Formale Grundlagen der Informatik 1
Kapitel 17

Prädikatenlogik
Syntax & Semantik

Frank Heitmann
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

6. & 7. Juni 2016

Motivation

Die Prädikatenlogik ist eine *Erweiterung der Aussagenlogik*. Sie hat eine größere Ausdrucksstärke und erlaub eine feinere Differenzierung. Ferner sind Beziehungen/Relationen ausdrückbar.

- Es gibt eine **Domäne** aus der die betrachteten Objekte stammen (z.B. alle Menschen, alle Autos oder die natürlichen Zahlen)
- **Terme** repräsentieren Objekte (z.B. ein bestimmtes Auto oder die Zahl 3)
- **Prädikate** repräsentieren Eigenschaften und Relationen (zwischen den Objekten der Domäne, z.B. älter als bei Menschen schneller als bei Autos oder kleiner als bei Zahlen)
- **Formeln** repräsentieren Aussagen (die dann wieder wahr oder falsch sein können)

Motivation

Die Prädikatenlogik ist eine *Erweiterung der Aussagenlogik*. Sie hat eine größere Ausdrucksstärke und erlaub eine feinere Differenzierung. Ferner sind Beziehungen/Relationen ausdrückbar.

- Es gibt eine **Domäne** aus der die betrachteten Objekte stammen (z.B. alle Menschen, alle Autos oder die natürlichen Zahlen)
- **Terme** repräsentieren Objekte (z.B. ein bestimmtes Auto oder die Zahl 3)
- **Prädikate** repräsentieren Eigenschaften und Relationen (zwischen den Objekten der Domäne, z.B. älter als bei Menschen schneller als bei Autos oder kleiner als bei Zahlen)
- **Formeln** repräsentieren Aussagen (die dann wieder wahr oder falsch sein können)

Motivation

Die Prädikatenlogik ist eine *Erweiterung der Aussagenlogik*. Sie hat eine größere Ausdrucksstärke und erlaub eine feinere Differenzierung. Ferner sind Beziehungen/Relationen ausdrückbar.

- Es gibt eine **Domäne** aus der die betrachteten Objekte stammen (z.B. alle Menschen, alle Autos oder die natürlichen Zahlen)
- **Terme** repräsentieren Objekte (z.B. ein bestimmtes Auto oder die Zahl 3)
- **Prädikate** repräsentieren Eigenschaften und Relationen (zwischen den Objekten der Domäne, z.B. älter als bei Menschen schneller als bei Autos oder kleiner als bei Zahlen)
- **Formeln** repräsentieren Aussagen (die dann wieder wahr oder falsch sein können)

Motivation

Die Prädikatenlogik ist eine *Erweiterung der Aussagenlogik*. Sie hat eine größere Ausdrucksstärke und erlaub eine feinere Differenzierung. Ferner sind Beziehungen/Relationen ausdrückbar.

- Es gibt eine **Domäne** aus der die betrachteten Objekte stammen (z.B. alle Menschen, alle Autos oder die natürlichen Zahlen)
- **Terme** repräsentieren Objekte (z.B. ein bestimmtes Auto oder die Zahl 3)
- **Prädikate** repräsentieren Eigenschaften und Relationen (zwischen den Objekten der Domäne, z.B. älter als bei Menschen schneller als bei Autos oder kleiner als bei Zahlen)
- **Formeln** repräsentieren Aussagen (die dann wieder wahr oder falsch sein können)

Motivation

Die Prädikatenlogik ist eine *Erweiterung der Aussagenlogik*. Sie hat eine größere Ausdrucksstärke und erlaub eine feinere Differenzierung. Ferner sind Beziehungen/Relationen ausdrückbar.

- Es gibt eine **Domäne** aus der die betrachteten Objekte stammen (z.B. alle Menschen, alle Autos oder die natürlichen Zahlen)
- **Terme** repräsentieren Objekte (z.B. ein bestimmtes Auto oder die Zahl 3)
- **Prädikate** repräsentieren Eigenschaften und Relationen (zwischen den Objekten der Domäne, z.B. älter als bei Menschen schneller als bei Autos oder kleiner als bei Zahlen)
- **Formeln** repräsentieren Aussagen (die dann wieder wahr oder falsch sein können)

Motivation - Beispiel

Jeder Student ist jünger als (irgend-)ein Lehrer.

- $S(x)$ - x ist Student
- $L(x)$ - x ist Lehrer
- $J(x, y)$ - x ist jünger als y

$$\forall x(S(x) \Rightarrow \exists y(L(y) \land J(x, y)))$$

Motivation - Beispiel

Jeder Student ist jünger als (irgend-)ein Lehrer.

- $S(x)$ - x ist Student
- $L(x)$ - x ist Lehrer
- $J(x, y)$ - x ist jünger als y

$$\forall x(S(x) \Rightarrow \exists y(L(y) \wedge J(x, y)))$$

Motivation - Beispiel

Jeder Student ist jünger als (irgend-)ein Lehrer.

- $S(x)$ - x ist Student
- $L(x)$ - x ist Lehrer
- $J(x, y)$ - x ist jünger als y

$$\forall x(S(x) \Rightarrow \exists y(L(y) \wedge J(x, y)))$$

Motivation - Beispiel

Weitere Beispiele von Formeln:

$$F = \forall x(P(x) \Rightarrow \exists y Q(f(x), y))$$

$$G = P(x, a) \wedge \forall x \exists y P(x, y)$$

Alphabet

Definition (Alphabet)

Das **Alphabet** der Prädikatenlogik besteht aus

- einer Menge von **Variablen**: $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$
- einer Menge von **Konstanten**: $a, b, c, a_1, a_2, \ldots$
- einer Menge von **Funktionssymbolen**: $f, g, h, f_1, f_2, \ldots$
- einer Menge von **Prädikatensymbolen**: $P, Q, R, P_1, P_2, \ldots$
- einer Menge von **Aussagenymbolen**: $A, B, C, A_1, A_2, \ldots$
- den **Junktoren**: $\neg, \land, \lor, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- den **Quantoren**: $\forall, \exists$
- den **Hilfssymbolen**: $), ($ und ,

Jedem Funktions- und Prädikatensymbol ist dabei eindeutig eine **Stelligkeit** $k \geq 0$ zugewiesen.

Alphabet

Definition (Alphabet)

Das **Alphabet** der Prädikatenlogik besteht aus

- einer Menge von **Variablen**: $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$
- einer Menge von **Konstanten**: $a, b, c, a_1, a_2, \ldots$
- einer Menge von **Funktionssymbolen**: $f, g, h, f_1, f_2, \ldots$
- einer Menge von **Prädikatensymbolen**: $P, Q, R, P_1, P_2, \ldots$
- einer Menge von **Aussagenymbolen**: $A, B, C, A_1, A_2, \ldots$
- den **Junktoren**: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- den **Quantoren**: $\forall, \exists$
- den **Hilfssymbolen**:), (und ,

Jedem Funktions- und Prädikatensymbol ist dabei eindeutig eine **Stelligkeit** $k \geq 0$ zugewiesen.

Alphabet

Definition (Alphabet)

Das **Alphabet** der Prädikatenlogik besteht aus

- einer Menge von **Variablen**: $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$
- einer Menge von **Konstanten**: $a, b, c, a_1, a_2, \ldots$
- einer Menge von **Funktionssymbolen**: $f, g, h, f_1, f_2, \ldots$
- einer Menge von **Prädikatensymbolen**: $P, Q, R, P_1, P_2, \ldots$
- einer Menge von **Aussagenymbolen**: $A, B, C, A_1, A_2, \ldots$
- den **Junktoren**: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- den **Quantoren**: $\forall, \exists$
- den **Hilfssymbolen**: $), ($ und $,$

Jedem Funktions- und Prädikatensymbol ist dabei eindeutig eine **Stelligkeit** $k \geq 0$ zugewiesen.

Frank Heitmann heitmann@informatik.uni-hamburg.de

Alphabet

Definition (Alphabet)

Das **Alphabet** der Prädikatenlogik besteht aus

- einer Menge von **Variablen**: $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$
- einer Menge von **Konstanten**: $a, b, c, a_1, a_2, \ldots$
- einer Menge von **Funktionssymbolen**: $f, g, h, f_1, f_2, \ldots$
- einer Menge von **Prädikatensymbolen**: $P, Q, R, P_1, P_2, \ldots$
- einer Menge von **Aussagenymbolen**: $A, B, C, A_1, A_2, \ldots$
- den **Junktoren**: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- den **Quantoren**: $\forall, \exists$
- den **Hilfssymbolen**: $), ($ und $,$

Jedem Funktions- und Prädikatensymbol ist dabei eindeutig eine **Stelligkeit** $k \geq 0$ zugewiesen.

Alphabet

Definition (Alphabet)

Das **Alphabet** der Prädikatenlogik besteht aus

- einer Menge von **Variablen**: $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$
- einer Menge von **Konstanten**: $a, b, c, a_1, a_2, \ldots$
- einer Menge von **Funktionssymbolen**: $f, g, h, f_1, f_2, \ldots$
- einer Menge von **Prädikatensymbolen**: $P, Q, R, P_1, P_2, \ldots$
- einer Menge von **Aussagenymbolen**: $A, B, C, A_1, A_2, \ldots$
- den **Junktoren**: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- den **Quantoren**: $\forall, \exists$
- den **Hilfssymbolen**: $), ($ und $,$

Jedem Funktions- und Prädikatensymbol ist dabei eindeutig eine **Stelligkeit** $k \geq 0$ zugewiesen.

Alphabet

Definition (Alphabet)

Das **Alphabet** der Prädikatenlogik besteht aus

- einer Menge von **Variablen**: $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$
- einer Menge von **Konstanten**: $a, b, c, a_1, a_2, \ldots$
- einer Menge von **Funktionssymbolen**: $f, g, h, f_1, f_2, \ldots$
- einer Menge von **Prädikatensymbolen**: $P, Q, R, P_1, P_2, \ldots$
- einer Menge von **Aussagenymbolen**: $A, B, C, A_1, A_2, \ldots$
- den **Junktoren**: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- den **Quantoren**: $\forall, \exists$
- den **Hilfssymbolen**: $), ($ und $,$

Jedem Funktions- und Prädikatensymbol ist dabei eindeutig eine **Stelligkeit** $k \geq 0$ zugewiesen.

Alphabet

Definition (Alphabet)

Das **Alphabet** der Prädikatenlogik besteht aus

- einer Menge von **Variablen**: $x, y, z, x_1, x_2, \dots$
- einer Menge von **Konstanten**: $a, b, c, a_1, a_2, \dots$
- einer Menge von **Funktionssymbolen**: $f, g, h, f_1, f_2, \dots$
- einer Menge von **Prädikatensymbolen**: $P, Q, R, P_1, P_2, \dots$
- einer Menge von **Aussagenymbolen**: $A, B, C, A_1, A_2, \dots$
- den **Junktoren**: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- den **Quantoren**: $\forall, \exists$
- den **Hilfssymbolen**:), (und ,

Jedem Funktions- und Prädikatensymbol ist dabei eindeutig eine **Stelligkeit** $k \geq 0$ zugewiesen.

Alphabet

Definition (Alphabet)

Das **Alphabet** der Prädikatenlogik besteht aus

- einer Menge von **Variablen**: $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$
- einer Menge von **Konstanten**: $a, b, c, a_1, a_2, \ldots$
- einer Menge von **Funktionssymbolen**: $f, g, h, f_1, f_2, \ldots$
- einer Menge von **Prädikatensymbolen**: $P, Q, R, P_1, P_2, \ldots$
- einer Menge von **Aussagenymbolen**: $A, B, C, A_1, A_2, \ldots$
- den **Junktoren**: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- den **Quantoren**: $\forall, \exists$
- den **Hilfssymbolen**: $), ($ und $,$

Jedem Funktions- und Prädikatensymbol ist dabei eindeutig eine **Stelligkeit** $k \geq 0$ zugewiesen.

