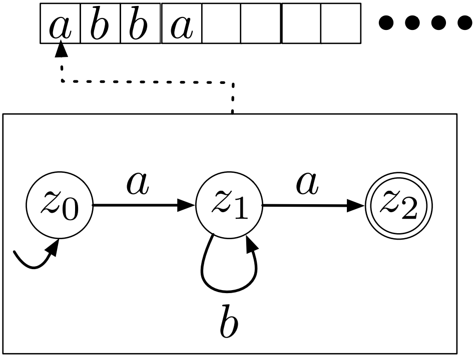
Formale Grundlagen der Informatik 1
Kapitel 9

Turing-Maschinen

Frank Heitmann
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

2. Mai 2016

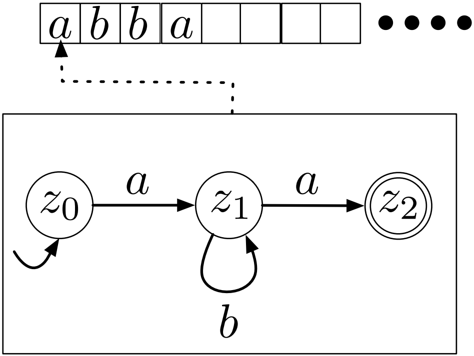
Vom DFA zur TM



Wir wollen

- auf dem Band nach rechts **und** links gehen können und
- auf dem Band lesen **und** schreiben können.

Vom DFA zur TM



Wir wollen

- auf dem Band nach rechts **und** links gehen können und
- auf dem Band lesen **und** schreiben können.

Bedeutung der TM

Das genügt schon, um zur **Turing-Maschine** (TM) zu gelangen.

Zur Bedeutung

Die Turing-Maschine gilt als abstraktes Modell dessen, was von jeder Maschine und jedem Menschen berechenbar ist.

Was eine Turing-Maschine nicht kann, kann also auch kein Mensch! (So die **Church-Turing-These**...)

Motivation

Die TM ist daher geeignet, um sich über Möglichkeiten und Grenzen des Berechenbaren Gedanken zu machen. (Später mehr dazu ...)

Bedeutung der TM

Das genügt schon, um zur **Turing-Maschine** (TM) zu gelangen.

Zur Bedeutung

Die Turing-Maschine gilt als abstraktes Modell dessen, was von jeder Maschine und jedem Menschen berechenbar ist.

Was eine Turing-Maschine nicht kann, kann also auch kein Mensch! (So die **Church-Turing-These**...)

Motivation

Die TM ist daher geeignet, um sich über Möglichkeiten und Grenzen des Berechenbaren Gedanken zu machen. (Später mehr dazu ...)

Bedeutung der TM

Das genügt schon, um zur **Turing-Maschine** (TM) zu gelangen.

Zur Bedeutung

Die Turing-Maschine gilt als abstraktes Modell dessen, was von jeder Maschine und jedem Menschen berechenbar ist.

Was eine Turing-Maschine nicht kann, kann also auch kein Mensch! (So die **Church-Turing-These**...)

Motivation

Die TM ist daher geeignet, um sich über Möglichkeiten und Grenzen des Berechenbaren Gedanken zu machen. (Später mehr dazu ...)

Der Lese-/Schreibkopf

Anmerkung

- Während DFA und PDA nur lesen konnten, kann die TM auch schreiben. Sie hat dazu einen **Lese-/Schreibkopf** (LSK). Dieser tritt (wie der Lesekopf beim DFA) nicht in der formalen Beschreibung auf. In der informalen ist er aber wichtig.
- Der LSK ist stets über dem aktuellem Symbol auf dem Band positioniert.
- Das (Eingabe-)Band ist nach links und rechts hin unendlich.

Der Lese-/Schreibkopf

Anmerkung

- Während DFA und PDA nur lesen konnten, kann die TM auch schreiben. Sie hat dazu einen **Lese-/Schreibkopf** (LSK). Dieser tritt (wie der Lesekopf beim DFA) nicht in der formalen Beschreibung auf. In der informalen ist er aber wichtig.
- Der LSK ist stets über dem aktuellem Symbol auf dem Band positioniert.
- Das (Eingabe-)Band ist nach links und rechts hin unendlich.

Der Lese-/Schreibkopf

Anmerkung

- Während DFA und PDA nur lesen konnten, kann die TM auch schreiben. Sie hat dazu einen **Lese-/Schreibkopf** (LSK). Dieser tritt (wie der Lesekopf beim DFA) nicht in der formalen Beschreibung auf. In der informalen ist er aber wichtig.
- Der LSK ist stets über dem aktuellem Symbol auf dem Band positioniert.
- Das (Eingabe-)Band ist nach links und rechts hin unendlich.

TM formal

Definition (Deterministische TM)

Eine **deterministische Turing-Maschine** (kurz DTM) ist ein 6-Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, Z_{end})$ mit

- Der endlichen Menge von **Zuständen** Z.
- Dem endlichen Alphabet Σ von **Eingabesymbolen**.
- Dem endlichen Alphabet Γ von **Bandsymbolen**, wobei $\Gamma \supsetneq \Sigma$ und $\Gamma \cap Z = \emptyset$ gilt.
- Der (partiellen) **Überführungsfunktion** $\delta : (Z \times \Gamma) \to (\Gamma \times \{L, R, H\} \times Z)$.
- Dem **Startzustand** $z_0 \in Z$.
- Der Menge der **Endzustände** $Z_{end} \subseteq Z$.
- Dem **Symbol für das leere Feld** $\# \in \Gamma \setminus \Sigma$.

TM formal

Definition (Deterministische TM)

Eine **deterministische Turing-Maschine** (kurz DTM) ist ein 6-Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, Z_{end})$ mit

- Der endlichen Menge von **Zuständen** Z.
- Dem endlichen Alphabet Σ von **Eingabesymbolen**.
- Dem endlichen Alphabet Γ von **Bandsymbolen**, wobei $\Gamma \supsetneq \Sigma$ und $\Gamma \cap Z = \emptyset$ gilt.
- Der (partiellen) **Überführungsfunktion** $\delta : (Z \times \Gamma) \to (\Gamma \times \{L, R, H\} \times Z)$.
- Dem **Startzustand** $z_0 \in Z$.
- Der Menge der **Endzustände** $Z_{end} \subseteq Z$.
- Dem **Symbol für das leere Feld** $\# \in \Gamma \setminus \Sigma$.

TM formal

Definition (Deterministische TM)

Eine **deterministische Turing-Maschine** (kurz DTM) ist ein 6-Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, Z_{end})$ mit

- Der endlichen Menge von **Zuständen** Z.
- Dem endlichen Alphabet Σ von **Eingabesymbolen**.
- Dem endlichen Alphabet Γ von **Bandsymbolen**, wobei $\Gamma \supsetneq \Sigma$ und $\Gamma \cap Z = \emptyset$ gilt.
- Der (partiellen) **Überführungsfunktion** $\delta : (Z \times \Gamma) \to (\Gamma \times \{L, R, H\} \times Z)$.
- Dem **Startzustand** $z_0 \in Z$.
- Der Menge der **Endzustände** $Z_{end} \subseteq Z$.
- Dem **Symbol für das leere Feld** $\# \in \Gamma \setminus \Sigma$.

TM formal

Definition (Deterministische TM)

Eine **deterministische Turing-Maschine** (kurz DTM) ist ein 6-Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, Z_{end})$ mit

- Der endlichen Menge von **Zuständen** Z.
- Dem endlichen Alphabet Σ von **Eingabesymbolen**.
- Dem endlichen Alphabet Γ von **Bandsymbolen**, wobei $\Gamma \supsetneq \Sigma$ und $\Gamma \cap Z = \emptyset$ gilt.
- Der (partiellen) **Überführungsfunktion** $\delta : (Z \times \Gamma) \to (\Gamma \times \{L, R, H\} \times Z)$.
- Dem **Startzustand** $z_0 \in Z$.
- Der Menge der **Endzustände** $Z_{end} \subseteq Z$.
- Dem **Symbol für das leere Feld** $\# \in \Gamma \setminus \Sigma$.

TM formal

Definition (Deterministische TM)

Eine **deterministische Turing-Maschine** (kurz DTM) ist ein 6-Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, Z_{end})$ mit

- Der endlichen Menge von **Zuständen** Z.
- Dem endlichen Alphabet Σ von **Eingabesymbolen**.
- Dem endlichen Alphabet Γ von **Bandsymbolen**, wobei $\Gamma \supsetneq \Sigma$ und $\Gamma \cap Z = \emptyset$ gilt.
- Der (partiellen) **Überführungsfunktion** $\delta : (Z \times \Gamma) \to (\Gamma \times \{L, R, H\} \times Z)$.
- Dem **Startzustand** $z_0 \in Z$.
- Der Menge der **Endzustände** $Z_{end} \subseteq Z$.
- Dem **Symbol für das leere Feld** $\# \in \Gamma \setminus \Sigma$.

