Formale Grundlagen der Informatik 1
Kapitel 18
Prädikatenlogische Normalformen

Frank Heitmann
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

13. & 14. Juni 2016

Motivation

Für verschiedene Beweise und Verfahren (insb. Resolution) benötigen wir wieder eine Normalform. Es gibt in der Prädikatenlogik

- Normalformen basierend auf Äquivalenz
  - aussagenlogische Äquivalenzen übertragen
  - neue Äquivalenzen durch Quantoren
  - Gebundene Umbenennung von Variablen
  - Pränexform
- Normalformen basierend auf Erfüllbarkeitsäquivalenz
  - Bindung freier Variablen
  - Skolemisierung
  - Klauselnormalform

Motivation

Für verschiedene Beweise und Verfahren (insb. Resolution) benötigen wir wieder eine Normalform. Es gibt in der Prädikatenlogik

- Normalformen basierend auf Äquivalenz
  - aussagenlogische Äquivalenzen übertragen
  - neue Äquivalenzen durch Quantoren
  - Gebundene Umbenennung von Variablen
  - Pränexform
- Normalformen basierend auf Erfüllbarkeitsäquivalenz
  - Bindung freier Variablen
  - Skolemisierung
  - Klauselnormalform

Motivation

Für verschiedene Beweise und Verfahren (insb. Resolution) benötigen wir wieder eine Normalform. Es gibt in der Prädikatenlogik

- Normalformen basierend auf Äquivalenz
  - aussagenlogische Äquivalenzen übertragen
  - neue Äquivalenzen durch Quantoren
  - Gebundene Umbenennung von Variablen
  - Pränexform
- Normalformen basierend auf Erfüllbarkeitsäquivalenz
  - Bindung freier Variablen
  - Skolemisierung
  - Klauselnormalform

Motivation

Für verschiedene Beweise und Verfahren (insb. Resolution) benötigen wir wieder eine Normalform. Es gibt in der Prädikatenlogik

- Normalformen basierend auf Äquivalenz
  - aussagenlogische Äquivalenzen übertragen
  - neue Äquivalenzen durch Quantoren
  - Gebundene Umbenennung von Variablen
  - Pränexform
- Normalformen basierend auf Erfüllbarkeitsäquivalenz
  - Bindung freier Variablen
  - Skolemisierung
  - Klauselnormalform

Motivation

Für verschiedene Beweise und Verfahren (insb. Resolution) benötigen wir wieder eine Normalform. Es gibt in der Prädikatenlogik

- Normalformen basierend auf Äquivalenz
  - aussagenlogische Äquivalenzen übertragen
  - neue Äquivalenzen durch Quantoren
  - Gebundene Umbenennung von Variablen
  - Pränexform
- Normalformen basierend auf Erfüllbarkeitsäquivalenz
  - Bindung freier Variablen
  - Skolemisierung
  - Klauselnormalform

Motivation

Für verschiedene Beweise und Verfahren (insb. Resolution) benötigen wir wieder eine Normalform. Es gibt in der Prädikatenlogik

- Normalformen basierend auf Äquivalenz
  - aussagenlogische Äquivalenzen übertragen
  - neue Äquivalenzen durch Quantoren
  - Gebundene Umbenennung von Variablen
  - Pränexform
- Normalformen basierend auf Erfüllbarkeitsäquivalenz
  - Bindung freier Variablen
  - Skolemisierung
  - Klauselnormalform

Motivation

Für verschiedene Beweise und Verfahren (insb. Resolution) benötigen wir wieder eine Normalform. Es gibt in der Prädikatenlogik

- Normalformen basierend auf Äquivalenz
  - aussagenlogische Äquivalenzen übertragen
  - neue Äquivalenzen durch Quantoren
  - Gebundene Umbenennung von Variablen
  - Pränexform
- Normalformen basierend auf Erfüllbarkeitsäquivalenz
  - Bindung freier Variablen
  - Skolemisierung
  - Klauselnormalform

Motivation

Für verschiedene Beweise und Verfahren (insb. Resolution) benötigen wir wieder eine Normalform. Es gibt in der Prädikatenlogik

- Normalformen basierend auf Äquivalenz
  - aussagenlogische Äquivalenzen übertragen
  - neue Äquivalenzen durch Quantoren
  - Gebundene Umbenennung von Variablen
  - Pränexform
- Normalformen basierend auf Erfüllbarkeitsäquivalenz
  - Bindung freier Variablen
  - Skolemisierung
  - Klauselnormalform

Aussagenlogische Äquivalenzen

Definition

Zwei (prädikatenlogische) Formeln F und G sind äquivalent, falls $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Struktur $\mathcal{A}$ gilt.

Satz

Wenn in zwei äquivalenten aussagenlogischen Formeln prädikatenlogische Formeln (uniform) für die Aussagensymbole substituiert werden, ergibt dies zwei äquivalente Formeln der Prädikatenlogik.

Beispiel

Wegen $F \wedge G \equiv G \wedge F$ ist auch $\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y) \equiv \exists y Q(y) \wedge \forall x P(x)$.

Aussagenlogische Äquivalenzen

Definition

Zwei (prädikatenlogische) Formeln F und G sind äquivalent, falls $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Struktur $\mathcal{A}$ gilt.

Satz

Wenn in zwei äquivalenten aussagenlogischen Formeln prädikatenlogische Formeln (uniform) für die Aussagensymbole substituiert werden, ergibt dies zwei äquivalente Formeln der Prädikatenlogik.

Beispiel

Wegen $F \wedge G \equiv G \wedge F$ ist auch $\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y) \equiv \exists y Q(y) \wedge \forall x P(x)$.

Aussagenlogische Äquivalenzen

Definition

Zwei (prädikatenlogische) Formeln F und G sind äquivalent, falls $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für jede Struktur $\mathcal{A}$ gilt.

Satz

Wenn in zwei äquivalenten aussagenlogischen Formeln prädikatenlogische Formeln (uniform) für die Aussagensymbole substituiert werden, ergibt dies zwei äquivalente Formeln der Prädikatenlogik.

Beispiel

Wegen $F \wedge G \equiv G \wedge F$ ist auch $\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y) \equiv \exists y Q(y) \wedge \forall x P(x)$.

Prädikatenlogische Äquivalenzen

Aufgrund der semantischen Definition der Quantoren ergeben sich weitere (prädikatenlogische) Äquivalenzen ...

Prädikatenlogische Äquivalenzen 1

Satz (Dualität von $\forall$ und $\exists$)

Sei F eine beliebige prädikatenlogische Formeln. Es ist:

$$\begin{aligned} \neg\forall xF &\equiv \exists x\neg F \\ \neg\exists xF &\equiv \forall x\neg F \end{aligned}$$

Prädikatenlogische Äquivalenzen 2

Satz (Leere Quantifikation und Skopuserweiterung)

Seien F und G beliebige prädikatenlogische Formeln und trete x nicht frei in G auf. Es ist:

$$
\begin{aligned}
G \equiv \forall x G &\equiv \exists x G \\
(\forall x F \wedge G) &\equiv \forall x (F \wedge G) \\
(\forall x F \vee G) &\equiv \forall x (F \vee G) \\
(\exists x F \wedge G) &\equiv \exists x (F \wedge G) \\
(\exists x F \vee G) &\equiv \exists x (F \vee G) \\
(G \Rightarrow \forall x F) &\equiv \forall x (G \Rightarrow F) \\
(G \Rightarrow \exists x F) &\equiv \exists x (G \Rightarrow F) \\
(\forall x F \Rightarrow G) &\equiv \exists x (F \Rightarrow G) \\
(\exists x F \Rightarrow G) &\equiv \forall x (F \Rightarrow G)
\end{aligned}
$$

Man beachte, dass keine neuen Variablen-Bindungen entstehen!

Prädikatenlogische Äquivalenzen 3

Satz (Distributivität)

Seien F und G beliebige prädikatenlogische Formeln. Es ist:

$$(\forall x F \wedge \forall x G) \equiv \forall x (F \wedge G)$$
$$(\exists x F \vee \exists x G) \equiv \exists x (F \vee G)$$

Satz

Es gelten die folgenden Nicht-Äquivalenzen:

$$(\forall x F \vee \forall x G) \not\equiv \forall x (F \vee G)$$
$$(\exists x F \wedge \exists x G) \not\equiv \exists x (F \wedge G)$$

Prädikatenlogische Äquivalenzen 3

Satz (Distributivität)

Seien F und G beliebige prädikatenlogische Formeln. Es ist:

$$\begin{aligned}(\forall x F \wedge \forall x G) &\equiv \forall x(F \wedge G)\\(\exists x F \vee \exists x G) &\equiv \exists x(F \vee G)\end{aligned}$$

Satz

Es gelten die folgenden Nicht-Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}(\forall x F \vee \forall x G) &\not\equiv \forall x(F \vee G)\\(\exists x F \wedge \exists x G) &\not\equiv \exists x(F \wedge G)\end{aligned}$$

Prädikatenlogische Äquivalenzen 4

Satz (Vertauschung der Quantorenreihenfolge)

Sei F eine beliebige prädikatenlogische Formel. Es ist:

$$\begin{aligned} \forall x \forall y F &\equiv \forall y \forall x F \\ \exists x \exists y F &\equiv \exists y \exists x F \end{aligned}$$

Satz

Es gilt die folgenden Nicht-Äquivalenzen:

$$\forall x \exists y F \not\equiv \exists y \forall x F$$

Prädikatenlogische Äquivalenzen 4

Satz (Vertauschung der Quantorenreihenfolge)

Sei F eine beliebige prädikatenlogische Formel. Es ist:

$$\begin{aligned} \forall x \forall y F &\equiv \forall y \forall x F \\ \exists x \exists y F &\equiv \exists y \exists x F \end{aligned}$$

Satz

Es gilt die folgenden Nicht-Äquivalenzen:

$$\forall x \exists y F \not\equiv \exists y \forall x F$$

Ein Beweis

Die Beweise verlaufen alle recht ähnlich:

$$(\forall x F \wedge G) \equiv \forall x (F \wedge G) \ (x \text{ nicht frei in } G)$$

	$\mathcal{A}(\forall x F \wedge G) = 1$	
gdw.	$\mathcal{A}(\forall x F) = 1$ und $\mathcal{A}(G) = 1$	*Konjunktion*
gdw.	für alle $d \in U$ $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(G) = 1$	*Allquantor*
gdw.	für alle $d \in U$ $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ und $\mathcal{A}_{[x/d]}(G) = 1$	x nicht frei in G
gdw.	für alle $d \in U$ $\mathcal{A}_{[x/d]}(F \wedge G) = 1$	*Konjunktion*
gdw.	$\mathcal{A}(\forall x (F \wedge G)) = 1$	*Allquantor*

Die anderen zur Übung ...

Ein Beweis

Die Beweise verlaufen alle recht ähnlich:

$$(\forall x F \wedge G) \equiv \forall x(F \wedge G) \text{ (x nicht frei in G)}$$

	$\mathcal{A}(\forall x F \wedge G) = 1$	
gdw.	$\mathcal{A}(\forall x F) = 1$ und $\mathcal{A}(G) = 1$	*Konjunktion*
gdw.	für alle $d \in U$ $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(G) = 1$	*Allquantor*
gdw.	für alle $d \in U$ $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ und $\mathcal{A}_{[x/d]}(G) = 1$	x nicht frei in G
gdw.	für alle $d \in U$ $\mathcal{A}_{[x/d]}(F \wedge G) = 1$	*Konjunktion*
gdw.	$\mathcal{A}(\forall x(F \wedge G)) = 1$	*Allquantor*

Die anderen zur Übung ...

Ein Beweis

Die Beweise verlaufen alle recht ähnlich:

$$(\forall x F \wedge G) \equiv \forall x(F \wedge G) \text{ (x nicht frei in G)}$$

	$\mathcal{A}(\forall x F \wedge G) = 1$	
gdw.	$\mathcal{A}(\forall x F) = 1$ und $\mathcal{A}(G) = 1$	*Konjunktion*
gdw.	für alle $d \in U$ $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(G) = 1$	*Allquantor*
gdw.	für alle $d \in U$ $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ und $\mathcal{A}_{[x/d]}(G) = 1$	x nicht frei in G
gdw.	für alle $d \in U$ $\mathcal{A}_{[x/d]}(F \wedge G) = 1$	*Konjunktion*
gdw.	$\mathcal{A}(\forall x(F \wedge G)) = 1$	*Allquantor*

Die anderen zur Übung ...