Alphabet

Definition (Alphabet)

Das **Alphabet** der Prädikatenlogik besteht aus

- einer Menge von **Variablen**: $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$
- einer Menge von **Konstanten**: $a, b, c, a_1, a_2, \ldots$
- einer Menge von **Funktionssymbolen**: $f, g, h, f_1, f_2, \ldots$
- einer Menge von **Prädikatensymbolen**: $P, Q, R, P_1, P_2, \ldots$
- einer Menge von **Aussagenymbolen**: $A, B, C, A_1, A_2, \ldots$
- den **Junktoren**: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- den **Quantoren**: $\forall, \exists$
- den **Hilfssymbolen**: $), ($ und ,

Jedem Funktions- und Prädikatensymbol ist dabei eindeutig eine **Stelligkeit** $k \geq 0$ zugewiesen.

Alphabet

Definition (Alphabet)

Das **Alphabet** der Prädikatenlogik besteht aus

- einer Menge von **Variablen**: $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$
- einer Menge von **Konstanten**: $a, b, c, a_1, a_2, \ldots$
- einer Menge von **Funktionssymbolen**: $f, g, h, f_1, f_2, \ldots$
- einer Menge von **Prädikatensymbolen**: $P, Q, R, P_1, P_2, \ldots$
- einer Menge von **Aussagenymbolen**: $A, B, C, A_1, A_2, \ldots$
- den **Junktoren**: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- den **Quantoren**: $\forall, \exists$
- den **Hilfssymbolen**: $), ($ und ,

Jedem Funktions- und Prädikatensymbol ist dabei eindeutig eine **Stelligkeit** $k \geq 0$ zugewiesen.

Alphabet - Anmerkung

Anmerkung

Das Alphabet gibt zunächst nur die Symbole vor, die benutzt werden dürfen. Die Syntax sagt dann, wie diese angeordnet werden dürfen und die Semantik, wie die so entstandenen Zeichenketten dann zu interpretieren sind.

Terme

Definition (Terme der Prädikatenlogik)

Die Menge der **prädikatenlogischen Terme** wird wie folgt definiert:

1. Jede Variable ist ein Term.
2. Jede Konstante ist ein Term.
3. Ist f ein Funktionssymbol der Stelligkeit k und sind $t_1, \dots, t_k$ Terme, so ist auch $f(t_1, \dots, t_k)$ ein Term.
4. Es gibt keine anderen Terme, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-3 erzeugt werden.

Der Term t ist **Teilterm** des Terms t', wenn t beim Aufbau von t' verwendet wurde.

Terme

Definition (Terme der Prädikatenlogik)

Die Menge der **prädikatenlogischen Terme** wird wie folgt definiert:

1. Jede Variable ist ein Term.
2. Jede Konstante ist ein Term.
3. Ist f ein Funktionssymbol der Stelligkeit k und sind $t_1, \ldots, t_k$ Terme, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_k)$ ein Term.
4. Es gibt keine anderen Terme, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-3 erzeugt werden.

Der Term t ist **Teilterm** des Terms t', wenn t beim Aufbau von t' verwendet wurde.

Terme

Definition (Terme der Prädikatenlogik)

Die Menge der **prädikatenlogischen Terme** wird wie folgt definiert:

1. Jede Variable ist ein Term.
2. Jede Konstante ist ein Term.
3. Ist f ein Funktionssymbol der Stelligkeit k und sind $t_1, \dots, t_k$ Terme, so ist auch $f(t_1, \dots, t_k)$ ein Term.
4. Es gibt keine anderen Terme, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-3 erzeugt werden.

Der Term t ist **Teilterm** des Terms t', wenn t beim Aufbau von t' verwendet wurde.

Terme

Definition (Terme der Prädikatenlogik)

Die Menge der **prädikatenlogischen Terme** wird wie folgt definiert:

1. Jede Variable ist ein Term.
2. Jede Konstante ist ein Term.
3. Ist f ein Funktionssymbol der Stelligkeit k und sind $t_1, \dots, t_k$ Terme, so ist auch $f(t_1, \dots, t_k)$ ein Term.
4. Es gibt keine anderen Terme, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-3 erzeugt werden.

Der Term t ist **Teilterm** des Terms t', wenn t beim Aufbau von t' verwendet wurde.

Terme

Definition (Terme der Prädikatenlogik)

Die Menge der **prädikatenlogischen Terme** wird wie folgt definiert:

1. Jede Variable ist ein Term.
2. Jede Konstante ist ein Term.
3. Ist f ein Funktionssymbol der Stelligkeit k und sind $t_1, \dots, t_k$ Terme, so ist auch $f(t_1, \dots, t_k)$ ein Term.
4. Es gibt keine anderen Terme, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-3 erzeugt werden.

Der Term t ist **Teilterm** des Terms t', wenn t beim Aufbau von t' verwendet wurde.

Terme

Definition (Terme der Prädikatenlogik)

Die Menge der **prädikatenlogischen Terme** wird wie folgt definiert:

1. Jede Variable ist ein Term.
2. Jede Konstante ist ein Term.
3. Ist f ein Funktionssymbol der Stelligkeit k und sind $t_1, \dots, t_k$ Terme, so ist auch $f(t_1, \dots, t_k)$ ein Term.
4. Es gibt keine anderen Terme, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-3 erzeugt werden.

Der Term t ist **Teilterm** des Terms t', wenn t beim Aufbau von t' verwendet wurde.

Terme - Beispiel

Beispiel

Terme sind z.B.

- Die Konstanten a und b.
- Die Variablen x und z.
- Ist f ein 3-stelliges Funktionssymbol, dann sind auch Terme
  - $f(a, b, x)$
  - $f(f(a, a, a), x, z)$
  - $f(f(x, a, a), f(f(a, x, a), f(z, z, b), z), a)$

Ist f weiterhin ein 3-stelliges Funktionssymbol, dann ist kein Term

- aa, $a + x$
- $f(a, x)$
- f

Terme - Beispiel

Beispiel

Terme sind z.B.

- Die Konstanten a und b.
- Die Variablen x und z.
- Ist f ein 3-stelliges Funktionssymbol, dann sind auch Terme
  - $f(a, b, x)$
  - $f(f(a, a, a), x, z)$
  - $f(f(x, a, a), f(f(a, x, a), f(z, z, b), z), a)$

Ist f weiterhin ein 3-stelliges Funktionssymbol, dann ist kein Term

- aa, $a + x$
- $f(a, x)$
- f

Formeln

Definition (Formeln der Prädikatenlogik)

Die Menge der **prädikatenlogischen Formeln** $\mathcal{L}_{PL}$ wird wie folgt definiert:

1. Jedes Aussagensymbol ist eine (atomare) Formel.
2. Ist P ein Prädikatensymbol der Stelligkeit k und sind $t_1, \ldots, t_k$ Terme, so ist $P(t_1, \ldots, t_k)$ eine (atomare) Formel.
3. Sind F und G Formeln, so sind auch $\neg F, (F \vee G), (F \wedge G), (F \Rightarrow G)$ und $(F \Leftrightarrow G)$ Formeln.
4. Ist x eine Variable und F eine Formel, so sind auch $\exists x F$ und $\forall x F$ Formeln.
5. Es gibt keine anderen Formeln, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-4 erzeugt werden.

Formeln

Definition (Formeln der Prädikatenlogik)

Die Menge der **prädikatenlogischen Formeln** $\mathcal{L}_{PL}$ wird wie folgt definiert:

1. Jedes Aussagensymbol ist eine (atomare) Formel.
2. Ist P ein Prädikatensymbol der Stelligkeit k und sind $t_1, \ldots, t_k$ Terme, so ist $P(t_1, \ldots, t_k)$ eine (atomare) Formel.
3. Sind F und G Formeln, so sind auch $\neg F, (F \vee G), (F \wedge G), (F \Rightarrow G)$ und $(F \Leftrightarrow G)$ Formeln.
4. Ist x eine Variable und F eine Formel, so sind auch $\exists x F$ und $\forall x F$ Formeln.
5. Es gibt keine anderen Formeln, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-4 erzeugt werden.

Formeln

Definition (Formeln der Prädikatenlogik)

Die Menge der **prädikatenlogischen Formeln** $\mathcal{L}_{PL}$ wird wie folgt definiert:

1. Jedes Aussagensymbol ist eine (atomare) Formel.
2. Ist P ein Prädikatensymbol der Stelligkeit k und sind $t_1, \ldots, t_k$ Terme, so ist $P(t_1, \ldots, t_k)$ eine (atomare) Formel.
3. Sind F und G Formeln, so sind auch $\neg F, (F \vee G), (F \wedge G), (F \Rightarrow G)$ und $(F \Leftrightarrow G)$ Formeln.
4. Ist x eine Variable und F eine Formel, so sind auch $\exists x F$ und $\forall x F$ Formeln.
5. Es gibt keine anderen Formeln, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-4 erzeugt werden.

Formeln

Definition (Formeln der Prädikatenlogik)

Die Menge der **prädikatenlogischen Formeln** $\mathcal{L}_{PL}$ wird wie folgt definiert:

1. Jedes Aussagensymbol ist eine (atomare) Formel.
2. Ist P ein Prädikatensymbol der Stelligkeit k und sind $t_1, \ldots, t_k$ Terme, so ist $P(t_1, \ldots, t_k)$ eine (atomare) Formel.
3. Sind F und G Formeln, so sind auch $\neg F, (F \vee G), (F \wedge G), (F \Rightarrow G)$ und $(F \Leftrightarrow G)$ Formeln.
4. Ist x eine Variable und F eine Formel, so sind auch $\exists x F$ und $\forall x F$ Formeln.
5. Es gibt keine anderen Formeln, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-4 erzeugt werden.

Formeln

Definition (Formeln der Prädikatenlogik)

Die Menge der **prädikatenlogischen Formeln** $\mathcal{L}_{PL}$ wird wie folgt definiert:

1. Jedes Aussagensymbol ist eine (atomare) Formel.
2. Ist P ein Prädikatensymbol der Stelligkeit k und sind $t_1, \ldots, t_k$ Terme, so ist $P(t_1, \ldots, t_k)$ eine (atomare) Formel.
3. Sind F und G Formeln, so sind auch $\neg F, (F \vee G), (F \wedge G), (F \Rightarrow G)$ und $(F \Leftrightarrow G)$ Formeln.
4. Ist x eine Variable und F eine Formel, so sind auch $\exists x F$ und $\forall x F$ Formeln.
5. Es gibt keine anderen Formeln, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-4 erzeugt werden.

Formeln

Definition (Formeln der Prädikatenlogik)

Die Menge der **prädikatenlogischen Formeln** $\mathcal{L}_{PL}$ wird wie folgt definiert:

1. Jedes Aussagensymbol ist eine (atomare) Formel.
2. Ist P ein Prädikatensymbol der Stelligkeit k und sind $t_1, \dots, t_k$ Terme, so ist $P(t_1, \dots, t_k)$ eine (atomare) Formel.
3. Sind F und G Formeln, so sind auch $\neg F, (F \vee G), (F \wedge G), (F \Rightarrow G)$ und $(F \Leftrightarrow G)$ Formeln.
4. Ist x eine Variable und F eine Formel, so sind auch $\exists x F$ und $\forall x F$ Formeln.
5. Es gibt keine anderen Formeln, als die, die durch *endliche Anwendungen* der Schritte 1-4 erzeugt werden.

Formeln - Beispiel

Beispiel

Formeln sind z.B.

- $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y Q(f(x), y))$
- $P(x, a) \wedge \forall x \exists y P(x, y)$
- $\forall x P(x) \vee \exists x P(x)$
- $\forall x(P(x) \vee \exists x P(x))$
- $P(x)$

Keine Formeln sind z.B.

- $P(xx)$
- $xP(x)$
- $f(x)$

Formeln - Beispiel

Beispiel

Formeln sind z.B.

- $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y Q(f(x), y))$
- $P(x, a) \wedge \forall x \exists y P(x, y)$
- $\forall x P(x) \vee \exists x P(x)$
- $\forall x(P(x) \vee \exists x P(x))$
- $P(x)$

Keine Formeln sind z.B.