TM formal

Definition (Deterministische TM)

Eine **deterministische Turing-Maschine** (kurz DTM) ist ein 6-Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, Z_{end})$ mit

- Der endlichen Menge von **Zuständen** Z.
- Dem endlichen Alphabet Σ von **Eingabesymbolen**.
- Dem endlichen Alphabet Γ von **Bandsymbolen**, wobei $\Gamma \supsetneq \Sigma$ und $\Gamma \cap Z = \emptyset$ gilt.
- Der (partiellen) **Überführungsfunktion** $\delta : (Z \times \Gamma) \to (\Gamma \times \{L, R, H\} \times Z)$.
- Dem **Startzustand** $z_0 \in Z$.
- Der Menge der **Endzustände** $Z_{end} \subseteq Z$.
- Dem **Symbol für das leere Feld** $\# \in \Gamma \setminus \Sigma$.

TM formal

Definition (Deterministische TM)

Eine **deterministische Turing-Maschine** (kurz DTM) ist ein 6-Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, Z_{end})$ mit

- Der endlichen Menge von **Zuständen** Z.
- Dem endlichen Alphabet Σ von **Eingabesymbolen**.
- Dem endlichen Alphabet Γ von **Bandsymbolen**, wobei $\Gamma \supsetneq \Sigma$ und $\Gamma \cap Z = \emptyset$ gilt.
- Der (partiellen) **Überführungsfunktion** $\delta : (Z \times \Gamma) \to (\Gamma \times \{L, R, H\} \times Z)$.
- Dem **Startzustand** $z_0 \in Z$.
- Der Menge der **Endzustände** $Z_{end} \subseteq Z$.
- Dem **Symbol für das leere Feld** $\# \in \Gamma \setminus \Sigma$.

TM formal (alternative)

Kantenrelation

Statt der Überführungsfunktion δ kann auch mit einer Relation

$$K \subseteq Z \times \Gamma \times \Gamma \times \{L, R, H\} \times Z$$

gearbeitet werden.

Dabei gibt es dann im deterministischem Fall aber

- zu jedem Pärchen $(z, x) \in Z \times \Gamma$
- nur maximal ein Tripel (x', B, z') derart, dass $(z, x, x', B, z') \in K$ gilt.

TM formal (alternative)

Kantenrelation

Statt der Überführungsfunktion δ kann auch mit einer Relation

$$K \subseteq Z \times \Gamma \times \Gamma \times \{L, R, H\} \times Z$$

gearbeitet werden.
Dabei gibt es dann im deterministischem Fall aber

- zu jedem Pärchen $(z, x) \in Z \times \Gamma$
- nur maximal ein Tripel (x', B, z') derart, dass $(z, x, x', B, z') \in K$ gilt.

TM formal (alternative)

Kantenrelation

Statt der Überführungsfunktion δ kann auch mit einer Relation

$$K \subseteq Z \times \Gamma \times \Gamma \times \{L, R, H\} \times Z$$

gearbeitet werden.

Dabei gibt es dann im deterministischem Fall aber

- zu jedem Pärchen $(z, x) \in Z \times \Gamma$
- nur maximal ein Tripel (x', B, z') derart, dass $(z, x, x', B, z') \in K$ gilt.

Die Überführungsfunktion

Mit $\delta(z, x) = (x', B, z')$ ist gemeint, dass, wenn

- die TM im Zustand z ist und
- der LSK gerade über einem Feld mit dem Symbol x ist,
- nun das x durch x' überschrieben wird,
- dann der LSK nach $B \in \{L, R, H\}$ bewegt wird
  - L ist nach links bewegen,
  - R nach rechts und
  - H den LSK an der Stelle halten
- und in den Zustand z' gewechselt wird.

Wichtige Anmerkung

Ist $B = H$, so bedeutet dies nur, dass der LSK sich nicht bewegt. Es heißt nicht, dass die TM anhält (wichtig für später).

Die Überführungsfunktion

Mit $\delta(z, x) = (x', B, z')$ ist gemeint, dass, wenn

- die TM im Zustand z ist und
- der LSK gerade über einem Feld mit dem Symbol x ist,
- nun das x durch x' überschrieben wird,
- dann der LSK nach $B \in \{L, R, H\}$ bewegt wird
  - L ist nach links bewegen,
  - R nach rechts und
  - H den LSK an der Stelle halten
- und in den Zustand z' gewechselt wird.

Wichtige Anmerkung

Ist $B = H$, so bedeutet dies nur, dass der LSK sich nicht bewegt. Es heißt nicht, dass die TM anhält (wichtig für später).

Die Überführungsfunktion

Mit $\delta(z, x) = (x', B, z')$ ist gemeint, dass, wenn

- die TM im Zustand z ist und
- der LSK gerade über einem Feld mit dem Symbol x ist,
- nun das x durch x' überschrieben wird,
- dann der LSK nach $B \in \{L, R, H\}$ bewegt wird
  - L ist nach links bewegen,
  - R nach rechts und
  - H den LSK an der Stelle halten
- und in den Zustand z' gewechselt wird.

Wichtige Anmerkung

Ist $B = H$, so bedeutet dies nur, dass der LSK sich nicht bewegt. Es heißt nicht, dass die TM anhält (wichtig für später).

Die Überführungsfunktion

Mit $\delta(z, x) = (x', B, z')$ ist gemeint, dass, wenn

- die TM im Zustand z ist und
- der LSK gerade über einem Feld mit dem Symbol x ist,
- nun das x durch x' überschrieben wird,
- dann der LSK nach $B \in \{L, R, H\}$ bewegt wird
  - L ist nach links bewegen,
  - R nach rechts und
  - H den LSK an der Stelle halten
- und in den Zustand z' gewechselt wird.

Wichtige Anmerkung

Ist $B = H$, so bedeutet dies nur, dass der LSK sich nicht bewegt. Es heißt nicht, dass die TM anhält (wichtig für später).

Die Überführungsfunktion

Mit $\delta(z, x) = (x', B, z')$ ist gemeint, dass, wenn

- die TM im Zustand z ist und
- der LSK gerade über einem Feld mit dem Symbol x ist,
- nun das x durch x' überschrieben wird,
- dann der LSK nach $B \in \{L, R, H\}$ bewegt wird
  - L ist nach links bewegen,
  - R nach rechts und
  - H den LSK an der Stelle halten
- und in den Zustand z' gewechselt wird.

Wichtige Anmerkung

Ist $B = H$, so bedeutet dies nur, dass der LSK sich nicht bewegt. Es heißt nicht, dass die TM anhält (wichtig für später).

Die Überführungsfunktion

Mit $\delta(z, x) = (x', B, z')$ ist gemeint, dass, wenn

- die TM im Zustand z ist und
- der LSK gerade über einem Feld mit dem Symbol x ist,
- nun das x durch x' überschrieben wird,
- dann der LSK nach $B \in \{L, R, H\}$ bewegt wird
  - L ist nach links bewegen,
  - R nach rechts und
  - H den LSK an der Stelle halten
- und in den Zustand z' gewechselt wird.

Wichtige Anmerkung

Ist $B = H$, so bedeutet dies nur, dass der LSK sich nicht bewegt. Es heißt nicht, dass die TM anhält (wichtig für später).

TM informal

Zusammengefasst:

- Die TM hat endlich viele Zustände.
- Sie hat ein Eingabealphabet, aus dessen Buchstaben die Eingabewörter aufgebaut sind.
- Sie hat ein (größeres) Bandalphabet, mit weiteren Symbolen, die benutzt werden können. Dieses enthält mindestens noch das spezielle Symbol $\#$.
- Das Eingabeband ist beidseitig unendlich. Zu Anfang steht das Eingabewort auf diesem Band und der LSK ist auf dem ersten Symbol. Links und rechts vom Eingabewort folgen unendlich viele $\#$.
- Die TM liest nicht nur das Eingabewort, sondern kann auch auf dem Eingabeband mit dem LSK nach links und rechts wandern und die Symbole manipulieren.

