



Deterministische Turing-Maschinen (DTM)



Turing-Machine

Wir suchen ein Modell zur formalen Definition

- der **Berechenbarkeit** von Funktionen und
- deren **Zeit-** und **Platzbedarf**.

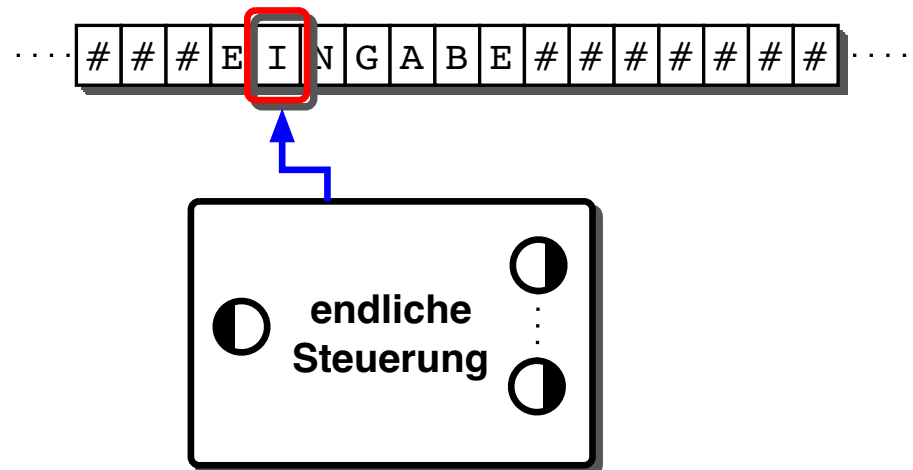
⇒ Verschiedene Modelle existieren:

- Turing-Maschine
- λ -Definierbarkeit
- μ -Rekursivität
- WHILE-Programme
- ...



TM allgemein

... schematische
Darstellung einer
TM mit beidseitig
unendlichem
Band:



- Wie sehen die Kanten aus?
- Was kann mit dem Arbeitsband passieren?
- Was ist die Akzeptierbedingung?
- Wird etwas ausgegeben? (wichtig für die Definition der Berechenbarkeit!)



Definition: DTM

Eine **deterministische Turing-Maschine** (DTM) wird beschrieben durch $A := (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_{\text{end}})$, wobei:

- Z endliche Menge *(Zustände)*
- Γ endliche Menge *(Bandalphabet)*
- Σ endliche Menge *(Eingabealphabet)*
mit $\Sigma \subsetneq \Gamma$, und $\Gamma \cap Z = \emptyset$
- $\# \in \Gamma \setminus \Sigma$ *(Symbol für das unbeschriebene Feld)*

... **gemeint:** jedes „Nicht-Eingabe-Feld“ mit $\#$ initialisiert.



Definition: DTM (Forts.)

Eine **deterministische Turing-Maschine** (DTM) wird beschrieben durch $A := (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_{\text{end}})$, wobei:

- $q_0 \in Z$ *(Startzustand)*
- $Z_{\text{end}} \subseteq Z$ *(Endzustände)*
- $\delta : (Z \times \Gamma) \rightarrow (\Gamma \times \{L, R, H\} \times Z)$ *(Übergangsfunktion)*
 - ... bestimmt zum **aktuellen Zustand** und **Bandsymbol** den **Folgezustand** mit **neuer Bandinschrift/Kopfposition**.