- $P(xx)$
- $xP(x)$
- $f(x)$

Teilformeln

Definition (Formeln der Prädikatenlogik (Fortsetzung))

- Eine Formel F ist **Teilformel** einer Formel H, wenn F beim Aufbau von H verwendet wurde.
- Ein Term t ist **Teilterm** einer Formel H, wenn t beim Aufbau von H verwendet wird oder Teilterm eines Terms ist für den dies gilt.
- In $\exists xF$ und $\forall xF$ wird x als **Quantorenvariable** bezeichnet und F als **Skopus** des Quantors.

Teilformeln

Definition (Formeln der Prädikatenlogik (Fortsetzung))

- Eine Formel F ist **Teilformel** einer Formel H, wenn F beim Aufbau von H verwendet wurde.
- Ein Term t ist **Teilterm** einer Formel H, wenn t beim Aufbau von H verwendet wird oder Teilterm eines Terms ist für den dies gilt.
- In $\exists xF$ und $\forall xF$ wird x als **Quantorenvariable** bezeichnet und F als **Skopus** des Quantors.

Teilformeln

Definition (Formeln der Prädikatenlogik (Fortsetzung))

- Eine Formel F ist **Teilformel** einer Formel H, wenn F beim Aufbau von H verwendet wurde.
- Ein Term t ist **Teilterm** einer Formel H, wenn t beim Aufbau von H verwendet wird oder Teilterm eines Terms ist für den dies gilt.
- In $\exists xF$ und $\forall xF$ wird x als **Quantorenvariable** bezeichnet und F als **Skopus** des Quantors.

Freie und gebundene Variablen

Definition (Freie und gebundene Variablen)

- In $\exists x F$ und $\forall x F$ wird x als **Quantorenvariable** bezeichnet und F als **Skopus** des Quantors.
- Eine Variable x, die im Skopus F eines Quantors mit der Quantorenvariablen x frei vorkommt, ist durch den Quantor in dieser Position **gebunden**.
- Eine Variable, die als Teilterm einer Formel F auftritt und an keinen Quantor gebunden ist, ist in dieser Position **frei**.
- Eine Formel ohne freie Variablen heißt **geschlossen**.

Beispiel

In $\forall x(P(x) \vee R(x, y)) \Rightarrow Q(x)$ sind die ersten zwei x gebunden, das y und das dritte x sind frei.

Freie und gebundene Variablen

Definition (Freie und gebundene Variablen)

- In $\exists x F$ und $\forall x F$ wird x als **Quantorenvariable** bezeichnet und F als **Skopus** des Quantors.
- Eine Variable x, die im Skopus F eines Quantors mit der Quantorenvariablen x frei vorkommt, ist durch den Quantor in dieser Position **gebunden**.
- Eine Variable, die als Teilterm einer Formel F auftritt und an keinen Quantor gebunden ist, ist in dieser Position **frei**.
- Eine Formel ohne freie Variablen heißt **geschlossen**.

Beispiel

In $\forall x(P(x) \vee R(x, y)) \Rightarrow Q(x)$ sind die ersten zwei x gebunden, das y und das dritte x sind frei.

Freie und gebundene Variablen

Definition (Freie und gebundene Variablen)

- In $\exists x F$ und $\forall x F$ wird x als **Quantorenvariable** bezeichnet und F als **Skopus** des Quantors.
- Eine Variable x, die im Skopus F eines Quantors mit der Quantorenvariablen x frei vorkommt, ist durch den Quantor in dieser Position **gebunden**.
- Eine Variable, die als Teilterm einer Formel F auftritt und an keinen Quantor gebunden ist, ist in dieser Position **frei**.
- Eine Formel ohne freie Variablen heißt **geschlossen**.

Beispiel

In $\forall x(P(x) \vee R(x,y)) \Rightarrow Q(x)$ sind die ersten zwei x gebunden, das y und das dritte x sind frei.

Freie und gebundene Variablen

Definition (Freie und gebundene Variablen)

- In $\exists x F$ und $\forall x F$ wird x als **Quantorenvariable** bezeichnet und F als **Skopus** des Quantors.
- Eine Variable x, die im Skopus F eines Quantors mit der Quantorenvariablen x frei vorkommt, ist durch den Quantor in dieser Position **gebunden**.
- Eine Variable, die als Teilterm einer Formel F auftritt und an keinen Quantor gebunden ist, ist in dieser Position **frei**.
- Eine Formel ohne freie Variablen heißt **geschlossen**.

Beispiel

In $\forall x(P(x) \vee R(x, y)) \Rightarrow Q(x)$ sind die ersten zwei x gebunden, das y und das dritte x sind frei.

Freie und gebundene Variablen

Definition (Freie und gebundene Variablen)

- In $\exists x F$ und $\forall x F$ wird x als **Quantorenvariable** bezeichnet und F als **Skopus** des Quantors.
- Eine Variable x, die im Skopus F eines Quantors mit der Quantorenvariablen x frei vorkommt, ist durch den Quantor in dieser Position **gebunden**.
- Eine Variable, die als Teilterm einer Formel F auftritt und an keinen Quantor gebunden ist, ist in dieser Position **frei**.
- Eine Formel ohne freie Variablen heißt **geschlossen**.

Beispiel

In $\forall x(P(x) \vee R(x, y)) \Rightarrow Q(x)$ sind die ersten zwei x gebunden, das y und das dritte x sind frei.

Induktion und Rekursion

Entsprechend den Definitionen lassen sich wieder über die Struktur der Terme und der Formeln

- induktive Beweis führen und
- Funktionen rekursiv definieren.

Anmerkung

Manchmal muss eine Aussage zunächst für die Terme, dann für die Formeln gezeigt werden!

Zusammenfassung zur Syntax

Zusammenfassung der **Syntax**

- Alphabet
  - Variablen und Konstanten
  - Funktions-, Prädikaten- und Aussagensymbole
  - Junktoren, Quantoren, Klammern, Komma
  - Stelligkeit
- Terme
- Formeln
- Teilterm, Teilformel
- Quantorenvariable, Skopus
- gebunden, frei, geschlossen
- (strukturelle Rekursion, strukturelle Induktion)

Fragen

Sei

$$F = \forall x((P(a) \Rightarrow P(u)) \land \exists x(P(a) \Rightarrow P(x)))$$

An welchen Quantor ist das x in $P(x)$ gebunden?

1. Den ersten
2. Den zweiten
3. x ist frei
4. F ist keine Formel
5. Was heißt nochmal gebunden?

Fragen

Sei

$$F = \forall x(A \vee P(a)) \Rightarrow (\exists x P(b) \wedge (P(x) \vee \forall x P(u)))$$

An welchen Quantor ist das x in $P(x)$ gebunden?

1. Den ersten
2. Den zweiten
3. Den dritten
4. x ist frei
5. F ist keine Formel

Zur Nachbereitung

Zur Nachbereitung

1. 2.
2. 4.

Informale Semantik

Die Idee bei der Semantik ist, die benutzten Symbole durch Elemente einer Grundmenge (z.B. Zahlen) zu interpretieren:

- freie Variablen und Konstanten durch Objekte der Grundmenge
- Funktionssymbole durch Funktionen über der Grundmenge
- Prädikatensymble durch Mengen über der Grundmenge
- Aussagensymbole durch Wahrheitswerte
- komplexe Ausdrücke auf obigem aufbauend ...

Wahrheitswerte ergeben sich dann durch diese Interpretation ...

Informale Semantik

Die Idee bei der Semantik ist, die benutzten Symbole durch Elemente einer Grundmenge (z.B. Zahlen) zu interpretieren:

- freie Variablen und Konstanten durch Objekte der Grundmenge
- Funktionssymbole durch Funktionen über der Grundmenge
- Prädikatensymble durch Mengen über der Grundmenge
- Aussagensymbole durch Wahrheitswerte
- komplexe Ausdrücke auf obigem aufbauend ...

Wahrheitswerte ergeben sich dann durch diese Interpretation ...

Informale Semantik

Die Idee bei der Semantik ist, die benutzten Symbole durch Elemente einer Grundmenge (z.B. Zahlen) zu interpretieren:

- freie Variablen und Konstanten durch Objekte der Grundmenge
- Funktionssymbole durch Funktionen über der Grundmenge
- Prädikatensymble durch Mengen über der Grundmenge
- Aussagensymbole durch Wahrheitswerte
- komplexe Ausdrücke auf obigem aufbauend ...

Wahrheitswerte ergeben sich dann durch diese Interpretation ...

Informale Semantik

Die Idee bei der Semantik ist, die benutzten Symbole durch Elemente einer Grundmenge (z.B. Zahlen) zu interpretieren:

- freie Variablen und Konstanten durch Objekte der Grundmenge
- Funktionssymbole durch Funktionen über der Grundmenge
- Prädikatensymble durch Mengen über der Grundmenge
- Aussagensymbole durch Wahrheitswerte
- komplexe Ausdrücke auf obigem aufbauend ...

Wahrheitswerte ergeben sich dann durch diese Interpretation ...

Informale Semantik

Die Idee bei der Semantik ist, die benutzten Symbole durch Elemente einer Grundmenge (z.B. Zahlen) zu interpretieren:

- freie Variablen und Konstanten durch Objekte der Grundmenge
- Funktionssymbole durch Funktionen über der Grundmenge
- Prädikatensymble durch Mengen über der Grundmenge
- Aussagensymbole durch Wahrheitswerte
- komplexe Ausdrücke auf obigem aufbauend ...

Wahrheitswerte ergeben sich dann durch diese Interpretation ...

Informale Semantik

Die Idee bei der Semantik ist, die benutzten Symbole durch Elemente einer Grundmenge (z.B. Zahlen) zu interpretieren:

- freie Variablen und Konstanten durch Objekte der Grundmenge
- Funktionssymbole durch Funktionen über der Grundmenge
- Prädikatensymble durch Mengen über der Grundmenge
- Aussagensymbole durch Wahrheitswerte
- komplexe Ausdrücke auf obigem aufbauend ...

Wahrheitswerte ergeben sich dann durch diese Interpretation ...

Informale Semantik

Die Idee bei der Semantik ist, die benutzten Symbole durch Elemente einer Grundmenge (z.B. Zahlen) zu interpretieren:

- freie Variablen und Konstanten durch Objekte der Grundmenge
- Funktionssymbole durch Funktionen über der Grundmenge
- Prädikatensymble durch Mengen über der Grundmenge
- Aussagensymbole durch Wahrheitswerte
- komplexe Ausdrücke auf obigem aufbauend ...

Wahrheitswerte ergeben sich dann durch diese Interpretation ...

Strukturen

Definition (Struktur)

Eine **Struktur** ist ein Tupel $\mathcal{A} = (U, I)$ mit

- dem Universum U (auch Grundmenge oder Domäne) eine beliebige nicht-leere Menge und
- der Interpretation I, die eine Abbildung ist und
  - Variablen und Konstanten auf Elemente aus U abbildet,
  - k-stellige Funktionssymbole auf k-stellige Funktionen über U
  - k-stellige Prädikatensymbole auf Mengen von k-Tupeln über U und
  - Aussagensymbole auf Wahrheitswerte.

Anmerkung

Die Struktur übernimmt in der Prädikatenlogik die Rolle der Belegung in der Aussagenlogik.

Strukturen

Definition (Struktur)

Eine **Struktur** ist ein Tupel $\mathcal{A} = (U, I)$ mit

- dem Universum U (auch Grundmenge oder Domäne) eine beliebige nicht-leere Menge und
- der Interpretation I, die eine Abbildung ist und
  - Variablen und Konstanten auf Elemente aus U abbildet,
  - k-stellige Funktionssymbole auf k-stellige Funktionen über U
  - k-stellige Prädikatensymbole auf Mengen von k-Tupeln über U und
  - Aussagensymbole auf Wahrheitswerte.

Anmerkung

Die Struktur übernimmt in der Prädikatenlogik die Rolle der Belegung in der Aussagenlogik.