TM informal

Zusammengefasst:

- Die TM hat endlich viele Zustände.
- Sie hat ein Eingabealphabet, aus dessen Buchstaben die Eingabewörter aufgebaut sind.
- Sie hat ein (größeres) Bandalphabet, mit weiteren Symbolen, die benutzt werden können. Dieses enthält mindestens noch das spezielle Symbol $\#$.
- Das Eingabeband ist beidseitig unendlich. Zu Anfang steht das Eingabewort auf diesem Band und der LSK ist auf dem ersten Symbol. Links und rechts vom Eingabewort folgen unendlich viele $\#$.
- Die TM liest nicht nur das Eingabewort, sondern kann auch auf dem Eingabeband mit dem LSK nach links und rechts wandern und die Symbole manipulieren.

TM informal

Zusammengefasst:

- Die TM hat endlich viele Zustände.
- Sie hat ein Eingabealphabet, aus dessen Buchstaben die Eingabewörter aufgebaut sind.
- Sie hat ein (größeres) Bandalphabet, mit weiteren Symbolen, die benutzt werden können. Dieses enthält mindestens noch das spezielle Symbol $\#$.
- Das Eingabeband ist beidseitig unendlich. Zu Anfang steht das Eingabewort auf diesem Band und der LSK ist auf dem ersten Symbol. Links und rechts vom Eingabewort folgen unendlich viele $\#$.
- Die TM liest nicht nur das Eingabewort, sondern kann auch auf dem Eingabeband mit dem LSK nach links und rechts wandern und die Symbole manipulieren.

TM informal

Zusammengefasst:

- Die TM hat endlich viele Zustände.
- Sie hat ein Eingabealphabet, aus dessen Buchstaben die Eingabewörter aufgebaut sind.
- Sie hat ein (größeres) Bandalphabet, mit weiteren Symbolen, die benutzt werden können. Dieses enthält mindestens noch das spezielle Symbol $\#$.
- Das Eingabeband ist beidseitig unendlich. Zu Anfang steht das Eingabewort auf diesem Band und der LSK ist auf dem ersten Symbol. Links und rechts vom Eingabewort folgen unendlich viele $\#$.
- Die TM liest nicht nur das Eingabewort, sondern kann auch auf dem Eingabeband mit dem LSK nach links und rechts wandern und die Symbole manipulieren.

TM informal

Zusammengefasst:

- Die TM hat endlich viele Zustände.
- Sie hat ein Eingabealphabet, aus dessen Buchstaben die Eingabewörter aufgebaut sind.
- Sie hat ein (größeres) Bandalphabet, mit weiteren Symbolen, die benutzt werden können. Dieses enthält mindestens noch das spezielle Symbol $\#$.
- Das Eingabeband ist beidseitig unendlich. Zu Anfang steht das Eingabewort auf diesem Band und der LSK ist auf dem ersten Symbol. Links und rechts vom Eingabewort folgen unendlich viele $\#$.
- Die TM liest nicht nur das Eingabewort, sondern kann auch auf dem Eingabeband mit dem LSK nach links und rechts wandern und die Symbole manipulieren.

Konfiguration einer TM

Definition (Konfiguration)

Ein Wort $w \in \Gamma^* \cdot Z \cdot \Gamma^*$ heißt **Konfiguration** der TM $A := (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, Z_{end})$. Ist $w = uzv$ mit $z \in Z$ und $u, v \in \Gamma^*$, dann ist

- A im Zustand z,
- die Bandinschrift ist uv (links/rechts davon nur #)
- und das erste Symbol von v ist unter dem LSK. (Ist $v = \lambda$, so ist # unter dem LSK. Ist $v \neq \lambda$, so ist $v \in \Gamma^*(\Gamma \setminus \{\#\})$. Ebenso ist im Fall $u \neq \lambda$ dann $u \in (\Gamma \setminus \{\#\})\Gamma^*$. Bei $v = \lambda$ oder $u = \lambda$ wird manchmal links bzw. rechts von z noch ein # notiert.)

Die Menge aller Konfigurationen der TM M ist KONF_M.

Konfiguration einer TM

Definition (Konfiguration)

Ein Wort $w \in \Gamma^* \cdot Z \cdot \Gamma^*$ heißt **Konfiguration** der TM $A := (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, Z_{end})$. Ist $w = uzv$ mit $z \in Z$ und $u, v \in \Gamma^*$, dann ist

- A im Zustand z,
- die Bandinschrift ist uv (links/rechts davon nur $\#$)
- und das erste Symbol von v ist unter dem LSK. (Ist $v = \lambda$, so ist $\#$ unter dem LSK. Ist $v \neq \lambda$, so ist $v \in \Gamma^*(\Gamma \setminus \{\#\})$. Ebenso ist im Fall $u \neq \lambda$ dann $u \in (\Gamma \setminus \{\#\})\Gamma^*$. Bei $v = \lambda$ oder $u = \lambda$ wird manchmal links bzw. rechts von z noch ein $\#$ notiert.)

Die Menge aller Konfigurationen der TM M ist KONF_M.

Konfiguration einer TM

Definition (Konfiguration)

Ein Wort $w \in \Gamma^* \cdot Z \cdot \Gamma^*$ heißt **Konfiguration** der TM $A := (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, Z_{end})$. Ist $w = uzv$ mit $z \in Z$ und $u, v \in \Gamma^*$, dann ist

- A im Zustand z,
- die Bandinschrift ist uv (links/rechts davon nur $\#$)
- und das erste Symbol von v ist unter dem LSK. (Ist $v = \lambda$, so ist $\#$ unter dem LSK. Ist $v \neq \lambda$, so ist $v \in \Gamma^*(\Gamma \setminus \{\#\})$. Ebenso ist im Fall $u \neq \lambda$ dann $u \in (\Gamma \setminus \{\#\})\Gamma^*$. Bei $v = \lambda$ oder $u = \lambda$ wird manchmal links bzw. rechts von z noch ein $\#$ notiert.)

Die Menge aller Konfigurationen der TM M ist KONF_M.

Konfiguration einer TM

Definition (Konfiguration)

Ein Wort $w \in \Gamma^* \cdot Z \cdot \Gamma^*$ heißt **Konfiguration** der TM $A := (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, Z_{end})$. Ist $w = uzv$ mit $z \in Z$ und $u, v \in \Gamma^*$, dann ist

- A im Zustand z,
- die Bandinschrift ist uv (links/rechts davon nur $\#$)
- und das erste Symbol von v ist unter dem LSK. (Ist $v = \lambda$, so ist $\#$ unter dem LSK. Ist $v \neq \lambda$, so ist $v \in \Gamma^*(\Gamma \setminus \{\#\})$. Ebenso ist im Fall $u \neq \lambda$ dann $u \in (\Gamma \setminus \{\#\})\Gamma^*$. Bei $v = \lambda$ oder $u = \lambda$ wird manchmal links bzw. rechts von z noch ein $\#$ notiert.)

Die Menge aller Konfigurationen der TM M ist KONF_M.

Konfiguration einer TM

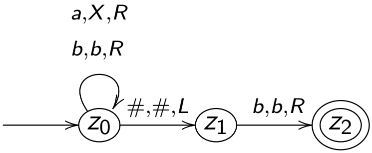
Definition (Konfiguration)

Ein Wort $w \in \Gamma^* \cdot Z \cdot \Gamma^*$ heißt **Konfiguration** der TM $A := (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, Z_{end})$. Ist $w = uzv$ mit $z \in Z$ und $u, v \in \Gamma^*$, dann ist

- A im Zustand z,
- die Bandinschrift ist uv (links/rechts davon nur $\#$)
- und das erste Symbol von v ist unter dem LSK. (Ist $v = \lambda$, so ist $\#$ unter dem LSK. Ist $v \neq \lambda$, so ist $v \in \Gamma^*(\Gamma \setminus \{\#\})$. Ebenso ist im Fall $u \neq \lambda$ dann $u \in (\Gamma \setminus \{\#\})\Gamma^*$. Bei $v = \lambda$ oder $u = \lambda$ wird manchmal links bzw. rechts von z noch ein $\#$ notiert.)

Die Menge aller Konfigurationen der TM M ist KONF_M.

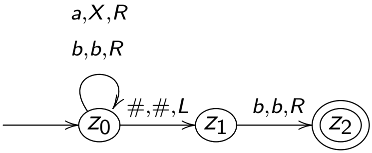
TM: Beispiel



$z_0 aab \vdash X z_0 ab \vdash XX z_0 b \vdash XXb z_0 \# \vdash XX z_1 b \vdash XXb z_2 \#$

Die Kante (a, X, R) bedeutet: Wenn der LSK a liest, dann kann man die Kante nutzen und schreibt dann X (an Stelle von a) und bewegt den LSK nach rechts. (Zustandswechsel wie beim DFA.)