Ersetzbarkeitstheorem

Um die Äquivalenzen nutzen zu können, brauchen wir wieder ein Ersetzbarkeitstheorem ...

Satz (Ersetzbarkeitstheorem)

Seien F und G äquivalente Formeln und trete F in H als Teilformel auf. Gehe H' aus H hervor, indem F (in H) durch G ersetzt wird. Dann gilt $H \equiv H'$.

Beweis.

Der Beweis gelingt wieder mit struktureller Induktion und verläuft wie im aussagenlogischen Fall. Spannend sind die Quantoren: Wenn H_1 und H_1' äquivalent sind, dann gilt $\exists x H_1 \equiv \exists x H_1'$ und $\forall x H_1 \equiv \forall x H_1'$.
Beweis dazu: Sei $H_1 \equiv H_1'$ und $\mathcal{A}$ ein Modell von $\exists x H_1$. Dann gibt es ein $d \in U$, so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1) = 1$. Wegen $H_1 \equiv H_1'$ ist dann auch $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1') = 1$ und damit ist $\mathcal{A}(\exists x H_1') = 1$. Die andere Richtung und der $\forall$-Fall werden analog bewiesen. □

Ersetzbarkeitstheorem

Um die Äquivalenzen nutzen zu können, brauchen wir wieder ein Ersetzbarkeitstheorem ...

Satz (Ersetzbarkeitstheorem)

Seien F und G äquivalente Formeln und trete F in H als Teilformel auf. Gehe H' aus H hervor, indem F (in H) durch G ersetzt wird. Dann gilt $H \equiv H'$.

Beweis.

Der Beweis gelingt wieder mit struktureller Induktion und verläuft wie im aussagenlogischen Fall. Spannend sind die Quantoren: Wenn H_1 und H_1' äquivalent sind, dann gilt $\exists x H_1 \equiv \exists x H_1'$ und $\forall x H_1 \equiv \forall x H_1'$.
Beweis dazu: Sei $H_1 \equiv H_1'$ und $\mathcal{A}$ ein Modell von $\exists x H_1$. Dann gibt es ein $d \in U$, so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1) = 1$. Wegen $H_1 \equiv H_1'$ ist dann auch $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1') = 1$ und damit ist $\mathcal{A}(\exists x H_1') = 1$. Die andere Richtung und der $\forall$-Fall werden analog bewiesen. □

Ersetzbarkeitstheorem

Um die Äquivalenzen nutzen zu können, brauchen wir wieder ein Ersetzbarkeitstheorem ...

Satz (Ersetzbarkeitstheorem)

Seien F und G äquivalente Formeln und trete F in H als Teilformel auf. Gehe H' aus H hervor, indem F (in H) durch G ersetzt wird. Dann gilt $H \equiv H'$.

Beweis.

Der Beweis gelingt wieder mit struktureller Induktion und verläuft wie im aussagenlogischen Fall. Spannend sind die Quantoren: Wenn H_1 und H_1' äquivalent sind, dann gilt $\exists x H_1 \equiv \exists x H_1'$ und $\forall x H_1 \equiv \forall x H_1'$.
Beweis dazu: Sei $H_1 \equiv H_1'$ und $\mathcal{A}$ ein Modell von $\exists x H_1$. Dann gibt es ein $d \in U$, so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1) = 1$. Wegen $H_1 \equiv H_1'$ ist dann auch $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1') = 1$ und damit ist $\mathcal{A}(\exists x H_1') = 1$. Die andere Richtung und der $\forall$-Fall werden analog bewiesen. □

Ersetzbarkeitstheorem

Um die Äquivalenzen nutzen zu können, brauchen wir wieder ein Ersetzbarkeitstheorem ...

Satz (Ersetzbarkeitstheorem)

Seien F und G äquivalente Formeln und trete F in H als Teilformel auf. Gehe H' aus H hervor, indem F (in H) durch G ersetzt wird. Dann gilt $H \equiv H'$.

Beweis.

Der Beweis gelingt wieder mit struktureller Induktion und verläuft wie im aussagenlogischen Fall. Spannend sind die Quantoren: Wenn H_1 und H_1' äquivalent sind, dann gilt $\exists x H_1 \equiv \exists x H_1'$ und $\forall x H_1 \equiv \forall x H_1'$.
Beweis dazu: Sei $H_1 \equiv H_1'$ und $\mathcal{A}$ ein Modell von $\exists x H_1$. Dann gibt es ein $d \in U$, so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1) = 1$. Wegen $H_1 \equiv H_1'$ ist dann auch $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1') = 1$ und damit ist $\mathcal{A}(\exists x H_1') = 1$. Die andere Richtung und der $\forall$-Fall werden analog bewiesen. $\square$

Ersetzbarkeitstheorem

Um die Äquivalenzen nutzen zu können, brauchen wir wieder ein Ersetzbarkeitstheorem ...

Satz (Ersetzbarkeitstheorem)

Seien F und G äquivalente Formeln und trete F in H als Teilformel auf. Gehe H' aus H hervor, indem F (in H) durch G ersetzt wird. Dann gilt $H \equiv H'$.

Beweis.

Der Beweis gelingt wieder mit struktureller Induktion und verläuft wie im aussagenlogischen Fall. Spannend sind die Quantoren: Wenn H_1 und H_1' äquivalent sind, dann gilt $\exists x H_1 \equiv \exists x H_1'$ und $\forall x H_1 \equiv \forall x H_1'$.
Beweis dazu: Sei $H_1 \equiv H_1'$ und $\mathcal{A}$ ein Modell von $\exists x H_1$. Dann gibt es ein $d \in U$, so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1) = 1$. Wegen $H_1 \equiv H_1'$ ist dann auch $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1') = 1$ und damit ist $\mathcal{A}(\exists x H_1') = 1$. Die andere Richtung und der $\forall$-Fall werden analog bewiesen. □

Ersetzbarkeitstheorem

Um die Äquivalenzen nutzen zu können, brauchen wir wieder ein Ersetzbarkeitstheorem ...

Satz (Ersetzbarkeitstheorem)

Seien F und G äquivalente Formeln und trete F in H als Teilformel auf. Gehe H' aus H hervor, indem F (in H) durch G ersetzt wird. Dann gilt $H \equiv H'$.

Beweis.

Der Beweis gelingt wieder mit struktureller Induktion und verläuft wie im aussagenlogischen Fall. Spannend sind die Quantoren: Wenn H_1 und H_1' äquivalent sind, dann gilt $\exists x H_1 \equiv \exists x H_1'$ und $\forall x H_1 \equiv \forall x H_1'$.
Beweis dazu: Sei $H_1 \equiv H_1'$ und $\mathcal{A}$ ein Modell von $\exists x H_1$. Dann gibt es ein $d \in U$, so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1) = 1$. Wegen $H_1 \equiv H_1'$ ist dann auch $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1') = 1$ und damit ist $\mathcal{A}(\exists x H_1') = 1$. Die andere Richtung und der $\forall$-Fall werden analog bewiesen. □

Ersetzbarkeitstheorem

Um die Äquivalenzen nutzen zu können, brauchen wir wieder ein Ersetzbarkeitstheorem ...

Satz (Ersetzbarkeitstheorem)

Seien F und G äquivalente Formeln und trete F in H als Teilformel auf. Gehe H' aus H hervor, indem F (in H) durch G ersetzt wird. Dann gilt $H \equiv H'$.

Beweis.

Der Beweis gelingt wieder mit struktureller Induktion und verläuft wie im aussagenlogischen Fall. Spannend sind die Quantoren: Wenn H_1 und H_1' äquivalent sind, dann gilt $\exists x H_1 \equiv \exists x H_1'$ und $\forall x H_1 \equiv \forall x H_1'$.
Beweis dazu: Sei $H_1 \equiv H_1'$ und $\mathcal{A}$ ein Modell von $\exists x H_1$. Dann gibt es ein $d \in U$, so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1) = 1$. Wegen $H_1 \equiv H_1'$ ist dann auch $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1') = 1$ und damit ist $\mathcal{A}(\exists x H_1') = 1$. Die andere Richtung und der $\forall$-Fall werden analog bewiesen. $\square$

Ersetzbarkeitstheorem

Um die Äquivalenzen nutzen zu können, brauchen wir wieder ein Ersetzbarkeitstheorem ...

Satz (Ersetzbarkeitstheorem)

Seien F und G äquivalente Formeln und trete F in H als Teilformel auf. Gehe H' aus H hervor, indem F (in H) durch G ersetzt wird. Dann gilt $H \equiv H'$.

Beweis.

Der Beweis gelingt wieder mit struktureller Induktion und verläuft wie im aussagenlogischen Fall. Spannend sind die Quantoren: Wenn H_1 und H_1' äquivalent sind, dann gilt $\exists x H_1 \equiv \exists x H_1'$ und $\forall x H_1 \equiv \forall x H_1'$.
Beweis dazu: Sei $H_1 \equiv H_1'$ und $\mathcal{A}$ ein Modell von $\exists x H_1$. Dann gibt es ein $d \in U$, so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1) = 1$. Wegen $H_1 \equiv H_1'$ ist dann auch $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1') = 1$ und damit ist $\mathcal{A}(\exists x H_1') = 1$. Die andere Richtung und der $\forall$-Fall werden analog bewiesen. □

Ersetzbarkeitstheorem

Um die Äquivalenzen nutzen zu können, brauchen wir wieder ein Ersetzbarkeitstheorem ...

Satz (Ersetzbarkeitstheorem)

Seien F und G äquivalente Formeln und trete F in H als Teilformel auf. Gehe H' aus H hervor, indem F (in H) durch G ersetzt wird. Dann gilt $H \equiv H'$.

Beweis.

Der Beweis gelingt wieder mit struktureller Induktion und verläuft wie im aussagenlogischen Fall. Spannend sind die Quantoren: Wenn H_1 und H_1' äquivalent sind, dann gilt $\exists x H_1 \equiv \exists x H_1'$ und $\forall x H_1 \equiv \forall x H_1'$.
Beweis dazu: Sei $H_1 \equiv H_1'$ und $\mathcal{A}$ ein Modell von $\exists x H_1$. Dann gibt es ein $d \in U$, so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1) = 1$. Wegen $H_1 \equiv H_1'$ ist dann auch $\mathcal{A}_{[x/d]}(H_1') = 1$ und damit ist $\mathcal{A}(\exists x H_1') = 1$. Die andere Richtung und der $\forall$-Fall werden analog bewiesen. $\square$

Beispiel

Beispiel

$$
\begin{aligned}
& \exists x P(x) \Rightarrow \neg \forall y Q(y) \\
\equiv \quad & \exists x P(x) \Rightarrow \exists y \neg Q(y) \\
\equiv \quad & \forall x (P(x) \Rightarrow \exists y \neg Q(y)) \\
\equiv \quad & \forall x \exists y (P(x) \Rightarrow \neg Q(y))
\end{aligned}
$$

Wichtige Anmerkung

Es geht bei diesen Beispielen nicht um den Sinn der Formel, nur um die (Äquivalenz-)Umformungen!

Fragen

Stimmt diese Äquivalenz?

$$\forall x F(x) \wedge \forall x G(x) \equiv \forall x (F(x) \wedge G(x))$$

1. Ja!
2. Nein!
3. Manchmal!
4. Weiß ich nicht ...

Fragen

Stimmt diese Äquivalenz?

$$\forall x F(x) \vee G(x) \equiv \forall x(F(x) \vee G(x))$$

1. Ja!
2. Nein!
3. Manchmal!
4. Weiß ich nicht ...

Fragen

Stimmt diese Äquivalenz?

$$\exists x F(x) \vee G \equiv \exists x (F(x) \vee G)$$

1. Ja!
2. Nein!
3. Manchmal!
4. Weiß ich nicht ...

Zur Nachbereitung

Zur Nachbereitung

1. Ja!
2. Nein, da das x in G gebunden wird. Die linke Formel kann durch eine Struktur, die $G(x)$ wahr macht, wahr gemacht werden. Die rechte nicht (zwingend).
3. Manchmal, nämlich dann, wenn x nicht frei in G auftritt. Sonst hat man ein ähnliches Problem wie eben.

