F2 — Automaten und formale Sprachen

Berndt Farwer

Fachbereich Informatik
AB „Theoretische Grundlagen der Informatik“ (TGI)
Universität Hamburg
farwer@informatik.uni-hamburg.de

Definition: Lineare Grammatik

- Eine kontextfreie Grammatik $G := (V_N, V_T, P, S)$ heißt

Definition: Lineare Grammatik

- Eine kontextfreie Grammatik $G := (V_N, V_T, P, S)$ heißt
  - **linear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_T^* \cdot V_N \cdot V_T^* \cup V_T^*)$,

Definition: Lineare Grammatik

- Eine kontextfreie Grammatik $G := (V_N, V_T, P, S)$ heißt
  - **linear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_T^* \cdot V_N \cdot V_T^* \cup V_T^*)$,
  - **linkslinear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_N \cdot V_T^* \cup V_T^*)$, und

Definition: Lineare Grammatik

- Eine kontextfreie Grammatik $G := (V_N, V_T, P, S)$ heißt
  - **linear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_T^* \cdot V_N \cdot V_T^* \cup V_T^*)$,
  - **linkslinear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_N \cdot V_T^* \cup V_T^*)$, und
  - **rechtslinear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_T^* \cdot V_N \cup V_T^*)$ ist.

Definition: Lineare Grammatik

- Eine kontextfreie Grammatik $G := (V_N, V_T, P, S)$ heißt
  - **linear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_T^* \cdot V_N \cdot V_T^* \cup V_T^*)$,
  - **linkslinear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_N \cdot V_T^* \cup V_T^*)$, und
  - **rechtslinear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_T^* \cdot V_N \cup V_T^*)$ ist.
- Eine CFG wird genau dann **einseitig linear** genannt, wenn sie entweder linkslinear oder rechtslinear ist.

Definition: Lineare Grammatik

- Eine kontextfreie Grammatik $G := (V_N, V_T, P, S)$ heißt
  - **linear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_T^* \cdot V_N \cdot V_T^* \cup V_T^*)$,
  - **linkslinear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_N \cdot V_T^* \cup V_T^*)$, und
  - **rechtslinear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_T^* \cdot V_N \cup V_T^*)$ ist.
- Eine CFG wird genau dann **einseitig linear** genannt, wenn sie entweder linkslinear oder rechtslinear ist.
- **Beispiel:** $S \longrightarrow aSa \mid \lambda$ ist linear.

Definition: Lineare Grammatik

- Eine kontextfreie Grammatik $G := (V_N, V_T, P, S)$ heißt
  - **linear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_T^* \cdot V_N \cdot V_T^* \cup V_T^*)$,
  - **linkslinear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_N \cdot V_T^* \cup V_T^*)$, und
  - **rechtslinear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_T^* \cdot V_N \cup V_T^*)$ ist.
- Eine CFG wird genau dann **einseitig linear** genannt, wenn sie entweder linkslinear oder rechtslinear ist.
- **Beispiel:** $S \longrightarrow aSa \mid \lambda$ ist linear.
- **Beispiel:** $S \longrightarrow aaA \mid aa$ ist rechtslinear.

Definition: Lineare Grammatik

- Eine kontextfreie Grammatik $G := (V_N, V_T, P, S)$ heißt
  - **linear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_T^* \cdot V_N \cdot V_T^* \cup V_T^*)$,
  - **linkslinear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_N \cdot V_T^* \cup V_T^*)$, und
  - **rechtslinear**, falls $P \subseteq V_N \times (V_T^* \cdot V_N \cup V_T^*)$ ist.
- Eine CFG wird genau dann **einseitig linear** genannt, wenn sie entweder linkslinear oder rechtslinear ist.
- **Beispiel:** $S \longrightarrow aSa \mid \lambda$ ist linear.
- **Beispiel:** $S \longrightarrow aaA \mid aa$ ist rechtslinear.
- **Beispiel:** $S \longrightarrow Aaa \mid aa$ ist linkslinear.

Rechtslineare Grammatiken

- **Theorem:** $R \subseteq \Sigma^*$ ist regulär gdw. es eine rechtslineare Grammatik G gibt, mit $L(G) = R$.