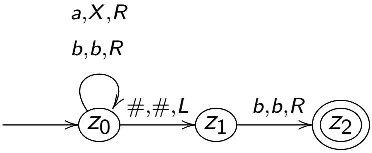
TM: Beispiel



$$z_0 aab \vdash Xz_0 ab \vdash XXz_0 b \vdash XXbz_0\# \vdash XXz_1 b \vdash XXbz_2\#$$

Die Kante (a, X, R) bedeutet: Wenn der LSK a liest, dann kann man die Kante nutzen und schreibt dann X (an Stelle von a) und bewegt den LSK nach rechts. (Zustandswechsel wie beim DFA.)

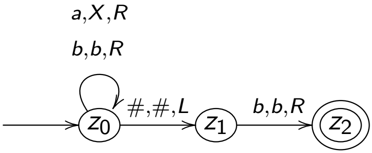
TM: Beispiel



$z_0 aab \vdash Xz_0 ab \vdash XXz_0 b \vdash XXbz_0\# \vdash XXz_1 b \vdash XXbz_2\#$

Die Kante (a, X, R) bedeutet: Wenn der LSK a liest, dann kann man die Kante nutzen und schreibt dann X (an Stelle von a) und bewegt den LSK nach rechts. (Zustandswechsel wie beim DFA.)

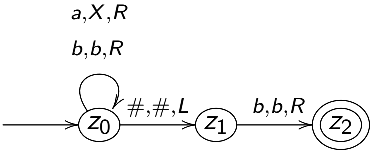
TM: Beispiel



$z_0aab \vdash Xz_0ab \vdash XXz_0b \vdash XXbz_0\# \vdash XXz_1b \vdash XXbz_2\#$

Die Kante (a, X, R) bedeutet: Wenn der LSK a liest, dann kann man die Kante nutzen und schreibt dann X (an Stelle von a) und bewegt den LSK nach rechts. (Zustandswechsel wie beim DFA.)

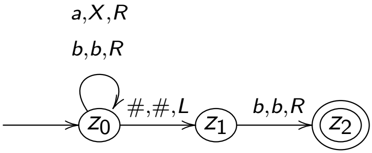
TM: Beispiel



$$z_0 aab \vdash Xz_0 ab \vdash XXz_0 b \vdash XXbz_0\# \vdash XXz_1 b \vdash XXbz_2\#$$

Die Kante (a, X, R) bedeutet: Wenn der LSK a liest, dann kann man die Kante nutzen und schreibt dann X (an Stelle von a) und bewegt den LSK nach rechts. (Zustandswechsel wie beim DFA.)

TM: Beispiel



$$z_0aab \vdash Xz_0ab \vdash XXz_0b \vdash XXbz_0\# \vdash XXz_1b \vdash XXbz_2\#$$

Die Kante (a, X, R) bedeutet: Wenn der LSK a liest, dann kann man die Kante nutzen und schreibt dann X (an Stelle von a) und bewegt den LSK nach rechts. (Zustandswechsel wie beim DFA.)

Rechnung einer TM

Die Definition der Rechnung von eben wird dadurch verkompliziert, dass

- die Konfigurationen stets den “relevanten Teil” auf dem Eingabeband darstellen sollen (d.h. insb. das nicht alle # dargestellt werden, sondern nur jene zwischen “richtigen” Buchstaben bzw. zur Darstellung der Position des Lesekopfes. Mögliche Konfigurationen sind z.B.
    - *zaabb*, *aazbb*, *aabbz#* aber auch
    - *z###aXXb*
    - *aa##zbbb*
    - *aa##bbz##cc*
    - *aabb##z#*
    - ...
- Kommt links bzw. rechts von z nichts mehr, so darf man ein # notieren, muss aber nicht.

Rechnung einer TM

Die Definition der Rechnung von eben wird dadurch verkompliziert, dass

- die Konfigurationen stets den "relevanten Teil" auf dem Eingabeband darstellen sollen (d.h. insb. das nicht alle # dargestellt werden, sondern nur jene zwischen "richtigen" Buchstaben bzw. zur Darstellung der Position des Lesekopfes. Mögliche Konfigurationen sind z.B.
  - $zaabb$, $aazbb$, $aabbz\#$ aber auch
  - $z\#\#\#aXXb$
  - $aa\#\#zbbb$
  - $aa\#\#bbz\#\#cc$
  - $aabb\#\#z\#$
  - ...
- Kommt links bzw. rechts von z nichts mehr, so darf man ein # notieren, muss aber nicht.

Rechnung einer TM

Die Definition der Rechnung von eben wird dadurch verkompliziert, dass

- die Konfigurationen stets den "relevanten Teil" auf dem Eingabeband darstellen sollen (d.h. insb. das nicht alle # dargestellt werden, sondern nur jene zwischen "richtigen" Buchstaben bzw. zur Darstellung der Position des Lesekopfes. Mögliche Konfigurationen sind z.B.
  - $zaabb$, $aazbb$, $aabbz\#$ aber auch
  - $z\#\#\#aXXb$
  - $aa\#\#zbbb$
  - $aa\#\#bbz\#\#cc$
  - $aabb\#\#z\#$
  - ...
- Kommt links bzw. rechts von z nichts mehr, so darf man ein $\#$ notieren, muss aber nicht.

Rechnung einer TM

Die Definition der Rechnung von eben wird dadurch verkompliziert, dass

- die Konfigurationen stets den “relevanten Teil” auf dem Eingabeband darstellen sollen (d.h. insb. das nicht alle # dargestellt werden, sondern nur jene zwischen “richtigen” Buchstaben bzw. zur Darstellung der Position des Lesekopfes. Mögliche Konfigurationen sind z.B.
  - $zaabb$, $aazbb$, $aabbz\#$ aber auch
  - $z\#\#\#aXXb$
  - $aa\#\#zbbb$
  - $aa\#\#bbz\#\#cc$
  - $aabb\#\#z\#$
  - ...
- Kommt links bzw. rechts von z nichts mehr, so darf man ein # notieren, muss aber nicht.

Rechnung einer TM

Definition (Schrittrelation einer DTM)

Sei A eine DTM. Die **Schrittrelation** $\vdash_A \subseteq \text{KONF}_A \times \text{KONF}_A$ ist definiert durch: $w \vdash_A w'$ gilt gdw. 1, 2, 3 oder 4 unten gilt.
Es ist $u, v, w \in \Gamma^*$, $x, y, z \in \Gamma$, $p, q \in Z$.

1. $w = uypxv$ und

$$w' = \begin{cases} uqyzv, \text{ falls } (v \neq \lambda \text{ oder } z \neq \#) \text{ und } \delta(p, x) = (z, L, q) \\ uqy, \text{ falls } v = \lambda, y \neq \# \text{ und } \delta(p, x) = (\#, L, q) \\ uq, \text{ falls } v = \lambda, y = \# \text{ und } \delta(p, x) = (\#, L, q) \\ uyzqv, \text{ falls } \delta(p, x) = (z, R, q) \\ uyqzv \text{ falls } (v \neq \lambda \text{ oder } z \neq \#) \text{ und } \delta(p, x) = (z, H, q) \\ uyq \text{ falls } v = \lambda \text{ und } \delta(p, x) = (\#, H, q) \end{cases}$$

Bemerkung

Häufig (z.B. in dem Beispiel vorhin) notiert man noch ein # wenn der Zustand ganz rechts/links steht. Z.B. im dritten Fall oben $uq\#$ statt uq. Entspricht nicht ganz der Definition, ist aber ok.