Konfigurationen einer DTM

Allgemein wird ein Systemzustand vollständig beschrieben durch:

- Spezifikation der Struktur des Systems
(die DTM)
- Angabe des Systemzustandes
(der Zustand der endlichen Steuerung und die Kopfposition)
- Angabe des Speicherinhaltes
(die Bandinschrift)

⇒ Konfiguration einer DTM: $(u, q, v) \in \Gamma^* \times Z \times \Gamma^*$



Eigenschaften der DTM

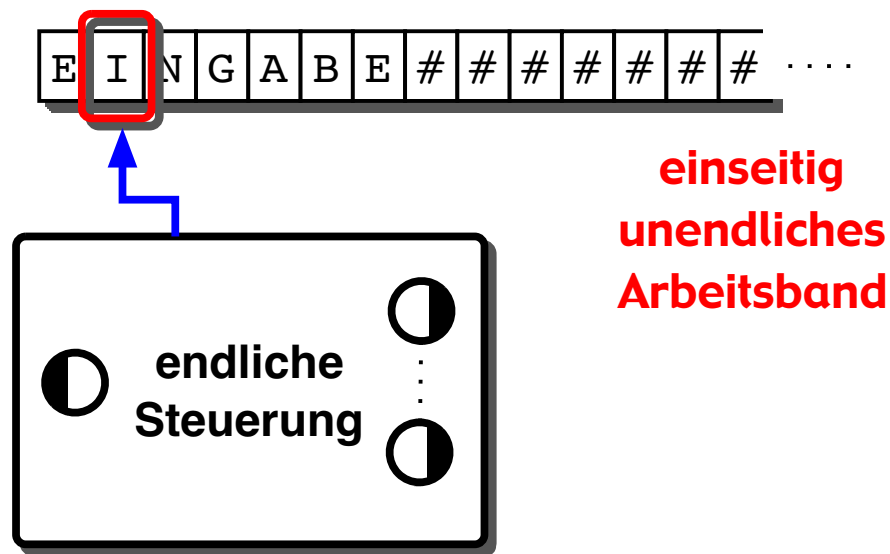
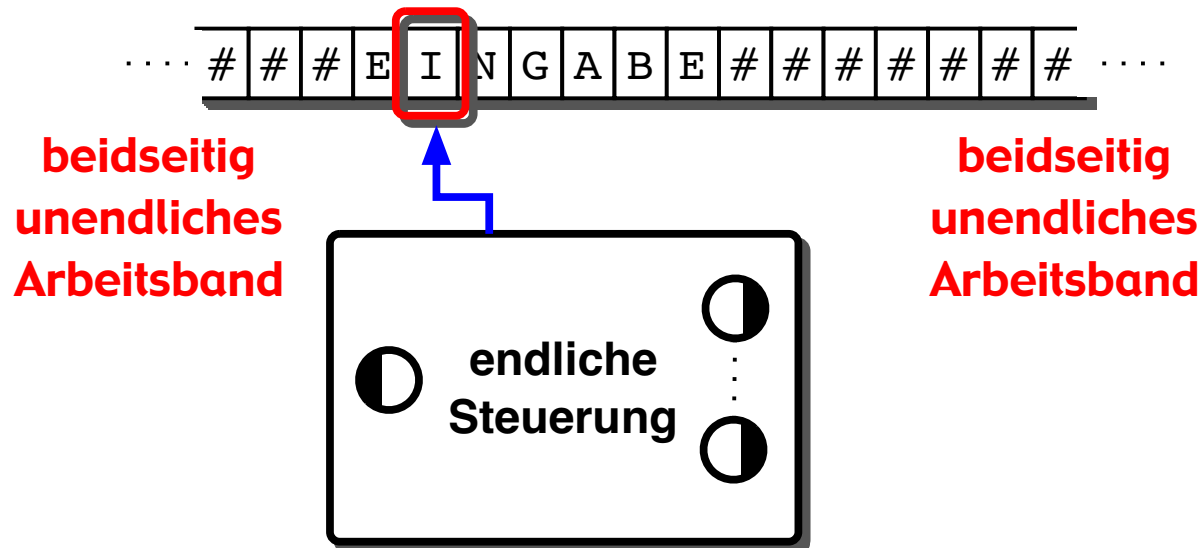
- Die Übergangsfunktion darf partiell sein (d.h. sie darf Definitionslücken enthalten)!
- Folgezustände/Folgekonfigurationen sind eindeutig bestimmt.
- Es gibt genau einen Startzustand.

