Formale Grundlagen der Informatik 3
Kapitel 1
Aussagenlogik
Syntax & Semantik

Frank Heitmann
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

12. Oktober 2015

Inhalt und Motivation

Aus dem KVV:

In der Vorlesung werden **verschiedene Logiken** behandelt. Dies sind insb. die Aussagenlogik, die Prädikatenlogik, die Modallogik sowie die Temporallogiken CTL und LTL. Im Zentrum stehen nach Einführung von **Syntax und Semantik** Ableitungsverfahren wie das Resolutionskalkül und die Tableau-Methode sowie weitere **(Semi-)Entscheidungsverfahren, um bspw. das zentrale (Un-)Erfüllbarkeitsproblem zu lösen**. Als wichtiger Anwendungsfall dient uns in der Vorlesung der Bereich der (Software-)Spezifikation und der (Software-)Verifikation.

Motivation

Mit der Aussagenlogik lassen sich einfache Verknüpfungen zwischen (atomaren) Gebilden ausdrücken z.B.

- $A \wedge B$ für A *und* B
- $A \vee B$ für A *oder* B

Wenn A und B für etwas stehen (z.B. $A \approx$ 'es regnet') lassen sich so kompliziertere Aussagen formen.

Mit komplizierteren Logiken lassen sich dann kompliziertere Aussagen formen.

Motivation

Man kann dann (ganz allgemein mit Logiken)

1. Etwas aus der realen Welt in der Logik abstrakt ausdrücken.
2. In der Logik Schlüsse ziehen.
3. Dies wieder in der realen Welt interpretieren.

Motivation

(Aussagen-)Logik ...

- als Grundlage der Mathematik,
- für Programmiersprachen (z.B. Prolog),
- für künstliche Intelligenzen,
- für Datenbanken,
- zur Beschreibung von Schaltkreisen,
- in der Verifikation
- ...

Motivation

Die **Aussagenlogik**

- ist eine ganz grundlegende Logik (Basis vieler anderer Logiken bzw. in ihnen enthalten)
- an ihr lässt sich vieles einüben
- ist euch u.U. schon im SAT-Problem begegnet (und ist also ganz grundlegend für den Begriff der NP-Vollständigkeit und der Frage, was effizient lösbar ist)

Motivation

- Eine *Aussage* im Sinne der Aussagenlogik ist ein atomares sprachliches Gebilde das entweder *wahr* oder *falsch* ist. Notiert als A, B, C oder A_1, A_2, A_3, ... Diese nennt man *Aussagensymbole*.
- Die *Aussagenlogik* betrachtet den Wahrheitsgehalt einfacher Verknüpfungen zwischen atomaren sprachlichen Gebilden (also Aussagen). Dies sind:
  - $\neg$ für *nicht* (Negation)
  - $\wedge$ für *und* (Konjunktion)
  - $\vee$ für *oder* (Disjunktion)
  - $\Rightarrow$ für *wenn ... dann* (Implikation)
  - $\Leftrightarrow$ für *genau dann, wenn* (Biimplikation)

  Die $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ nennt man Junktoren.

Syntax: Motivation

Die **Syntax** legt nun zunächst nur fest, wie mit *atomaren Formeln* und *Junktoren* komplexe *Formeln* erstellen kann. Diese Formeln sind zunächst nur Zeichenkette ohne Bedeutung (Semantik).

Syntax: Definition

Definition (Syntax der Aussagenlogik)

Mit AS_{AL} sei die Menge der *Aussagensymbol* der Aussagenlogik bezeichnet. Wir notieren diese üblicherweise als $A_1, A_2, A_3, \ldots$ oder $A, B, C, \ldots$.
Die Menge $\mathcal{L}_{AL}$ der Formeln der Aussagenlogik definieren wir mittels

1. Jedes $A \in AS_{AL}$ ist eine (atomare) Formel.
2. Ist F eine Formel, so ist auch $\neg F$ eine Formel.
3. Sind F und G Formeln, so sind auch $(F \vee G), (F \wedge G), (F \Rightarrow G)$ und $(F \Leftrightarrow G)$ Formeln.
4. Es gibt keine anderen Formeln, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-3 erzeugt werden.

Syntax: Definition

Noch ein paar Bezeichnungen:

- Manchmal führt man noch das **Alphabet** ein. Dies besteht aus den Aussagesymbolen sowie aus den Junktoren und den Klammern (und).
- Die $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ werden als **Junktoren** bezeichnet. Die entstehenden Formeln als Negation ($\neg$), Disjunktion ($\vee$), Konjunktion ($\wedge$), Implikation ($\Rightarrow$) und Biimplikation ($\Leftrightarrow$).
- Eine Formel, die beim Aufbau einer Formel F verwendet wird, heißt **Teilformel** von F. Außerdem ist F Teilformel von sich selbst.
- Der Junktor, der im letzten Konstruktionsschritt verwendet wird, heißt **Hauptoperator**. Nach ihm werden komplexe Formeln benannt.

Syntax: Beispiel

Beispiele:

- $((A \vee C) \wedge B)$. Dies ist eine Konjunktion, da zuletzt $\wedge$ angewandt wurde. Teilformeln sind $A, B, C, (A \vee C)$ und $((A \vee C) \wedge B)$.
- $(A \vee \vee C)$ ist keine Formel.
- $A \vee C$ zunächst auch nicht (Klammerung!)

