Formale Grundlagen der Informatik 1
Wiederholung zum Logik-Teil

Frank Heitmann
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

20. Juni 2016

Überblick

Im Logikteil hatten wir

- Aussagenlogik
  - Syntax
  - Semantik
  - Folgerbarkeit und Äquivalenz
  - Normalformen
  - Hornformeln
  - Resolution
- Prädikatenlogik
  - Syntax
  - Semantik
  - (Folgerbarkeit und Äquivalenz)
  - Normalformen
  - Resolution

Aussagenlogik - Syntax

Zusammenfassung **Syntax**:

- Definition der Syntax:
  - Alphabet, Junktor
  - Aussagesymbol, atomare Formel, komplexe Formel
  - Hauptoperator, Teilformel
  - Negation, Disjunktion, Konjunktion, Implikation, Biimplikation
- Strukturbäume
- strukturelle Induktion
- strukturelle Rekursion
- Grad und Tiefe einer Formel

Aussagenlogik - Semantik

Zusammenfassung **Semantik**:

- Belegung, Auswertung (einer Formel)
- Wahrheitstafeln, Wahrheitswerteverlauf
- erfüllende Belegung, falsifizierende Belegung, Modell
- kontingent, (allgemein-)gültig, unerfüllbar
- Tautologie, Kontradiktion
- $\mathcal{A} \models F$, $\mathcal{A} \not\models F$, $\models F$, $F \models$

Aussagenlogik - Normalformen

- Folgerbarkeit und Äquivalenz
  - Nachweis mit Wahrheitstafeln
  - Nachweis ohne Wahrheitstafeln
  - Gegenbeispiel (mit und ohne Wahrheitstafeln)
- Literal, Klausel, duale Klausel, DNF und KNF
- Herstellung von DNF und KNF
  - durch Äquivalenzumformungen (basierend auf dem Ersetzbarkeitstheorem)
  - mit Wahrheitstafeln

Aussagenlogik - Verfahren

Die effiziente Berechnung von (Un-)Erfüllbarkeit rückte dann ins Zentrum. Folgerbarkeit und Äquivalenz sind darauf rückführbar.

- Hornformeln
  - *Einschränkung* der Aussagenlogik
  - Effizienter (Un-)Erfüllbarkeitstest
    - Markierungsalgorithmus
- Resolution (spezielles Ableitungsverfahren)
  - Resolvente, Resolutionssatz
  - Verfeinerungen (P-Resoution, N-Resolution, ...)

Prädikatenlogik - Syntax

Zusammenfassung **Syntax**:

- Definition der Syntax:
  - Alphabet, Junktor, Quantor, Hilfssymbole
  - Variablen, Konstante, Funktions- und Prädikatensymbole, Aussagensymbole
  - Terme, atomare Formel, komplexe Formel
  - Hauptoperator, Teilformel, Teilterm
  - Quantorenvariable, Skopus
  - gebundene Variable, freie Variable
- strukturelle Induktion
- strukturelle Rekursion

Prädikatenlogik - Semantik

Zusammenfassung **Semantik**:

- Struktur, Universum, Interpretation
- Auswertung
- x-Variante
- weitere semantische Begriffe wie in der Aussagenlogik

Prädikatenlogik - Normalformen

- Normalformen basierend auf Äquivalenz:
  - aussagenlogische Äquivalenzen übertragen
  - neue Äquivalenzen durch Quantoren
  - Gebundene Umbenennung von Variablen
  - Pränexform
- Normalformen basierend auf Erfüllbarkeitsäquivalenz:
  - Bindung freier Variablen
  - Skolemisierung
  - Klauselnormalform
- Umformen einer Formel in Klauselnormalform

Prädikatenlogik - Verfahren

Aufgrund der **Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik** kann es kein Verfahren wie in der Aussagenlogik geben, um (Un-)Erfüllbarkeit zu entscheiden (geschweige denn, dies effizient zu machen). Dennoch war es möglich ein Resolutionsverfahren einzuführen:

- Resolution (spezielles Ableitungsverfahren)
  - Unifikationsalgorithmus
  - Resolvente, Resolutionssatz
  - Verfeinerungen (P-Resoution, N-Resolution, ...)
  - Der Weg zur Resolution:
    - Herbrand-Universum, -Struktur, -Modell
    - Herbrand-Expansion
    - Algorithmus von Gilmore, Grundresolution

Was wir ausgelassen haben...