Es gibt Varianten, die sich bzgl. der Berechenbarkeit als äquivalent erweisen:

- einseitig unendliches Band
- beidseitig unendliches Band
- mehrere Arbeitsbänder

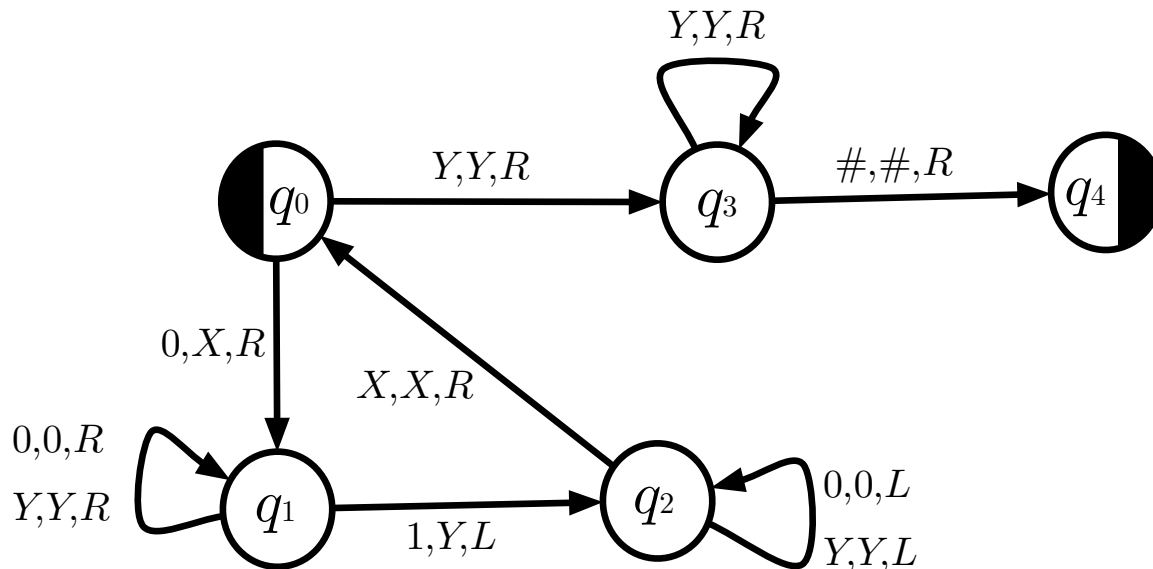


TM-Varianten

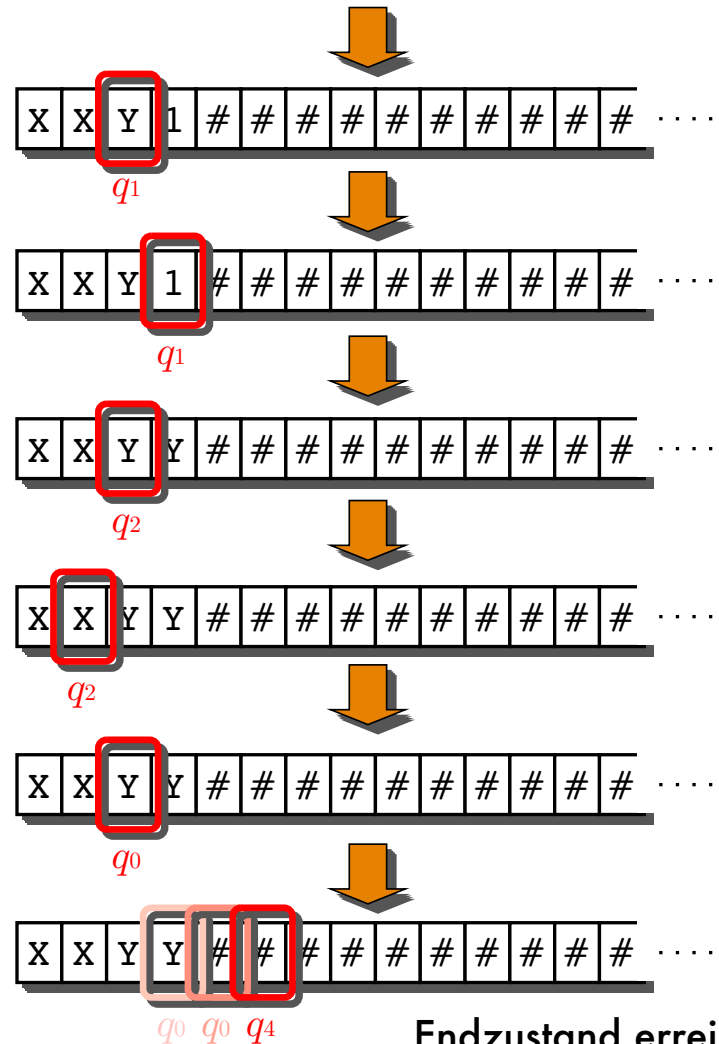
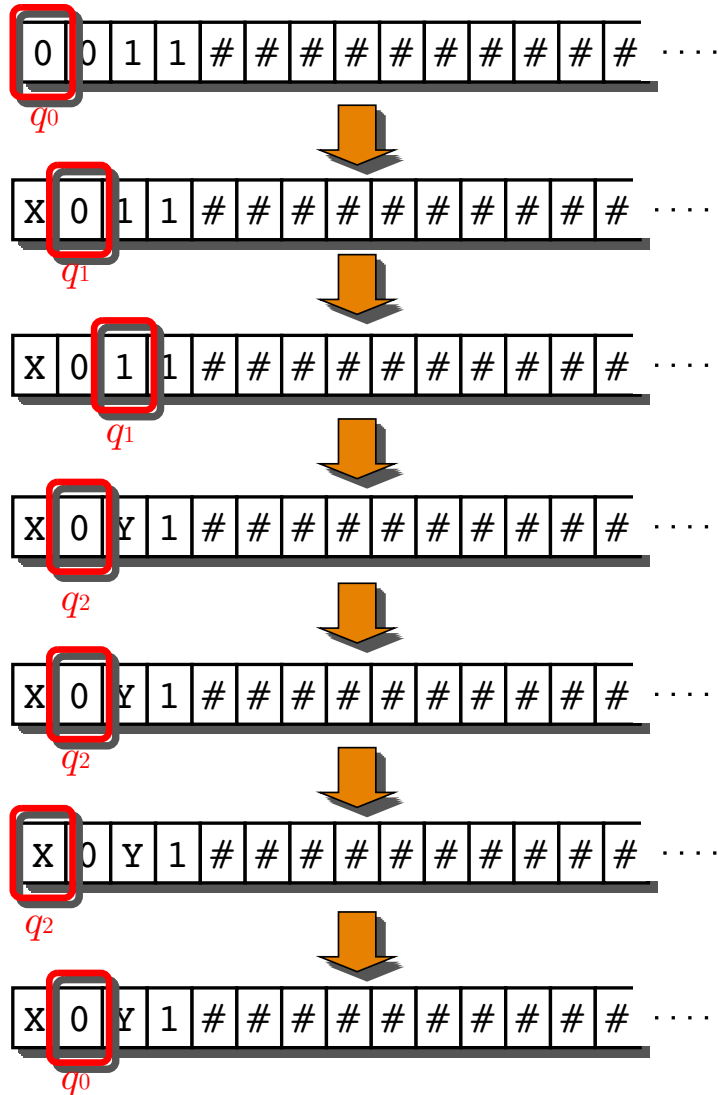


Beispiel: $0^n 1^n$

Zustand	0	1	X	Y	#
q_0	(X, R, q_1)	—	—	(Y, R, q_3)	—
q_1	$(0, R, q_1)$	(Y, L, q_2)	—	(Y, R, q_1)	—
q_2	$(0, L, q_2)$	—	(X, R, q_0)	(Y, L, q_2)	—
q_3	—	—	—	(Y, R, q_3)	$(\#, R, q_4)$
q_4	—	—	—	—	—



Konfigurationsübergänge



Endzustand erreicht!

