

# Formale Grundlagen der Informatik 1

## Wiederholung zum Logik-Teil

Frank Heitmann  
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

20. Juni 2016



# Überblick

Im Logikteil hatten wir

- Aussagenlogik
  - Syntax
  - Semantik
  - Folgerbarkeit und Äquivalenz
  - Normalformen
  - Hornformeln
  - Resolution
- Prädikatenlogik
  - Syntax
  - Semantik
  - (Folgerbarkeit und Äquivalenz)
  - Normalformen
  - Resolution

# Aussagenlogik - Syntax

## Zusammenfassung **Syntax**:

- Definition der Syntax:
  - Alphabet, Junktor
  - Aussagesymbol, atomare Formel, komplexe Formel
  - Hauptoperator, Teilformel
  - Negation, Disjunktion, Konjunktion, Implikation, Biimplikation
- Strukturbäume
- strukturelle Induktion
- strukturelle Rekursion
- Grad und Tiefe einer Formel

# Aussagenlogik - Semantik

## Zusammenfassung **Semantik**:

- Belegung, Auswertung (einer Formel)
- Wahrheitstafeln, Wahrheitswerteverlauf
- erfüllende Belegung, falsifizierende Belegung, Modell
- kontingent, (allgemein-)gültig, unerfüllbar
- Tautologie, Kontradiktion
- $\mathcal{A} \models F$ ,  $\mathcal{A} \not\models F$ ,  $\models F$ ,  $F \models$

# Aussagenlogik - Normalformen

- Folgerbarkeit und Äquivalenz
  - Nachweis mit Wahrheitstafeln
  - Nachweis ohne Wahrheitstafeln
  - Gegenbeispiel (mit und ohne Wahrheitstafeln)
- Literal, Klausel, duale Klausel, DNF und KNF
- Herstellung von DNF und KNF
  - durch Äquivalenzumformungen (basierend auf dem Ersetzbarkeitstheorem)
  - mit Wahrheitstafeln

# Aussagenlogik - Verfahren

Die effiziente Berechnung von (Un-)Erfüllbarkeit rückte dann ins Zentrum. Folgerbarkeit und Äquivalenz sind darauf rückführbar.

- Hornformeln
  - *Einschränkung* der Aussagenlogik
  - Effizienter (Un-)Erfüllbarkeitstest
    - Markierungsalgorithmus
- Resolution (spezielles Ableitungsverfahren)
  - Resolvente, Resolutionssatz
  - Verfeinerungen (P-Resolution, N-Resolution, ...)

# Prädikatenlogik - Syntax

## Zusammenfassung **Syntax**:

- Definition der Syntax:
  - Alphabet, Junktor, Quantor, Hilfssymbole
  - Variablen, Konstante, Funktions- und Prädikatensymbole, Aussagensymbole
  - Terme, atomare Formel, komplexe Formel
  - Hauptoperator, Teilformel, Teilterm
  - Quantorenvariable, Skopus
  - gebundene Variable, freie Variable
- strukturelle Induktion
- strukturelle Rekursion



# Prädikatenlogik - Semantik

## Zusammenfassung **Semantik**:

- Struktur, Universum, Interpretation
- Auswertung
- $x$ -Variante
- weitere semantische Begriffe wie in der Aussagenlogik

# Prädikatenlogik - Normalformen

- Normalformen basierend auf Äquivalenz:
  - aussagenlogische Äquivalenzen übertragen
  - neue Äquivalenzen durch Quantoren
  - Gebundene Umbenennung von Variablen
  - Pränexform
- Normalformen basierend auf Erfüllbarkeitsäquivalenz:
  - Bindung freier Variablen
  - Skolemisierung
  - Klauselnormalform
- Umformen einer Formel in Klauselnormalform

# Prädikatenlogik - Verfahren

Aufgrund der **Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik** kann es kein Verfahren wie in der Aussagenlogik geben, um (Un-)Erfüllbarkeit zu entscheiden (geschweige denn, dies effizient zu machen). Dennoch war es möglich ein Resolutionsverfahren einzuführen:

- Resolution (spezielles Ableitungsverfahren)
  - Unifikationsalgorithmus
  - Resolvente, Resolutionsatz
  - Verfeinerungen (P-Resolution, N-Resolution, ...)
  - Der Weg zur Resolution:
    - Herbrand-Universum, -Struktur, -Modell
    - Herbrand-Expansion
    - Algorithmus von Gilmore, Grundresolution

# Was wir ausgelassen haben...

Ausgelassen/Nur kurz erwähnt haben wir...