Ausgelassen/Nur kurz erwähnt haben wir...

- Endlichkeitssatz der Aussagenlogik
- Genauer Beweis der Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik
- Beweise im Rahmen der Herbrand-Theorie
- Beweis der Korrektheit des Unifikationsalgorithmus und der prädikatenlogischen Resolution

Frage-Runde

Fragen ...

Frage 1

1. Was ist in der folgenden Formel der Hauptoperator?

$$(A \Rightarrow B) \wedge C$$

1. A
2. $\Rightarrow$
3. B
4. $\wedge$
5. C
6. Weiß ich nicht

Frage 2

2. Was ist eine richtige Formulierung der Induktionsannahme?

1. Seien F und G Formeln.
2. Seien F und G Formeln, für die die Behauptung gilt.
3. Gelte die Behauptung für alle Formeln F und G.
4. Gelte die Behauptung für alle Formeln.
5. Keine davon
6. Weiß ich nicht

Frage 3

3. Sei T eine Tautologie, K eine Kontradiktion und F kontingent, dann ist

$$(T \wedge K) \Rightarrow F$$

1. Tautologie
2. Kontradiktion
3. allgemeingültig
4. erfüllbar
5. kontingent
6. Weiß ich nicht

Frage 4

4. Sei T eine Tautologie, K eine Kontradiktion und F kontingent, dann ist

$$F \Rightarrow (K \vee \neg F)$$

1. Tautologie
2. Kontradiktion
3. Kontingent
4. Tautologie oder Kontradiktion abhängig von F
5. Weiß ich nicht

Frage 5

5. Folgt F aus G, dann steht in der Wahrheitstafel ...

1. bei F überall eine 0, wo G eine hat
2. bei G überall eine 0, wo F eine hat
3. bei F überall eine 1, wo G eine hat
4. bei G überall eine 1, wo F eine hat
5. bei F und G überall an gleicher Stelle eine 1
6. Weiß ich nicht

Frage 6

6. Richtig oder falsch?

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

1. Richtig!
2. Falsch!
3. Weiß ich nicht

Frage 7

7. Will man zu F eine DNF machen, ist in der Wahrheitstafel was wichtig?

1. Die Spalte von F
2. Die Zeilen, in denen F zu 0 ausgewertet wird
3. Die Zeilen, in denen F zu 1 ausgewertet wird
4. Weiß ich nicht

Frage 8

8. Terminiert der Markierungsalgorithmus immer?

1. Ja und stets mit korrekter Ausgabe
2. Ja, aber manchmal hilft die Ausgabe nicht
3. Ja, aber manchmal mit fehlerhafter Ausgabe
4. Nein
5. Weiß ich nicht

Frage 9

9. $F \models G$ gilt genau dann, wenn ...

1. $G \models F$
2. $G \not\models F$
3. $F \equiv G$
4. $G \wedge \neg F \models$
5. $\models F \wedge \neg G$
6. $\neg G \wedge F \models$
7. $\models \neg F \wedge G$
8. Weiß ich nicht

Frage 10

10. Wie sieht die Resolvente von $\{A, \neg B, C\}$ und $\{B, C, \neg D\}$ aus?

1. $\{A, \neg B, B, C, C, \neg D\}$
2. $\{A, C\}$
3. $\{\neg D\}$
4. $\{A, C, \neg D\}$
5. $\{A, C\}, \{\neg D\}$
6. Weiß ich nicht

Frage 11

11. Wann gilt $\mathcal{A}_{[x/d]}(P(a,x)) = 1$?

1. Wenn $P(a,x) = 1$
2. Wenn $(a,x) \in P$
3. Wenn $(a,d) \in I(P)$
4. Wenn $(I(a), I(x)) \in I(P)$
5. Wenn $(I(a), d) \in I(P)$
6. Weiß ich nicht

Frage 12

12. Sei

$$F = \forall x P(x) \vee Q(x)$$

Wenn sie gebunden Umbenennen, was entsteht?