Definition: Konfiguration

$w \in \Gamma^* \cdot Z \cdot \Gamma^*$ heißt **Konfiguration** gdw.

- $w = upv$ mit $u, v \in \Gamma^*$ und $p \in Z$:
- A befindet sich im Zustand p , die Bandinschrift ist uv und der Kopf steht auf dem ersten Zeichen von v . Falls $v = \lambda$, so ist $\#$ unter dem Kopf.
- Falls $v \neq \lambda$, dann ist $v \in \Gamma^* \cdot (\Gamma \setminus \{\#\})$, d.h. ganz rechts in v steht nicht das Symbol $\#$ und rechts von v sind nur noch $\#$'s auf dem Band.
- Entsprechend für u : Falls $u \neq \lambda$, dann ist $u \in (\Gamma \setminus \{\#\})\Gamma^*$, d.h. ganz links von u steht nicht $\#$ und links von u sind nur noch $\#$'s.



Konfigurationsübergang

- $KONF_M$ bezeichnet die **Menge aller Konfigurationen** der Turing-Maschine M .

- Für eine DTM A ist die **Schrittrelation** $\vdash_A \subseteq KONF_A \times KONF_A$ erklärt durch:

$w \vdash_A w'$ gilt genau dann, wenn für $w = uypxv$ mit $u, v \in \Gamma^*$, $x, y, z \in \Gamma$ und $p, q \in Z$, folgendes gilt:

$$w' = \begin{cases} uqyzv, & \text{falls } \delta(p, x) = (z, L, q) \\ uyzqv, & \text{falls } \delta(p, x) = (z, R, q) \\ uyqzv, & \text{falls } \delta(p, x) = (z, H, q) \end{cases}$$



Weitere Begriffe

- Mit $\vdash_A^*$ wird die reflexive, transitive Hülle von $\vdash_A$ bezeichnet.
- Folgen von Konfigurationen $k_1, k_2, k_3, \dots, k_i, k_{i+1}, \dots$, die in der Relation $k_1 \vdash k_2 \vdash \dots \vdash k_i \vdash k_{i+1} \vdash \dots$ stehen, heißen **Rechnungen**.
- Endliche Rechnungen $k_1 \vdash k_2 \vdash \dots \vdash k_t$ heißen **Erfolgsrechnungen**, wenn $k_1 \in \Gamma^* \cdot \{q_0\} \cdot \Gamma^*$ und $k_t \in \Gamma^* \cdot Z_{\text{end}} \cdot \Gamma^*$ ist.



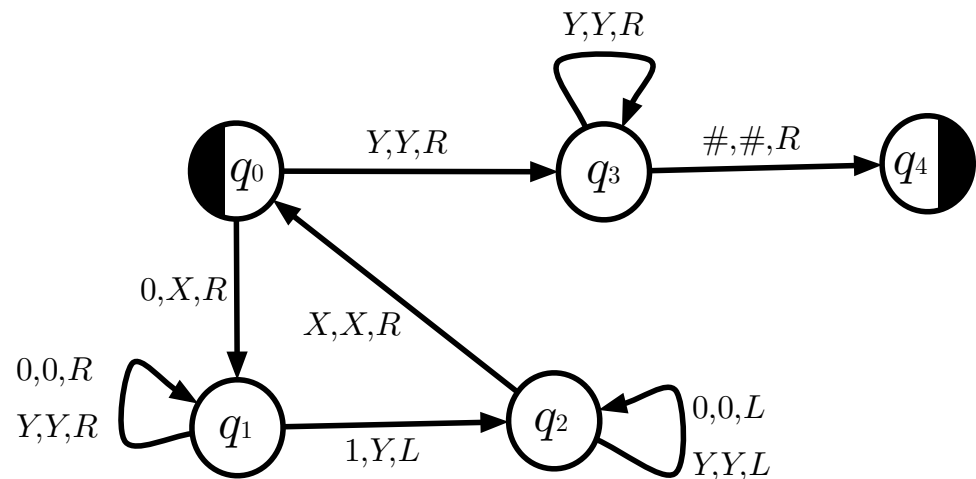
Definition: akzeptierte Sprache

Für die DTM $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_{\text{end}})$ bezeichnet $L(A)$ die **von A akzeptierte Sprache**:

$$L(A) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Gamma^* \exists q \in Z_{\text{end}} : q_0 w \vdash^* uqv\}$$