Strukturen

Definition (Struktur)

Eine **Struktur** ist ein Tupel $\mathcal{A} = (U, I)$ mit

- dem Universum U (auch Grundmenge oder Domäne) eine beliebige nicht-leere Menge und
- der Interpretation I, die eine Abbildung ist und
  - Variablen und Konstanten auf Elemente aus U abbildet,
  - k-stellige Funktionssymbole auf k-stellige Funktionen über U
  - k-stellige Prädikatensymbole auf Mengen von k-Tupeln über U und
  - Aussagensymbole auf Wahrheitswerte.

Anmerkung

Die Struktur übernimmt in der Prädikatenlogik die Rolle der Belegung in der Aussagenlogik.

Strukturen

Definition (Struktur)

Eine **Struktur** ist ein Tupel $\mathcal{A} = (U, I)$ mit

- dem Universum U (auch Grundmenge oder Domäne) eine beliebige nicht-leere Menge und
- der Interpretation I, die eine Abbildung ist und
  - Variablen und Konstanten auf Elemente aus U abbildet,
  - k-stellige Funktionssymbole auf k-stellige Funktionen über U
  - k-stellige Prädikatensymbole auf Mengen von k-Tupeln über U und
  - Aussagensymbole auf Wahrheitswerte.

Anmerkung

Die Struktur übernimmt in der Prädikatenlogik die Rolle der Belegung in der Aussagenlogik.

Strukturen

Definition (Struktur)

Eine **Struktur** ist ein Tupel $\mathcal{A} = (U, I)$ mit

- dem Universum U (auch Grundmenge oder Domäne) eine beliebige nicht-leere Menge und
- der Interpretation I, die eine Abbildung ist und
  - Variablen und Konstanten auf Elemente aus U abbildet,
  - k-stellige Funktionssymbole auf k-stellige Funktionen über U
  - k-stellige Prädikatensymbole auf Mengen von k-Tupeln über U und
  - Aussagensymbole auf Wahrheitswerte.

Anmerkung

Die Struktur übernimmt in der Prädikatenlogik die Rolle der Belegung in der Aussagenlogik.

Strukturen

Definition (Struktur)

Eine **Struktur** ist ein Tupel $\mathcal{A} = (U, I)$ mit

- dem Universum U (auch Grundmenge oder Domäne) eine beliebige nicht-leere Menge und
- der Interpretation I, die eine Abbildung ist und
  - Variablen und Konstanten auf Elemente aus U abbildet,
  - k-stellige Funktionssymbole auf k-stellige Funktionen über U
  - k-stellige Prädikatensymbole auf Mengen von k-Tupeln über U und
  - Aussagensymbole auf Wahrheitswerte.

Anmerkung

Die Struktur übernimmt in der Prädikatenlogik die Rolle der Belegung in der Aussagenlogik.

Strukturen

Definition (Struktur)

Eine **Struktur** ist ein Tupel $\mathcal{A} = (U, I)$ mit

- dem Universum U (auch Grundmenge oder Domäne) eine beliebige nicht-leere Menge und
- der Interpretation I, die eine Abbildung ist und
  - Variablen und Konstanten auf Elemente aus U abbildet,
  - k-stellige Funktionssymbole auf k-stellige Funktionen über U
  - k-stellige Prädikatensymbole auf Mengen von k-Tupeln über U und
  - Aussagensymbole auf Wahrheitswerte.

Anmerkung

Die Struktur übernimmt in der Prädikatenlogik die Rolle der Belegung in der Aussagenlogik.

Struktur - Beispiel

Beispiel

Haben wir z.B.

$$\forall x P(g(x)) \vee Q(f(x,y),x)$$

So könnten wir z.B. nehmen:

- $U = \mathbb{N}$
- $I(g) = g'$ wobei $g' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g'(n) = n + 1$
- $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f'(n,m) = n + m$
- $I(P) = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \subseteq U$
- $I(Q) = \{(x,y) \mid x < y\} \subseteq U \times U$
- $I(y) = 5 \in U$
- $I(x) = 3 \in U$

Struktur - Beispiel

Beispiel

Haben wir z.B.

$$\forall x P(g(x)) \lor Q(f(x,y),x)$$

So könnten wir z.B. nehmen:

- $U = \mathbb{N}$
- $I(g) = g'$ wobei $g' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g'(n) = n + 1$
- $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f'(n,m) = n + m$
- $I(P) = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \subseteq U$
- $I(Q) = \{(x,y) \mid x < y\} \subseteq U \times U$
- $I(y) = 5 \in U$
- $I(x) = 3 \in U$

Struktur - Beispiel

Beispiel

Haben wir z.B.

$$\forall x P(g(x)) \lor Q(f(x,y),x)$$

So könnten wir z.B. nehmen:

- $U = \mathbb{N}$
- $I(g) = g'$ wobei $g' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g'(n) = n + 1$
- $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f'(n,m) = n + m$
- $I(P) = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \subseteq U$
- $I(Q) = \{(x,y) \mid x < y\} \subseteq U \times U$
- $I(y) = 5 \in U$
- $I(x) = 3 \in U$

Struktur - Beispiel

Beispiel

Haben wir z.B.

$$\forall x P(g(x)) \vee Q(f(x,y),x)$$

So könnten wir z.B. nehmen:

- $U = \mathbb{N}$
- $I(g) = g'$ wobei $g' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g'(n) = n + 1$
- $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f'(n,m) = n + m$
- $I(P) = \{2,4,6,8,\dots\} \subseteq U$
- $I(Q) = \{(x,y) \mid x < y\} \subseteq U \times U$
- $I(y) = 5 \in U$
- $I(x) = 3 \in U$

Struktur - Beispiel

Beispiel

Haben wir z.B.

$$\forall x P(g(x)) \vee Q(f(x,y),x)$$

So könnten wir z.B. nehmen:

- $U = \mathbb{N}$
- $I(g) = g'$ wobei $g' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g'(n) = n + 1$
- $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f'(n,m) = n + m$
- $I(P) = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \subseteq U$
- $I(Q) = \{(x,y) \mid x < y\} \subseteq U \times U$
- $I(y) = 5 \in U$
- $I(x) = 3 \in U$

Struktur - Beispiel

Beispiel

Haben wir z.B.

$$\forall x P(g(x)) \vee Q(f(x,y),x)$$

So könnten wir z.B. nehmen:

- $U = \mathbb{N}$
- $I(g) = g'$ wobei $g' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g'(n) = n+1$
- $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f'(n,m) = n+m$
- $I(P) = \{2,4,6,8,\ldots\} \subseteq U$
- $I(Q) = \{(x,y) \mid x < y\} \subseteq U \times U$
- $I(y) = 5 \in U$
- $I(x) = 3 \in U$

Struktur - Beispiel

Beispiel

Haben wir z.B.

$$\forall x P(g(x)) \vee Q(f(x,y),x)$$

So könnten wir z.B. nehmen:

- $U = \mathbb{N}$
- $I(g) = g'$ wobei $g' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g'(n) = n + 1$
- $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f'(n,m) = n + m$
- $I(P) = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \subseteq U$
- $I(Q) = \{(x,y) \mid x < y\} \subseteq U \times U$
- $I(y) = 5 \in U$
- $I(x) = 3 \in U$

Struktur - Beispiel

Beispiel

Haben wir z.B.

$$\forall x P(g(x)) \vee Q(f(x,y),x)$$

So könnten wir z.B. nehmen:

- $U = \mathbb{N}$
- $I(g) = g'$ wobei $g' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g'(n) = n + 1$
- $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f'(n,m) = n + m$
- $I(P) = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \subseteq U$
- $I(Q) = \{(x,y) \mid x < y\} \subseteq U \times U$
- $I(y) = 5 \in U$
- $I(x) = 3 \in U$

Struktur - Beispiel

Anmerkung

Die Struktur sagt noch nichts über den Wahrheitswert einer Formel aus! (Abgesehen von Aussagensymbolen.) Die Belegung in der Aussagenlogik tut dies zunächst auch nicht. Zunächst bildet sie nur Aussagensymbole auf 0 oder 1 ab. Was dann bei $A \vee B$ passiert musste dann nachfolgend definiert werden. Hier müssen wir nun auch weiter definieren...

Auswertung

Definition (Auswertung von Termen und atomaren Formeln)

I wird rekursiv zu einer **Auswertung** fortgesetzt (für die oft auch einfach $\mathcal{A}$ geschrieben wird).

1. Rekursive Definition von $\mathcal{A}$ für Terme:
   - Für jede Variable x ist $\mathcal{A}(x) = I(x)$
   - Für jede Konstante a ist $\mathcal{A}(a) = I(a)$
   - Für k Terme $t_1, \dots, t_k$ und ein k-stelliges Funktionssymbol f ist $\mathcal{A}(f(t_1, \dots, t_k)) = I(f)(\mathcal{A}(t_1), \dots, \mathcal{A}(t_k))$
2. Rekursive Definition von $\mathcal{A}$ für atomare Formeln:
   - Für jedes Aussagensymbol B ist $\mathcal{A}(B) = I(B)$
   - Für k Terme $t_1, \dots, t_k$ und ein k-stelliges Prädikatensymbol P ist

$$\mathcal{A}(P(t_1, \dots, t_k)) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (\mathcal{A}(t_1), \dots, \mathcal{A}(t_k)) \in I(P) \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Auswertung

Definition (Auswertung von Termen und atomaren Formeln)

I wird rekursiv zu einer **Auswertung** fortgesetzt (für die oft auch einfach $\mathcal{A}$ geschrieben wird).

1. Rekursive Definition von $\mathcal{A}$ für Terme:
   - Für jede Variable x ist $\mathcal{A}(x) = I(x)$
   - Für jede Konstante a ist $\mathcal{A}(a) = I(a)$
   - Für k Terme $t_1, \ldots, t_k$ und ein k-stelliges Funktionssymbol f ist $\mathcal{A}(f(t_1, \ldots, t_k)) = I(f)(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k))$
2. Rekursive Definition von $\mathcal{A}$ für atomare Formeln:
   - Für jedes Aussagensymbol B ist $\mathcal{A}(B) = I(B)$
   - Für k Terme $t_1, \ldots, t_k$ und ein k-stelliges Prädikatensymbol P ist

$$\mathcal{A}(P(t_1, \ldots, t_k)) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k)) \in I(P) \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Auswertung

Definition (Auswertung von Termen und atomaren Formeln)

I wird rekursiv zu einer **Auswertung** fortgesetzt (für die oft auch einfach $\mathcal{A}$ geschrieben wird).

1. Rekursive Definition von $\mathcal{A}$ für Terme:
   - Für jede Variable x ist $\mathcal{A}(x) = I(x)$
   - Für jede Konstante a ist $\mathcal{A}(a) = I(a)$
   - Für k Terme $t_1, \ldots, t_k$ und ein k-stelliges Funktionssymbol f ist $\mathcal{A}(f(t_1, \ldots, t_k)) = I(f)(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k))$
2. Rekursive Definition von $\mathcal{A}$ für atomare Formeln:
   - Für jedes Aussagensymbol B ist $\mathcal{A}(B) = I(B)$
   - Für k Terme $t_1, \ldots, t_k$ und ein k-stelliges Prädikatensymbol P ist

$$\mathcal{A}(P(t_1, \ldots, t_k)) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k)) \in I(P) \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Auswertung

Definition (Auswertung von Termen und atomaren Formeln)

I wird rekursiv zu einer **Auswertung** fortgesetzt (für die oft auch einfach $\mathcal{A}$ geschrieben wird).

1. Rekursive Definition von $\mathcal{A}$ für Terme:
   - Für jede Variable x ist $\mathcal{A}(x) = I(x)$
   - Für jede Konstante a ist $\mathcal{A}(a) = I(a)$
   - Für k Terme $t_1, \ldots, t_k$ und ein k-stelliges Funktionssymbol f ist $\mathcal{A}(f(t_1, \ldots, t_k)) = I(f)(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k))$
2. Rekursive Definition von $\mathcal{A}$ für atomare Formeln:
   - Für jedes Aussagensymbol B ist $\mathcal{A}(B) = I(B)$
   - Für k Terme $t_1, \ldots, t_k$ und ein k-stelliges Prädikatensymbol P ist

$$\mathcal{A}(P(t_1, \ldots, t_k)) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k)) \in I(P) \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Auswertung

Definition (Auswertung von Termen und atomaren Formeln)

I wird rekursiv zu einer **Auswertung** fortgesetzt (für die oft auch einfach $\mathcal{A}$ geschrieben wird).