- Endlichkeitssatz der Aussagenlogik
- Genauer Beweis der Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik
- Beweise im Rahmen der Herbrand-Theorie
- Beweis der Korrektheit des Unifikationsalgorithmus und der prädikatenlogischen Resolution

# Frage-Runde

Fragen ...

# Frage 1

1. Was ist in der folgenden Formel der Hauptoperator?

$$(A \Rightarrow B) \wedge C$$

- 1  $A$
- 2  $\Rightarrow$
- 3  $B$
- 4  $\wedge$
- 5  $C$
- 6 Weiß ich nicht

## Frage 2

2. Was ist eine richtige Formulierung der Induktionsannahme?

- 1 Seien  $F$  und  $G$  Formeln.
- 2 Seien  $F$  und  $G$  Formeln, für die die Behauptung gilt.
- 3 Gelte die Behauptung für alle Formeln  $F$  und  $G$ .
- 4 Gelte die Behauptung für alle Formeln.
- 5 Keine davon
- 6 Weiß ich nicht

# Frage 3

3. Sei  $T$  eine Tautologie,  $K$  eine Kontradiktion und  $F$  kontingent, dann ist

$$(T \wedge K) \Rightarrow F$$

- ① Tautologie
- ② Kontradiktion
- ③ allgemeingültig
- ④ erfüllbar
- ⑤ kontingent
- ⑥ Weiß ich nicht



# Frage 4

4. Sei  $T$  eine Tautologie,  $K$  eine Kontradiktion und  $F$  kontingent, dann ist

$$F \Rightarrow (K \vee \neg F)$$

- ① Tautologie
- ② Kontradiktion
- ③ Kontingent
- ④ Tautologie oder Kontradiktion abhängig von  $F$
- ⑤ Weiß ich nicht

# Frage 5

5. Folgt  $F$  aus  $G$ , dann steht in der Wahrheitstafel ...

- ① bei  $F$  überall eine 0, wo  $G$  eine hat
- ② bei  $G$  überall eine 0, wo  $F$  eine hat
- ③ bei  $F$  überall eine 1, wo  $G$  eine hat
- ④ bei  $G$  überall eine 1, wo  $F$  eine hat
- ⑤ bei  $F$  und  $G$  überall an gleicher Stelle eine 1
- ⑥ Weiß ich nicht

# Frage 6

6. Richtig oder falsch?

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

- ① Richtig!
- ② Falsch!
- ③ Weiß ich nicht

# Frage 7

7. Will man zu  $F$  eine DNF machen, ist in der Wahrheitstafel was wichtig?

- ① Die Spalte von  $F$
- ② Die Zeilen, in denen  $F$  zu 0 ausgewertet wird
- ③ Die Zeilen, in denen  $F$  zu 1 ausgewertet wird
- ④ Weiß ich nicht

# Frage 8

8. Terminiert der Markierungsalgorithmus immer?

- ① Ja und stets mit korrekter Ausgabe
- ② Ja, aber manchmal hilft die Ausgabe nicht
- ③ Ja, aber manchmal mit fehlerhafter Ausgabe
- ④ Nein
- ⑤ Weiß ich nicht

## Frage 9

9.  $F \models G$  gilt genau dann, wenn ...

- ①  $G \models F$
- ②  $G \not\models F$
- ③  $F \equiv G$
- ④  $G \wedge \neg F \models$
- ⑤  $\models F \wedge \neg G$
- ⑥  $\neg G \wedge F \models$
- ⑦  $\models \neg F \wedge G$
- ⑧ Weiß ich nicht

## Frage 10

10. Wie sieht die Resolvente von  $\{A, \neg B, C\}$  und  $\{B, C, \neg D\}$  aus?

- ①  $\{A, \neg B, B, C, C, \neg D\}$
- ②  $\{A, C\}$
- ③  $\{\neg D\}$
- ④  $\{A, C, \neg D\}$
- ⑤  $\{A, C\}, \{\neg D\}$
- ⑥ Weiß ich nicht

# Frage 11

11. Wann gilt  $\mathcal{A}_{[x/d]}(P(a, x)) = 1$  ?

- ① Wenn  $P(a, x) = 1$
- ② Wenn  $(a, x) \in P$
- ③ Wenn  $(a, d) \in I(P)$
- ④ Wenn  $(I(a), I(x)) \in I(P)$
- ⑤ Wenn  $(I(a), d) \in I(P)$
- ⑥ Weiß ich nicht



# Frage 12

12. Sei

$$F = \forall x P(x) \vee Q(x)$$

Wenn sie gebunden Umbenennen, was entsteht?