Für das obige
Beispiel:

$$L(A) = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$



Definition: Turing-Berechenbarkeit

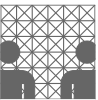
Sei Σ ein Alphabet.

Eine (Wort-)Funktion $f : \Sigma^* \xrightarrow[p]{\quad} \Sigma^*$ heißt

(Turing-)berechenbar oder **partiell rekursiv**
gdw. es eine DTM $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_{\text{end}})$ gibt
mit:

$q_0 w \vdash_A^* q_e v$, für $q_e \in Z_{\text{end}}$ gdw. $f(w) = v$ ist.

... der Funktionswert steht *ab der Kopfposition*
als einziges (abgesehen von #’s) auf dem Band!



Definition: Berechenbarkeit auf $\mathbb{N}$

Seien $r, s \in \mathbb{N}$ und $r, s \geq 1$.

Eine (partielle) Funktion $f : \mathbb{N}^r \xrightarrow[p]{} \mathbb{N}^s$ heißt

(Turing-)berechenbar oder **partiell rekursiv**

gdw. eine DTM $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_{\text{end}})$ existiert

mit $q_0 0^{m_1+1} 1 \dots 10^{m_r+1} \vdash_A^* p 0^{n_1+1} 10^{n_2+1} 1 \dots 10^{n_s+1}$

und $p \in Z_{\text{end}}$ sowie

$$f(m_1, m_2, \dots, m_r) = (n_1, n_2, \dots, n_s)$$

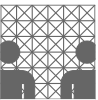
gdw. der Funktionswert definiert ist.



Beispiele berechenbarer Funktionen

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x) := x + 1$ (Nachfolger)
- $f : \{1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ mit $f(w) := v$ mit $[w]_1 = [v]_2$
(unär→binär Konversion)
- $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x, y) := x + y$ (Summe)
- $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x, y) := x \cdot y$ (Produkt)
- $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x, y) := x^y$
(Exponentiation)

... aber nicht alle Funktionen sind berechenbar!!!



Existenz nicht berechenbarer Fkt.

- DTM als endliche Zeichenkette darstellbar
 $\Rightarrow$ Menge aller DTM abzählbar.
- Ist die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ abzählbar? (**Annahme:** JA! $\Rightarrow f_1, f_2, f_3, \dots$)
- Definiere $g : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ durch

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } f_x(x) = 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

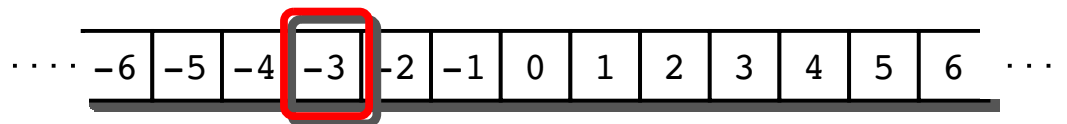
- Dann gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : g \neq f_n$ **Widerspruch!!!**

Also muß es nicht berechenbare Funktion geben!