Rechnung einer TM

1. $w = uyp$ und

$$w' = \begin{cases} uqyz, \text{ falls } z \neq \# \text{ und } \delta(p, \#) = (z, L, q) \\ uqy, \text{ falls } y \neq \# \text{ und } d(p, \#) = (\#, L, q) \\ uq, \text{ falls } y = \# \text{ und } \delta(p, \#) = (\#, L, q) \\ uyzq, \text{ falls } \delta(p, \#) = (z, R, q) \\ uyqz, \text{ falls } z \neq \# \text{ und } \delta(p, \#) = (z, H, q) \\ uyq, \text{ falls } \delta(p, \#) = (\#, H, q) \end{cases}$$

2. $w = pxv$ und

$$w' = \begin{cases} q\#zv, \text{ falls } \delta(p, x) = (z, L, q) \\ zqv, \text{ falls } \delta(p, x) = (z, R, q) \\ qzv, \text{ falls } \delta(p, x) = (z, H, q) \end{cases}$$

3. $w = p$ und

$$w' = \begin{cases} q\#z, \text{ falls } \delta(p, \#) = (z, L, q) \\ zq, \text{ falls } \delta(p, \#) = (z, R, q) \\ qz, \text{ falls } z \neq \# \text{ und } \delta(p, \#) = (z, H, q) \\ q, \text{ falls } \delta(p, \#) = (\#, H, q) \end{cases}$$

Rechnung einer TM

Anmerkung

Die Definition der Schrittrelation ist recht kompliziert, um alle Fälle abzudecken. Die Idee und das Arbeiten damit ist aber ganz einfach. Man notiert links und rechts vom Zustand alles nötige, so dass in $u \cdot z \cdot v$ ($z \in Z$) mit uv der wichtige Teil der Bandinschrift bekannt ist (d.h. links von u und rechts von v stehen nur $\#$).
Außerdem notiert man bei u und v keine unnötigen $\#$, d.h. statt z.B. $v = 0\#\#$ schreibt man einfach 0. Ebenso statt $u = \#\#0$ einfach 0. Bei $u = 0\#\#$ und $v = \#\#0$ sind die $\#$ aber wichtig! (Man beachte, wo von z aus gesehen u und v stehen.)
Dann arbeitet man einfach stets mit δ und hält sich bei den Übergängen an das oben gesagte.

Rechnung einer TM

Definition (Rechnung einer TM)

1. Mit $\vdash_A^*$ wird die reflexive, transitive Hülle von $\vdash_A$ bezeichnet. Der Index A kann auch weggelassen werden.
2. Eine Folge $k_1 \vdash k_2 \vdash \ldots \vdash k_i \vdash \ldots$ heißt **Rechnung** der TM.
3. Eine endliche Rechnung $k_1 \vdash k_2 \vdash \ldots \vdash k_n$ heißt **Erfolgsrechnung**, wenn $k_1 \in \{z_0\} \cdot \Sigma^*$ und $k_n \in \Gamma^* \cdot Z_{end} \cdot \Gamma^*$ gilt.

Rechnung einer TM

Definition (Rechnung einer TM)

1. Mit $\vdash_A^*$ wird die reflexive, transitive Hülle von $\vdash_A$ bezeichnet. Der Index A kann auch weggelassen werden.
2. Eine Folge $k_1 \vdash k_2 \vdash \ldots \vdash k_i \vdash \ldots$ heißt **Rechnung** der TM.
3. Eine endliche Rechnung $k_1 \vdash k_2 \vdash \ldots \vdash k_n$ heißt **Erfolgsrechnung**, wenn $k_1 \in \{z_0\} \cdot \Sigma^*$ und $k_n \in \Gamma^* \cdot Z_{end} \cdot \Gamma^*$ gilt.

Rechnung einer TM

Definition (Rechnung einer TM)

1. Mit $\vdash_A^*$ wird die reflexive, transitive Hülle von $\vdash_A$ bezeichnet. Der Index A kann auch weggelassen werden.
2. Eine Folge $k_1 \vdash k_2 \vdash \ldots \vdash k_i \vdash \ldots$ heißt **Rechnung** der TM.
3. Eine endliche Rechnung $k_1 \vdash k_2 \vdash \ldots \vdash k_n$ heißt **Erfolgsrechnung**, wenn $k_1 \in \{z_0\} \cdot \Sigma^*$ und $k_n \in \Gamma^* \cdot Z_{end} \cdot \Gamma^*$ gilt.

Rechnung einer TM

Eine endliche Rechnung $k_1 \vdash k_2 \vdash \ldots \vdash k_n$ heißt **Erfolgsrechnung**, wenn $k_1 \in \{z_0\} \cdot \Sigma^*$ und $k_n \in \Gamma^* \cdot Z_{end} \cdot \Gamma^*$ gilt.

Wichtige Anmerkung

Achtung: Wir starten in $z_0 w$, wobei $w \in \Sigma^*$ ein Eingabewort ist und z_0 der Startzustand. Enden tun wir in $uz_e v$, wobei z_e ein Endzustand ist und u und v irgendwelche Wörter, die aus Bandsymbolen (enthalten die Eingabesymbole) bestehen. **Insbesondere muss das Eingabewort nicht vollständig betrachtet werden!** Die TM akzeptiert, sobald sie in einen Endzustand gelangt! (Auch, wenn sie dann vielleicht noch weiterrechnen könnte!)

Rechnung einer TM

Eine endliche Rechnung $k_1 \vdash k_2 \vdash \ldots \vdash k_n$ heißt **Erfolgsrechnung**, wenn $k_1 \in \{z_0\} \cdot \Sigma^*$ und $k_n \in \Gamma^* \cdot Z_{end} \cdot \Gamma^*$ gilt.

Wichtige Anmerkung

Achtung: Wir starten in $z_0 w$, wobei $w \in \Sigma^*$ ein Eingabewort ist und z_0 der Startzustand. Enden tun wir in $u z_e v$, wobei z_e ein Endzustand ist und u und v irgendwelche Wörter, die aus Bandsymbolen (enthalten die Eingabesymbole) bestehen. **Insbesondere muss das Eingabewort nicht vollständig betrachtet werden!** Die TM akzeptiert, sobald sie in einen Endzustand gelangt! (Auch, wenn sie dann vielleicht noch weiterrechnen könnte!)

Rechnung einer TM

Eine endliche Rechnung $k_1 \vdash k_2 \vdash \ldots \vdash k_n$ heißt **Erfolgsrechnung**, wenn $k_1 \in \{z_0\} \cdot \Sigma^*$ und $k_n \in \Gamma^* \cdot Z_{end} \cdot \Gamma^*$ gilt.

Wichtige Anmerkung

Achtung: Wir starten in $z_0 w$, wobei $w \in \Sigma^*$ ein Eingabewort ist und z_0 der Startzustand. Enden tun wir in $u z_e v$, wobei z_e ein Endzustand ist und u und v irgendwelche Wörter, die aus Bandsymbolen (enthalten die Eingabesymbole) bestehen. **Insbesondere muss das Eingabewort nicht vollständig betrachtet werden!** Die TM akzeptiert, sobald sie in einen Endzustand gelangt! (Auch, wenn sie dann vielleicht noch weiterrechnen könnte!)

Akzeptierte Sprache einer TM

Definition (Akzeptierte Sprache einer TM)

Sei $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, Z_{end})$ eine DTM. Mit $L(A)$ wird die von A akzeptierte Sprache bezeichnet:

$$L(A) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Gamma^* \; \exists z_e \in Z_{end} : \; z_0 w \vdash^* u z_e v\}$$

Wichtige Anmerkung

Nochmal: Die TM akzeptiert, sobald sie einen Endzustand erreicht! Sie muss nicht das ganze Eingabewort dafür betrachten, aber sie akzeptiert das ganze Eingabewort (!), sobald sie in einen Endzustand gelangt! Außerdem akzeptiert sie das *ursprüngliche Eingabewort*, auch wenn dies vielleicht gar nicht mehr auf dem Band ist bzw. sie dies manipuliert hat!

Akzeptierte Sprache einer TM

Definition (Akzeptierte Sprache einer TM)

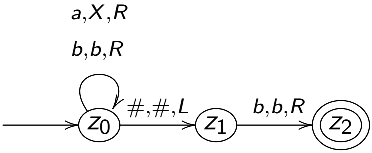
Sei $A = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, Z_{end})$ eine DTM. Mit $L(A)$ wird die von A akzeptierte Sprache bezeichnet:

$$L(A) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Gamma^* \; \exists z_e \in Z_{end} : \; z_0 w \vdash^* u z_e v\}$$

Wichtige Anmerkung

Nochmal: Die TM akzeptiert, sobald sie einen Endzustand erreicht! Sie muss nicht das ganze Eingabewort dafür betrachten, aber sie akzeptiert das ganze Eingabewort (!), sobald sie in einen Endzustand gelangt! Außerdem akzeptiert sie das *ursprüngliche Eingabewort*, auch wenn dies vielleicht gar nicht mehr auf dem Band ist bzw. sie dies manipuliert hat!

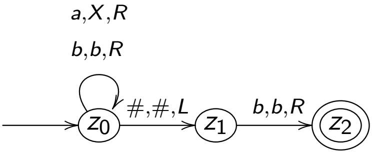
Fragen



Akzeptiert diese TM das Wort *aabba*?

1. Ja!
2. Nein!
3. Ich hab das doch noch nicht verstanden...

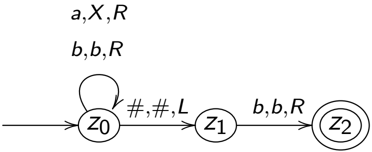
Fragen



Akzeptiert diese TM das Wort *aabb*?