Zur BPF

Was stört uns jetzt noch?

Beispiel

Beispiel

$$
\begin{aligned}
& \exists x P(x) \vee \neg (P(a) \vee \exists x Q(x)) \\
\equiv \quad & \exists x P(x) \vee (\neg P(a) \wedge \neg \exists x Q(x)) \\
\equiv \quad & \exists x P(x) \vee (\neg P(a) \wedge \forall x \neg Q(x)) \\
\equiv \quad & \exists x P(x) \vee \forall x (\neg P(a) \wedge \neg Q(x))
\end{aligned}
$$

Zur BPF

Was stört uns jetzt noch?

- Gleiche Variable kann an unterschiedlichen Quantoren stehen
  $\Rightarrow$ Gebundene Umbennenung
- Eine Variable kann frei und gebunden auftreten
  $\Rightarrow$ Gebundene Umbennenung
- Die Quantoren sind verstreut
  $\Rightarrow$ Pränexform
- Das überhaupt freie Variablen auftreten (später)
  $\Rightarrow$ Bindung durch Existenzquantoren
- Das Existenzquantoren auftreten (später)
  $\Rightarrow$ Skolemisierung

Zur BPF

Was stört uns jetzt noch?

- Gleiche Variable kann an unterschiedlichen Quantoren stehen
  $\Rightarrow$ Gebundene Umbennenung
- Eine Variable kann frei und gebunden auftreten
  $\Rightarrow$ Gebundene Umbennenung
- Die Quantoren sind verstreut
  $\Rightarrow$ Pränexform
- Das überhaupt freie Variablen auftreten (später)
  $\Rightarrow$ Bindung durch Existenzquantoren
- Das Existenzquantoren auftreten (später)
  $\Rightarrow$ Skolemisierung

Zur BPF

Was stört uns jetzt noch?

- Gleiche Variable kann an unterschiedlichen Quantoren stehen
  $\Rightarrow$ Gebundene Umbennenung
- Eine Variable kann frei und gebunden auftreten
  $\Rightarrow$ Gebundene Umbennenung
- Die Quantoren sind verstreut
  $\Rightarrow$ Pränexform
- Das überhaupt freie Variablen auftreten (später)
  $\Rightarrow$ Bindung durch Existenzquantoren
- Das Existenzquantoren auftreten (später)
  $\Rightarrow$ Skolemisierung

Zur BPF

Was stört uns jetzt noch?

- Gleiche Variable kann an unterschiedlichen Quantoren stehen
  $\Rightarrow$ Gebundene Umbennenung
- Eine Variable kann frei und gebunden auftreten
  $\Rightarrow$ Gebundene Umbennenung
- Die Quantoren sind verstreut
  $\Rightarrow$ Pränexform
- Das überhaupt freie Variablen auftreten (später)
  $\Rightarrow$ Bindung durch Existenzquantoren
- Das Existenzquantoren auftreten (später)
  $\Rightarrow$ Skolemisierung

Zur BPF

Was stört uns jetzt noch?

- Gleiche Variable kann an unterschiedlichen Quantoren stehen
  $\Rightarrow$ Gebundene Umbennenung
- Eine Variable kann frei und gebunden auftreten
  $\Rightarrow$ Gebundene Umbennenung
- Die Quantoren sind verstreut
  $\Rightarrow$ Pränexform
- Das überhaupt freie Variablen auftreten (später)
  $\Rightarrow$ Bindung durch Existenzquantoren
- Das Existenzquantoren auftreten (später)
  $\Rightarrow$ Skolemisierung

Zur BPF

Was stört uns jetzt noch?

- Gleiche Variable kann an unterschiedlichen Quantoren stehen
  $\Rightarrow$ Gebundene Umbennenung
- Eine Variable kann frei und gebunden auftreten
  $\Rightarrow$ Gebundene Umbennenung
- Die Quantoren sind verstreut
  $\Rightarrow$ Pränexform
- Das überhaupt freie Variablen auftreten (später)
  $\Rightarrow$ Bindung durch Existenzquantoren
- Das Existenzquantoren auftreten (später)
  $\Rightarrow$ Skolemisierung

Gebundene Umbenennung (Vorbereitung)

Definition ((Variablen-)Substitution)

Sei F eine Formel, x eine Variable und t ein Term. $F[x/t]$ ist die Formel, die aus F hervorgeht, wenn jedes freie Vorkommen von x in F durch t ersetzt wird. $[x/t]$ wird als Substitution bezeichnet.

Satz (Überführungslemma)

Sei F eine Formel, x eine Variable und t ein Term, der keine in F gebundene Variable enthält. Dann gilt für jede Struktur $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(F[x/t]) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(t)]}(F)$$

Beweis mündlich ... siehe Schöning, Übung 58

Gebundene Umbenennung (Vorbereitung)

Definition ((Variablen-)Substitution)

Sei F eine Formel, x eine Variable und t ein Term. $F[x/t]$ ist die Formel, die aus F hervorgeht, wenn jedes freie Vorkommen von x in F durch t ersetzt wird. $[x/t]$ wird als Substitution bezeichnet.

Satz (Überführungslemma)

Sei F eine Formel, x eine Variable und t ein Term, der keine in F gebundene Variable enthält. Dann gilt für jede Struktur $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(F[x/t]) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(t)]}(F)$$

Beweis mündlich ... siehe Schöning, Übung 58

Gebundene Umbenennung

Satz (Gebundene Umbenennung)

Sei F eine Formel und y eine Variable, die nicht in F vorkommt. Dann gilt:

$$\exists xF \equiv \exists yF[x/y] \text{ und } \forall xF \equiv \forall yF[x/y]$$

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Struktur. Dann:

	$\mathcal{A}(\exists yF[x/y]) = 1$	
gdw.	es ein $d \in U$ gibt mit $\mathcal{A}_{[y/d]}(F[x/y]) = 1$	Quantor-Interpretation
gdw.	es ein $d \in U$ gibt mit $\mathcal{A}_{[y/d][x/d]}(F) = 1$	Überführungslemma
gdw.	es ein $d \in U$ gibt mit $\mathcal{A}_{[y/d]}(\exists xF) = 1$	Quantor-Interpretation
gdw.	$\mathcal{A}(\exists xF) = 1$	y nicht frei in F

Der $\forall$-Fall geht analog. $\square$

Gebundene Umbenennung

Satz (Gebundene Umbenennung)

Sei F eine Formel und y eine Variable, die nicht in F vorkommt. Dann gilt:

$$\exists x F \equiv \exists y F[x/y] \text{ und } \forall x F \equiv \forall y F[x/y]$$

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Struktur. Dann:

	$\mathcal{A}(\exists y F[x/y]) = 1$	
gdw.	es ein $d \in U$ gibt mit $\mathcal{A}_{[y/d]}(F[x/y]) = 1$	Quantor-Interpretation
gdw.	es ein $d \in U$ gibt mit $\mathcal{A}_{[y/d][x/d]}(F) = 1$	Überführungslemma
gdw.	es ein $d \in U$ gibt mit $\mathcal{A}_{[y/d]}(\exists x F) = 1$	Quantor-Interpretation
gdw.	$\mathcal{A}(\exists x F) = 1$	y nicht frei in F

Der $\forall$-Fall geht analog. □

Gebundene Umbenennung

Satz (Gebundene Umbenennung)

Sei F eine Formel und y eine Variable, die nicht in F vorkommt. Dann gilt:

$$\exists x F \equiv \exists y F[x/y] \text{ und } \forall x F \equiv \forall y F[x/y]$$

Der Satz erlaubt es uns *gebundene* Variablen umzubenennen. Wir können damit erreichen, dass keine gleichen Variablen mehr an unterschiedlichen Quantoren stehen und dass gebundene Variablen anders benannt werden als freie.

Wichtige Anmerkung

Achtung! Umbenennung freier Variablen erhält die Äquivalenz *nicht*! Z.B. ist $P(x) \not\equiv P(y)$!

Gebundene Umbenennung

Satz (Gebundene Umbenennung)

Sei F eine Formel und y eine Variable, die nicht in F vorkommt. Dann gilt:

$$\exists x F \equiv \exists y F[x/y] \text{ und } \forall x F \equiv \forall y F[x/y]$$

Der Satz erlaubt es uns *gebundene* Variablen umzubenennen. Wir können damit erreichen, dass keine gleichen Variablen mehr an unterschiedlichen Quantoren stehen und dass gebundene Variablen anders benannt werden als freie.

Wichtige Anmerkung

Achtung! Umbenennung freier Variablen erhält die Äquivalenz *nicht*! Z.B. ist $P(x) \not\equiv P(y)$!

Fragen

Sind F und G äquivalent?

$$\begin{aligned} F &= \forall x(P(x) \Rightarrow (\exists x Q(x) \vee R(x))) \\ G &= \forall y(P(y) \Rightarrow (\exists x Q(x) \vee R(y))) \end{aligned}$$

1. Ja!
2. Nein!
3. Manchmal
4. Weiß ich nicht ...

Fragen

Sind F und G äquivalent?

$$
\begin{aligned}
F &= \exists x(P(x) \wedge (\exists x Q(x) \vee R(x))) \\
G &= \exists x(P(x) \wedge \exists z(Q(z) \vee R(z)))
\end{aligned}
$$

1. Ja!
2. Nein!
3. Manchmal
4. Weiß ich nicht ...

Fragen

Sind F und G äquivalent?

$$\begin{aligned} F &= \exists x P(x) \vee P(x) \\ G &= \exists x P(x) \vee P(z) \end{aligned}$$

1. Ja!
2. Nein!
3. Manchmal
4. Weiß ich nicht …

Zur Nachbereitung

Zur Nachbereitung

1. Ja!
2. Nein, wenn das hintere $\exists x$ nach vorne gezogen wird, entsteht eine neue Variablenbindung, die nicht sein darf!
3. Nein, hier wurde die freie Variable umbenannt!

Beispiel

Beispiel

Bei der Umbenennung immer gucken, auf welche Variablen sich ein Quantor bezieht und diese dann einheitlich umbenennen:

$$\begin{aligned} & \forall x \exists y (P(x) \Rightarrow (\exists x Q(x) \vee P(y) \vee Q(x))) \\ \equiv\ & \forall x \exists y (P(x) \Rightarrow (\exists z Q(z) \vee P(y) \vee Q(x))) \\ \equiv\ & \forall x \exists y \exists z (P(x) \Rightarrow (Q(z) \vee P(y) \vee Q(x))) \end{aligned}$$

Oder

$$\begin{aligned} & \forall x \exists y (P(x) \Rightarrow (\exists x Q(x) \vee P(y) \vee Q(x))) \\ \equiv\ & \forall u \exists y (P(u) \Rightarrow (\exists x Q(x) \vee P(y) \vee Q(u))) \\ \equiv\ & \forall u \exists y \exists x (P(u) \Rightarrow (Q(x) \vee P(y) \vee Q(u))) \end{aligned}$$

Beispiel

Beispiel

Bei der Umbenennung immer gucken, auf welche Variablen sich ein Quantor bezieht und diese dann einheitlich umbenennen:

$$
\begin{aligned}
& \forall x \exists y (P(x) \Rightarrow (\exists x Q(x) \vee P(y) \vee Q(x))) \\
\equiv \quad & \forall x \exists y (P(x) \Rightarrow (\exists z Q(z) \vee P(y) \vee Q(x))) \\
\equiv \quad & \forall x \exists y \exists z (P(x) \Rightarrow (Q(z) \vee P(y) \vee Q(x)))
\end{aligned}
$$

Oder

$$
\begin{aligned}
& \forall x \exists y (P(x) \Rightarrow (\exists x Q(x) \vee P(y) \vee Q(x))) \\
\equiv \quad & \forall u \exists y (P(u) \Rightarrow (\exists x Q(x) \vee P(y) \vee Q(u))) \\
\equiv \quad & \forall u \exists y \exists x (P(u) \Rightarrow (Q(x) \vee P(y) \vee Q(u)))
\end{aligned}
$$

Beispiel

Beispiel

Und nie freie Variablen umbenennen:

$$\begin{aligned} \forall x P(x) \vee Q(x) &\equiv \forall z P(z) \vee Q(x) \text{ aber} \\ \forall x P(x) \vee Q(x) &\not\equiv \forall x P(x) \vee Q(z) \end{aligned}$$

Definition - BPF

Definition (Bereinigte Pränexform)

Eine Formel F heißt **bereinigt**, wenn in F keine Variable sowohl gebunden als auch frei auftritt und wenn alle Quantoren unterschiedliche Quantorenvariablen aufweisen.