1. $\forall y P(y) \vee Q(y)$
2. $\forall x P(x) \vee Q(y)$
3. $\forall y P(y) \vee Q(x)$
4. $\forall y P(y) \vee Q(z)$
5. Das geht hier nicht (kein $\exists$)
6. Weiß ich nicht

Frage 13

13. Sei
$$F = \forall x(P(x) \Rightarrow \neg(Q(a) \land \neg P(y))$$
wir wollen das freie y binden. Was entsteht?

1. $F = \forall x(P(x) \Rightarrow \neg(Q(a) \land \neg\exists y P(y))$
2. $F = \forall x(P(x) \Rightarrow \neg(Q(a) \land \exists y \neg P(y))$
3. $F = \forall x(P(x) \Rightarrow \exists y \neg(Q(a) \land \neg P(y))$
4. $F = \forall x \exists y(P(x) \Rightarrow \neg(Q(a) \land \neg P(y))$
5. $F = \exists y \forall x(P(x) \Rightarrow \neg(Q(a) \land \neg P(y))$
6. Weiß ich nicht

Frage 14

14. Was stimmt?

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow \neg\forall y Q(y)) \equiv \forall x(P(x) \Rightarrow \forall y \neg Q(y))$
2. $\forall x(P(x) \Rightarrow \neg\forall y Q(y)) \equiv \forall x(P(x) \Rightarrow \exists y \neg Q(y))$
3. $\forall x(P(x) \Rightarrow \neg\forall y Q(y)) \equiv \forall x \exists y(P(x) \Rightarrow \neg Q(y))$
4. $\forall x(P(x) \Rightarrow \neg\forall y Q(y)) \equiv \forall x \forall y(P(x) \Rightarrow \neg Q(y))$
5. $\forall x(P(x) \Rightarrow \neg\forall y Q(y)) \equiv \exists y \forall x(P(x) \Rightarrow \neg Q(y))$
6. Weiss ich nicht

Frage 15

15. Sei
$$F = \forall x \exists y \forall z \exists u P(x, u, z, y)$$
Wie sieht die Skolemisierung von F aus?

1. $\exists y \exists u P(a, u, f(y), y)$
2. $\exists y \exists u P(g(y, u), u, f(u), y)$
3. $\forall x \forall z P(x, g(x, z), z, f(x))$
4. $\forall x \forall z P(x, a, z, f(z))$
5. $P(a, h(a, f(a), g(a, f(a))), g(a, f(a)), f(a))$
6. Weiß ich nicht

Frage 16

16. Sind $P(x)$, $P(y)$ und $P(f(y))$ unifizierbar?

1. Ja, mit zunächst $[y/x]$ und dann $[x/f(y)]$
2. Ja, mit zunächst $[x/y]$ und dann $[y/f(y)]$
3. Ja, mit $[y/x]$ und $[f(y)/x]$
4. Nein
5. Weiß ich nicht

Frage 17

17. Sind $\{P(y), P(f(x))\}$ und $\{\neg P(x)\}$ zur leeren Klausel resolvierbar?

1. Ja
2. Nein
3. Weiß ich nicht

Zur Nachbereitung

1. 4
2. 2
3. 1
4. 3
5. 3 (und 2)
6. 2
7. 3
8. 1
9. 6
10. 4

Zur Nachbereitung

Weitere Zählung hier mit +10, also Item 1 ist für die 11. Frage.

1. 5
2. 3
3. 5
4. 2 und 3 (3 ist schöner)
5. 3
6. 4
7. 1

Bemerkung zu den Fragen

Wichtige Anmerkung

Meist wird es nötig sein, die eigenen **Behauptungen zu begründen/beweisen**!