1. Ja!
2. Nein!
3. Ich hab das immer noch nicht verstanden...

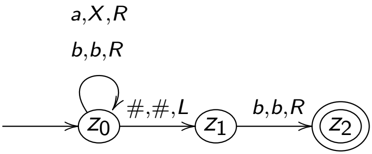
Fragen



Akzeptiert diese TM das Wort $aabb\#b$?

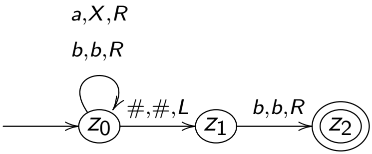
1. Ja!
2. Nein!
3. Weiß ich nicht...

Fragen



Welche Sprache akzeptiert diese TM?

Fragen

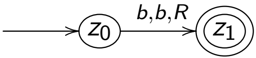


Welche Sprache akzeptiert diese TM?

Die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ endet auf } b\}$$

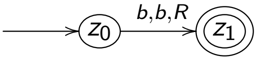
Fragen



Und welche Sprache akzeptiert diese TM?

1. $\{b\}$
2. $\{b\}^*$
3. $\{b\}^* \cdot \Sigma^*$
4. $\Sigma^* \cdot \{b\} \cdot \Sigma^*$
5. Keine davon!
6. Weiß ich nicht...

Fragen



Eine TM M für die Sprache

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ beginnt mit } b\}$$

Fragen

Zur Nachbereitung

1. Nein!
2. Ja!
3. Nein!
4. $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ endet auf } b\}$
5. Keins davon! Richtig ist $\{b\} \cdot \Sigma^*$.

Berechenbarkeit

Turing-Maschinen können nicht nur Sprachen akzeptieren, sie können auch **Funktionen berechnen**.

Berechnen von Wortfunktionen

Definition

Sei Σ ein Alphabet und $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ eine (möglicherweise partielle) (Wort-)Funktion. f heißt **Turing-berechenbar** oder kürzer **berechenbar** oder auch **partiell rekursiv** genau dann, wenn

es eine DTM A gibt mit $z_0 w \vdash^* z_e v$ für ein $z_e \in Z_{end}$
genau dann, wenn
$f(w) = v$ ist

Berechnen von Wortfunktionen

Definition

Sei Σ ein Alphabet und $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ eine (möglicherweise partielle) (Wort-)Funktion. f heißt **Turing-berechenbar** oder kürzer **berechenbar** oder auch **partiell rekursiv** genau dann, wenn

es eine DTM A gibt mit $z_0 w \vdash^* z_e v$ für ein $z_e \in Z_{end}$
genau dann, wenn
$f(w) = v$ ist

Berechnen von Funktionen

Definition

Eine (partielle) Funktion $f : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}^s$ heiß **(Turing-)berechenbar** oder **partiell rekursiv** genau dann, wenn es eine DTM gibt mit

$$z_0 0^{m_1+1} 1 0^{m_2+1} 1 \dots 1 0^{m_r+1} \vdash^* z_e 0^{n_1+1} 1 0^{n_2+1} 1 \dots 1 0^{n_s+1}$$

genau dann, wenn

$$f(m_1, m_2, \dots, m_r) = (n_1, n_2, \dots, n_s)$$

und der Funktionswert definiert ist.

Berechnen von Funktionen

Anmerkung

Oft berechnen wir aber nicht wie oben mit einer unären Kodierung, sondern mit einer binären Kodierung. Die Zahl 9 wird dann durch das **Wort** 1001 ausgedrückt. Mehrere Argumente trennen wir durch ein Symbol. So kann man z.B. eine Funktion $f(x, y) = x + y$ als Wortfunktion ausdrücken, die ein Wort wie 1001\$100 als Argument kriegt und $f(9, 4) = 13$ also das Wort 1101 berechnet.

Berechnen von Funktionen

Anmerkung

Oft berechnen wir aber nicht wie oben mit einer unären Kodierung, sondern mit einer binären Kodierung. Die Zahl 9 wird dann durch das **Wort** 1001 ausgedrückt. Mehrere Argumente trennen wir durch ein Symbol. So kann man z.B. eine Funktion $f(x, y) = x + y$ als Wortfunktion ausdrücken, die ein Wort wie 1001$100 als Argument kriegt und $f(9, 4) = 13$ also das Wort 1101 berechnet.

Beispiel

Beispiel

Wir wollen eine TM, die $f(x) = x - 1$ berechnet. Dabei sei x eine natürliche Zahl, die in Binärkodierung gegeben ist. D.h. wir wollen eine Wortfunktion von x nach $f(x)$ berechnen.

Die TM arbeitet wie folgt:

1. Fahre zum am weitesten rechts stehenden Zeichen von x.
2. Ist dies eine 1, schreibe eine 0 und fahre fort bei Schritt 4
3. Ist dies eine 0, schreibe eine 1, gehe ein Feld nach links und mach bei Schritt 2 weiter.
4. Fahre ganz nach links und gehe in einen Endzustand.

Beispiel

Beispiel

Wir wollen eine TM, die $f(x) = x - 1$ berechnet. Dabei sei x eine natürliche Zahl, die in Binärkodierung gegeben ist. D.h. wir wollen eine Wortfunktion von x nach $f(x)$ berechnen.

Die TM arbeitet wie folgt:

1. Fahre zum am weitesten rechts stehenden Zeichen von x.
2. Ist dies eine 1, schreibe eine 0 und fahre fort bei Schritt 4
3. Ist dies eine 0, schreibe eine 1, gehe ein Feld nach links und mach bei Schritt 2 weiter.
4. Fahre ganz nach links und gehe in einen Endzustand.

Beispiel

Beispiel

Wir wollen eine TM, die $f(x) = x - 1$ berechnet. Dabei sei x eine natürliche Zahl, die in Binärkodierung gegeben ist. D.h. wir wollen eine Wortfunktion von x nach $f(x)$ berechnen.

Die TM arbeitet wie folgt:

1. Fahre zum am weitesten rechts stehenden Zeichen von x.
2. Ist dies eine 1, schreibe eine 0 und fahre fort bei Schritt 4
3. Ist dies eine 0, schreibe eine 1, gehe ein Feld nach links und mach bei Schritt 2 weiter.
4. Fahre ganz nach links und gehe in einen Endzustand.

Beispiel

Beispiel

Wir wollen eine TM, die $f(x) = x - 1$ berechnet. Dabei sei x eine natürliche Zahl, die in Binärkodierung gegeben ist. D.h. wir wollen eine Wortfunktion von x nach $f(x)$ berechnen.

Die TM arbeitet wie folgt:

1. Fahre zum am weitesten rechts stehenden Zeichen von x.
2. Ist dies eine 1, schreibe eine 0 und fahre fort bei Schritt 4
3. Ist dies eine 0, schreibe eine 1, gehe ein Feld nach links und mach bei Schritt 2 weiter.
4. Fahre ganz nach links und gehe in einen Endzustand.

Beispiel

Beispiel

Wir wollen eine TM, die $f(x) = x - 1$ berechnet. Dabei sei x eine natürliche Zahl, die in Binärkodierung gegeben ist. D.h. wir wollen eine Wortfunktion von x nach $f(x)$ berechnen.

Die TM arbeitet wie folgt:

1. Fahre zum am weitesten rechts stehenden Zeichen von x.
2. Ist dies eine 1, schreibe eine 0 und fahre fort bei Schritt 4
3. Ist dies eine 0, schreibe eine 1, gehe ein Feld nach links und mach bei Schritt 2 weiter.
4. Fahre ganz nach links und gehe in einen Endzustand.

Beispiel

Beispiel

Wir wollen eine TM, die $f(x, y) = x + y$ berechnet. Dabei seien x und y wieder natürliche Zahlen, die in Binärkodierung gegeben sind. D.h. wir wollen eine Wortfunktion von $x\$y$ nach $f(x, y)$ berechnen.

Nur mündlich ...

Anmerkung

Im Grunde genommen programmieren mit einer sehr, sehr eingeschränkten Programmiersprache...

Beispiel

Beispiel

Wir wollen eine TM, die $f(x, y) = x + y$ berechnet. Dabei seien x und y wieder natürliche Zahlen, die in Binärkodierung gegeben sind. D.h. wir wollen eine Wortfunktion von $x\$y$ nach $f(x, y)$ berechnen.

Nur mündlich ...

Anmerkung

Im Grunde genommen programmieren mit einer sehr, sehr eingeschränkten Programmiersprache...

