal?
- Was ist die Interpretation einer Funktion in der Prädikatenlogik formal?
- Geben Sie ein Beispiel für ein Universum an!

- Sind die folgenden Formeln äquivalent?
  $F_1 := \neg((\exists x P(x) \Rightarrow Q(v)) \wedge \forall x R(x))$
  $F_2 := \exists x \neg((P(x) \Rightarrow Q(v)) \wedge R(x))$
- Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln nicht äquivalent sind:
  $G_1 := \forall x \exists y P(x, y)$
  $G_2 := \exists y \forall x P(x, y)$
  Geben Sie dazu eine geeignete Struktur inklusive Auswertung an!

- In der folgenden Formel wurden die Notationskonventionen missachtet. Ordnen Sie Prädikate, Funktionssymbole, Variablen (gebunden und frei) und Konstanten zu. Wo gibt es mehr als eine Möglichkeit der Zuordnung? Geben Sie auch sowohl Stelligkeiten (wo zutreffend) und Bindungen an Quantoren an.
  $\forall P(X(P) \Rightarrow Q(a(f, R), P)) \Rightarrow (y(P) \vee \forall h\ b(h))$
- Erläutern Sie, warum Umbenennung gebundener Variablen die Äquivalenz erhält, die von freien aber nicht.

- Was versteht man unter einer x-Varianten bzw. den x-Varianten?

- Erzeugt Skolemisierung eine erfüllbarkeitsäquivalente oder eine äquivalente Formel? Begründung!

- Wann ist eine Formel in BPF? (Das ausschreiben der Abkürzung genügt nicht.)
- Muss bei der Erzeugung der BPF eine Reihenfolge eingehalten werden? (Erst Bereinigen, dann Pränexform oder umgekehrt? Oder ist dies egal?)
- Bringen Sie die folgende Formel in BPF:
  $(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y Q(y)) \vee ((R(a, f(b)) \wedge \forall y P(y)) \Rightarrow R(x, y))$

- Bringen Sie die folgende Formel in Skolemform:
  $\exists x \forall y \forall z \exists w \forall v \exists u((P(x, y, z) \Rightarrow R(x, w)) \vee (P(a, b, v) \wedge P(f(v, w), y, u)))$

- Nennen Sie die 3+1 Abbruchbedingungen des Unifikationsalgorithmus (3 negative und 1 positive)!
- Wann ist ein Unifikator allgemeiner als ein anderer?
- Wenden Sie den Unifikaionsalgorithmus jeweils auf die folgenden Mengen an:
  $\{P(x, f(a)), P(a, z)\}$
  $\{P(x, x), P(y, f(y))\}$
  $\{P(x, b), P(y, y), P(a, z)\}$
  Sollten die Mengen unifizierbar sein, geben Sie einen allgemeinsten Unifikator

an. Andernfalls geben Sie eine Begründung an, warum die Mengen nicht unifizierbar sind.

– Warum macht es Sinn die Unifikation im Rahmen der prädikatenlogischen Resolution zu betrachten? (Hinweis: Semantik des Allquantors)

– Wenden Sie die Resolution auf die folgende Klauselmenge an:
$\{Q(a,x), P(x)\}, \{\neg Q(x,y), \neg R(c)\}, \{R(a)\}, \{\neg P(w)\}, \{R(c), P(w)\}$

3 Automatentheorie

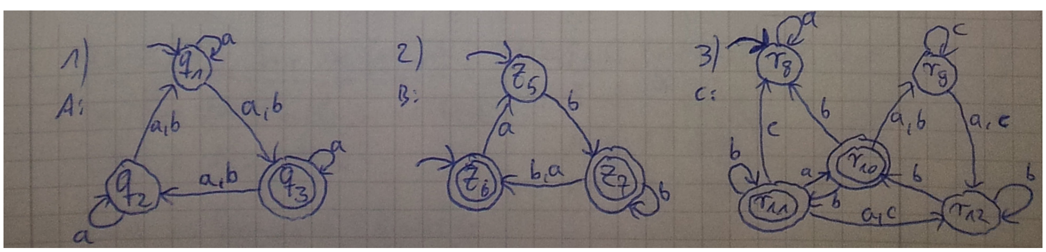
– Sind die Folgenden Aussagen wahr oder falsch? Geben Sie auch eine Begründung für Ihre Entscheidung an.
  - Zu jeder DTM gibt es eine äquivalente NTM.
  - Zu jeder NTM gibt es eine äquivalente DTM.
  - Zu jedem NPDA gibt es einen äquivalenten DPDA.
  - Ein ϵ-FA kann niemals gleichzeitig ein DFA sein.
  - Zu jeder Typ 0 Grammatik gibt es eine äquivalente DTM.
  - Jede endliche Menge ist kontextsensitiv.
  - Mit dem uvw-Theorem kann bewiesen werden, dass eine Sprache regulär ist.
  - Mit dem uvw-Theorem kann bewiesen werden, dass eine Sprache kontextfrei ist.
  - Von einem DFA kann kein Potenzautomat erzeugt werden.
  - Das Kleene-Verfahren findet Anwendung auf Typ 3 Ebene der Chomsky-Hierarchie.