F ist in **Pränexform**, falls sie die Form $F = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n G$ hat, wobei die $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ sind und in G keine Quantoren vorkommen. $Q_1 y 1 \dots Q_n y_n$ wird als **Präfix**, G als **Matrix** von F bezeichnet.

Ist eine Formel G bereinigt, in Pränexform und äquivalent zu einer Formel F, so nenne wir G bereinigte Pränexform oder kurz **BPF** zu F.

Definition - BPF

Definition (Bereinigte Pränexform)

Eine Formel F heißt **bereinigt**, wenn in F keine Variable sowohl gebunden als auch frei auftritt und wenn alle Quantoren unterschiedliche Quantorenvariablen aufweisen.

F ist in **Pränexform**, falls sie die Form $F = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n G$ hat, wobei die $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ sind und in G keine Quantoren vorkommen. $Q_1 y 1 \dots Q_n y_n$ wird als **Präfix**, G als **Matrix** von F bezeichnet.

Ist eine Formel G bereinigt, in Pränexform und äquivalent zu einer Formel F, so nenne wir G bereinigte Pränexform oder kurz **BPF** zu F.

Definition - BPF

Definition (Bereinigte Pränexform)

Eine Formel F heißt **bereinigt**, wenn in F keine Variable sowohl gebunden als auch frei auftritt und wenn alle Quantoren unterschiedliche Quantorenvariablen aufweisen.
F ist in **Pränexform**, falls sie die Form $F = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n G$ hat, wobei die $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ sind und in G keine Quantoren vorkommen. $Q_1 y 1 \dots Q_n y_n$ wird als **Präfix**, G als **Matrix** von F bezeichnet.
Ist eine Formel G bereinigt, in Pränexform und äquivalent zu einer Formel F, so nenne wir G bereinigte Pränexform oder kurz **BPF** zu F.

Erstellung einer BPF

Satz

Zu jeder Formel F gibt es eine äquivalente Formel G in BPF.

Beweis

Wir gehen davon aus, dass F kein $\Leftrightarrow$ enthält. Ansonsten nutzen wir die Äquivalenzen aus der Aussagenlogik, um diesen zu entfernen.
Der Beweis gelingt dann mit struktureller Induktion:
Induktionsanfang. Ist F atomar, so ist F bereits in BPF.
Induktionsannahme. Seien F_1 und F_2 Formeln mit den äquivalenten BPFs $F_1 \equiv Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n G_1$ und $F_2 \equiv Q'_1 y_1 \ldots Q'_m y_m G_2$. Wegen des Satzes von der gebundenen Umbenennung dürfen wir annehmen, dass $x_i \neq y_j$ für alle i und j und keine in F_1 oder F_2 freien Variablen zu den x_i oder y_j gehören.

Erstellung einer BPF

Satz

Zu jeder Formel F gibt es eine äquivalente Formel G in BPF.

Beweis

Wir gehen davon aus, dass F kein $\Leftrightarrow$ enthält. Ansonsten nutzen wir die Äquivalenzen aus der Aussagenlogik, um diesen zu entfernen.
Der Beweis gelingt dann mit struktureller Induktion:
Induktionsanfang. Ist F atomar, so ist F bereits in BPF.
Induktionsannahme. Seien F_1 und F_2 Formeln mit den äquivalenten BPFs $F_1 \equiv Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n G_1$ und $F_2 \equiv Q'_1 y_1 \ldots Q'_m y_m G_2$. Wegen des Satzes von der gebundenen Umbenennung dürfen wir annehmen, dass $x_i \neq y_j$ für alle i und j und keine in F_1 oder F_2 freien Variablen zu den x_i oder y_j gehören.

Erstellung einer BPF

Satz

Zu jeder Formel F gibt es eine äquivalente Formel G in BPF.

Beweis

Wir gehen davon aus, dass F kein $\Leftrightarrow$ enthält. Ansonsten nutzen wir die Äquivalenzen aus der Aussagenlogik, um diesen zu entfernen. Der Beweis gelingt dann mit struktureller Induktion:

Induktionsanfang. Ist F atomar, so ist F bereits in BPF.

Induktionsannahme. Seien F_1 und F_2 Formeln mit den äquivalenten BPFs $F_1 \equiv Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G_1$ und $F_2 \equiv Q'_1 y_1 \dots Q'_m y_m G_2$. Wegen des Satzes von der gebundenen Umbenennung dürfen wir annehmen, dass $x_i \neq y_j$ für alle i und j und keine in F_1 oder F_2 freien Variablen zu den x_i oder y_j gehören.

Erstellung einer BPF

Satz

Zu jeder Formel F gibt es eine äquivalente Formel G in BPF.

Beweis

Wir gehen davon aus, dass F kein $\Leftrightarrow$ enthält. Ansonsten nutzen wir die Äquivalenzen aus der Aussagenlogik, um diesen zu entfernen.
Der Beweis gelingt dann mit struktureller Induktion:

Induktionsanfang. Ist F atomar, so ist F bereits in BPF.

Induktionsannahme. Seien F_1 und F_2 Formeln mit den äquivalenten BPFs $F_1 \equiv Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G_1$ und $F_2 \equiv Q'_1 y_1 \dots Q'_m y_m G_2$. Wegen des Satzes von der gebundenen Umbenennung dürfen wir annehmen, dass $x_i \neq y_j$ für alle i und j und keine in F_1 oder F_2 freien Variablen zu den x_i oder y_j gehören.

Erstellung einer BPF

Satz

Zu jeder Formel F gibt es eine äquivalente Formel G in BPF.

Beweis

Wir gehen davon aus, dass F kein $\Leftrightarrow$ enthält. Ansonsten nutzen wir die Äquivalenzen aus der Aussagenlogik, um diesen zu entfernen. Der Beweis gelingt dann mit struktureller Induktion:

Induktionsanfang. Ist F atomar, so ist F bereits in BPF.

Induktionsannahme. Seien F_1 und F_2 Formeln mit den äquivalenten BPFs $F_1 \equiv Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G_1$ und $F_2 \equiv Q'_1 y_1 \dots Q'_m y_m G_2$. Wegen des Satzes von der gebundenen Umbenennung dürfen wir annehmen, dass $x_i \neq y_j$ für alle i und j und keine in F_1 oder F_2 freien Variablen zu den x_i oder y_j gehören.

Erstellung einer BPF

Satz

Zu jeder Formel F gibt es eine äquivalente Formel G in BPF.

Beweis

Wir gehen davon aus, dass F kein $\Leftrightarrow$ enthält. Ansonsten nutzen wir die Äquivalenzen aus der Aussagenlogik, um diesen zu entfernen.
Der Beweis gelingt dann mit struktureller Induktion:
Induktionsanfang. Ist F atomar, so ist F bereits in BPF.
Induktionsannahme. Seien F_1 und F_2 Formeln mit den äquivalenten BPFs $F_1 \equiv Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G_1$ und $F_2 \equiv Q'_1 y_1 \dots Q'_m y_m G_2$. Wegen des Satzes von der gebundenen Umbenennung dürfen wir annehmen, dass $x_i \neq y_j$ für alle i und j und keine in F_1 oder F_2 freien Variablen zu den x_i oder y_j gehören.

Erstellung einer BPF

Beweis

Die Fälle $\wedge$, $\vee$ und die Fälle der Quantoren sind einfach:

$$
\begin{aligned}
F_1 \wedge F_2 &\equiv Q_1x_1 \dots Q_nx_n G_1 \wedge Q'_1y_1 \dots Q'_my_m G_2 \\
&\equiv Q_1x_1 \dots Q_nx_n Q'_1y_1 \dots Q'_my_m(G_1 \wedge G_2) \\
F_1 \vee F_2 &\equiv Q_1x_1 \dots Q_nx_n G_1 \vee Q'_1y_1 \dots Q'_my_m G_2 \\
&\equiv Q_1x_1 \dots Q_nx_n Q'_1y_1 \dots Q'_my_m(G_1 \vee G_2) \\
\exists x F_1 &= \exists x Q_1x_1 \dots Q_nx_n G_1 \text{ BPF, wenn } x \neq x_i \\
\forall x F_1 &= \forall x Q_1x_1 \dots Q_nx_n G_1 \text{ BPF, wenn } x \neq x_i
\end{aligned}
$$

Ist $x = x_i$ für ein i, dann kommt x nicht frei in $Q_1x_1 \dots Q_nx_n G_1$ vor und es ist $\exists x F_1 = \forall x F_1 \equiv Q_1x_1 \dots Q_nx_n G_1$ in BPF.

Erstellung einer BPF

Beweis

Die Fälle $\wedge$, $\vee$ und die Fälle der Quantoren sind einfach:

$$\begin{aligned}
F_1 \wedge F_2 &\equiv Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G_1 \wedge Q'_1 y_1 \dots Q'_m y_m G_2 \\
&\equiv Q_1 x_1 \dots Q_n x_n Q'_1 y_1 \dots Q'_m y_m (G_1 \wedge G_2) \\
F_1 \vee F_2 &\equiv Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G_1 \vee Q'_1 y_1 \dots Q'_m y_m G_2 \\
&\equiv Q_1 x_1 \dots Q_n x_n Q'_1 y_1 \dots Q'_m y_m (G_1 \vee G_2) \\
\exists x F_1 &= \exists x Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G_1 \text{ BPF, wenn } x \neq x_i \\
\forall x F_1 &= \forall x Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G_1 \text{ BPF, wenn } x \neq x_i
\end{aligned}$$

Ist $x = x_i$ für ein i, dann kommt x nicht frei in $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G_1$ vor und es ist $\exists x F_1 = \forall x F_1 \equiv Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G_1$ in BPF.

Erstellung einer BPF

Beweis

Die Fälle $\wedge$, $\vee$ und die Fälle der Quantoren sind einfach:

$$
\begin{array}{rcl}
F_1 \wedge F_2 & \equiv & Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n G_1 \wedge Q'_1 y_1 \ldots Q'_m y_m G_2 \\
& \equiv & Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n Q'_1 y_1 \ldots Q'_m y_m (G_1 \wedge G_2) \\
F_1 \vee F_2 & \equiv & Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n G_1 \vee Q'_1 y_1 \ldots Q'_m y_m G_2 \\
& \equiv & Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n Q'_1 y_1 \ldots Q'_m y_m (G_1 \vee G_2) \\
\exists x F_1 & = & \exists x Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n G_1 \text{ BPF, wenn } x \neq x_i \\
\forall x F_1 & = & \forall x Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n G_1 \text{ BPF, wenn } x \neq x_i
\end{array}
$$

Ist $x = x_i$ für ein i, dann kommt x nicht frei in $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n G_1$ vor und es ist $\exists x F_1 = \forall x F_1 \equiv Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n G_1$ in BPF.