Strukturelle Induktion und Rekursion

Den Aufbau komplexer Formeln aus einfache(re)n Formeln kann man nutzen um

1. Eigenschafen von Formeln nachzuweisen (strukturelle Induktion)
2. Funktionen über die Formelmenge zu definieren (strukturelle Rekursion)

Strukturelle Induktion

Um eine Behauptung $B(F)$ für jede Formel $F \in \mathcal{L}_{AL}$ zu zeigen genügt es:

1. Zu zeigen, dass $B(F)$ für jede atomare Formel F gilt (**Induktionsanfang**).
2. Anzunehmen, dass $B(F)$ und $B(G)$ für zwei Formeln F und G gilt (**Induktionsannahme**).
3. Zu zeigen, dass unter der Annahme bei 2. nun auch $B(\neg F), B(F \vee G), B(F \wedge G), B(F \Rightarrow G)$ und $B(F \Leftrightarrow G)$ gelten (**Induktionsschritt**).

Strukturelle Rekursion

Um eine Funktion $f : \mathcal{L}_{AL} \to D$ zu definieren (D ist dabei eine beliebige Menge) genügt es:

1. $f(A)$ für jedes $A \in AS_{AL}$ festzulegen.
2. eine Funktion $f_\neg : D \to D$ und für jeden Junktor $\circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ eine Funktion $f_\circ : D \times D \to D$ zu definieren. Es ist dann z.B. $f((F \wedge G)) = f_\wedge(f(F), f(G))$.

Grundbegriffe

Wir wollen nun die *Bedeutung* von Formeln definieren.

Dazu

- **belegen** wir die atomaren Formeln mit **Wahrheitswerten**
- berechnen daraus den Wahrheitswert einer komplexen Formel

Die Menge der Wahrheitswerte enthält genau zwei Elemente

- 1 ('wahr') und
- 0 ('falsch').

Semantik

- Eine *Belegung* weist nun jedem Aussagesymbol einen Wahrheitswert zu.
- Aussagen und Formeln können dann unter einer Belegung wahr oder falsch sein.
- Die aussagenlogische Semantik regelt u.a., wie komplexe Formeln zu Wahrheitswerten kommen.

Semantik

Definition (Semantik der Aussagenlogik)

Eine **Belegung** ist eine Funktion $\mathcal{A}_{AS} : AS_{AL} \to \{0, 1\}$, die jedem Aussagesymbol einen Wahrheitswert zuordnet.
Zu dieser wird rekursiv eine Funktion $\mathcal{A} : \mathcal{L}_{AL} \to \{0, 1\}$ definiert, die alle Formeln bewertet. Es ist für jedes $A \in AS_{AL}$ ist $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}_{AS}(A)$ und für alle Formeln $F, G \in \mathcal{L}_{AL}$ sei

- $\mathcal{A}(\neg F) = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{A}(F) = 0$
- $\mathcal{A}((F \vee G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$ oder $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \wedge G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \Rightarrow G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 0$ oder $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \Leftrightarrow G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$

Semantik - Anmerkung

Anmerkung

Bspw. die Definition

$$\mathcal{A}((F \vee G)) = 1 \text{ gdw. } \mathcal{A}(F) = 1 \text{ oder } \mathcal{A}(G) = 1$$

bedeutet, dass $\mathcal{A}(F \vee G)$ zu 1 ausgewertet wird, wenn

- $\mathcal{A}(F) = 1$ ist oder wenn
- $\mathcal{A}(G) = 1$ ist oder wenn
- beides gilt.

In allen anderen Fällen (hier nur $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) = 0$) ist $\mathcal{A}((F \vee G)) = 0$.

Semantik - Wahrheitstafeln

Wahrheitstafeln geben für die atomaren Formeln alle möglichen Belegungen an und für die anderen Formeln die entsprechenden Bewertungen. Sie stellen die Definition von eben übersichtlich dar.

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Wichtige Anmerkung

Hier und auf den nachfolgenden Folien verwenden wir bereits Klammerersparnisregeln. Wir führen diese später auch noch genauer ein. Insb. lassen wir äussere Klammern weg.

Zur Nachbereitung

Für $\neg A$ hätte auch die kleinere Tabelle

A	$\neg A$
0	1
1	0

genügt, aber so wie oben hat dann alles in eine Tabelle gepasst.

Aufgabe

A	B	C	D	$A \vee \neg B$	$C \wedge \neg D$	$\neg(A \vee \neg B) \wedge (C \wedge \neg D)$
0	0	0	0			
0	0	0	1			
0	0	1	0			
0	0	1	1			
0	1	0	0			
0	1	0	1			
0	1	1	0			
0	1	1	1			
1	0	0	0			
1	0	0	1			
1	0	1	0			
1	0	1	1			
1	1	0	0			
1	1	0	1			
1	1	1	0			
1	1	1	1			

Lösung der Aufgabe

A	B	C	D	$A \vee \neg B$	$C \wedge \neg D$	$\neg(A \vee \neg B) \wedge (C \wedge \neg D)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0

Wahrheitstafeln: Anmerkungen

- In jeder Zeile einer Wahrheitstafel steht eine Belegung.
- Jede Zeile beschreibt einen (prinzipiell) möglichen Zustand der Welt.
- Enthält eine Formel n verschiedene atomare Formeln / Aussagensymbole, so existieren 2^n Zeilen in der Tafel.
- Eine Spalte wird als **Wahrheitswerteverlauf (WWV)** der zugehörigen Formel bezeichnet.

Kategorien

Definition

- Eine Belegung heißt **passend** zu einer Formel F, wenn sie jedem Aussagesymbol in F einen Wahrheitswert zuweist.
- Eine Belegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$ nennt man ein **Modell** für F oder eine *erfüllende Belegung* von F. Ist $\mathcal{A}(F) = 0$, so ist $\mathcal{A}$ eine *falsifizierende Belegung* von F.
- Ist ferner M eine (evtl. sogar unendliche) Formelmenge. So nennt man eine Belegung $\mathcal{A}$, die alle Formeln F aus M wahr macht, ebenfalls ein *Modell* für M und schreibt dafür bisweilen auch kurz $\mathcal{A}(M) = 1$.
- Zudem ist jede Belegung Modell der leeren Menge. Die leere Menge ist also erfüllbar.