– Sei A ein NPDA. Erläutern Sie den Unterschied zwischen $L(A)$ und $L_\epsilon(A)$.

– Seien A und B PDA's. Wann sind A und B äquivalent?

– Ergänzen Sie die Kleene Rekursionsformel: $R^{\_}_{\_,\_} = R^{k-1}_{\_,\_} \cup R^{k-1}_{i,\_} \cdot (\_)^* \cdot \_$

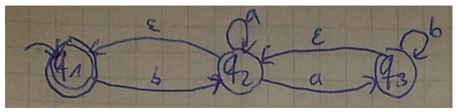
– Bilden Sie die Potenzautomatzen zu folgenden Automaten:



– Welche der Automaten sind initial zusammenhängend, welche vollständig?

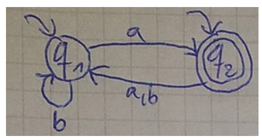
– Bestimmen Sie $L(A), L(B)$ und $L(C)$.

– Machen Sie folgenden Automaten ϵ-frei:



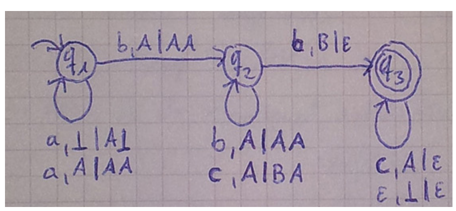
– Geben Sie die ϵ-Hülle des obigen Automaten *als Relation* an.

– Wenden Sie das Kleene-Verfahren auf den folgenden Automaten an:



– Konstruieren Sie eine TM, die $L = \{w \in \{a,b\}^* | \exists v \in \{a,b\}^* : w = abav\}$ akzeptiert.
– Auf welchen Ebenen der Chomsky-Hierarchie kann die Sprache L eingeordnet werden?

– Sei A ein PDA, der wie folgt gegeben ist:
Bestimmen Sie $L(A)$ und $L_\epsilon(A)$!



– Ist der PDA A ein DPDA oder ein NPDA?

– Zeigen Sie mittels uvw-Theorem, dass die Menge
$\{w \in \Sigma^* | \exists v \in \Sigma^* : w = vv^{rev}\}$ nicht regulär ist.

- Seien die Mengen M_i ($i \in \mathbb{N}$) wie folgt rekursiv zu einer CFG $G = (\Sigma, N, P, S)$ definiert:
  $M_0 = \{A \in N | \exists w \in \{a\}^* : A \to w \in P\}$
  $M_{i+1} = \{A \in N | \exists w \in M_i^* : A \to w \in P\}$
  Die Berechnung der M_i terminiert, falls für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt: $M_k = M_{k+1}$
  Berechnen Sie M_k für die Grammatik $G = (\{a, b\}, \{A, B, C, S\}, P, S)$ mit P:
  $S \to ACb|ab$
  $A \to BB|aa$
  $B \to AC|bab$
  $C \to A|B|C$
- Sei nun $M'_{i+1} = \{A \in N | \exists w \in M_i^* : A \to w \in P\} \cup M_i$.
  Gilt $M'_{i+1} = M_{i+1}$?
- Bringen Sie die Grammatik G in Chomsky-Normalform (Alle 6 Schritte)!

4 Berechenbarkeit & Komplexität

– In welcher Einheit wird der Zeitbedarf einer TM gemessen?

– Warum wird, obwohl DTM's und NTM's äquivalent sind, zwischen P und NP unterschieden?

– Wie sind $PSpace$ und $NPSpace$ definiert?

– Warum gilt $NP \subseteq PSpace$?

– Sei $A \in NP$. Was muss für A gelten, damit es NP-vollständig ist?

– Seien $A, B \in NP$. Sei weiterhin A NP-schwer. Muss um zu beweisen, dass B NP-vollständig ist $A \leq_{POL} B$ oder $B \leq_{POL} A$ gezeigt werden? Begründen Sie ihre Antwort!.

– Was besagt das Halteproblem?

– Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Berechenbarkeit von Funktionen und der Entscheidbarkeit von Mengen?

– Wahr oder falsch? Begründen Sie ihre Antwort!
  - Wenn eine Menge entscheidbar ist, dann ist ihr Komplement entscheidbar.
  - Wenn eine Menge entscheidbar ist, dann ist ihr Komplement aufzählbar.
  - Wenn eine Menge entscheidbar ist, dann ist ihr Komplement abzählbar.
  - Jede aufzählbare Menge ist entscheidbar.
  - Eine Menge in NP kann nicht in P sein.
  - Wenn `Clique` $\in P$, dann gilt $P = NP$.
  - $PSpace = NPSpace$
  - $Cs \subseteq PSpace$

– Ist die Potenzmenge einer endlichen Menge immer abzählbar? Und die einer abzählbaren?

– Gilt $3n^2 \in O(n^2)$?

– Nennen Sie je ein Beispiel für eine Menge, die:
  - Abzählbar, aber nicht aufzählbar ist.
  - Aufzählbar, aber nicht entscheidbar ist.

– Ist jedes Problem in NP auch entscheidbar?

– Warum gilt $P \subseteq NP$?