Erstellung einer BPF

Beweis

Die Fälle $\wedge$, $\vee$ und die Fälle der Quantoren sind einfach:

$$
\begin{aligned}
F_1 \wedge F_2 &\equiv Q_1x_1 \dots Q_nx_n G_1 \wedge Q_1'y_1 \dots Q_m'y_m G_2 \\
&\equiv Q_1x_1 \dots Q_nx_n Q_1'y_1 \dots Q_m'y_m (G_1 \wedge G_2) \\
F_1 \vee F_2 &\equiv Q_1x_1 \dots Q_nx_n G_1 \vee Q_1'y_1 \dots Q_m'y_m G_2 \\
&\equiv Q_1x_1 \dots Q_nx_n Q_1'y_1 \dots Q_m'y_m (G_1 \vee G_2) \\
\exists x F_1 &= \exists x Q_1x_1 \dots Q_nx_n G_1 \text{ BPF, wenn } x \neq x_i \\
\forall x F_1 &= \forall x Q_1x_1 \dots Q_nx_n G_1 \text{ BPF, wenn } x \neq x_i
\end{aligned}
$$

Ist $x = x_i$ für ein i, dann kommt x nicht frei in $Q_1x_1 \dots Q_nx_n G_1$ vor und es ist $\exists x F_1 = \forall x F_1 \equiv Q_1x_1 \dots Q_nx_n G_1$ in BPF.

Erstellung einer BPF

Beweis.

Spannendes passiert bei $\neg$ und $\Rightarrow$. Wir setzen $\overline{Q} = \exists$, wenn $Q = \forall$ und $\overline{Q} = \forall$, wenn $Q = \exists$. Damit:

$$\begin{aligned}
\neg F_1 &\equiv \neg Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n G_1 \\
&\equiv \overline{Q_1} x_1 \ldots \overline{Q_n} x_n \neg G_1 \\
F_1 \Rightarrow F_2 &\equiv Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n G_1 \Rightarrow Q'_1 y_1 \ldots Q'_m y_m G_2 \\
&\equiv \overline{Q_1} x_1 \ldots \overline{Q_n} x_n Q'_1 y_1 \ldots Q'_m y_m (G_1 \Rightarrow G_2)
\end{aligned}$$

□

Die Matrix lässt sich anschließend bei Bedarf noch in KNF oder DNF bringen.

Erstellung einer BPF

Beweis.

Spannendes passiert bei $\neg$ und $\Rightarrow$. Wir setzen $\overline{Q} = \exists$, wenn $Q = \forall$ und $\overline{Q} = \forall$, wenn $Q = \exists$. Damit:

$$\begin{array}{rcl}
\neg F_1 & \equiv & \neg Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G_1 \\
 & \equiv & \overline{Q_1} x_1 \dots \overline{Q_n} x_n \neg G_1 \\
F_1 \Rightarrow F_2 & \equiv & Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G_1 \Rightarrow Q'_1 y_1 \dots Q'_m y_m G_2 \\
 & \equiv & \overline{Q_1} x_1 \dots \overline{Q_n} x_n Q'_1 y_1 \dots Q'_m y_m (G_1 \Rightarrow G_2)
\end{array}$$

□

Die Matrix lässt sich anschließend bei Bedarf noch in KNF oder DNF bringen.

Erstellung einer BPF

Beweis.

Spannendes passiert bei $\neg$ und $\Rightarrow$. Wir setzen $\overline{Q} = \exists$, wenn $Q = \forall$ und $\overline{Q} = \forall$, wenn $Q = \exists$. Damit:

$$\begin{aligned}
\neg F_1 &\equiv \neg Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G_1 \\
&\equiv \overline{Q_1} x_1 \dots \overline{Q_n} x_n \neg G_1 \\
F_1 \Rightarrow F_2 &\equiv Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G_1 \Rightarrow Q'_1 y_1 \dots Q'_m y_m G_2 \\
&\equiv \overline{Q_1} x_1 \dots \overline{Q_n} x_n Q'_1 y_1 \dots Q'_m y_m (G_1 \Rightarrow G_2)
\end{aligned}$$

$\square$

Die Matrix lässt sich anschließend bei Bedarf noch in KNF oder DNF bringen.

Erstellung einer BPF

Daraus lässt sich ein Verfahren ableiten, um eine BPF zu erstellen:

1. Durch gebundene Umbenennung Variablen so umbenennen, dass keine zwei Quantorenvariablen (unterschiedlicher Quantoren) gleich benannt sind und keine Quantorenvariable den gleichen Namen wie eine freie Variable hat. (Achtung: Nur gebundene Variablen umbenennen, nicht freie!) Es entsteht eine äquivalente, bereinigte Formel.
2. Durch Äquivalenzumformungen die Quantoren nach vorne ziehen. Dabei bei der Negation und bei der Prämisse der Implikation die Quantoren flippen. Es entsteht eine äquivalente, bereinigte Pränexform (eine BPF).
3. Ggf. noch weitere Äquivalenzumformungen (der Aussagenlogik) vornehmen, um die Matrix in KNF oder DNF zu bringen.

Erstellung einer BPF

Daraus lässt sich ein Verfahren ableiten, um eine BPF zu erstellen:

1. Durch gebundene Umbenennung Variablen so umbenennen, dass keine zwei Quantorenvariablen (unterschiedlicher Quantoren) gleich benannt sind und keine Quantorenvariable den gleichen Namen wie eine freie Variable hat. (Achtung: Nur gebundene Variablen umbenennen, nicht freie!) Es entsteht eine äquivalente, bereinigte Formel.
2. Durch Äquivalenzumformungen die Quantoren nach vorne ziehen. Dabei bei der Negation und bei der Prämisse der Implikation die Quantoren flippen. Es entsteht eine äquivalente, bereinigte Pränexform (eine BPF).
3. Ggf. noch weitere Äquivalenzumformungen (der Aussagenlogik) vornehmen, um die Matrix in KNF oder DNF zu bringen.

Erstellung einer BPF

Daraus lässt sich ein Verfahren ableiten, um eine BPF zu erstellen:

1. Durch gebundene Umbenennung Variablen so umbenennen, dass keine zwei Quantorenvariablen (unterschiedlicher Quantoren) gleich benannt sind und keine Quantorenvariable den gleichen Namen wie eine freie Variable hat. (Achtung: Nur gebundene Variablen umbenennen, nicht freie!) Es entsteht eine äquivalente, bereinigte Formel.
2. Durch Äquivalenzumformungen die Quantoren nach vorne ziehen. Dabei bei der Negation und bei der Prämisse der Implikation die Quantoren flippen. Es entsteht eine äquivalente, bereinigte Pränexform (eine BPF).
3. Ggf. noch weitere Äquivalenzumformungen (der Aussagenlogik) vornehmen, um die Matrix in KNF oder DNF zu bringen.

Erstellung einer BPF

Daraus lässt sich ein Verfahren ableiten, um eine BPF zu erstellen:

1. Durch gebundene Umbenennung Variablen so umbenennen, dass keine zwei Quantorenvariablen (unterschiedlicher Quantoren) gleich benannt sind und keine Quantorenvariable den gleichen Namen wie eine freie Variable hat. (Achtung: Nur gebundene Variablen umbenennen, nicht freie!) Es entsteht eine äquivalente, bereinigte Formel.
2. Durch Äquivalenzumformungen die Quantoren nach vorne ziehen. Dabei bei der Negation und bei der Prämisse der Implikation die Quantoren flippen. Es entsteht eine äquivalente, bereinigte Pränexform (eine BPF).
3. Ggf. noch weitere Äquivalenzumformungen (der Aussagenlogik) vornehmen, um die Matrix in KNF oder DNF zu bringen.

Zur Klauselnormalform

Was stört uns jetzt (immer) noch?

- Gleiche Variable kann an unterschiedlichen Quantoren stehen (**erledigt**)
  $\Rightarrow$ Gebundene Umbennenung
- Eine Variable kann frei und gebunden auftreten (**erledigt**)
  $\Rightarrow$ Gebundene Umbennenung
- Die Quantoren sind verstreut (**erledigt**)
  $\Rightarrow$ Pränexform
- Das überhaupt freie Variablen auftreten (**jetzt!**)
  $\Rightarrow$ Bindung durch Existenzquantoren
- Das Existenzquantoren auftreten (**jetzt!**)
  $\Rightarrow$ Skolemisierung

Erfüllbarkeitsäquivalenz

Die gleich folgenden Schritte erhalten die Äquivalenz nicht, wir werden aber sehen, dass sie die *Erfüllbarkeitsäquivalenz* erhalten und für viele Dinge reicht das!

Definition (Erfüllbarkeitsäquivalenz)

Zwei Formeln F und G sind **erfüllbarkeitsäquivalent**, wenn F genau dann erfüllbar ist, wenn G dies ist. Wir notieren dies als $F \equiv_e G$.

Anmerkung

Zwei Formeln sind also dann erfüllbarkeitsäquivalent, wenn sie beide erfüllbar sind (auch wenn dafür möglicherweise unterschiedliche Strukturen nötig sind) oder auch wenn sie beide unerfüllbar sind. - Wegen letzterem ist diese Eigenschaft für z.B. Resolution ausreichend!

Erfüllbarkeitsäquivalenz

Die gleich folgenden Schritte erhalten die Äquivalenz nicht, wir werden aber sehen, dass sie die *Erfüllbarkeitsäquivalenz* erhalten und für viele Dinge reicht das!

Definition (Erfüllbarkeitsäquivalenz)

Zwei Formeln F und G sind **erfüllbarkeitsäquivalent**, wenn F genau dann erfüllbar ist, wenn G dies ist. Wir notieren dies als $F \equiv_e G$.

Anmerkung

Zwei Formeln sind also dann erfüllbarkeitsäquivalent, wenn sie beide erfüllbar sind (auch wenn dafür möglicherweise unterschiedliche Strukturen nötig sind) oder auch wenn sie beide unerfüllbar sind. - Wegen letzterem ist diese Eigenschaft für z.B. Resolution ausreichend!

Erfüllbarkeitsäquivalenz

Die gleich folgenden Schritte erhalten die Äquivalenz nicht, wir werden aber sehen, dass sie die *Erfüllbarkeitsäquivalenz* erhalten und für viele Dinge reicht das!

Definition (Erfüllbarkeitsäquivalenz)

Zwei Formeln F und G sind **erfüllbarkeitsäquivalent**, wenn F genau dann erfüllbar ist, wenn G dies ist. Wir notieren dies als $F \equiv_e G$.

Anmerkung

Zwei Formeln sind also dann erfüllbarkeitsäquivalent, wenn sie beide erfüllbar sind (auch wenn dafür möglicherweise unterschiedliche Strukturen nötig sind) oder auch wenn sie beide unerfüllbar sind. - Wegen letzterem ist diese Eigenschaft für z.B. Resolution ausreichend!

Freie Variablen binden

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable. F ist genau dann erfüllbar, wenn $\exists x F$ erfüllbar ist.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für F, dann ist

$$\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(x)]}(F) = \mathcal{A}(F) = 1$$

also gibt es ein $d \in U$ (nämlich $\mathcal{A}(x)$) so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ ist und folglich ist $\mathcal{A}(\exists x F) = 1$.
Sei umgekehrt $\mathcal{A}$ ein Modell für $\exists x F$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ und folglich ist $\mathcal{A}_{[x/d]}$ ein Modell für F und F somit erfüllbar. $\square$

Freie Variablen binden

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable. F ist genau dann erfüllbar, wenn $\exists x F$ erfüllbar ist.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für F, dann ist

$$\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(x)]}(F) = \mathcal{A}(F) = 1$$

also gibt es ein $d \in U$ (nämlich $\mathcal{A}(x)$) so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ ist und folglich ist $\mathcal{A}(\exists x F) = 1$.

Sei umgekehrt $\mathcal{A}$ ein Modell für $\exists x F$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ und folglich ist $\mathcal{A}_{[x/d]}$ ein Modell für F und F somit erfüllbar. □

Freie Variablen binden

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable. F ist genau dann erfüllbar, wenn $\exists x F$ erfüllbar ist.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für F, dann ist

$$\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(x)]}(F) = \mathcal{A}(F) = 1$$

also gibt es ein $d \in U$ (nämlich $\mathcal{A}(x)$) so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ ist und folglich ist $\mathcal{A}(\exists x F) = 1$.
Sei umgekehrt $\mathcal{A}$ ein Modell für $\exists x F$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ und folglich ist $\mathcal{A}_{[x/d]}$ ein Modell für F und F somit erfüllbar. □

Freie Variablen binden

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable. F ist genau dann erfüllbar, wenn $\exists x F$ erfüllbar ist.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für F, dann ist

$$\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(x)]}(F) = \mathcal{A}(F) = 1$$

also gibt es ein $d \in U$ (nämlich $\mathcal{A}(x)$) so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ ist und folglich ist $\mathcal{A}(\exists x F) = 1$.