Kategorien

Definition

- Besitzt F mindestens eine erfüllende Belegung (ein Modell), so heißt F **erfüllbare** Formel.
- Besitzt F mindestens eine falsifizierende Belegung, so heißt F **falsifizierbare** Formel.
- Besitzt F mindestens eine erfüllende und mindestens eine falsifizierende Belegung so heißt F **kontingente** Formel.
- Besitzt F kein Modell, so heißt F **unerfüllbare** Formel oder **Kontradiktion**.
- Ist F unter jeder möglichen Belegung „wahr“, so heißt F **(allgemein-)gültig** oder **Tautologie**.

Kategorien - Notationen

Notationen:

- $\mathcal{A}$ ist Modell von F bzw. macht F wahr wird kurz geschrieben als $\mathcal{A} \models F$.
- $\mathcal{A}$ falsifiziert F bzw. macht F falsch wird kurz geschrieben als $\mathcal{A} \not\models F$.
- Ist F eine Tautologie, wird dies kurz notiert als $\models F$.
- Ist F eine Kontradiktion, wird dies kurz notiert als $F \models$.

Tautologie vs. Kontradiktion

Satz

F ist gültig genau dann, wenn $\neg F$ unerfüllbar ist.

Beweis.

	F ist gültig	
gdw.	jede Belegung ist ein Modell von F	(Def. der Gültigkeit)
gdw.	$\mathcal{A}(F) = 1$ für jede Belegung $\mathcal{A}$	(Def. eines Modells)
gdw.	$\mathcal{A}(\neg F) = 0$ für jede Belegung $\mathcal{A}$	(Eigenschaft von $\neg$)
gdw.	keine Belegung ist ein Modell von $\neg F$	(Def. eines Modells)
gdw.	$\neg F$ ist unerfüllbar	(Def. der Unerfüllbarkeit)

□

Zusammenfassung 1

Zusammenfassung **Syntax**:

- Motivation
- Definition der Syntax:
  - Alphabet, Junktor
  - Aussagesymbol, atomare Formel, komplexe Formel
  - Hauptoperator, Teilformel
  - Negation, Disjunktion, Konjunktion, Implikation, Biimplikation
- strukturelle Induktion
- strukturelle Rekursion

Zusammenfassung 2

Zusammenfassung **Semantik**:

- Belegung, Auswertung (einer Formel)
- Wahrheitstafeln, Wahrheitswerteverlauf
- erfüllende Belegung, falsifizierende Belegung, Modell
- kontingent, (allgemein-)gültig, unerfüllbar
- Tautologie, Kontradiktion
- $\mathcal{A} \models F$, $\mathcal{A} \not\models F$, $\models F$, $F \models$

Folgerung

Definition (Folgerung)

Eine Formel F **folgt** genau dann aus einer Formelmenge M, wenn jede Belegung, die Modell für M ist, auch Modell für F ist.
Notation: $M \models F$.

Anmerkung

Im Falle einer einelementigen Menge $M = \{G\}$ notiert man auch $G \models F$ und sagt, F **folgt** aus G.

Folgerung: Beispiel 1

Definition (Folgerung)

Eine Formel F **folgt** genau dann aus einer Formelmenge M, wenn jede Belegung, die Modell für M ist, auch Modell für F ist.

Beweis von $A \wedge B \models A \vee B$ mit Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Jede Belegung, die Modell für $A \wedge B$ ist (nur die vierte Zeile) ist auch Modell für $A \vee B$, daher gilt $A \wedge B \models A \vee B$. (Das $A \vee B$ auch woanders wahr ist, ist egal!)

Folgerung: Beispiel 2

Beweis von $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\} \models A \Rightarrow C$ mit Wahrheitstafel:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Jede Belegung, die Modell für $A \Rightarrow B$ **und** Modell für $B \Rightarrow C$ ist (erste, zweite, vierte und achte Zeile) ist auch Modell für $A \Rightarrow C$, also gilt die Folgerbarkeitsbeziehung.

Folgerung: Beispiel 3

Beweis von $A \wedge B \wedge C \wedge D \models C \vee \neg D$ ohne Wahrheitstafel:

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $A \wedge B \wedge C \wedge D$. Nach der semantischen Definition von $\wedge$ muss dann $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = \mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(D) = 1$ gelten womit wegen $\mathcal{A}(C) = 1$ und der Definition der Semantik von $\vee$ auch $\mathcal{A}(C \vee \neg D) = 1$ gilt. Folglich ist jedes Modell von $A \wedge B \wedge C \wedge D$ auch Modell von $C \vee \neg D$.

Äquivalenz

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln F und G heißen **äquivalent** genau dann, wenn jede Belegung beiden Formeln den gleichen Wahrheitswert zuweist, wenn also $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt.
Notation: $F \equiv G$.

Anmerkung

1. Alternativ: Zwei Formeln sind genau dann äquivalent, wenn sie dieselben Modelle besitzen, also $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(G) = 1$ gilt.
2. Äquivalente Formeln haben denselben Warhheitswerteverlauf!

Äquivalenz: Beispiel 1

Beweis von $A \Leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ mit Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \wedge B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1

In der dritten und letzten Spalte sieht man, dass $A \Leftrightarrow B$ und $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ den gleichen Wahrheitswerteverlauf haben. Damit sind die beiden Formeln äquivalent.

Äquivalenz: Beispiel 2

Widerlegung von $A \wedge B \equiv A \vee B$ durch Angabe eines Gegenbeispiels:

$A \wedge B$ und $A \vee B$ sind nicht äquivalent, da z.B. $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(A) = 0$ und $\mathcal{A}(B) = 1$ zwar ein Modell von $A \vee B$ nicht aber eines von $A \wedge B$ ist. Damit haben die beiden Formeln nicht die gleichen Modelle und sind damit nicht äquivalent.