1. Rekursive Definition von $\mathcal{A}$ für Terme:
    - Für jede Variable x ist $\mathcal{A}(x) = I(x)$
    - Für jede Konstante a ist $\mathcal{A}(a) = I(a)$
    - Für k Terme $t_1, \ldots, t_k$ und ein k-stelliges Funktionssymbol f ist $\mathcal{A}(f(t_1, \ldots, t_k)) = I(f)(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k))$
2. Rekursive Definition von $\mathcal{A}$ für atomare Formeln:
    - Für jedes Aussagensymbol B ist $\mathcal{A}(B) = I(B)$
    - Für k Terme $t_1, \ldots, t_k$ und ein k-stelliges Prädikatensymbol P ist

$$\mathcal{A}(P(t_1, \ldots, t_k)) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k)) \in I(P) \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Auswertung

Definition (Auswertung von Termen und atomaren Formeln)

I wird rekursiv zu einer **Auswertung** fortgesetzt (für die oft auch einfach $\mathcal{A}$ geschrieben wird).

1. Rekursive Definition von $\mathcal{A}$ für Terme:
   - Für jede Variable x ist $\mathcal{A}(x) = I(x)$
   - Für jede Konstante a ist $\mathcal{A}(a) = I(a)$
   - Für k Terme $t_1, \dots, t_k$ und ein k-stelliges Funktionssymbol f ist $\mathcal{A}(f(t_1, \dots, t_k)) = I(f)(\mathcal{A}(t_1), \dots, \mathcal{A}(t_k))$
2. Rekursive Definition von $\mathcal{A}$ für atomare Formeln:
   - Für jedes Aussagensymbol B ist $\mathcal{A}(B) = I(B)$
   - Für k Terme $t_1, \dots, t_k$ und ein k-stelliges Prädikatensymbol P ist

$$\mathcal{A}(P(t_1, \dots, t_k)) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (\mathcal{A}(t_1), \dots, \mathcal{A}(t_k)) \in I(P) \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Auswertung

Definition (Auswertung von Termen und atomaren Formeln)

I wird rekursiv zu einer **Auswertung** fortgesetzt (für die oft auch einfach $\mathcal{A}$ geschrieben wird).

1. Rekursive Definition von $\mathcal{A}$ für Terme:
   - Für jede Variable x ist $\mathcal{A}(x) = I(x)$
   - Für jede Konstante a ist $\mathcal{A}(a) = I(a)$
   - Für k Terme $t_1, \ldots, t_k$ und ein k-stelliges Funktionssymbol f ist $\mathcal{A}(f(t_1, \ldots, t_k)) = I(f)(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k))$
2. Rekursive Definition von $\mathcal{A}$ für atomare Formeln:
   - Für jedes Aussagensymbol B ist $\mathcal{A}(B) = I(B)$
   - Für k Terme $t_1, \ldots, t_k$ und ein k-stelliges Prädikatensymbol P ist

$$\mathcal{A}(P(t_1, \ldots, t_k)) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k)) \in I(P) \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Auswertung

Definition (Auswertung von Termen und atomaren Formeln)

I wird rekursiv zu einer **Auswertung** fortgesetzt (für die oft auch einfach $\mathcal{A}$ geschrieben wird).

1. Rekursive Definition von $\mathcal{A}$ für Terme:
   - Für jede Variable x ist $\mathcal{A}(x) = I(x)$
   - Für jede Konstante a ist $\mathcal{A}(a) = I(a)$
   - Für k Terme $t_1, \ldots, t_k$ und ein k-stelliges Funktionssymbol f ist $\mathcal{A}(f(t_1, \ldots, t_k)) = I(f)(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k))$
2. Rekursive Definition von $\mathcal{A}$ für atomare Formeln:
   - Für jedes Aussagensymbol B ist $\mathcal{A}(B) = I(B)$
   - Für k Terme $t_1, \ldots, t_k$ und ein k-stelliges Prädikatensymbol P ist

$$\mathcal{A}(P(t_1, \ldots, t_k)) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k)) \in I(P) \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Auswertung - Beispiel

Beispiel

Ist $F = P(a, f(a))$ und $\mathcal{A} = (U, I)$ mit $U = \mathbb{N}$ und I mit $I(a) = 4$ $I(P) = \{(x, y) \mid x, y \text{ sind gerade}\}$ und $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f'(n) = 2 \cdot n$, dann ist:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{A}(P(a, f(a))) = 1 \\
gdw. \quad & (\mathcal{A}(a), \mathcal{A}(f(a))) \in I(P) \\
gdw. \quad & (4, I(f)(\mathcal{A}(a))) \in I(P) \\
gdw. \quad & (4, f'(4)) \in I(P) \\
gdw. \quad & (4, 8) \in I(P)
\end{aligned}
$$

Da $(4, 8) \in I(P)$ gilt, ist $\mathcal{A}$ eine erfüllende Struktur.

Auswertung - Beispiel

Beispiel

Ist $F = P(a, f(a))$ und $\mathcal{A} = (U, I)$ mit $U = \mathbb{N}$ und I mit $I(a) = 4$ $I(P) = \{(x, y) \mid x, y \text{ sind gerade}\}$ und $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f'(n) = 2 \cdot n$, dann ist:

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(P(a, f(a))) = 1 \\ gdw. \quad & (\mathcal{A}(a), \mathcal{A}(f(a))) \in I(P) \\ gdw. \quad & (4, I(f)(\mathcal{A}(a))) \in I(P) \\ gdw. \quad & (4, f'(4)) \in I(P) \\ gdw. \quad & (4, 8) \in I(P) \end{aligned}$$

Da $(4, 8) \in I(P)$ gilt, ist $\mathcal{A}$ eine erfüllende Struktur.

Auswertung - Beispiel

Beispiel

Ist $F = P(a, f(a))$ und $\mathcal{A} = (U, I)$ mit $U = \mathbb{N}$ und I mit $I(a) = 4$ $I(P) = \{(x, y) \mid x, y \text{ sind gerade}\}$ und $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f'(n) = 2 \cdot n$, dann ist:

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{A}(P(a, f(a))) = 1 \\ gdw. & (\mathcal{A}(a), \mathcal{A}(f(a))) \in I(P) \\ gdw. & (4, I(f)(\mathcal{A}(a))) \in I(P) \\ gdw. & (4, f'(4)) \in I(P) \\ gdw. & (4, 8) \in I(P) \end{array}$$

Da $(4, 8) \in I(P)$ gilt, ist $\mathcal{A}$ eine erfüllende Struktur.

Auswertung - Beispiel

Beispiel

Ist $F = P(a, f(a))$ und $\mathcal{A} = (U, I)$ mit $U = \mathbb{N}$ und I mit $I(a) = 4$ $I(P) = \{(x, y) \mid x, y \text{ sind gerade}\}$ und $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f'(n) = 2 \cdot n$, dann ist:

$$
\begin{array}{rl}
 & \mathcal{A}(P(a, f(a))) = 1 \\
gdw. & (\mathcal{A}(a), \mathcal{A}(f(a))) \in I(P) \\
gdw. & (4, I(f)(\mathcal{A}(a))) \in I(P) \\
gdw. & (4, f'(4)) \in I(P) \\
gdw. & (4, 8) \in I(P)
\end{array}
$$

Da $(4, 8) \in I(P)$ gilt, ist $\mathcal{A}$ eine erfüllende Struktur.

Auswertung - Beispiel

Beispiel

Ist $F = P(a, f(a))$ und $\mathcal{A} = (U, I)$ mit $U = \mathbb{N}$ und I mit $I(a) = 4$ $I(P) = \{(x, y) \mid x, y \text{ sind gerade}\}$ und $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f'(n) = 2 \cdot n$, dann ist:

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(P(a, f(a))) = 1 \\ gdw. \quad & (\mathcal{A}(a), \mathcal{A}(f(a))) \in I(P) \\ gdw. \quad & (4, I(f)(\mathcal{A}(a))) \in I(P) \\ gdw. \quad & (4, f'(4)) \in I(P) \\ gdw. \quad & (4, 8) \in I(P) \end{aligned}$$

Da $(4, 8) \in I(P)$ gilt, ist $\mathcal{A}$ eine erfüllende Struktur.

Auswertung - Beispiel

Beispiel

Ist $F = P(a, f(a))$ und $\mathcal{A} = (U, I)$ mit $U = \mathbb{N}$ und I mit $I(a) = 4$ $I(P) = \{(x, y) \mid x, y \text{ sind gerade}\}$ und $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f'(n) = 2 \cdot n$, dann ist:

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathcal{A}(P(a, f(a))) = 1 \\
gdw. & (\mathcal{A}(a), \mathcal{A}(f(a))) \in I(P) \\
gdw. & (4, I(f)(\mathcal{A}(a))) \in I(P) \\
gdw. & (4, f'(4)) \in I(P) \\
gdw. & (4, 8) \in I(P)
\end{array}
$$

Da $(4, 8) \in I(P)$ gilt, ist $\mathcal{A}$ eine erfüllende Struktur.

Auswertung - Beispiel

Beispiel

Ist $F = P(a, f(a))$ und $\mathcal{A} = (U, I)$ mit $U = \mathbb{N}$ und I mit $I(a) = 4$ $I(P) = \{(x, y) \mid x, y \text{ sind gerade}\}$ und $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f'(n) = 2 \cdot n$, dann ist:

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{A}(P(a, f(a))) = 1 \\ gdw. & (\mathcal{A}(a), \mathcal{A}(f(a))) \in I(P) \\ gdw. & (4, I(f)(\mathcal{A}(a))) \in I(P) \\ gdw. & (4, f'(4)) \in I(P) \\ gdw. & (4, 8) \in I(P) \end{array}$$

Da $(4, 8) \in I(P)$ gilt, ist $\mathcal{A}$ eine erfüllende Struktur.

Auswertung - Beispiel

Beispiel

Ist $F = P(a, f(a))$ und $\mathcal{A} = (U, I)$ mit $U = \mathbb{N}$ und I mit $I(a) = 4$ $I(P) = \{(x, y) \mid x, y \text{ sind gerade}\}$ und $I(f) = f'$ wobei $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f'(n) = 2 \cdot n$, dann ist:

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathcal{A}(P(a, f(a))) = 1 \\
gdw. & (\mathcal{A}(a), \mathcal{A}(f(a))) \in I(P) \\
gdw. & (4, I(f)(\mathcal{A}(a))) \in I(P) \\
gdw. & (4, f'(4)) \in I(P) \\
gdw. & (4, 8) \in I(P)
\end{array}
$$

Da $(4, 8) \in I(P)$ gilt, ist $\mathcal{A}$ eine erfüllende Struktur.