Sei umgekehrt $\mathcal{A}$ ein Modell für $\exists x F$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ und folglich ist $\mathcal{A}_{[x/d]}$ ein Modell für F und F somit erfüllbar. $\square$

Freie Variablen binden

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable. F ist genau dann erfüllbar, wenn $\exists x F$ erfüllbar ist.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für F, dann ist

$$\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(x)]}(F) = \mathcal{A}(F) = 1$$

also gibt es ein $d \in U$ (nämlich $\mathcal{A}(x)$) so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ ist und folglich ist $\mathcal{A}(\exists x F) = 1$.

Sei umgekehrt $\mathcal{A}$ ein Modell für $\exists x F$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ und folglich ist $\mathcal{A}_{[x/d]}$ ein Modell für F und F somit erfüllbar. □

Freie Variablen binden

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable. F ist genau dann erfüllbar, wenn $\exists x F$ erfüllbar ist.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für F, dann ist

$$\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(x)]}(F) = \mathcal{A}(F) = 1$$

also gibt es ein $d \in U$ (nämlich $\mathcal{A}(x)$) so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ ist und folglich ist $\mathcal{A}(\exists x F) = 1$.
Sei umgekehrt $\mathcal{A}$ ein Modell für $\exists x F$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ und folglich ist $\mathcal{A}_{[x/d]}$ ein Modell für F und F somit erfüllbar. □

Freie Variablen binden

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable. F ist genau dann erfüllbar, wenn $\exists x F$ erfüllbar ist.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für F, dann ist

$$\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(x)]}(F) = \mathcal{A}(F) = 1$$

also gibt es ein $d \in U$ (nämlich $\mathcal{A}(x)$) so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ ist und folglich ist $\mathcal{A}(\exists x F) = 1$.
Sei umgekehrt $\mathcal{A}$ ein Modell für $\exists x F$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ und folglich ist $\mathcal{A}_{[x/d]}$ ein Modell für F und F somit erfüllbar. □

Freie Variablen binden

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable. F ist genau dann erfüllbar, wenn $\exists x F$ erfüllbar ist.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für F, dann ist

$$\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(x)]}(F) = \mathcal{A}(F) = 1$$

also gibt es ein $d \in U$ (nämlich $\mathcal{A}(x)$) so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ ist und folglich ist $\mathcal{A}(\exists x F) = 1$.
Sei umgekehrt $\mathcal{A}$ ein Modell für $\exists x F$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1$ und folglich ist $\mathcal{A}_{[x/d]}$ ein Modell für F und F somit erfüllbar. $\square$

Freie Variablen binden

Satz

Zu jeder prädikatenlogischen Formel gibt es eine erfüllbarkeitsäquivalente geschlossene Formel.

Beweis.

Sei F eine Formel und seien $x_1, \ldots, x_n$ die in F frei vorkommenden Variablen. F und $\exists x_1 \ldots \exists x_n F$ sind erfüllbarkeitsäquivalent (schnell über vollständige Induktion zu zeigen). $\square$

Um freie Variablen loszuwerden, binden wir sie also einfach durch Existenzquantoren (stets **vor** die aktuelle Formel!).

Freie Variablen binden

Satz

Zu jeder prädikatenlogischen Formel gibt es eine erfüllbarkeitsäquivalente geschlossene Formel.

Beweis.

Sei F eine Formel und seien $x_1, \ldots, x_n$ die in F frei vorkommenden Variablen. F und $\exists x_1 \ldots \exists x_n F$ sind erfüllbarkeitsäquivalent (schnell über vollständige Induktion zu zeigen). □

Um freie Variablen loszuwerden, binden wir sie also einfach durch Existenzquantoren (stets **vor** die aktuelle Formel!).

Freie Variablen binden

Satz

Zu jeder prädikatenlogischen Formel gibt es eine erfüllbarkeitsäquivalente geschlossene Formel.

Beweis.

Sei F eine Formel und seien $x_1, \ldots, x_n$ die in F frei vorkommenden Variablen. F und $\exists x_1 \ldots \exists x_n F$ sind erfüllbarkeitsäquivalent (schnell über vollständige Induktion zu zeigen). □

Um freie Variablen loszuwerden, binden wir sie also einfach durch Existenzquantoren (stets **vor** die aktuelle Formel!).

Beispiel

Beispiel

Existenzquantoren ganz nach vorne schreiben! Zu

$$F = \forall x(P(x) \Rightarrow P(y))$$

ist

$$F' = \exists y \forall x(P(x) \Rightarrow P(y))$$

erfüllbarkeitsäquivalent, aber i.A. nicht

$$F'' = \forall x \exists y(P(x) \Rightarrow P(y))$$

Beispiel

Beispiel

Existenzquantoren ganz nach vorne schreiben! Zu

$$F = \forall x(P(x) \Rightarrow P(y))$$

ist

$$F' = \exists y \forall x(P(x) \Rightarrow P(y))$$

erfüllbarkeitsäquivalent, aber i.A. nicht

$$F'' = \forall x \exists y(P(x) \Rightarrow P(y))$$

Beispiel

Beispiel

Existenzquantoren ganz nach vorne schreiben! Zu

$$F = \forall x(P(x) \Rightarrow P(y))$$

ist

$$F' = \exists y \forall x(P(x) \Rightarrow P(y))$$

erfüllbarkeitsäquivalent, aber i.A. nicht

$$F'' = \forall x \exists y(P(x) \Rightarrow P(y))$$

Beispiel

Beispiel

Existenzquantoren ganz nach vorne schreiben! Zu

$$F = \forall x(P(x) \Rightarrow P(y))$$

ist

$$F' = \exists y \forall x(P(x) \Rightarrow P(y))$$

erfüllbarkeitsäquivalent, aber i.A. nicht

$$F'' = \forall x \exists y(P(x) \Rightarrow P(y))$$

Zur Nachbereitung

Die obigen beiden Formeln F' und F'' sind tatsächlich erfüllbarkeitsäquivalent (und sogar äquivalent, beides sind nämlich Tautologien). **Im Allgemeinen** klappt das aber nicht, wie das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel

Beispiel

Folgendes ist Unfug:

$$\begin{aligned} & \exists x P(x) \land \neg P(x) \\ \equiv_e \quad & \exists x P(x) \land \neg \exists x P(x) \\ \equiv \quad & \exists x P(x) \land \forall x \neg P(x) \end{aligned}$$

(die oberste Formel ist erfüllbar, die unterste nicht).

So geht es:

$$\begin{aligned} & \exists x P(x) \land \neg P(x) \\ \equiv \quad & \exists y P(y) \land \neg P(x) \\ \equiv \quad & \exists y (P(y) \land \neg P(x)) \\ \equiv_e \quad & \exists x \exists y (P(y) \land \neg P(x)) \end{aligned}$$

Beispiel

Beispiel

Folgendes ist Unfug:

$$\begin{array}{rc} & \exists x P(x) \wedge \neg P(x) \\ \equiv_e & \exists x P(x) \wedge \neg \exists x P(x) \\ \equiv & \exists x P(x) \wedge \forall x \neg P(x) \end{array}$$

(die oberste Formel ist erfüllbar, die unterste nicht).
So geht es:

$$\begin{array}{rc} & \exists x P(x) \wedge \neg P(x) \\ \equiv & \exists y P(y) \wedge \neg P(x) \\ \equiv & \exists y (P(y) \wedge \neg P(x)) \\ \equiv_e & \exists x \exists y (P(y) \wedge \neg P(x)) \end{array}$$

Skolemisierung

Ziel

Eigentlich ist das jetzt alles schon sehr schön, aber Existenzquantoren sind nicht so gut handhabbar wie Allquantoren. Daher wäre es schön, wenn wir die auch noch wegkriegen könnten ...

Skolemisierung (Basis)

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable und a eine Konstante, die nicht in F auftritt. Dann sind $F[x/a]$ und $\exists xF$ erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F[x/a]$. Dann gilt wegen des Überführungslemmas $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a]) = 1$ und damit $\mathcal{A}(\exists xF) = 1$.
Sei umgekehrt $\mathcal{B}$ ein Modell von $\exists xF$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = 1$. Stimme die Struktur $\mathcal{A}$ nun überall mit $\mathcal{B}$ überein, außer auf a hier definieren wir $\mathcal{A}(a) = d$. Da a in F nicht vorkommt ist $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F)$ (all diese Abbildungen tun nämlich das gleiche) und wegen des Überführungslemmas gilt dann $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a])$ und damit ist auch $F[x/a]$ erfüllbar. □

Skolemisierung (Basis)

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable und a eine Konstante, die nicht in F auftritt. Dann sind $F[x/a]$ und $\exists xF$ erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F[x/a]$. Dann gilt wegen des Überführungslemmas $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a]) = 1$ und damit $\mathcal{A}(\exists xF) = 1$.
Sei umgekehrt $\mathcal{B}$ ein Modell von $\exists xF$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = 1$. Stimme die Struktur $\mathcal{A}$ nun überall mit $\mathcal{B}$ überein, außer auf a hier definieren wir $\mathcal{A}(a) = d$. Da a in F nicht vorkommt ist $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F)$ (all diese Abbildungen tun nämlich das gleiche) und wegen des Überführungslemmas gilt dann $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a])$ und damit ist auch $F[x/a]$ erfüllbar. □

Skolemisierung (Basis)

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable und a eine Konstante, die nicht in F auftritt. Dann sind $F[x/a]$ und $\exists xF$ erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F[x/a]$. Dann gilt wegen des Überführungslemmas $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a]) = 1$ und damit $\mathcal{A}(\exists xF) = 1$.
Sei umgekehrt $\mathcal{B}$ ein Modell von $\exists xF$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = 1$. Stimme die Struktur $\mathcal{A}$ nun überall mit $\mathcal{B}$ überein, außer auf a hier definieren wir $\mathcal{A}(a) = d$. Da a in F nicht vorkommt ist $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F)$ (all diese Abbildungen tun nämlich das gleiche) und wegen des Überführungslemmas gilt dann $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a])$ und damit ist auch $F[x/a]$ erfüllbar. □

Skolemisierung (Basis)

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable und a eine Konstante, die nicht in F auftritt. Dann sind $F[x/a]$ und $\exists xF$ erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F[x/a]$. Dann gilt wegen des Überführungslemmas $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a]) = 1$ und damit $\mathcal{A}(\exists xF) = 1$.
Sei umgekehrt $\mathcal{B}$ ein Modell von $\exists xF$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = 1$. Stimme die Struktur $\mathcal{A}$ nun überall mit $\mathcal{B}$ überein, außer auf a hier definieren wir $\mathcal{A}(a) = d$. Da a in F nicht vorkommt ist $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F)$ (all diese Abbildungen tun nämlich das gleiche) und wegen des Überführungslemmas gilt dann $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a])$ und damit ist auch $F[x/a]$ erfüllbar. $\square$

Skolemisierung (Basis)

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable und a eine Konstante, die nicht in F auftritt. Dann sind $F[x/a]$ und $\exists xF$ erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F[x/a]$. Dann gilt wegen des Überführungslemmas $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a]) = 1$ und damit $\mathcal{A}(\exists xF) = 1$.
Sei umgekehrt $\mathcal{B}$ ein Modell von $\exists xF$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = 1$. Stimme die Struktur $\mathcal{A}$ nun überall mit $\mathcal{B}$ überein, außer auf a hier definieren wir $\mathcal{A}(a) = d$. Da a in F nicht vorkommt ist $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F)$ (all diese Abbildungen tun nämlich das gleiche) und wegen des Überführungslemmas gilt dann $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a])$ und damit ist auch $F[x/a]$ erfüllbar. □

Skolemisierung (Basis)

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable und a eine Konstante, die nicht in F auftritt. Dann sind $F[x/a]$ und $\exists x F$ erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F[x/a]$. Dann gilt wegen des Überführungslemmas $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a]) = 1$ und damit $\mathcal{A}(\exists x F) = 1$.
Sei umgekehrt $\mathcal{B}$ ein Modell von $\exists x F$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = 1$. Stimme die Struktur $\mathcal{A}$ nun überall mit $\mathcal{B}$ überein, außer auf a hier definieren wir $\mathcal{A}(a) = d$. Da a in F nicht vorkommt ist $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F)$ (all diese Abbildungen tun nämlich das gleiche) und wegen des Überführungslemmas gilt dann $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a])$ und damit ist auch $F[x/a]$ erfüllbar. □

Skolemisierung (Basis)

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable und a eine Konstante, die nicht in F auftritt. Dann sind $F[x/a]$ und $\exists x F$ erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F[x/a]$. Dann gilt wegen des Überführungslemmas $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a]) = 1$ und damit $\mathcal{A}(\exists x F) = 1$. Sei umgekehrt $\mathcal{B}$ ein Modell von $\exists x F$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = 1$. Stimme die Struktur $\mathcal{A}$ nun überall mit $\mathcal{B}$ überein, außer auf a hier definieren wir $\mathcal{A}(a) = d$. Da a in F nicht vorkommt ist $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F)$ (all diese Abbildungen tun nämlich das gleiche) und wegen des Überführungslemmas gilt dann $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a])$ und damit ist auch $F[x/a]$ erfüllbar. □

Skolemisierung (Basis)

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable und a eine Konstante, die nicht in F auftritt. Dann sind $F[x/a]$ und $\exists x F$ erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F[x/a]$. Dann gilt wegen des Überführungslemmas $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a]) = 1$ und damit $\mathcal{A}(\exists x F) = 1$.