Wichtige Anmerkung

Ebenso widerlegt man Folgerbarkeitsbeziehungen $F \models G$ durch Angabe eines Gegenbeispiels also durch Angabe einer Belegung $\mathcal{A}$, die Modell für F ist, aber nicht für G.

Wichtige Äquivalenzen

Kommutativität:	$(F \wedge G)$	$\equiv$	$(G \wedge F)$
	$(F \vee G)$	$\equiv$	$(G \vee F)$
Assoziativität:	$(F \wedge (G \wedge H))$	$\equiv$	$((F \wedge G) \wedge H)$
	$(F \vee (G \vee H))$	$\equiv$	$((F \vee G) \vee H)$
Distributivität:	$(F \wedge (G \vee H))$	$\equiv$	$((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$
	$(F \vee (G \wedge H))$	$\equiv$	$((F \vee G) \wedge (F \vee H))$
Doppelnegation:	$\neg\neg F$	$\equiv$	F
de Morgans Regeln:	$\neg(F \wedge G)$	$\equiv$	$(\neg F \vee \neg G)$
	$\neg(F \vee G)$	$\equiv$	$(\neg F \wedge \neg G)$
Elimination von $\Leftrightarrow$:	$(F \Leftrightarrow G)$	$\equiv$	$(F \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow F)$
	$(F \Leftrightarrow G)$	$\equiv$	$(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$
Elimination von $\Rightarrow$:	$(F \Rightarrow G)$	$\equiv$	$(\neg F \vee G)$

Weitere wichtige Äquivalenzen

Absorption:	$(F \wedge (F \vee G))$	$\equiv$	F
	$(F \vee (F \wedge G))$	$\equiv$	F
Idempotenz:	$(F \wedge F)$	$\equiv$	F
	$(F \vee F)$	$\equiv$	F
Tautologieregeln	$(F \wedge \top)$	$\equiv$	F
	$(F \vee \top)$	$\equiv$	$\top$
Kontradiktionsregeln:	$(F \wedge \bot)$	$\equiv$	$\bot$
	$(F \vee \bot)$	$\equiv$	F
Komplement:	$(F \wedge \neg F)$	$\equiv$	$\bot$
	$(F \vee \neg F)$	$\equiv$	$\top$

Anmerkung

Wichtige Anmerkung

1. Auf der letzten Folien waren $\bot$ und $\top$ Konstanten. Man müsste sie streng formal als neue syntaktische Konstrukte einführen. Sie sind dann atomare Formeln, die immer zu 0 (bei $\bot$) bzw. immer zu 1 (bei $\top$) ausgewertet werden.
2. Alle obigen Äquivalenzen kann man z.B. mit Wahrheitstafeln schnell beweisen.

Klammerersparnisregeln

Aufgrund der Äquivalenzen können wir uns auf folgende Regeln zur Klammerersparnis einigen:

1. Die äußersten Klammern entfallen: $A \vee B$ statt $(A \vee B)$
2. Bei mehrfacher Konjuktion oder Disjunktion entfällt die mehrfache Klammerung:
   $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C)) \equiv A \vee B \vee C$
3. Weiterhin **nicht** erlaubt sind $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ oder $A \vee B \wedge C$

Bemerkung

In einigen Büchern findet man auch die Regel, dass $\neg$ am stärksten bindet, dann $\wedge$ und $\vee$ und als dritte $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$. Damit wäre dann z.B. auch $A \wedge B \Rightarrow C$ möglich. Wir wollen dies i.A. aber nicht benutzen. Eine Ausnahme sind Hornformeln in Implikationsschreibweise, zu denen wir evtl. später noch kommen.

Folgerung und Äquivalenz (Wdh.)

Definition (Folgerung)

Eine Formel F **folgt** genau dann aus einer Formelmenge M, wenn jede Belegung, die Modell für M ist, auch Modell für F ist.
Notation: $M \models F$ bzw. $G \models F$, wenn $M = \{G\}$.

Definition (Äquivalenz)

Zwei Formeln F und G heißen **äquivalent** genau dann, wenn jede Belegung beiden Formeln den gleichen Wahrheitswert zuweist, wenn also $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt.
Notation: $F \equiv G$.

Einige Sätze

Satz

1. *Wenn* $F \equiv G$ *und* $\models G$ *gilt, dann gilt auch* $\models F$
2. *Wenn* $F \equiv G$ *und* $G \models$ *gilt, dann gilt auch* $F \models$
3. *Wenn* $\models F$ *und* $\models G$ *gilt, dann gilt* $F \equiv G$
4. *Wenn* $F \models$ *und* $G \models$ *gilt, dann gilt* $F \equiv G$

Beweis.

1. und 4. nachfolgend. 2. und 3. zur Übung. □

Einige Sätze

Satz

Wenn $F \equiv G$ und $\models G$ gilt, dann gilt auch $\models F$.

Beweis.

Sie $\mathcal{A}$ eine zu F und G passende Belegung. Da G eine Tautologie ist, gilt $\mathcal{A}(G) = 1$. Da ferner $F \equiv G$ gilt, gilt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$, also auch $\mathcal{A}(F) = 1$. Damit ist jede Belegung Modell für F und folglich F eine Tautologie. □

Einige Sätze

Satz

Wenn $F \models$ und $G \models$ gilt, dann gilt $F \equiv G$

Beweis.

Wir zeigen, dass $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt. Sei dazu $\mathcal{A}$ eine zu F und G passende Belegung. Da sowohl F als auch G Kontradiktionen sind, gilt stets $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) = 0$ womit bereits alles gezeigt ist. □

Sätze mit Folgerbarkeit

Satz

$F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$

Beweis.