Auswertung

Definition (Auswertung komplexer Formeln ohne Quantoren)

I (bzw. $\mathcal{A}$) wird weiter rekursiv zu einer **Auswertung** fortgesetzt.
Die Junktoren werden dabei wie in der Aussagenlogik behandelt:
Für alle Formeln F und G und Strukturen $\mathcal{A}$ ist:

- $\mathcal{A}(\neg F) = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{A}(F) = 0$
- $\mathcal{A}((F \vee G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$ oder $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \wedge G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \Rightarrow G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 0$ oder $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \Leftrightarrow G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$

Auswertung

Definition (Auswertung komplexer Formeln ohne Quantoren)

I (bzw. $\mathcal{A}$) wird weiter rekursiv zu einer **Auswertung** fortgesetzt.
Die Junktoren werden dabei wie in der Aussagenlogik behandelt:
Für alle Formeln F und G und Strukturen $\mathcal{A}$ ist:

- $\mathcal{A}(\neg F) = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{A}(F) = 0$
- $\mathcal{A}((F \vee G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$ oder $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \wedge G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \Rightarrow G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = 0$ oder $\mathcal{A}(G) = 1$
- $\mathcal{A}((F \Leftrightarrow G)) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$

Auswertung - Beispiel

Beispiel

Ist $F = P(a, f(a)) \wedge P(f(a), a)$ und $\mathcal{A} = (U, I)$ wie vorhin, dann ist

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(P(a, f(a)) \wedge P(f(a), a)) = 1 \\ gdw. \quad & (\mathcal{A}(a), \mathcal{A}(f(a))) \in I(P) \text{ und} \\ & (\mathcal{A}(f(a)), \mathcal{A}(a)) \in I(P) \\ gdw. \quad & \ldots \text{ wie im vorherigen Beispiel} \\ gdw. \quad & (4, 8) \in I(P) \text{ und } (8, 4) \in I(P) \end{aligned}$$

Auswertung - Beispiel

Beispiel

Ist $F = P(a, f(a)) \wedge P(f(a), a)$ und $\mathcal{A} = (U, I)$ wie vorhin, dann ist

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{A}(P(a, f(a)) \wedge P(f(a), a)) = 1 \\ \textit{gdw.} & (\mathcal{A}(a), \mathcal{A}(f(a))) \in I(P) \text{ und} \\ & (\mathcal{A}(f(a)), \mathcal{A}(a)) \in I(P) \\ \textit{gdw.} & \ldots \text{ wie im vorherigen Beispiel} \\ \textit{gdw.} & (4, 8) \in I(P) \text{ und } (8, 4) \in I(P) \end{array}$$

Semantik - Zwischenstand

Bis hierhin können wir

1. Formeln notieren (Syntax)
2. Eine Struktur zu einer Formel F definieren
   - Universum wählen
   - Für jede Konstante, (freie) Variable, jedes Aussagensymbol und jedes k-stellige Funktionssymbol und m-stelliges Prädikatensymol, die in F auftreten, die Interpretation festlegen.
   - Auswerten, ob dies die Formel F wahr oder falsch macht
3. Wir können noch nicht mit Quantoren umgehen!

Semantik - Zwischenstand

Bis hierhin können wir

1. Formeln notieren (Syntax)
2. Eine Struktur zu einer Formel F definieren
   - Universum wählen
   - Für jede Konstante, (freie) Variable, jedes Aussagensymbol und jedes k-stellige Funktionssymbol und m-stelliges Prädikatensymol, die in F auftreten, die Interpretation festlegen.
   - Auswerten, ob dies die Formel F wahr oder falsch macht
3. Wir können noch nicht mit Quantoren umgehen!

Mit dem bisherigen können wir auch erst eine gegebene Formel Schritt für Schritt anhand der Definitionen auswerten und dann am Ende die Struktur festlegen

Semantik - Zwischenstand

Bis hierhin können wir

1. Formeln notieren (Syntax)
2. Eine Struktur zu einer Formel F definieren
   - Universum wählen
   - Für jede Konstante, (freie) Variable, jedes Aussagensymbol und jedes k-stellige Funktionssymbol und m-stelliges Prädikatensymol, die in F auftreten, die Interpretation festlegen.
   - Auswerten, ob dies die Formel F wahr oder falsch macht
3. Wir können noch nicht mit Quantoren umgehen!

Mit dem bisherigen können wir auch erst eine gegebene Formel Schritt für Schritt anhand der Definitionen auswerten und dann am Ende die Struktur festlegen

Auswertung - Beispiel

Wir wollen eine falsifizierende Auswertung für

$$F = P(b) \vee P(f(b))$$

$\mathcal{A}$ soll eine Struktur für F werden.

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{A}(P(b) \vee P(f(b)) = 1 \\ gdw. & \mathcal{A}(b) \in I(P) \text{ oder } \mathcal{A}(f(b))) \in I(P) \\ gdw. & \mathcal{I}(b) \in I(P) \text{ oder } I(f)(I(b)) \in I(P) \end{array}$$

Dies erreichen wir z.B. wenn wir $U = \{1, 2\}$ setzen, $I(b) = 1$, $I(P) = \{2\}$ setzen und $I(f) = f'$ durch $f'(1) = 1, f'(2) = 2$ definieren. Dann haben wir

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{I}(b) \in I(P) \text{ oder } I(f)(I(b)) \in I(P) \\ gdw. & 1 \in \{2\} \text{ oder } f'(1) = 1 \in \{2\} \end{array}$$

Damit ist $\mathcal{A}$ eine falsifizierende Struktur.

Auswertung - Beispiel

Wir wollen eine falsifizierende Auswertung für

$$F = P(b) \vee P(f(b))$$

$\mathcal{A}$ soll eine Struktur für F werden.

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{A}(P(b) \vee P(f(b)) = 1 \\ gdw. & \mathcal{A}(b) \in I(P) \text{ oder } \mathcal{A}(f(b))) \in I(P) \\ gdw. & \mathcal{I}(b) \in I(P) \text{ oder } I(f)(I(b)) \in I(P) \end{array}$$

Dies erreichen wir z.B. wenn wir $U = \{1, 2\}$ setzen, $I(b) = 1$, $I(P) = \{2\}$ setzen und $I(f) = f'$ durch $f'(1) = 1, f'(2) = 2$ definieren. Dann haben wir

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{I}(b) \in I(P) \text{ oder } I(f)(I(b)) \in I(P) \\ gdw. & 1 \in \{2\} \text{ oder } f'(1) = 1 \in \{2\} \end{array}$$

Damit ist $\mathcal{A}$ eine falsifizierende Struktur.

Auswertung - Beispiel

Wir wollen eine falsifizierende Auswertung für

$$F = P(b) \vee P(f(b))$$

$\mathcal{A}$ soll eine Struktur für F werden.

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(P(b) \vee P(f(b)) = 1 \\ gdw. \quad & \mathcal{A}(b) \in I(P) \text{ oder } \mathcal{A}(f(b))) \in I(P) \\ gdw. \quad & \mathcal{I}(b) \in I(P) \text{ oder } I(f)(I(b)) \in I(P) \end{aligned}$$

Dies erreichen wir z.B. wenn wir $U = \{1, 2\}$ setzen, $I(b) = 1$, $I(P) = \{2\}$ setzen und $I(f) = f'$ durch $f'(1) = 1, f'(2) = 2$ definieren. Dann haben wir

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}(b) \in I(P) \text{ oder } I(f)(I(b)) \in I(P) \\ gdw. \quad & 1 \in \{2\} \text{ oder } f'(1) = 1 \in \{2\} \end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{A}$ eine falsifizierende Struktur.

Auswertung - Beispiel

Wir wollen eine falsifizierende Auswertung für

$$F = P(b) \vee P(f(b))$$

$\mathcal{A}$ soll eine Struktur für F werden.

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(P(b) \vee P(f(b)) = 1 \\ gdw. \quad & \mathcal{A}(b) \in I(P) \text{ oder } \mathcal{A}(f(b))) \in I(P) \\ gdw. \quad & \mathcal{I}(b) \in I(P) \text{ oder } I(f)(I(b)) \in I(P) \end{aligned}$$

Dies erreichen wir z.B. wenn wir $U = \{1, 2\}$ setzen, $I(b) = 1$, $I(P) = \{2\}$ setzen und $I(f) = f'$ durch $f'(1) = 1, f'(2) = 2$ definieren. Dann haben wir

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}(b) \in I(P) \text{ oder } I(f)(I(b)) \in I(P) \\ gdw. \quad & 1 \in \{2\} \text{ oder } f'(1) = 1 \in \{2\} \end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{A}$ eine falsifizierende Struktur.

Auswertung - Beispiel

Wir wollen eine falsifizierende Auswertung für

$$F = P(b) \vee P(f(b))$$

$\mathcal{A}$ soll eine Struktur für F werden.

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}(P(b) \vee P(f(b)) = 1 \\
gdw. \quad & \mathcal{A}(b) \in I(P) \text{ oder } \mathcal{A}(f(b))) \in I(P) \\
gdw. \quad & \mathcal{I}(b) \in I(P) \text{ oder } I(f)(I(b)) \in I(P)
\end{aligned}$$

Dies erreichen wir z.B. wenn wir $U = \{1, 2\}$ setzen, $I(b) = 1$, $I(P) = \{2\}$ setzen und $I(f) = f'$ durch $f'(1) = 1, f'(2) = 2$ definieren. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
& \mathcal{I}(b) \in I(P) \text{ oder } I(f)(I(b)) \in I(P) \\
gdw. \quad & 1 \in \{2\} \text{ oder } f'(1) = 1 \in \{2\}
\end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{A}$ eine falsifizierende Struktur.

Auswertung - Anmerkung

Anmerkung

Oft nimmt man für die Funktion, die die Interpretation eines Funktionssymbols f ist, die gleiche Benennung, nennt also auch diese f. D.h. oft definiert man $I(f) = f$. Man sollte dann in Erinnerung behalten, dass das f auf der linken Seite das Funktionssymbol f ist (Syntax), während rechts eine Funktion (mit einer Signatur etc.) steht also z.B. ein $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = n + 1$.

Nun zu den Quantoren ...

Auswertung

Definition (x-Variante von Strukturen)

Sei $\mathcal{A} = (U, I)$ eine Struktur, $d \in U$ und x eine Variable. Mit $\mathcal{A}_{[x/d]} = (U, I_{[x/d]})$ bezeichnen wir die Struktur, die überall komplett mit $\mathcal{A}$ übereinstimmt, außer bei x. Dies wird mit d interpretiert. Es gilt also für alle verfügbaren Symbole τ:

$$\mathcal{A}_{[x/d]}(\tau) = I_{[x/d]}(\tau) = \begin{cases} d & \text{, falls } \tau = x \\ I(\tau) & \text{, sonst} \end{cases}$$

Die Struktur $\mathcal{A}_{[x/d]}$ wird als x-Variante zu $\mathcal{A}$ bezeichnet.

Auswertung

Definition (x-Variante von Strukturen)

Sei $\mathcal{A} = (U, I)$ eine Struktur, $d \in U$ und x eine Variable. Mit $\mathcal{A}_{[x/d]} = (U, I_{[x/d]})$ bezeichnen wir die Struktur, die überall komplett mit $\mathcal{A}$ übereinstimmt, außer bei x. Dies wird mit d interpretiert. Es gilt also für alle verfügbaren Symbole τ:

$$\mathcal{A}_{[x/d]}(\tau) = I_{[x/d]}(\tau) = \begin{cases} d & \text{, falls } \tau = x \\ I(\tau) & \text{, sonst} \end{cases}$$

Die Struktur $\mathcal{A}_{[x/d]}$ wird als x-Variante zu $\mathcal{A}$ bezeichnet.

Auswertung

Definition (x-Variante von Strukturen)

Sei $\mathcal{A} = (U, I)$ eine Struktur, $d \in U$ und x eine Variable. Mit $\mathcal{A}_{[x/d]} = (U, I_{[x/d]})$ bezeichnen wir die Struktur, die überall komplett mit $\mathcal{A}$ übereinstimmt, außer bei x. Dies wird mit d interpretiert. Es gilt also für alle verfügbaren Symbole τ:

$$\mathcal{A}_{[x/d]}(\tau) = I_{[x/d]}(\tau) = \begin{cases} d & \text{, falls } \tau = x \\ I(\tau) & \text{, sonst} \end{cases}$$

Die Struktur $\mathcal{A}_{[x/d]}$ wird als x-Variante zu $\mathcal{A}$ bezeichnet.