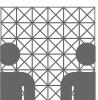
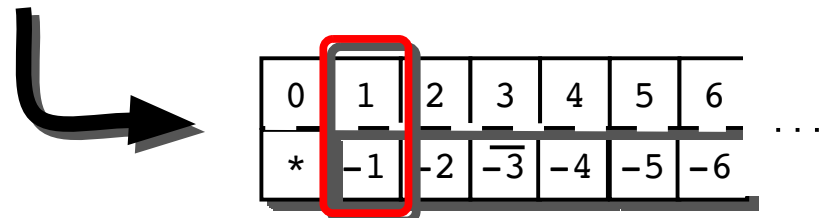


beidseitig vs. einseitig unendl. Band

- Zwei Turingmaschinen A und B heißen genau dann **äquivalent**, wenn sie die gleiche Sprache akzeptieren, d.h. $L(A) = L(B)$ gilt.
- Zu jeder DTM A mit *beidseitig* unendlichem Arbeitsband gibt es eine äquivalente DTM B mit *einseitig* unendlichem Arbeitsband und umgekehrt.



Beweisidee:
„Spuren-
bildung“

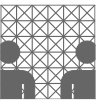


Darstellung von Turing-Maschinen

- graphisch als Zustandsübergangsdiagramm
- als Tabelle
- als Turingtafel (δ als Relation
 $\subseteq Z \times Y \times Y \times \{L, H, R\} \times Z$ geschrieben)

... sind alles Darstellungsvarianten für ein und dasselbe mathematische Modell!

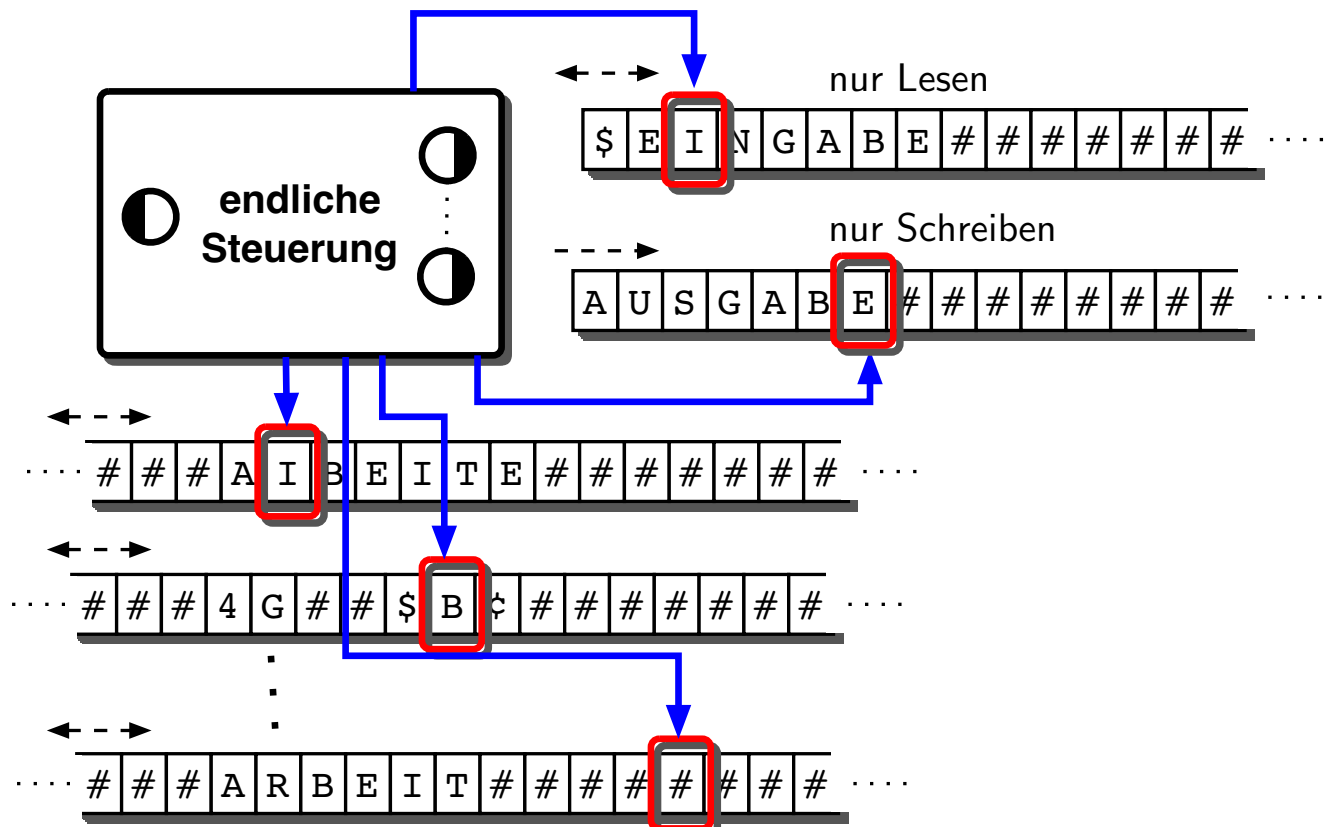
... und dann gibt es noch die „höhersprachliche“ Variante mit mehreren Bändern ...