Sei $F \equiv G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für F. Wegen $F \equiv G$ ist $\mathcal{A}$ auch ein Modell für G und damit gilt $F \models G$. Analog gilt auch $G \models F$. Gelte nun andersherum $F \models G$ und $G \models F$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für F. Wegen $F \models G$ gilt dann auch $\mathcal{A}(G) = 1$. Ist $\mathcal{A}'$ ein Modell für G, dann ist $\mathcal{A}'$ wegen $G \models F$ auch ein Modell für F. Damit haben F und G genau dieselben Modelle und folglich gilt $F \equiv G$. (Verallgemeinerung als Übungsaufgabe.) □

Drei wichtige Sätze

Satz

1. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
2. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
3. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$

Beweis.

1. zur Übung. Zu 2: Gelte $F \models G$ und sei $\mathcal{A}$ eine zu F und G passende Belegung. Ist $\mathcal{A}(F) = 0$, so ist $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ aufgrund der Definition der Semantik von $\Rightarrow$. Ist $\mathcal{A}(F) = 1$, so ist wegen $F \models G$ auch $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit wieder $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ und folglich gilt $\models F \Rightarrow G$.
Sei umgekehrt $\models F \Rightarrow G$ und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für F. Wegen der Definition der Semantik von $\Rightarrow$ folgt aus $\mathcal{A}(F \Rightarrow G) = 1$ (es gilt ja $\models F \Rightarrow G$) sofort $\mathcal{A}(G) = 1$ und damit ist jedes Modell von F auch Modell von G und wir sind fertig. □

Drei wichtige Sätze

Satz

1. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
2. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
3. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$

Beweis.

3. folgt aus 2. sofort aus der Äquivalenz $F \Rightarrow G \equiv \neg F \vee G$ und da die Negation einer Tautologie eine Kontradiktion ist (und umgekehrt) und da $\neg(\neg F \vee G) \equiv F \wedge \neg G$. $\square$

Verallgemeinerung

Die Aussagen

1. $F \models G$ genau dann, wenn $\models F \Rightarrow G$
2. $F \models G$ genau dann, wenn $F \wedge \neg G \models$

können verallgemeinert werden. Sei M eine beliebige Formelmenge, dann gilt:

1. $M \cup \{F\} \models G$ genau dann, wenn $M \models F \Rightarrow G$
2. $M \models G$ genau dann, wenn $M \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar ist.

Dabei ist eine Formelmenge unerfüllbar, wenn es keine Belegung gibt, die alle Formeln der Menge wahr macht.

Alle Sätze im Überblick

Satz

1. *Wenn* $F \equiv G$ *und* $\models G$ *gilt, dann gilt auch* $\models F$
2. *Wenn* $F \equiv G$ *und* $G \models$ *gilt, dann gilt auch* $F \models$
3. *Wenn* $\models F$ *und* $\models G$ *gilt, dann gilt* $F \equiv G$
4. *Wenn* $F \models$ *und* $G \models$ *gilt, dann gilt* $F \equiv G$
5. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $F \models G$ *und* $G \models F$
6. *Wenn* $F_1 \equiv F_2$ *und* $G_1 \equiv G_2$ *gilt, dann gilt* $F_1 \models G_1$ *genau dann, wenn* $F_2 \models G_2$ *gilt.*
7. $F \equiv G$ *genau dann, wenn* $\models F \Leftrightarrow G$
8. $F \models G$ *genau dann, wenn* $\models F \Rightarrow G$
9. $F \models G$ *genau dann, wenn* $F \wedge \neg G \models$
10. $M \cup \{F\} \models G$ *genau dann, wenn* $M \models F \Rightarrow G$
11. $M \models G$ *genau dann, wenn* $M \cup \{\neg G\}$ *unerfüllbar ist.*

Zur Übung

Zur Übung

Die Nummern 2, 3, 6, 7, 10 und 11 aus der Auflistung von eben sind zur Übung.

Normalformen

Wir wollen jetzt

- die Äquivalenzen nutzen, um Teilformeln zu ersetzen und
- so zu einer Normalform kommen

Die Normalform hat verschiedene Vorteile:

- Einfach strukturiert (daher gut für Beweis, Algorithmen, ...)
- Eigenschaften lassen sich bisweilen leichter ablesen/ermitteln.

Ersetzungen

Unser Ziel ist es zunächst Teilformeln ersetzen zu dürfen, also aus

$$A \wedge (B \Rightarrow C)$$

z.B.

$$A \wedge (\neg B \vee C)$$

zu machen. Die Rechtfertigung dafür wird die Äquivalenz $B \Rightarrow C \equiv \neg B \vee C$ sein. Dass wir dies aber tatsächlich in Teilformeln so ersetzen dürfen, sagt uns das *Ersetzbarkeitstheorem*.

Ersetzbarkeitstheorem

Satz (Ersetzbarkeitstheorem)

Seien F und G äquivalente Formeln und sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Formel F als Teilformel. Gehe H' aus H hervor, indem ein Vorkommen von F (in H) durch G ersetzt wird. Dann sind H und H' äquivalent.

Ersetzt man also eine Teilformel F einer Formel H durch eine äquivalente Formel, so ist die entstehende Formel H' zur ursprünglichen H äquivalent.

Der Satz ist die Rechtfertigung für die Schreibweise $A \wedge (B \Rightarrow C) \equiv A \wedge (\neg B \vee C)$.

Der Beweis erfolg nun mittels struktureller Induktion...

Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

Ersetzbarkeitstheorem

Seien F und G äquivalente Formeln und sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Formel F als Teilformel. Gehe H' aus H hervor, indem ein Vorkommen von F (in H) durch G ersetzt wird. Dann sind H und H' äquivalent.