- ①  $\forall y P(y) \vee Q(y)$
- ②  $\forall x P(x) \vee Q(y)$
- ③  $\forall y P(y) \vee Q(x)$
- ④  $\forall y P(y) \vee Q(z)$
- ⑤ Das geht hier nicht (kein  $\exists$ )
- ⑥ Weiß ich nicht

# Frage 13

13. Sei

$$F = \forall x(P(x) \Rightarrow \neg(Q(a) \wedge \neg P(y)))$$

wir wollen das freie  $y$  binden. Was entsteht?

- ①  $F = \forall x(P(x) \Rightarrow \neg(Q(a) \wedge \neg \exists y P(y)))$
- ②  $F = \forall x(P(x) \Rightarrow \neg(Q(a) \wedge \exists y \neg P(y)))$
- ③  $F = \forall x(P(x) \Rightarrow \exists y \neg(Q(a) \wedge \neg P(y)))$
- ④  $F = \forall x \exists y(P(x) \Rightarrow \neg(Q(a) \wedge \neg P(y)))$
- ⑤  $F = \exists y \forall x(P(x) \Rightarrow \neg(Q(a) \wedge \neg P(y)))$
- ⑥ Weiß ich nicht

# Frage 14

14. Was stimmt?

- ①  $\forall x(P(x) \Rightarrow \neg \forall y Q(y)) \equiv \forall x(P(x) \Rightarrow \forall y \neg Q(y))$
- ②  $\forall x(P(x) \Rightarrow \neg \forall y Q(y)) \equiv \forall x(P(x) \Rightarrow \exists y \neg Q(y))$
- ③  $\forall x(P(x) \Rightarrow \neg \forall y Q(y)) \equiv \forall x \exists y (P(x) \Rightarrow \neg Q(y))$
- ④  $\forall x(P(x) \Rightarrow \neg \forall y Q(y)) \equiv \forall x \forall y (P(x) \Rightarrow \neg Q(y))$
- ⑤  $\forall x(P(x) \Rightarrow \neg \forall y Q(y)) \equiv \exists y \forall x (P(x) \Rightarrow \neg Q(y))$
- ⑥ Weiss ich nicht

## Frage 15

15. Sei

$$F = \forall x \exists y \forall z \exists u P(x, u, z, y)$$

Wie sieht die Skolemisierung von  $F$  aus?

- ①  $\exists y \exists u P(a, u, f(y), y)$
- ②  $\exists y \exists u P(g(y, u), u, f(u), y)$
- ③  $\forall x \forall z P(x, g(x, z), z, f(x))$
- ④  $\forall x \forall z P(x, a, z, f(z))$
- ⑤  $P(a, h(a, f(a), g(a, f(a))), g(a, f(a)), f(a))$
- ⑥ Weiß ich nicht

# Frage 16

16. Sind  $P(x)$ ,  $P(y)$  und  $P(f(y))$  unifizierbar?

- ① Ja, mit zunächst  $[y/x]$  und dann  $[x/f(y)]$
- ② Ja, mit zunächst  $[x/y]$  und dann  $[y/f(y)]$
- ③ Ja, mit  $[y/x]$  und  $[f(y)/x]$
- ④ Nein
- ⑤ Weiß ich nicht

# Frage 17

17. Sind  $\{P(y), P(f(x))\}$  und  $\{\neg P(x)\}$  zur leeren Klausel resolvierbar?

- ① Ja
- ② Nein
- ③ Weiß ich nicht

# Zur Nachbereitung

- 1 4
- 2 2
- 3 1
- 4 3
- 5 3 (und 2)
- 6 2
- 7 3
- 8 1
- 9 6
- 10 4

# Zur Nachbereitung

Weitere Zählung hier mit +10, also Item 1 ist für die 11. Frage.

- ① 5
- ② 3
- ③ 5
- ④ 2 und 3 (3 ist schöner)
- ⑤ 3
- ⑥ 4
- ⑦ 1



# Bemerkung zu den Fragen

## Wichtige Anmerkung

Meist wird es nötig sein, die eigenen **Behauptungen zu begründen/beweisen!**