Sei umgekehrt $\mathcal{B}$ ein Modell von $\exists x F$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = 1$. Stimme die Struktur $\mathcal{A}$ nun überall mit $\mathcal{B}$ überein, außer auf a hier definieren wir $\mathcal{A}(a) = d$. Da a in F nicht vorkommt ist $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F)$ (all diese Abbildungen tun nämlich das gleiche) und wegen des Überführungslemmas gilt dann $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a])$ und damit ist auch $F[x/a]$ erfüllbar. $\square$

Skolemisierung (Basis)

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable und a eine Konstante, die nicht in F auftritt. Dann sind $F[x/a]$ und $\exists x F$ erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F[x/a]$. Dann gilt wegen des Überführungslemmas $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a]) = 1$ und damit $\mathcal{A}(\exists x F) = 1$.
Sei umgekehrt $\mathcal{B}$ ein Modell von $\exists x F$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = 1$. Stimme die Struktur $\mathcal{A}$ nun überall mit $\mathcal{B}$ überein, außer auf a hier definieren wir $\mathcal{A}(a) = d$. Da a in F nicht vorkommt ist $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F)$ (all diese Abbildungen tun nämlich das gleiche) und wegen des Überführungslemmas gilt dann $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a])$ und damit ist auch $F[x/a]$ erfüllbar. □

Skolemisierung (Basis)

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable und a eine Konstante, die nicht in F auftritt. Dann sind $F[x/a]$ und $\exists xF$ erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F[x/a]$. Dann gilt wegen des Überführungslemmas $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a]) = 1$ und damit $\mathcal{A}(\exists xF) = 1$. Sei umgekehrt $\mathcal{B}$ ein Modell von $\exists xF$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = 1$. Stimme die Struktur $\mathcal{A}$ nun überall mit $\mathcal{B}$ überein, außer auf a hier definieren wir $\mathcal{A}(a) = d$. Da a in F nicht vorkommt ist $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F)$ (all diese Abbildungen tun nämlich das gleiche) und wegen des Überführungslemmas gilt dann $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a])$ und damit ist auch $F[x/a]$ erfüllbar. □

Skolemisierung (Basis)

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable und a eine Konstante, die nicht in F auftritt. Dann sind $F[x/a]$ und $\exists x F$ erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis.

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F[x/a]$. Dann gilt wegen des Überführungslemmas $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a]) = 1$ und damit $\mathcal{A}(\exists x F) = 1$.
Sei umgekehrt $\mathcal{B}$ ein Modell von $\exists x F$. Dann gibt es ein $d \in U$ mit $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = 1$. Stimme die Struktur $\mathcal{A}$ nun überall mit $\mathcal{B}$ überein, außer auf a hier definieren wir $\mathcal{A}(a) = d$. Da a in F nicht vorkommt ist $\mathcal{B}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F)$ (all diese Abbildungen tun nämlich das gleiche) und wegen des Überführungslemmas gilt dann $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(a)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/a])$ und damit ist auch $F[x/a]$ erfüllbar. □

Skolemisierung (Basis)

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable und a eine Konstante, die nicht in F auftritt. Dann sind $F[x/a]$ und $\exists xF$ erfüllbarkeitsäquivalent.

Damit können wir jetzt also eine an einen Existenzquantor gebundene Variable durch eine Konstante ersetzen. (Wenn es uns nur um die Erfüllbarkeitsäquivalenz geht.)

Allerdings muss dazu der Existenzquantor ganz vorne stehen (im Präfix)! Wir können das aber verallgemeinern ...

Skolemisierung (Basis)

Satz

Sei F eine Formel, x eine Variable und a eine Konstante, die nicht in F auftritt. Dann sind $F[x/a]$ und $\exists xF$ erfüllbarkeitsäquivalent.

Damit können wir jetzt also eine an einen Existenzquantor gebundene Variable durch eine Konstante ersetzen. (Wenn es uns nur um die Erfüllbarkeitsäquivalenz geht.)

Allerdings muss dazu der Existenzquantor ganz vorne stehen (im Präfix)! Wir können das aber verallgemeinern ...

Skolemisierung

Satz

Sei $F = \forall y_1 \ldots \forall y_k \exists z G$, $k \geq 0$ *und* f *ein* k*-stelliges Funktionssymbol, dass nicht in* F *vorkommt. Dann sind* F *und* $\forall y_1 \ldots \forall y_k G[z/f(y_1, \ldots, y_k)]$ *erfüllbarkeitsäquivalent.*

Beweis.

Der Fall $k = 0$ wurde eben behandelt (ein 0-stelliges Funktionssymbol ist eine Konstante). Der allgemeine Fall geht ähnlich (siehe Schöning). □

Skolemisierung

Satz

Sei $F = \forall y_1 \ldots \forall y_k \exists z G$, $k \geq 0$ *und* f *ein* k*-stelliges Funktionssymbol, dass nicht in* F *vorkommt. Dann sind* F *und* $\forall y_1 \ldots \forall y_k G[z/f(y_1, \ldots, y_k)]$ *erfüllbarkeitsäquivalent.*

Beweis.

Der Fall $k = 0$ wurde eben behandelt (ein 0-stelliges Funktionssymbol ist eine Konstante). Der allgemeine Fall geht ähnlich (siehe Schöning). □

Skolemisierung

Satz

Sei $F = \forall y_1 \dots \forall y_k \exists z G$, $k \geq 0$ und f ein k-stelliges Funktionssymbol, dass nicht in F vorkommt. Dann sind F und $\forall y_1 \dots \forall y_k G[z/f(y_1, \dots, y_k)]$ erfüllbarkeitsäquivalent.

Definition (Skolemisierung)

f oben wird **Skolemfunktion** genannt. Im Falle $k = 0$ auch **Skolemkonstante**. Die Bildung von F' heißt **Skolemisierung** (von F). Ein Formel ist in **Skolemform**, wenn sie in BPF ist, geschlossen ist und keine Existenzquantoren enthält. Eine Formel ist in **Klauselnormalform**, wenn ihre Matrix zusätzlich in KNF ist. (Die Matrix enthält dann alle relevanten Informationen!)

Skolemisierung

Satz

Sei $F = \forall y_1 \ldots \forall y_k \exists z G$, $k \geq 0$ *und* f *ein* k*-stelliges Funktionssymbol, dass nicht in* F *vorkommt. Dann sind* F *und* $\forall y_1 \ldots \forall y_k G[z/f(y_1, \ldots, y_k)]$ *erfüllbarkeitsäquivalent.*

Definition (Skolemisierung)

f oben wird **Skolemfunktion** genannt. Im Falle $k = 0$ auch **Skolemkonstante**. Die Bildung von F' heißt **Skolemisierung** (von F). Ein Formel ist in **Skolemform**, wenn sie in BPF ist, geschlossen ist und keine Existenzquantoren enthält. Eine Formel ist in **Klauselnormalform**, wenn ihre Matrix zusätzlich in KNF ist. (Die Matrix enthält dann alle relevanten Informationen!)

Skolemisierung

Satz

Sei $F = \forall y_1 \dots \forall y_k \exists z G$, $k \geq 0$ *und* f *ein* k*-stelliges Funktionssymbol, dass nicht in* F *vorkommt. Dann sind* F *und* $\forall y_1 \dots \forall y_k G[z/f(y_1, \dots, y_k)]$ *erfüllbarkeitsäquivalent.*

Definition (Skolemisierung)

f oben wird **Skolemfunktion** genannt. Im Falle $k = 0$ auch **Skolemkonstante**. Die Bildung von F' heißt **Skolemisierung** (von F). Ein Formel ist in **Skolemform**, wenn sie in BPF ist, geschlossen ist und keine Existenzquantoren enthält. Eine Formel ist in **Klauselnormalform**, wenn ihre Matrix zusätzlich in KNF ist. (Die Matrix enthält dann alle relevanten Informationen!)

Fragen

Wie sieht die Skolemform zu

$$F = \exists x \exists y \forall z \exists u P(x, y, z, u)$$

aus?

1. $\exists x \exists y \forall z \exists u P(a, b, z, c)$
2. $\forall z P(f(z), f(z), z, f(z))$
3. $\forall z P(a, b, z, f(a, b, z))$
4. $\forall z P(a, b, z, f(z))$
5. $\forall z P(a, b, z, f(u))$
6. Weiß ich nicht ...

Fragen

Wie sieht die Skolemform zu

$$F = \exists x \forall y \exists z \forall u \exists v P(x, y, z, u, v)$$

aus?

1. $\forall y \forall u P(f(y, u), y, g(y, u), u, h(y, u))$
2. $\forall y \forall u P(f(y, u), y, g(u), u, a)$
3. $\forall y \forall u P(a, y, f(y), u, g(y, u))$
4. $\forall y \forall u P(a, y, f(y), g(y, u), h(y, u))$
5. $\forall y \forall u P(a, y, f(a, y), u, h(a, y, f(y), u))$
6. Weiß ich nicht ...

Zur Nachbereitung

Zur Nachbereitung

1. Richtig ist Nummer 4.
2. Richtig ist Nummer 3.

Vorgehen

Vorgehen

Bei der Skolemisierung:

1. Von einer Formel in BPF ausgehen.
2. Die Existenzquantoren von links nach rechts durchgehen.
3. Sei $\exists x$ ein solcher. Dann wird x ersetzt durch ein neues Funktionssymbol f, das als Argumente alle durch Allquantoren gebundenen Variablen hat, die links von diesem Existenzquantor stehen. Das $\exists x$ wird dann gestrichen.

Vorgehen

Vorgehen

Bei der Skolemisierung:

1. Von einer Formel in BPF ausgehen.
2. Die Existenzquantoren von links nach rechts durchgehen.
3. Sei $\exists x$ ein solcher. Dann wird x ersetzt durch ein neues Funktionssymbol f, das als Argumente alle durch Allquantoren gebundenen Variablen hat, die links von diesem Existenzquantor stehen. Das $\exists x$ wird dann gestrichen.

Vorgehen

Vorgehen

Bei der Skolemisierung:

1. Von einer Formel in BPF ausgehen.
2. Die Existenzquantoren von links nach rechts durchgehen.
3. Sei $\exists x$ ein solcher. Dann wird x ersetzt durch ein neues Funktionssymbol f, das als Argumente alle durch Allquantoren gebundenen Variablen hat, die links von diesem Existenzquantor stehen. Das $\exists x$ wird dann gestrichen.

Vorgehen

Vorgehen

Bei der Skolemisierung:

1. Von einer Formel in BPF ausgehen.
2. Die Existenzquantoren von links nach rechts durchgehen.
3. Sei $\exists x$ ein solcher. Dann wird x ersetzt durch ein neues Funktionssymbol f, das als Argumente alle durch Allquantoren gebundenen Variablen hat, die links von diesem Existenzquantor stehen. Das $\exists x$ wird dann gestrichen.