Beweis

Induktionsanfang. Sei H eine atomare Formel und gehe H' durch ersetzen von F durch G aus H hervor. Dann muss $H = F$ und $H' = G$ gelten und aus $F \equiv G$ folgt dann sofort $H = F \equiv G = H'$ also $H \equiv H'$.

Induktionsannahme. Wir nehmen an, dass H_1 und H_2 Formeln sind, für die gilt: Für jede Formel H_1' bzw. H_2', die durch Ersetzung von F durch G aus H_1 bzw. H_2 hervorgegangen ist, gilt $H_1 \equiv H_1'$ bzw. $H_2 \equiv H_2'$.

Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

Ersetzbarkeitstheorem

Seien F und G äquivalente Formeln und sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Formel F als Teilformel. Gehe H' aus H hervor, indem ein Vorkommen von F (in H) durch G ersetzt wird. Dann sind H und H' äquivalent.

Induktionsschritt. Ist $F = H$, so verfahren wir wie im Induktionsanfang und sind fertig. Nachfolgend genügt es also den Fall zu betrachten, dass F eine echte Teilformel von H ist.
Fall $H = \neg H_1$. Dann ist F eine Teilformel von H_1 und es gibt H_1', das aus H_1 durch Ersetzen von F durch G entsteht und so, dass $H' = \neg H_1'$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und wegen der Definition der Semantik von $\neg$ ist dann auch $\mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1)$ also auch $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H')$ und damit $H \equiv H'$.

Beweis des Ersetzbarkeitstheorems

Induktionsschritt (Fortsetzung). Fall $H = H_1 \vee H_2$.
Angenommen F ist eine Teilformel von H_1 (der andere Fall ist analog). Dann gibt es wieder ein H_1', das aus H_1 durch Ersetzen von F durch G entsteht und so, dass $H' = H_1' \vee H_2$ gilt. Nach Induktionsannahme gilt $H_1 \equiv H_1'$. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann ist $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$ wegen $H_1 \equiv H_1'$ und ähnlich wie eben folgt wegen der Definition der Semantik von $\vee$ dann $\mathcal{A}(H') = \mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2) = \mathcal{A}(H)$ und damit $H' \equiv H$.
Die anderen Fälle gehen ganz analog, was den Beweis abschließt.

Anmerkung

Wichtig ist hier, dass $\mathcal{A}(H_1' \vee H_2) = \mathcal{A}(H_1 \vee H_2)$ gilt. Dies folgt aus der Definition von $\vee$ und wegen $\mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(H_1)$. Man überlegt sich, was passiert, wenn die einzelnen Teilformeln zu 0 oder 1 ausgewertet werden und dass tatsächlich immer das gleiche rauskommt.

Äquivalenzumformungen

Ergebnis

Wir dürfen nun dank des Ersetzbarkeitstheorems Teilformeln durch andere Formeln ersetzen, sofern diese zu der gewählten Teilformel äquivalent sind.

$$\neg A \Rightarrow \neg\neg B \equiv \neg A \Rightarrow B \equiv \neg\neg A \vee B \equiv A \vee B$$

Normalformen - Motivation

Wir wollen nun eine **Normalform** für aussagenlogische Formeln einführen, d.h. eine Form

- in die wir jede aussagenlogische Formel durch Äquivalenzumformungen bringen können und
- die eine praktische Form hat (z.B. für Berechnungen)

Dazu erst ein paar Begriffe ...

Normalformen - Begriffe

Definition

1. Ein **Literal** ist eine atomare Formel oder eine negierte atomare Formel.
2. Ein **positives Literal** ist eine atomare Formel, ein **negatives Literal** eine negierte atomare Formel.
3. Zwei Literale heißen **komplementär**, wenn sie positives und negatives Literal der gleichen atomaren Formel sind. Bspw. ist A das komplementäre Literal zu $\neg A$ und umgekehrt.
4. Literale und Disjunktionen von Literalen werden als **Klauseln** bezeichnet.
5. Literale und Konjunktionen von Literalen werden als **duale Klauseln** bezeichnet.

Normalformen - Begriffe 2

Definition

1. Eine Formel F ist in **konjunktiver Normalform** (KNF), wenn sie eine Konjunktion von Klauseln ist, also eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, z.B.

$$(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge B \wedge (\neg C \vee \neg B) \wedge (A \vee B \vee C)$$

2. Eine Formel F ist in **disjunktiver Normalform** (DNF), wenn sie eine Disjunktion von dualen Klauseln ist, also eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen, z.B.

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg A \wedge C)$$

Eigenschaften der KNF und DNF

Merkhilfe

KNF: $(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge B \wedge (\neg C \vee \neg B)$
DNF: $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg A \wedge C)$

Satz

1. *Eine KNF ist gültig gdw. alle ihre Klauseln gültig sind gdw. in allen Klauseln mindestens ein Paar komplementäre Literale vorkommt.*
2. *Eine DNF ist unerfüllbar gdw. alle ihre dualen Klauseln unerfüllbar sind gdw. in allen dualen Klauseln mindestens ein Paar komplementäre Literale vorkommt.*
3. *Ein Erfüllbarkeitstest für DNFs ist effizient implementierbar (Laufzeit ist in P). (Für KNFs gilt dies wahrscheinlich nicht! Dies Problem ist NP-vollständig.)*

KNF und DNF

Satz

Zu jeder Formel F gibt es (mindestens) eine konjunktive Normalform und (mindestens) eine disjunktive Normalform, d.h. es gibt Formeln K in konjunktiver Normalform und D in disjunktiver Normalform mit $F \equiv K \equiv D$.

Beweis.