Auswertung

Definition (Auswertung komplexer Formeln mit Quantoren)

Wir schließen die rekursive Fortsetzung von I mit der Betrachtung der Quantoren ab: Für jede Variable x, jede Formel F und jede Struktur $\mathcal{A}$ ist

$$\mathcal{A}(\forall x F) = \begin{cases} 1 & \text{, falls für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\exists x F) = \begin{cases} 1 & \text{, falls es ein } d \in U \text{ gibt mit: } \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Auswertung

Definition (Auswertung komplexer Formeln mit Quantoren)

Wir schließen die rekursive Fortsetzung von I mit der Betrachtung der Quantoren ab: Für jede Variable x, jede Formel F und jede Struktur $\mathcal{A}$ ist

$$\mathcal{A}(\forall x F) = \begin{cases} 1 & \text{, falls für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\exists x F) = \begin{cases} 1 & \text{, falls es ein } d \in U \text{ gibt mit: } \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Anmerkung zu den Quantoren

Wichtige Anmerkung

Bei der Auswertung einer quantifizierten Formel ist der ursprüngliche Wert der Quantorenvariable unerheblich, d.h. für z.B. $\forall x P(x)$ ist der Wert von $I(x)$ nicht erheblich. Dieser muss daher auch gar nicht definiert werden. Bei der Definition der Struktur genügt es also zu Verlangen, dass I die *freien* Variablen auf Elemente aus U abbildet.

Auswertung - Beispiel

Beispiel

Sei $F = \forall x(P(x) \vee Q(a, f(x)))$. Wir suchen eine erfüllende Struktur. Es ist

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathcal{A}(\forall x(P(x) \vee Q(a, f(x)))) = 1 \\
gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(P(x) \vee Q(a, f(x))) = 1 \\
gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(P(x)) = 1 \text{ oder} \\
 & \mathcal{A}_{[x/d]}(Q(a, f(x))) = 1 \\
gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(x) \in I(P) \text{ oder} \\
 & (\mathcal{A}_{[x/d]}(a), \mathcal{A}_{[x/d]}(f(x))) \in I(Q) \\
gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } d \in I(P) \text{ oder} \\
 & (I(a), I(f)(d)) \in I(Q)
\end{array}
$$

Eine erfüllende Struktur ist z.B. durch

Auswertung - Beispiel

Beispiel

Sei $F = \forall x(P(x) \vee Q(a, f(x)))$. Wir suchen eine erfüllende Struktur. Es ist

$$
\begin{array}{ll}
& \mathcal{A}(\forall x(P(x) \vee Q(a, f(x)))) = 1 \\
gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(P(x) \vee Q(a, f(x))) = 1 \\
gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(P(x)) = 1 \text{ oder} \\
& \mathcal{A}_{[x/d]}(Q(a, f(x))) = 1 \\
gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(x) \in I(P) \text{ oder} \\
& (\mathcal{A}_{[x/d]}(a), \mathcal{A}_{[x/d]}(f(x))) \in I(Q) \\
gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } d \in I(P) \text{ oder} \\
& (I(a), I(f)(d)) \in I(Q)
\end{array}
$$

Eine erfüllende Struktur ist z.B. durch

Auswertung - Beispiel

Beispiel

Sei $F = \forall x(P(x) \vee Q(a, f(x)))$. Wir suchen eine erfüllende Struktur. Es ist

$$
\begin{array}{ll}
& \mathcal{A}(\forall x(P(x) \vee Q(a, f(x)))) = 1 \\
gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(P(x) \vee Q(a, f(x))) = 1 \\
gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(P(x)) = 1 \text{ oder} \\
& \mathcal{A}_{[x/d]}(Q(a, f(x))) = 1 \\
gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(x) \in I(P) \text{ oder} \\
& (\mathcal{A}_{[x/d]}(a), \mathcal{A}_{[x/d]}(f(x))) \in I(Q) \\
gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } d \in I(P) \text{ oder} \\
& (I(a), I(f)(d)) \in I(Q)
\end{array}
$$

Eine erfüllende Struktur ist z.B. durch

Auswertung - Beispiel

Beispiel

Sei $F = \forall x(P(x) \vee Q(a, f(x)))$. Wir suchen eine erfüllende Struktur. Es ist

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{A}(\forall x(P(x) \vee Q(a, f(x)))) = 1 \\ gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(P(x) \vee Q(a, f(x))) = 1 \\ gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(P(x)) = 1 \text{ oder} \\ & \mathcal{A}_{[x/d]}(Q(a, f(x))) = 1 \\ gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(x) \in I(P) \text{ oder} \\ & (\mathcal{A}_{[x/d]}(a), \mathcal{A}_{[x/d]}(f(x))) \in I(Q) \\ gdw. & \text{für alle } d \in U \text{ gilt: } d \in I(P) \text{ oder} \\ & (I(a), I(f)(d)) \in I(Q) \end{array}$$

Eine erfüllende Struktur ist z.B. durch $U = \mathbb{N}$ und $I(P) = U$ (Rest beliebig) gegeben (warum?) oder durch $I(a) = 1$, $I(f) = f'$ mit $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $f'(n) = 1$ und $I(Q) = \{(1, 1)\}$ (warum?).

Fragen

Sei $f(a, b, (g(x)))$ ein Term. Was ist die Auswertung dieses Terms (möglichst weit heruntergebrochen)?

1. $I(f)(a, b, g(x))$
2. $I(f(a, b, g(x)))$
3. $I(f)(I(a), I(b), I(g)(I(x)))$
4. $I(f)(I(a), I(b), I(g(x)))$
5. Ein Wahrheitswert 0 oder 1, je nach Struktur
6. Ein Element der Domäne, je nach Struktur

Fragen

Sei $\exists x P(a, f(x)) \Rightarrow P(a, a)$ eine Formel. Wann ist diese wahr?

1. Wenn ein $d \in U$ existiert mit $(I(a), I(f)(d)) \in I(P)$ oder $(I(a), I(a)) \in I(P)$
2. Wenn ein $d \in U$ existiert mit $(I(a), I(f)(d)) \notin I(P)$ oder $(I(a), I(a)) \in I(P)$
3. Wenn kein $d \in U$ existiert mit $(I(a), I(f)(d)) \in I(P)$ oder $(I(a), I(a)) \in I(P)$
4. Wenn kein $d \in U$ existiert mit $(I(a), I(f)(d)) \notin I(P)$ oder $(I(a), I(a)) \in I(P)$

Fragen

Sei $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y G(x,y))$ eine Formel. Wann ist diese wahr?

1. Wenn für alle $d \in U$ gilt, dass wenn $d \in I(P)$ ist, dass dann (d,e) wahr ist in $I(G)$ für ein $e \in U$.
2. Wenn für alle $d \in U$ gilt, dass $d \notin I(P)$ ist oder $(d,e) \in I(G)$ für ein $e \in U$ gilt.
3. Wenn für alle $d \in U$ gilt, dass $d \notin I(P)$ ist oder $(d,e) \in I(G)$ für alle $e \in U$ gilt.
4. Wenn für ein $d \in U$ gilt, dass $d \notin I(P)$ ist oder $(d,e) \in I(G)$ für alle $e \in U$ gilt.

Zur Nachbereitung

Zur Nachbereitung

1. 3. und 6.
2. 3.
3. 2.

Wichtige Anmerkung

Auch wenn die Fragen eben einen anderen Eindruck erwecken, bitte in den Aufgaben/der Klausur immer erstmal alles Schritt für Schritt machen so wie in den Beispielen zuvor.

Analoge Begriffe

Viele Begriffe werden nun analog zur Aussagenlogik definiert:

- Eine Struktur $\mathcal{A}$ heißt **Modell** für F, wenn $\mathcal{A}(F) = 1$ gilt.
- Eine Struktur ist **Modell einer Formelmenge** M, wenn sie alle Formeln in M wahr macht.
- Eine Formel F heißt **erfüllbar**, wenn es eine Struktur $\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}(F) = 1$
- Eine Formel F heißt **falsifizierbar**, wenn es eine Struktur $\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}(F) = 0$
- Die Begriffe (allgemein-)gültig, kontingent, Tautologie, Kontradiktion, Folgerbarkeit und Äquivalenz werden wie in der Aussagenlogik eingeführt. Formulierung wie *alle Strukturen* beinhalten allerdings alle Strukturen mit beliebigen Domänen und Interpretationen!

Analoge Begriffe

Viele Begriffe werden nun analog zur Aussagenlogik definiert:

- Eine Struktur $\mathcal{A}$ heißt **Modell** für F, wenn $\mathcal{A}(F) = 1$ gilt.
- Eine Struktur ist **Modell einer Formelmenge** M, wenn sie alle Formeln in M wahr macht.
- Eine Formel F heißt **erfüllbar**, wenn es eine Struktur $\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}(F) = 1$
- Eine Formel F heißt **falsifizierbar**, wenn es eine Struktur $\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}(F) = 0$
- Die Begriffe (allgemein-)gültig, kontingent, Tautologie, Kontradiktion, Folgerbarkeit und Äquivalenz werden wie in der Aussagenlogik eingeführt. Formulierung wie *alle Strukturen* beinhalten allerdings alle Strukturen mit beliebigen Domänen und Interpretationen!

Analoge Begriffe

Viele Begriffe werden nun analog zur Aussagenlogik definiert:

- Eine Struktur $\mathcal{A}$ heißt **Modell** für F, wenn $\mathcal{A}(F) = 1$ gilt.
- Eine Struktur ist **Modell einer Formelmenge** M, wenn sie alle Formeln in M wahr macht.
- Eine Formel F heißt **erfüllbar**, wenn es eine Struktur $\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}(F) = 1$
- Eine Formel F heißt **falsifizierbar**, wenn es eine Struktur $\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}(F) = 0$
- Die Begriffe (allgemein-)gültig, kontingent, Tautologie, Kontradiktion, Folgerbarkeit und Äquivalenz werden wie in der Aussagenlogik eingeführt. Formulierung wie *alle Strukturen* beinhalten allerdings alle Strukturen mit beliebigen Domänen und Interpretationen!

Analoge Begriffe

Viele Begriffe werden nun analog zur Aussagenlogik definiert:

- Eine Struktur $\mathcal{A}$ heißt **Modell** für F, wenn $\mathcal{A}(F) = 1$ gilt.
- Eine Struktur ist **Modell einer Formelmenge** M, wenn sie alle Formeln in M wahr macht.
- Eine Formel F heißt **erfüllbar**, wenn es eine Struktur $\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}(F) = 1$
- Eine Formel F heißt **falsifizierbar**, wenn es eine Struktur $\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}(F) = 0$
- Die Begriffe (allgemein-)gültig, kontingent, Tautologie, Kontradiktion, Folgerbarkeit und Äquivalenz werden wie in der Aussagenlogik eingeführt. Formulierung wie *alle Strukturen* beinhalten allerdings alle Strukturen mit beliebigen Domänen und Interpretationen!

Analoge Begriffe

Viele Begriffe werden nun analog zur Aussagenlogik definiert:

- Eine Struktur $\mathcal{A}$ heißt **Modell** für F, wenn $\mathcal{A}(F) = 1$ gilt.
- Eine Struktur ist **Modell einer Formelmenge** M, wenn sie alle Formeln in M wahr macht.
- Eine Formel F heißt **erfüllbar**, wenn es eine Struktur $\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}(F) = 1$
- Eine Formel F heißt **falsifizierbar**, wenn es eine Struktur $\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}(F) = 0$
- Die Begriffe (allgemein-)gültig, kontingent, Tautologie, Kontradiktion, Folgerbarkeit und Äquivalenz werden wie in der Aussagenlogik eingeführt. Formulierung wie *alle Strukturen* beinhalten allerdings alle Strukturen mit beliebigen Domänen und Interpretationen!

Analoge Begriffe

Viele Begriffe werden nun analog zur Aussagenlogik definiert:

- Eine Struktur $\mathcal{A}$ heißt **Modell** für F, wenn $\mathcal{A}(F) = 1$ gilt.
- Eine Struktur ist **Modell einer Formelmenge** M, wenn sie alle Formeln in M wahr macht.
- Eine Formel F heißt **erfüllbar**, wenn es eine Struktur $\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}(F) = 1$
- Eine Formel F heißt **falsifizierbar**, wenn es eine Struktur $\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}(F) = 0$
- Die Begriffe (allgemein-)gültig, kontingent, Tautologie, Kontradiktion, Folgerbarkeit und Äquivalenz werden wie in der Aussagenlogik eingeführt. Formulierung wie *alle Strukturen* beinhalten allerdings alle Strukturen mit beliebigen Domänen und Interpretationen!