Die Church-Turing-These - Diskussion

Church-Turing-These

Alles was intuitiv berechenbar ist, d.h. alles, was von einem Menschen berechnet werden kann, das kann auch von einer Turing-Maschine berechnet werden. Ebenso ist alles, was eine andere Maschine berechnen kann, auch von einer Turing-Maschine berechenbar.

Wichtige Folgerung

Umkehrschluss: Was eine Turing-Maschine nicht kann, kann auch kein Mensch berechnen!

Die Church-Turing-These - Diskussion

Church-Turing-These

Alles was intuitiv berechenbar ist, d.h. alles, was von einem Menschen berechnet werden kann, das kann auch von einer Turing-Maschine berechnet werden. Ebenso ist alles, was eine andere Maschine berechnen kann, auch von einer Turing-Maschine berechenbar.

Wichtige Folgerung

Umkehrschluss: Was eine Turing-Maschine nicht kann, kann auch kein Mensch berechnen!

Fragen

$f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ist **berechenbar** gdw.
es eine DTM A gibt mit $z_0 w \vdash^* zv$
genau dann, wenn
$f(w) = v$ ist

Fehler in Zeile

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

Fragen

Wenn $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Turing-berechenbar sind, dann auch $f + g$ und $f \cdot g$

1. Ja!
2. Nein!
3. Weiß ich nicht...

Fragen

Wenn $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Turing-berechenbar sind, dann auch $f \circ g$

1. Ja!
2. Nein!
3. Weiß ich nicht...

Fragen

Zur Nachbereitung

1. Zweite Zeile! z muss in Z_{end} sein!
2. Ja!
3. Ja!

Berechnen und Akzeptieren

Berechnen von Funktionen und Akzeptieren von Sprachen ist ähnlich:

- Akzeptieren einer Sprache M ist Berechnen der charakteristischen Funktion von M.
- Berechnen einer Funktionen $f : M \to N$ ist Akzeptieren der Sprache $L = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$ (ggf. müssen M und N geeignet kodiert werden).

Bemerkung

Die charakteristische Funktion einer Menge M tut folgendes:

$$\chi_M(x) = 1 \text{ gdw. } x \in M$$

(Ist also $x \notin M$, so ist $\chi_M(x) = 0$.)

Berechnen und Akzeptieren

Berechnen von Funktionen und Akzeptieren von Sprachen ist ähnlich:

- Akzeptieren einer Sprache M ist Berechnen der charakteristischen Funktion von M.
- Berechnen einer Funktionen $f : M \to N$ ist Akzeptieren der Sprache $L = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$ (ggf. müssen M und N geeignet kodiert werden).

Bemerkung

Die charakteristische Funktion einer Menge M tut folgendes:

$$\chi_M(x) = 1 \text{ gdw. } x \in M$$

(Ist also $x \notin M$, so ist $\chi_M(x) = 0$.)

Berechnen und Akzeptieren

Berechnen von Funktionen und Akzeptieren von Sprachen ist ähnlich:

- Akzeptieren einer Sprache M ist Berechnen der charakteristischen Funktion von M.
- Berechnen einer Funktionen $f : M \to N$ ist Akzeptieren der Sprache $L = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$ (ggf. müssen M und N geeignet kodiert werden).

Bemerkung

Die charakteristische Funktion einer Menge M tut folgendes:

$$\chi_M(x) = 1 \text{ gdw. } x \in M$$

(Ist also $x \notin M$, so ist $\chi_M(x) = 0$.)

Berechnen und Akzeptieren

$$f(x, y) = x + y$$

- Berechnen der Funktion wie oben. Die TM hat dann Rechnungen der Art

$$z_0 x\$y \vdash^* z_e f(x, y)$$

- Akzeptieren der Sprache $L = \{(x, y, z) \mid x + y = z\}$, wobei x, y, z Zeichenketten aus 0 und 1 sind (Binärkodierungen natürlicher Zahlen). Besser wäre daher oben $[z]_2 = [x]_2 + [y]_2$ zu schreiben (um die Interpretation der Zeichenkette als Binärzahl deutlich zu machen).

Berechnen und Akzeptieren

$$f(x, y) = x + y$$

- Berechnen der Funktion wie oben. Die TM hat dann Rechnungen der Art

$$z_0 x\$y \vdash^* z_e f(x, y)$$

- Akzeptieren der Sprache $L = \{(x, y, z) \mid x + y = z\}$, wobei x, y, z Zeichenketten aus 0 und 1 sind (Binärkodierungen natürlicher Zahlen). Besser wäre daher oben $[z]_2 = [x]_2 + [y]_2$ zu schreiben (um die Interpretation der Zeichenkette als Binärzahl deutlich zu machen).

Berechnen und Akzeptieren

$$f(x, y) = x + y$$

- Berechnen der Funktion wie oben. Die TM hat dann Rechnungen der Art

$$z_0 x\$y \vdash^* z_e f(x, y)$$

- Akzeptieren der Sprache $L = \{(x, y, z) \mid x + y = z\}$, wobei x, y, z Zeichenketten aus 0 und 1 sind (Binärkodierungen natürlicher Zahlen). Besser wäre daher oben $[z]_2 = [x]_2 + [y]_2$ zu schreiben (um die Interpretation der Zeichenkette als Binärzahl deutlich zu machen).

Weitere Beispiele

Beispiel 1

Eine TM für $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$?

Idee?

Beispiel 2

Eine TM, die $f(w) = w^{rev}$ $(w \in \{0,1\}^*)$ berechnet?

Idee?

Weitere Beispiele

Beispiel 1

Eine TM für $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$?

Idee?

Beispiel 2

Eine TM, die $f(w) = w^{rev}$ $(w \in \{0,1\}^*)$ berechnet?

Idee?

Eine TM für $f(w) = w^{rev}$

- Marker \$ sowohl links als auch rechts vom Wort w setzen.
- Lese letztes Symbol von w und ersetze es durch $\#$.
- Wandere nach rechts über das \$ herüber und speichern das Symbol dort. (Im Zustand merken, welches Symbol zu schreiben ist.)
- Wiederhole dies, d.h. lösche das Wort w von rechts nach links, Buchstabe für Buchstabe und baue das Wort w^{rev} rechts davon und von links nach rechts Buchstabe für Buchstabe auf.
- Zu Beachten:
    - bei w muss über die schon gelöschten Buchstaben (d.h. über die $\#$) rüber gelesen werden; bei w^{rev} muss über das schon geschriebene Teilwort herübergelesen werden.
- w wurde zu Ende gelesen, wenn man auf das zweite \$ trifft.
- Lösche die beiden \$ und bewege den Kopf an den Anfang von w^{rev}.

Eine TM für $f(w) = w^{rev}$

- Marker \$ sowohl links als auch rechts vom Wort w setzen.
- Lese letztes Symbol von w und ersetze es durch $\#$.
- Wandere nach rechts über das \$ herüber und speichern das Symbol dort. (Im Zustand merken, welches Symbol zu schreiben ist.)
- Wiederhole dies, d.h. lösche das Wort w von rechts nach links, Buchstabe für Buchstabe und baue das Wort w^{rev} rechts davon und von links nach rechts Buchstabe für Buchstabe auf.
- Zu Beachten:
  - bei w muss über die schon gelöschten Buchstaben (d.h. über die $\#$) rüber gelesen werden; bei w^{rev} muss über das schon geschriebene Teilwort herübergelesen werden.
- w wurde zu Ende gelesen, wenn man auf das zweite \$ trifft.
- Lösche die beiden \$ und bewege den Kopf an den Anfang von w^{rev}.

Eine TM für $f(w) = w^{rev}$

- Marker \$ sowohl links als auch rechts vom Wort w setzen.
- Lese letztes Symbol von w und ersetze es durch $\#$.
- Wandere nach rechts über das \$ herüber und speichern das Symbol dort. (Im Zustand merken, welches Symbol zu schreiben ist.)
- Wiederhole dies, d.h. lösche das Wort w von rechts nach links, Buchstabe für Buchstabe und baue das Wort w^{rev} rechts davon und von links nach rechts Buchstabe für Buchstabe auf.
- Zu Beachten:
  - bei w muss über die schon gelöschten Buchstaben (d.h. über die $\#$) rüber gelesen werden; bei w^{rev} muss über das schon geschriebene Teilwort herübergelesen werden.
- w wurde zu Ende gelesen, wenn man auf das zweite \$ trifft.
- Lösche die beiden \$ und bewege den Kopf an den Anfang von w^{rev}.