Beispiel

Beispiel

So wird aus

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \exists v P(x, y, z, u, v)$$

Dann

$$\forall y \forall z P(a, y, z, f(y, z), g(y, z))$$

Denn

1. links von $\exists x$ ist kein Allquantor, also wird x durch eine neue Konstante (0-stelliges Funktionssymbol) a ersetzt
2. links von $\exists u$ stehen $\forall y$ und $\forall z$, also wird u durch $f(y, z)$ ersetzt
3. und ebenso für $\exists v$.

Beispiel

Beispiel

So wird aus

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \exists v P(x, y, z, u, v)$$

Dann

$$\forall y \forall z P(a, y, z, f(y, z), g(y, z))$$

Denn

1. links von $\exists x$ ist kein Allquantor, also wird x durch eine neue Konstante (0-stelliges Funktionssymbol) a ersetzt
2. links von $\exists u$ stehen $\forall y$ und $\forall z$, also wird u durch $f(y, z)$ ersetzt
3. und ebenso für $\exists v$.

Beispiel

Beispiel

So wird aus

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \exists v P(x, y, z, u, v)$$

Dann

$$\forall y \forall z P(a, y, z, f(y, z), g(y, z))$$

Denn

1. links von $\exists x$ ist kein Allquantor, also wird x durch eine neue Konstante (0-stelliges Funktionssymbol) a ersetzt
2. links von $\exists u$ stehen $\forall y$ und $\forall z$, also wird u durch $f(y, z)$ ersetzt
3. und ebenso für $\exists v$.

Beispiel

Beispiel

So wird aus

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \exists v P(x, y, z, u, v)$$

Dann

$$\forall y \forall z P(a, y, z, f(y, z), g(y, z))$$

Denn

1. links von $\exists x$ ist kein Allquantor, also wird x durch eine neue Konstante (0-stelliges Funktionssymbol) a ersetzt
2. links von $\exists u$ stehen $\forall y$ und $\forall z$, also wird u durch $f(y, z)$ ersetzt
3. und ebenso für $\exists v$.

Beispiel

Beispiel

So wird aus

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \exists v P(x, y, z, u, v)$$

Dann

$$\forall y \forall z P(a, y, z, f(y, z), g(y, z))$$

Denn

1. links von $\exists x$ ist kein Allquantor, also wird x durch eine neue Konstante (0-stelliges Funktionssymbol) a ersetzt
2. links von $\exists u$ stehen $\forall y$ und $\forall z$, also wird u durch $f(y, z)$ ersetzt
3. und ebenso für $\exists v$.

Klauselnormalform

Satz (Erstellung der Klauselnormalform)

Zu jeder Formel existiert eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform.

Beweis.

Sei $F \in \mathcal{L}_{PL}$ beliebig. Die Umformungsschritte:

1. Umbenennung der gebundenen Variablen (F_1 bereinigt): $F_1 \equiv F$
2. Bindung aller freien Variablen durch Existenzquantoren (F_2 bereinigt, geschlossen): $F_2 \equiv_e F_1$
3. Erstellung einer Pränexform (F_3 in BPF): $F_3 \equiv F_2$
4. Skolemisierung (F_4 in Skolemform): $F_4 \equiv_e F_3$
5. Umformung der Matrix in KNF (F_5 in Klauselnormalform): $F_5 \equiv F_4$

F_5 und F sind erfüllbarkeitsäquivalent und F_5 ist in Klauselnormalform. □

Klauselnormalform

Satz (Erstellung der Klauselnormalform)

Zu jeder Formel existiert eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform.

Beweis.

Sei $F \in \mathcal{L}_{PL}$ beliebig. Die Umformungsschritte:

1. Umbenennung der gebundenen Variablen (F_1 bereinigt): $F_1 \equiv F$
2. Bindung aller freien Variablen durch Existenzquantoren (F_2 bereinigt, geschlossen): $F_2 \equiv_e F_1$
3. Erstellung einer Pränexform (F_3 in BPF): $F_3 \equiv F_2$
4. Skolemisierung (F_4 in Skolemform): $F_4 \equiv_e F_3$
5. Umformung der Matrix in KNF (F_5 in Klauselnormalform): $F_5 \equiv F_4$

F_5 und F sind erfüllbarkeitsäquivalent und F_5 ist in Klauselnormalform. □

Klauselnormalform

Satz (Erstellung der Klauselnormalform)

Zu jeder Formel existiert eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform.

Beweis.

Sei $F \in \mathcal{L}_{PL}$ beliebig. Die Umformungsschritte:

1. Umbenennung der gebundenen Variablen (F_1 bereinigt): $F_1 \equiv F$
2. Bindung aller freien Variablen durch Existenzquantoren (F_2 bereinigt, geschlossen): $F_2 \equiv_e F_1$
3. Erstellung einer Pränexform (F_3 in BPF): $F_3 \equiv F_2$
4. Skolemisierung (F_4 in Skolemform): $F_4 \equiv_e F_3$
5. Umformung der Matrix in KNF (F_5 in Klauselnormalform): $F_5 \equiv F_4$

F_5 und F sind erfüllbarkeitsäquivalent und F_5 ist in Klauselnormalform. □

Klauselnormalform

Satz (Erstellung der Klauselnormalform)

Zu jeder Formel existiert eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform.

Beweis.

Sei $F \in \mathcal{L}_{PL}$ beliebig. Die Umformungsschritte:

1. Umbenennung der gebundenen Variablen (F_1 bereinigt): $F_1 \equiv F$
2. Bindung aller freien Variablen durch Existenzquantoren (F_2 bereinigt, geschlossen): $F_2 \equiv_e F_1$
3. Erstellung einer Pränexform (F_3 in BPF): $F_3 \equiv F_2$
4. Skolemisierung (F_4 in Skolemform): $F_4 \equiv_e F_3$
5. Umformung der Matrix in KNF (F_5 in Klauselnormalform): $F_5 \equiv F_4$

F_5 und F sind erfüllbarkeitsäquivalent und F_5 ist in Klauselnormalform. □

Klauselnormalform

Satz (Erstellung der Klauselnormalform)

Zu jeder Formel existiert eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform.

Beweis.

Sei $F \in \mathcal{L}_{PL}$ beliebig. Die Umformungsschritte:

1. Umbenennung der gebundenen Variablen (F_1 bereinigt): $F_1 \equiv F$
2. Bindung aller freien Variablen durch Existenzquantoren (F_2 bereinigt, geschlossen): $F_2 \equiv_e F_1$
3. Erstellung einer Pränexform (F_3 in BPF): $F_3 \equiv F_2$
4. Skolemisierung (F_4 in Skolemform): $F_4 \equiv_e F_3$
5. Umformung der Matrix in KNF (F_5 in Klauselnormalform): $F_5 \equiv F_4$

F_5 und F sind erfüllbarkeitsäquivalent und F_5 ist in Klauselnormalform. □

Klauselnormalform

Satz (Erstellung der Klauselnormalform)

Zu jeder Formel existiert eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform.

Beweis.

Sei $F \in \mathcal{L}_{PL}$ beliebig. Die Umformungsschritte:

1. Umbenennung der gebundenen Variablen (F_1 bereinigt): $F_1 \equiv F$
2. Bindung aller freien Variablen durch Existenzquantoren (F_2 bereinigt, geschlossen): $F_2 \equiv_e F_1$
3. Erstellung einer Pränexform (F_3 in BPF): $F_3 \equiv F_2$
4. Skolemisierung (F_4 in Skolemform): $F_4 \equiv_e F_3$
5. Umformung der Matrix in KNF (F_5 in Klauselnormalform): $F_5 \equiv F_4$

F_5 und F sind erfüllbarkeitsäquivalent und F_5 ist in Klauselnormalform. □

Klauselnormalform

Satz (Erstellung der Klauselnormalform)

Zu jeder Formel existiert eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform.

Beweis.

Sei $F \in \mathcal{L}_{PL}$ beliebig. Die Umformungsschritte:

1. Umbenennung der gebundenen Variablen (F_1 bereinigt): $F_1 \equiv F$
2. Bindung aller freien Variablen durch Existenzquantoren (F_2 bereinigt, geschlossen): $F_2 \equiv_e F_1$
3. Erstellung einer Pränexform (F_3 in BPF): $F_3 \equiv F_2$
4. Skolemisierung (F_4 in Skolemform): $F_4 \equiv_e F_3$
5. Umformung der Matrix in KNF (F_5 in Klauselnormalform): $F_5 \equiv F_4$

F_5 und F sind erfüllbarkeitsäquivalent und F_5 ist in Klauselnormalform. □

Wichtige Anmerkung

Wichtige Anmerkung

Bei der Erstellung der Klauselnormalform insbesondere auf folgendes achten:

1. Bei der gebundenen Umbenennung die **gebundenen Variablen umbenennen**, nicht die freien!
2. Bei der Bindung der freien Variablen durch Existenzquantoren die neuen Existenzquantoren **ganz nach vorne schreiben**.
3. Bei der Erstellung der Pränexform die Quantoren zwar nach vorne ziehen, aber nicht über andere (gegenteilige) Quantoren herüber! $\forall x \exists y F \not\equiv \exists y \forall x F$! Und darauf achten, dass bei Negation und vorne in der Implikation der Quantor flippt, wenn man ihn nach vorne zieht.

Wichtige Anmerkung

Wichtige Anmerkung

Bei der Erstellung der Klauselnormalform insbesondere auf folgendes achten:

1. Bei der gebundenen Umbenennung die **gebundenen Variablen umbenennen**, nicht die freien!
2. Bei der Bindung der freien Variablen durch Existenzquantoren die neuen Existenzquantoren **ganz nach vorne schreiben**.
3. Bei der Erstellung der Pränexform die Quantoren zwar nach vorne ziehen, aber nicht über andere (gegenteilige) Quantoren herüber! $\forall x \exists y F \not\equiv \exists y \forall x F$! Und darauf achten, dass bei Negation und vorne in der Implikation der Quantor flippt, wenn man ihn nach vorne zieht.

Wichtige Anmerkung

Wichtige Anmerkung

Bei der Erstellung der Klauselnormalform insbesondere auf folgendes achten:

1. Bei der gebundenen Umbenennung die **gebundenen Variablen umbenennen**, nicht die freien!
2. Bei der Bindung der freien Variablen durch Existenzquantoren die neuen Existenzquantoren **ganz nach vorne schreiben**.
3. Bei der Erstellung der Pränexform die Quantoren zwar nach vorne ziehen, aber nicht über andere (gegenteilige) Quantoren herüber! $\forall x \exists y F \not\equiv \exists y \forall x F$! Und darauf achten, dass bei Negation und vorne in der Implikation der Quantor flippt, wenn man ihn nach vorne zieht.

Wichtige Anmerkung

Wichtige Anmerkung

Bei der Erstellung der Klauselnormalform insbesondere auf folgendes achten:

1. Bei der gebundenen Umbenennung die **gebundenen Variablen umbenennen**, nicht die freien!
2. Bei der Bindung der freien Variablen durch Existenzquantoren die neuen Existenzquantoren **ganz nach vorne schreiben**.
3. Bei der Erstellung der Pränexform die Quantoren zwar nach vorne ziehen, aber nicht über andere (gegenteilige) Quantoren herüber! $\forall x \exists y F \not\equiv \exists y \forall x F$! Und darauf achten, dass bei Negation und vorne in der Implikation der Quantor flippt, wenn man ihn nach vorne zieht.

Zusammenfassung

Wir haben heute:

1. Normalformen basierend auf Äquivalenz eingeführt
   - aussagenlogische Äquivalenzen übertragen
   - neue Äquivalenzen durch Quantoren
   - Gebundene Umbenennung von Variablen
   - Pränexform
2. Normalformen basierend auf Erfüllbarkeitsäquivalenz eingeführt
   - Bindung freier Variablen
   - Skolemisierung
   - Klauselnormalform

Die Klauselnormalform wird uns bei der prädikatenlogischen Resolution nützen!