Beispiel

Mit den Definitionen kann man nun arbeiten und z.B. argumentieren, dass $\forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$ eine Tautologie ist (nächste Folie).

Wichtige Anmerkung

Man beachte, dass man nicht mehr mit Wahrheitstafeln argumentieren kann, da man bereits durch die Auswahl des Universums unendlich viele verschiedene Strukturen erhält.

Beispiel

Beispiel

Es gilt $\models \forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$.

Angenommen $\mathcal{A}$ ist eine Struktur mit $\mathcal{A}(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)) = 0$. Dann ist $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ und $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$. Nun kann $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$ nur gelten, wenn für jedes $d \in U$ $\mathcal{A}_{[y/d]}(P(y)) = 0$, also für jedes $d \in U$ $d \notin I(P)$ gilt. Dafür muss $I(P) = \emptyset$ sein.

Für $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ muss für jedes $e \in U$ $\mathcal{A}_{[x/e]}(P(x)) = 1$ gelten, also muss für jedes $e \in U$ $e \in I(P)$ gelten. Dafür muss $I(P) = U$ sein.

Nach Definition darf U aber nicht leer sein und die Struktur $\mathcal{A}$ kann es nicht geben!

Beispiel

Beispiel

Es gilt $\models \forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$.
Angenommen $\mathcal{A}$ ist eine Struktur mit $\mathcal{A}(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)) = 0$. Dann ist $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ und $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$. Nun kann $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$ nur gelten, wenn für jedes $d \in U$ $\mathcal{A}_{[y/d]}(P(y)) = 0$, also für jedes $d \in U$ $d \notin I(P)$ gilt. Dafür muss $I(P) = \emptyset$ sein.
Für $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ muss für jedes $e \in U$ $\mathcal{A}_{[x/e]}(P(x)) = 1$ gelten, also muss für jedes $e \in U$ $e \in I(P)$ gelten. Dafür muss $I(P) = U$ sein.
Nach Definition darf U aber nicht leer sein und die Struktur $\mathcal{A}$ kann es nicht geben!

Beispiel

Beispiel

Es gilt $\models \forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$.

Angenommen $\mathcal{A}$ ist eine Struktur mit $\mathcal{A}(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)) = 0$. Dann ist $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ und $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$. Nun kann $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$ nur gelten, wenn für jedes $d \in U$ $\mathcal{A}_{[y/d]}(P(y)) = 0$, also für jedes $d \in U$ $d \notin I(P)$ gilt. Dafür muss $I(P) = \emptyset$ sein.

Für $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ muss für jedes $e \in U$ $\mathcal{A}_{[x/e]}(P(x)) = 1$ gelten, also muss für jedes $e \in U$ $e \in I(P)$ gelten. Dafür muss $I(P) = U$ sein.

Nach Definition darf U aber nicht leer sein und die Struktur $\mathcal{A}$ kann es nicht geben!

Beispiel

Beispiel

Es gilt $\models \forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$.
Angenommen $\mathcal{A}$ ist eine Struktur mit $\mathcal{A}(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)) = 0$. Dann ist $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ und $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$. Nun kann $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$ nur gelten, wenn für jedes $d \in U$ $\mathcal{A}_{[y/d]}(P(y)) = 0$, also für jedes $d \in U$ $d \notin I(P)$ gilt. Dafür muss $I(P) = \emptyset$ sein.
Für $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ muss für jedes $e \in U$ $\mathcal{A}_{[x/e]}(P(x)) = 1$ gelten, also muss für jedes $e \in U$ $e \in I(P)$ gelten. Dafür muss $I(P) = U$ sein.
Nach Definition darf U aber nicht leer sein und die Struktur $\mathcal{A}$ kann es nicht geben!

Beispiel

Beispiel

Es gilt $\models \forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$.

Angenommen $\mathcal{A}$ ist eine Struktur mit $\mathcal{A}(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)) = 0$. Dann ist $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ und $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$. Nun kann $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$ nur gelten, wenn für jedes $d \in U$ $\mathcal{A}_{[y/d]}(P(y)) = 0$, also für jedes $d \in U$ $d \notin I(P)$ gilt. Dafür muss $I(P) = \emptyset$ sein.

Für $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ muss für jedes $e \in U$ $\mathcal{A}_{[x/e]}(P(x)) = 1$ gelten, also muss für jedes $e \in U$ $e \in I(P)$ gelten. Dafür muss $I(P) = U$ sein.

Nach Definition darf U aber nicht leer sein und die Struktur $\mathcal{A}$ kann es nicht geben!

Beispiel

Beispiel

Es gilt $\models \forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$.
Angenommen $\mathcal{A}$ ist eine Struktur mit $\mathcal{A}(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)) = 0$. Dann ist $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ und $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$. Nun kann $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$ nur gelten, wenn für jedes $d \in U$ $\mathcal{A}_{[y/d]}(P(y)) = 0$, also für jedes $d \in U$ $d \notin I(P)$ gilt. Dafür muss $I(P) = \emptyset$ sein.
Für $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ muss für jedes $e \in U$ $\mathcal{A}_{[x/e]}(P(x)) = 1$ gelten, also muss für jedes $e \in U$ $e \in I(P)$ gelten. Dafür muss $I(P) = U$ sein.
Nach Definition darf U aber nicht leer sein und die Struktur $\mathcal{A}$ kann es nicht geben!

Beispiel

Beispiel

Es gilt $\models \forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$.
Angenommen $\mathcal{A}$ ist eine Struktur mit $\mathcal{A}(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)) = 0$. Dann ist $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ und $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$. Nun kann $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$ nur gelten, wenn für jedes $d \in U$ $\mathcal{A}_{[y/d]}(P(y)) = 0$, also für jedes $d \in U$ $d \notin I(P)$ gilt. Dafür muss $I(P) = \emptyset$ sein.
Für $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ muss für jedes $e \in U$ $\mathcal{A}_{[x/e]}(P(x)) = 1$ gelten, also muss für jedes $e \in U$ $e \in I(P)$ gelten. Dafür muss $I(P) = U$ sein.
Nach Definition darf U aber nicht leer sein und die Struktur $\mathcal{A}$ kann es nicht geben!

Beispiel

Beispiel

Es gilt $\models \forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$.
Angenommen $\mathcal{A}$ ist eine Struktur mit $\mathcal{A}(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)) = 0$. Dann ist $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ und $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$. Nun kann $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$ nur gelten, wenn für jedes $d \in U$ $\mathcal{A}_{[y/d]}(P(y)) = 0$, also für jedes $d \in U$ $d \notin I(P)$ gilt. Dafür muss $I(P) = \emptyset$ sein.
Für $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ muss für jedes $e \in U$ $\mathcal{A}_{[x/e]}(P(x)) = 1$ gelten, also muss für jedes $e \in U$ $e \in I(P)$ gelten. Dafür muss $I(P) = U$ sein.
Nach Definition darf U aber nicht leer sein und die Struktur $\mathcal{A}$ kann es nicht geben!

Beispiel

Beispiel

Es gilt $\models \forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$.
Angenommen $\mathcal{A}$ ist eine Struktur mit $\mathcal{A}(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)) = 0$. Dann ist $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ und $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$. Nun kann $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$ nur gelten, wenn für jedes $d \in U$ $\mathcal{A}_{[y/d]}(P(y)) = 0$, also für jedes $d \in U$ $d \notin I(P)$ gilt. Dafür muss $I(P) = \emptyset$ sein.
Für $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ muss für jedes $e \in U$ $\mathcal{A}_{[x/e]}(P(x)) = 1$ gelten, also muss für jedes $e \in U$ $e \in I(P)$ gelten. Dafür muss $I(P) = U$ sein.
Nach Definition darf U aber nicht leer sein und die Struktur $\mathcal{A}$ kann es nicht geben!

Beispiel

Beispiel

Es gilt $\models \forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$.
Angenommen $\mathcal{A}$ ist eine Struktur mit $\mathcal{A}(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)) = 0$. Dann ist $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ und $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$. Nun kann $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$ nur gelten, wenn für jedes $d \in U$ $\mathcal{A}_{[y/d]}(P(y)) = 0$, also für jedes $d \in U$ $d \notin I(P)$ gilt. Dafür muss $I(P) = \emptyset$ sein.
Für $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ muss für jedes $e \in U$ $\mathcal{A}_{[x/e]}(P(x)) = 1$ gelten, also muss für jedes $e \in U$ $e \in I(P)$ gelten. Dafür muss $I(P) = U$ sein.
Nach Definition darf U aber nicht leer sein und die Struktur $\mathcal{A}$ kann es nicht geben!

Beispiel

Beispiel

Es gilt $\models \forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$.
Angenommen $\mathcal{A}$ ist eine Struktur mit $\mathcal{A}(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)) = 0$. Dann ist $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ und $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$. Nun kann $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$ nur gelten, wenn für jedes $d \in U$ $\mathcal{A}_{[y/d]}(P(y)) = 0$, also für jedes $d \in U$ $d \notin I(P)$ gilt. Dafür muss $I(P) = \emptyset$ sein.
Für $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ muss für jedes $e \in U$ $\mathcal{A}_{[x/e]}(P(x)) = 1$ gelten, also muss für jedes $e \in U$ $e \in I(P)$ gelten. Dafür muss $I(P) = U$ sein.
Nach Definition darf U aber nicht leer sein und die Struktur $\mathcal{A}$ kann es nicht geben!

Beispiel

Beispiel

Es gilt $\models \forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$.
Angenommen $\mathcal{A}$ ist eine Struktur mit $\mathcal{A}(\forall x P(x) \Rightarrow \exists y P(y)) = 0$. Dann ist $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ und $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$. Nun kann $\mathcal{A}(\exists y P(y)) = 0$ nur gelten, wenn für jedes $d \in U$ $\mathcal{A}_{[y/d]}(P(y)) = 0$, also für jedes $d \in U$ $d \notin I(P)$ gilt. Dafür muss $I(P) = \emptyset$ sein.
Für $\mathcal{A}(\forall x P(x)) = 1$ muss für jedes $e \in U$ $\mathcal{A}_{[x/e]}(P(x)) = 1$ gelten, also muss für jedes $e \in U$ $e \in I(P)$ gelten. Dafür muss $I(P) = U$ sein.
Nach Definition darf U aber nicht leer sein und die Struktur $\mathcal{A}$ kann es nicht geben!

Zusammenfassung

Wir haben heute

- Prädikatenlogische Syntax und
- Prädikatenlogische Semantik

eingeführt.

An der Semantik erkennt man schon, dass dies viel komplizierter ist als bei der Aussagenlogik!

Zusammenfassung zur Syntax

Zusammenfassung der **Syntax**

- Alphabet
  - Variablen und Konstanten
  - Funktions-, Prädikaten- und Aussagensymbole
  - Junktoren, Quantoren, Klammern, Komma
  - Stelligkeit
- Terme
- Formeln
- Teilterm, Teilformel
- Quantorenvariable, Skopus
- gebunden, frei, geschlossen
- (strukturelle Rekursion, strukturelle Induktion)

Zusammenfassung zur Semantik

Zusammenfassung der **Semantik**

- Struktur, Universum, Interpreation
- Auswertung
- x-Variante
- Begriffe wie Modell, erfüllbar, falsifizierbar usw. werden aus der Aussagenlogik übertragen. Die dortige Formulierung "für alle Belegung" wird zu "für alle Strukturen". Man beachte, dass es i.A. unendlich viele Strukturen zu einer Formel gibt.

Ausblick

Wie in der Aussagenlogik werden wir zuerst Syntax & Semantik einüben.

Im Anschluss ist es wieder wichtig für eine gegebene Formel herauszufinden, ob sie erfüllbar ist oder unerfüllbar. Genauso sind wieder Tests daraufhin interessant, ob $F \models G$ gilt, ob $F \equiv G$ usw. Dazu kann man wieder die Resolution benutzen.

Ausblick:

- Normalformen in der Prädikatenlogik (Klauselnormalform)
- Prädikatenlogische Resolution