Der Beweis ist wieder mittels struktureller Induktion möglich. Siehe z.B. *Logik für Informatiker* von U. Schöning.
Wir verfahren hier anders und geben eine Konstruktion an... □

KNF und DNF - Existenzbeweis

Wir konstruieren zu F die KNF K und die DNF D mittels Äquivalenzumformungen wie folgt:

1. Forme F so um, dass nur die Junktoren $\neg, \wedge$ und $\vee$ vorkommen.
2. Forme weiter so um, dass Negationen nur vor atomaren Formeln vorkommen.
3. Forme mittels der Distributivgesetze weiter so um, dass eine DNF bzw. KNF entsteht.

KNF und DNF - Existenzbeweis

Die Schritte im einzelnen:
Schritt 1. Forme F so um, dass nur die Junktoren $\neg, \wedge$ und $\vee$ vorkommen, indem die anderen Junktoren durch sie ausgedrückt werden. Z.B. kann $F \Rightarrow G$ durch $\neg F \vee G$ ersetzt werden und $F \Leftrightarrow G$ durch $(\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F)$. Wir erhalten die Formel F_1.
Schritt 2. Wir formen F_1 durch wiederholte Anwendung von 'doppelte Negation' $(\neg\neg F \equiv F)$ und 'de Morgan' $(\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$ und $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G)$ so um, dass Negationen nur noch vor den Atomen vorkommen. Wir erhalten die Formel F_2.

KNF und DNF - Existenzbeweis

Schritt 3b. KNF. Wir formen F_2 durch wiederholte Anwendung des Distributivgesetzes in eine KNF um:

$$\begin{aligned}(F \vee (G \wedge H)) &\equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H)) \\ ((F \wedge G) \vee H) &\equiv ((F \vee H) \wedge (G \vee H))\end{aligned}$$

Schritt 3b. DNF. Wir formen F_2 durch wiederholte Anwendung des Distributivgesetzes in eine DNF um:

$$\begin{aligned}(F \wedge (G \vee H)) &\equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H)) \\ ((F \vee G) \wedge H) &\equiv ((F \wedge H) \vee (G \wedge H))\end{aligned}$$

KNF und DNF - Existenzbeweis

Man beachte, dass

1. In jedem Schritt Äquivalenzumformungen vorgenommen werden. Die entstehenden Formeln sind also zur ursprünglichen äquivalent (Ersetzbarkeitstheorem).
2. Jeder Schritt terminiert:
   1. Im ersten Schritt gibt es nur endlich viele $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ zu ersetzen.
   2. Im zweiten Schritt 'rutschen' die Negationen stets eine Ebene tiefer, so dass nur endlich oft umgeformt werden kann.
   3. Im dritten Schritt 'rutschen' die Disjunktionen (bei der DNF) bzw. die Konjunktionen (bei der KNF) eine Ebene höher, so dass nur endlich oft umgeformt werden kann.
3. Am Ende nach Konstruktion eine DNF bzw. eine KNF steht.

Damit haben wir ein Verfahren, das *terminiert*, eine *äquivalente* Formel liefert, die zudem in DNF bzw. KNF ist. Damit ist das Verfahren korrekt.

Verfahren für die Erstellung von KNF und DNF

1. Ersetze alle Teilformeln der Form
   - $(G \Leftrightarrow H)$ durch $(\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G)$
     bzw. $(G \wedge H) \vee (\neg G \wedge \neg H)$ [Elimination von $\Leftrightarrow$]
   - $(G \Rightarrow H)$ durch $(\neg G \vee H)$ [Elimination von $\Rightarrow$]
2. Ersetze alle Teilformeln der Form
   - $\neg\neg G$ durch G [Doppelte Negation]
   - $\neg(G \wedge H)$ durch $(\neg G \vee \neg H)$ [de Morgan]
   - $\neg(G \vee H)$ durch $(\neg G \wedge \neg H)$ [de Morgan]
3. Um die KNF zu bilden ersetze alle Teilformeln der Form
   - $(F \vee (G \wedge H))$ durch $((F \vee G) \wedge (F \vee H))$ [Distributivität]
   - $((F \wedge G) \vee H)$ durch $((F \vee H) \wedge (G \vee H))$ [Distributivität]
4. Um die DNF zu bilden ersetze alle Teilformeln der Form
   - $(F \wedge (G \vee H))$ durch $((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$ [Distributivität]
   - $((F \vee G) \wedge H)$ durch $((F \wedge H) \vee (G \wedge H))$ [Distributivität]

Verallgemeinerte Äquivalenzen

Anmerkung

Oft ist es hilfreich mit *Verallgemeinerungen* der Distributivgesetze und der Regel von de Morgan zu arbeiten. Diese können nämlich auf größere Formeln verallgemeinert werden. Für de Morgan:

- $\neg(G \wedge H \wedge I) \equiv (\neg G \vee \neg H \vee \neg I)$
- $\neg(G \vee H \vee I) \equiv (\neg G \wedge \neg H \wedge \neg I)$

Und bei den Distributivgesetzen z.B.

- $(F \wedge I) \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H) \wedge (I \vee G) \wedge (I \vee H)$
- $(F \vee I) \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H) \vee (I \wedge G) \vee (I \wedge H)$

Dies ist dann weiter auf beliebig viele Teilformeln erweiterbar.