Eine TM für $f(w) = w^{rev}$

- Marker \$ sowohl links als auch rechts vom Wort w setzen.
- Lese letztes Symbol von w und ersetze es durch $\#$.
- Wandere nach rechts über das \$ herüber und speichern das Symbol dort. (Im Zustand merken, welches Symbol zu schreiben ist.)
- Wiederhole dies, d.h. lösche das Wort w von rechts nach links, Buchstabe für Buchstabe und baue das Wort w^{rev} rechts davon und von links nach rechts Buchstabe für Buchstabe auf.
- Zu Beachten:
  - bei w muss über die schon gelöschten Buchstaben (d.h. über die $\#$) rüber gelesen werden; bei w^{rev} muss über das schon geschriebene Teilwort herübergelesen werden.
- w wurde zu Ende gelesen, wenn man auf das zweite \$ trifft.
- Lösche die beiden \$ und bewege den Kopf an den Anfang von w^{rev}.

Eine TM für $f(w) = w^{rev}$

- Marker \$ sowohl links als auch rechts vom Wort w setzen.
- Lese letztes Symbol von w und ersetze es durch $\#$.
- Wandere nach rechts über das \$ herüber und speichern das Symbol dort. (Im Zustand merken, welches Symbol zu schreiben ist.)
- Wiederhole dies, d.h. lösche das Wort w von rechts nach links, Buchstabe für Buchstabe und baue das Wort w^{rev} rechts davon und von links nach rechts Buchstabe für Buchstabe auf.
- Zu Beachten:
  - bei w muss über die schon gelöschten Buchstaben (d.h. über die $\#$) rüber gelesen werden; bei w^{rev} muss über das schon geschriebene Teilwort herübergelesen werden.
- w wurde zu Ende gelesen, wenn man auf das zweite \$ trifft.
- Lösche die beiden \$ und bewege den Kopf an den Anfang von w^{rev}.

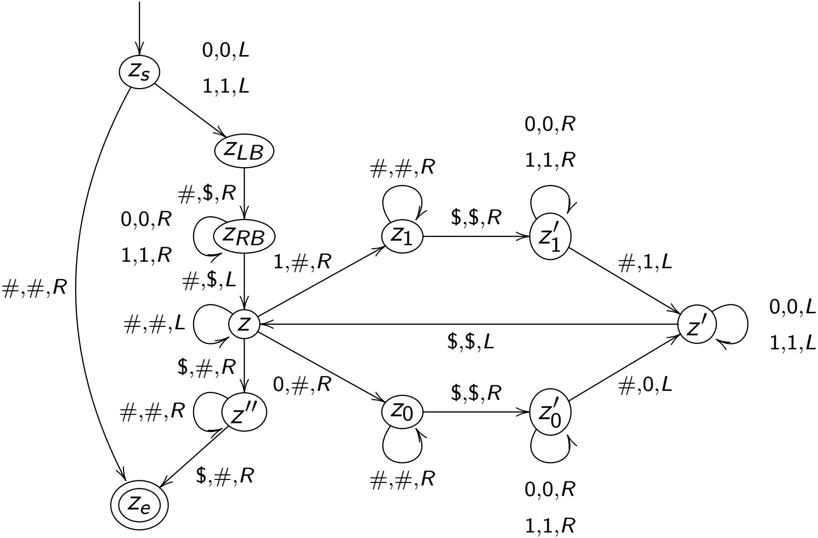
Eine TM für $f(w) = w^{rev}$

- Marker \$ sowohl links als auch rechts vom Wort w setzen.
- Lese letztes Symbol von w und ersetze es durch $\#$.
- Wandere nach rechts über das \$ herüber und speichern das Symbol dort. (Im Zustand merken, welches Symbol zu schreiben ist.)
- Wiederhole dies, d.h. lösche das Wort w von rechts nach links, Buchstabe für Buchstabe und baue das Wort w^{rev} rechts davon und von links nach rechts Buchstabe für Buchstabe auf.
- Zu Beachten:
  - bei w muss über die schon gelöschten Buchstaben (d.h. über die $\#$) rüber gelesen werden; bei w^{rev} muss über das schon geschriebene Teilwort herübergelesen werden.
- w wurde zu Ende gelesen, wenn man auf das zweite \$ trifft.
- Lösche die beiden \$ und bewege den Kopf an den Anfang von w^{rev}.

Eine TM für $f(w) = w^{rev}$

- Marker \$ sowohl links als auch rechts vom Wort w setzen.
- Lese letztes Symbol von w und ersetze es durch $\#$.
- Wandere nach rechts über das \$ herüber und speichern das Symbol dort. (Im Zustand merken, welches Symbol zu schreiben ist.)
- Wiederhole dies, d.h. lösche das Wort w von rechts nach links, Buchstabe für Buchstabe und baue das Wort w^{rev} rechts davon und von links nach rechts Buchstabe für Buchstabe auf.
- Zu Beachten:
  - bei w muss über die schon gelöschten Buchstaben (d.h. über die $\#$) rüber gelesen werden; bei w^{rev} muss über das schon geschriebene Teilwort herübergelesen werden.
- w wurde zu Ende gelesen, wenn man auf das zweite \$ trifft.
- Lösche die beiden \$ und bewege den Kopf an den Anfang von w^{rev}.

Eine TM für $f(w) = w^{rev}$



Zusammenfassung

- Definition der TM
- Definition der Arbeitsweise der TM
  - Konfiguration
  - Schrittrelation
  - Rechnung, Erfolgsrechnung
- Akzeptieren von Sprachen
- Berechnen von Funktionen
- Church-Turing-These

Ausblick

Definition

Zwei Turing-Maschinen A und B sind äquivalent, wenn $L(A) = L(B)$ gilt.

Varianten der TM

Definition

Die bisherige TM hat ein beidseitig unendliches Band. Man kann eine TM definieren, bei der das Band nur in eine Richtungen unendlich ist. Die Startkonfiguration ist dann weiterhin $z_0 w$ bei Eingabe von w, aber man kann jetzt den LSK nicht weiter als diese anfängliche Position nach links bewegen.

Definition

Eine k-**Band off-line Turing-Maschine** hat k beidseitig unendliche Arbeitsbänder mit jeweils einem eigenen LSK. Ferner hat die TM ein Eingabeband, auf dem sie ausschließlich lesen kann, aber den Lese-Kopf dabei in beide Richtungen bewegen darf und ein Ausgabeband, auf dem sie nur schreiben und den Schreibkopf ausschließlich von links nach rechts bewegen darf.

Varianten der TM

Definition

Die bisherige TM hat ein beidseitig unendliches Band. Man kann eine TM definieren, bei der das Band nur in eine Richtungen unendlich ist. Die Startkonfiguration ist dann weiterhin $z_0 w$ bei Eingabe von w, aber man kann jetzt den LSK nicht weiter als diese anfängliche Position nach links bewegen.

Definition

Eine k-**Band off-line Turing-Maschine** hat k beidseitig unendliche Arbeitsbänder mit jeweils einem eigenen LSK. Ferner hat die TM ein Eingabeband, auf dem sie ausschließlich lesen kann, aber den Lese-Kopf dabei in beide Richtungen bewegen darf und ein Ausgabeband, auf dem sie nur schreiben und den Schreibkopf ausschließlich von links nach rechts bewegen darf.

Varianten der TM

Satz

Zu jeder DTM A mit einseitig unendlichem Band gibt es eine äquivalente DTM B mit beidseitig unendlichem Band und umgekehrt.

Satz

Zu jeder k-Band off-line Turing-Maschine A mit $k \geq 1$ gibt es eine äquivalente DTM B mit nur einem Band.

Wichtige Anmerkung

Diese Varianten sind also äquivalent und man kann stets die TM-“Art” nehmen, die einem gerade mehr zusagt!

Varianten der TM

Satz

Zu jeder DTM A mit einseitig unendlichem Band gibt es eine äquivalente DTM B mit beidseitig unendlichem Band und umgekehrt.

Satz

Zu jeder k-Band off-line Turing-Maschine A mit $k \geq 1$ gibt es eine äquivalente DTM B mit nur einem Band.

Wichtige Anmerkung

Diese Varianten sind also äquivalent und man kann stets die TM-"Art" nehmen, die einem gerade mehr zusagt!

Variante der TM

Wir benutzen im Allgemeinen:

- Eine **TM mit einem Band, das in beide Richtungen unendlich ist**, wenn wir eine TM konstruieren wollen und das **Zustandsübergangsdiagramm** angeben wollen.
- Eine k-**Band off-line TM**, wenn wir nur die **Funktionsweise** einer TM erläutern wollen.