Mehr-Band = 1-Band

... dieselbe Idee führt zum Ergebnis:

Zu jeder deterministischen k -Band off-line Turing-Maschine A mit $k \geq 1$ gibt es eine äquivalente DTM B mit nur einem Band.



nichtdeterministische TM

$M = (Z, \Sigma, \Gamma, K, q_0, Z_{\text{end}})$ heißt
nichtdeterministische Turingmaschine (NTM),
wenn zu jedem Paar $(p, y) \in Z \times \Gamma$ eine endliche
Zahl von Übergängen möglich ist:

$$\delta : Z \times \Gamma \longrightarrow 2^{\Gamma \times \{L, R, H\} \times Z}$$

Alles andere, wie bei der DTM.



NTM-Übergangsrelation

Alternativ zu δ :Kanten als Relation K

$$K \subseteq Z \times \Gamma \times \Gamma \times \{L, R, H\} \times Z$$

... zu einem Zustand q und einem Symbol x unter dem Kopf kann es mehrere verschiedene Möglichkeiten für die Folgekonfiguration geben.

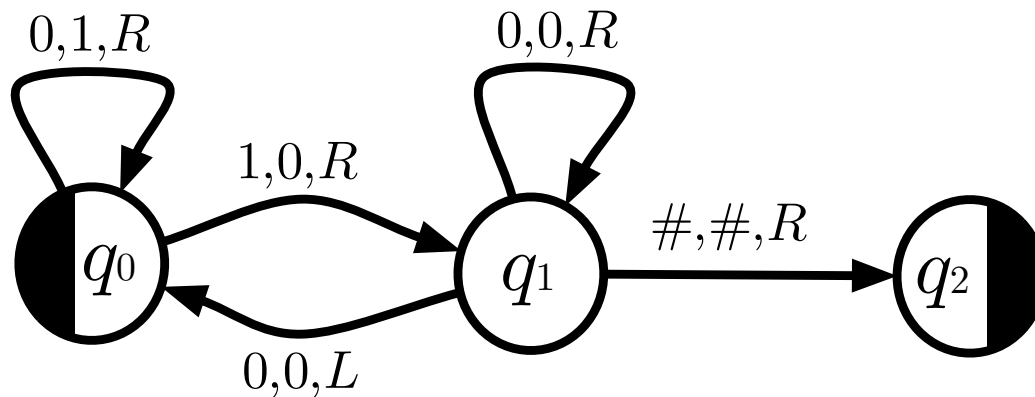
... zum Beispiel:

(q, A, A, R, q') und $(q, A, \#, H, q'')$ könnten beide in K sein!



Beispiel: NTM

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \#\}, \delta, q_0, \#, \{q_2\})$$



Zustand	0	1	#
q_0	$\{(1, R, q_0)\}$	$\{(0, R, q_1)\}$	$\emptyset$
q_1	$\{(0, R, q_1), (0, L, q_0)\}$	$\{(1, R, q_1), (1, L, q_0)\}$	$\{(\#, R, q_2)\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Aufgabe: Welche Konfigurationen sind bei Eingabe von 01 (bzw. 100) erreichbar?



Entscheidbarkeit/Beweisbarkeit