Beispiel

Wir erstellen eine KNF zu $(A \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow D$:

$(A \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow D$	Elimination von $\Rightarrow$
$\equiv (A \wedge (\neg B \vee C)) \Rightarrow D$	Elimination von $\Rightarrow$
$\equiv \neg(A \wedge (\neg B \vee C)) \vee D$	de Morgan
$\equiv (\neg A \vee \neg(\neg B \vee C)) \vee D$	de Morgan
$\equiv (\neg A \vee (\neg\neg B \wedge \neg C)) \vee D$	Doppelte Negation
$\equiv (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \vee D$	Distributivität
$\equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee D$	Distributivität
$\equiv ((\neg A \vee B) \vee D) \wedge ((\neg A \vee \neg C) \vee D)$	Klammern
$\equiv (\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D)$	

Bemerkung

Zum Schluss (und auch zwischendurch) können Kommutativgesetze, Assoziativgesetze und Regeln wie Absorption, Idempotenz, Tautologieregeln, Kontradiktionsregeln und Komplementregeln angewendet werden, um die Formel zu vereinfachen.

Wahrheitstafelmethode

Eine weitere Möglichkeit eine DNF und eine KNF zu einer Formel zu konstruieren, geht mit **Wahrheitstafeln**.

Anmerkung

Hier ist das Problem, dass die Wahrheitstafeln sehr groß werden können und das Verfahren daher ineffizient.

Wahrheitstafelmethode - DNF

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Idee für die DNF?

Wahrheitstafelmethode - DNF

A	B	C	F	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\neg A \wedge B \wedge C$
1	0	0	1	$A \wedge \neg B \wedge \neg C$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	$A \wedge B \wedge C$

$$
\begin{aligned}
(\neg A \wedge B \wedge C) \quad &\vee \\
(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \quad &\vee \\
(A \wedge B \wedge C)
\end{aligned}
$$

Wahrheitstafelmethode - KNF

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

KNF ... ?

Wahrheitstafelmethode - KNF

A	B	C	F	
0	0	0	0	$A \vee B \vee C$
0	0	1	0	$A \vee B \vee \neg C$
0	1	0	0	$A \vee \neg B \vee C$
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	0	$\neg A \vee B \vee \neg C$
1	1	0	0	$\neg A \vee \neg B \vee C$
1	1	1	1	

$$
\begin{aligned}
(A \vee B \vee C) \quad &\wedge \\
(A \vee B \vee \neg C) \quad &\wedge \\
(A \vee \neg B \vee C) \quad &\wedge \\
(\neg A \vee B \vee \neg C) \quad &\wedge \\
(\neg A \vee \neg B \vee C) \quad &
\end{aligned}
$$

Wahrheitstafelmethode - DNF

Herstellung der DNF:

1. Erstelle pro Zeile, die zu 1 ausgewertet wird, eine duale Klausel:
   1. Wird ein Aussagesymbole A zu 1 ausgewertet, nehme A in die Klausel
   2. Wird ein Aussagesymbole A zu 0 ausgewertet, nehme $\neg A$ in die Klausel
2. Verknüpfe alle so gewonnenen dualen Klauseln mit $\vee$
3. Gibt es keine Zeile, die zu 1 ausgewertet wird, nimm die Formel $A \wedge \neg A$

Wahrheitstafelmethode - KNF

Herstellung der KNF:

1. Erstelle pro Zeile, die zu 0 ausgewertet wird, eine Klausel:
   1. Wird ein Aussagesymbole A zu 1 ausgewertet, nehme $\neg A$ in die Klausel
   2. Wird ein Aussagesymbole A zu 0 ausgewertet, nehme A in die Klausel
2. Verknüpfe alle so gewonnenen Klauseln mit $\wedge$
3. Gibt es keine Zeile, die zu 0 ausgewertet wird, nimm die Formel $A \vee \neg A$

Wahrheitstafelmethode

Korrektheit

Bei der Wahrheitstafelmethode werden offensichtlich DNFs bzw. KNFs erstellt.
Diese sind zudem äquivalent zur ursprünglichen Formel, wie man sich schnell überlegt. So erzeugt man bei der DNF mit den einzelnen dualen Klauseln gerade Formeln, die genau an der Stelle der Zeile zu 1 (sonst 0en) ausgewertet werden. Durch die $\vee$-Verknüpfung hat man dann gerade eine zur ursprünglichen Formel äquivalente Formel. Bei der Erstellung der KNF hat zunächst die einzelne Klausel gerade an der Stelle der Zeile eine 0 (sonst 1en). Durch die $\wedge$-Verknüpfung hat man dann gerade wieder eine zur ursprünglichen Formel äquivalente Formel.

Probleme ...

Definition (SAT, CNF und 3CNF)

$$\begin{aligned}
\texttt{SAT} &= \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ ist eine erfüllbare aussagenlogische Formel}\} \\
\texttt{CNF} &= \{\langle\phi\rangle \mid \langle\phi\rangle \in \texttt{SAT} \text{ und } \phi \text{ ist in KNF}\} \\
\texttt{3CNF} &= \{\langle\phi\rangle \mid \langle\phi\rangle \in \texttt{CNF} \text{ und jede Klausel von } \phi \\
&\qquad \text{hat genau drei verschiedene Literale}\}
\end{aligned}$$

Theorem

SAT, CNF und 3CNF sind NP-vollständig.

Ausblick

Ausblick

Im weiteren Verlauf wird es darum gehen trotz dieser Hürde sinnvolle Entscheidungsverfahren für das zentrale (Un-)Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik und weiterer Logiken zu finden.

In späteren Logiken sind es meist nur noch Semientscheidungsverfahren. Dennoch sind auch diese wichtig, insb. da das Problem in so wichtigen Bereichen wie z.B. Datenbanken, KI und Verifikation eine zentrale Rolle spielt.

Zusammenfassung

1. Syntax & Semantik der Aussagenlogik
2. Folgerbarkeit, Äquivalenz (+ Beweise)
3. Normalformen (KNF, DNF)
   - Ersetzbarkeitstheorem (+ Beweis)
   - KNF und DNF erstellen (+ Beweis)
4. `SAT` ist NP-vollständig