Rechtslineare Grammatiken

- **Theorem:** $R \subseteq \Sigma^*$ ist regulär gdw. es eine rechtslineare Grammatik G gibt, mit $L(G) = R$.
- **Beweis $\subseteq$:** Sei $R \in \mathcal{R}eg$ definiert durch einen buchstabierenden NFA $A_1 = (Z, \Sigma, K, \{z_0\}, Z_{\mathsf{end}})$, dann konstruiere eine rechtslineare CFG $G_R := (V_N, V_T, P, S)$:

$$
\begin{aligned}
V_N &:= \{[z] \mid z \in Z\} \\
V_T &:= \Sigma \\
S &:= [z_0] \\
P &:= \{[z] \longrightarrow a[z'] \mid (z, a, z') \in K\} \cup \\
&\quad\ \{[z] \longrightarrow \lambda \mid z \in Z_{\mathsf{end}}\}
\end{aligned}
$$

(etwas einfacher und allgemeiner als im Skript)

Rechtslineare Grammatiken

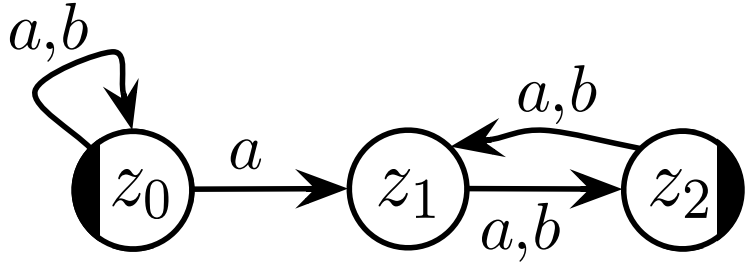
- **Theorem:** $R \subseteq \Sigma^*$ ist regulär gdw. es eine rechtslineare Grammatik G gibt, mit $L(G) = R$.
- **Beweis** $\supseteq$**:** Sei CFG $G := (V_N, V_T, P, S)$ rechtslinear. Wir definieren einen NFA $A_2 := (Z, \Sigma, K, Z_{\mathsf{start}}, Z_{\mathsf{end}})$ durch

$$\begin{aligned} Z &:= \{z_A \mid A \in V_N\} \cup \{z_\lambda\} \\ \Sigma &:= V_T \\ Z_{\mathsf{start}} &:= \{z_S\} \\ Z_{\mathsf{end}} &:= \{z_\lambda\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K := \{(z_Q, u, z_R) \mid Q, R \in V_N \wedge u \in V_T^* \wedge Q \longrightarrow uR \in P\} \\ \cup \{(z_Q, u, z_\lambda) \mid Q \in V_N \wedge u \in V_T^* \wedge Q \longrightarrow u \in P\} \end{aligned}$$

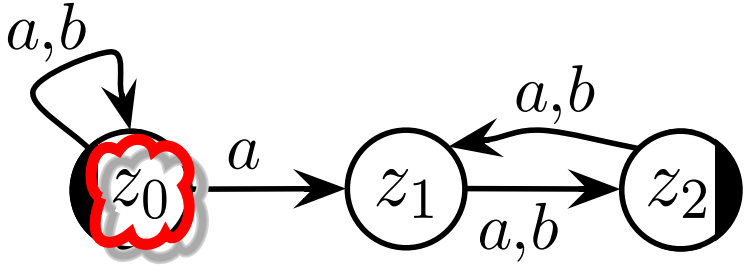
Beispiel: NFA $\longrightarrow$ RLG

- Wir konstruieren zu einem *endlichen Automaten* eine *rechtslineare Grammatik*:



Beispiel: NFA $\longrightarrow$ RLG

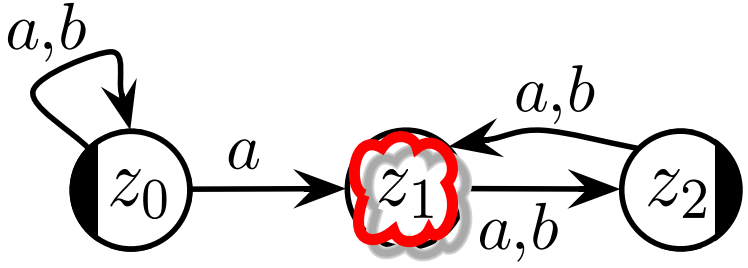
- Wir konstruieren zu einem *endlichen Automaten* eine *rechtslineare Grammatik*:



$$[z_0] \longrightarrow a[z_0] \mid b[z_0] \mid a[z_1]$$

Beispiel: NFA $\longrightarrow$ RLG

- Wir konstruieren zu einem *endlichen Automaten* eine *rechtslineare Grammatik*:

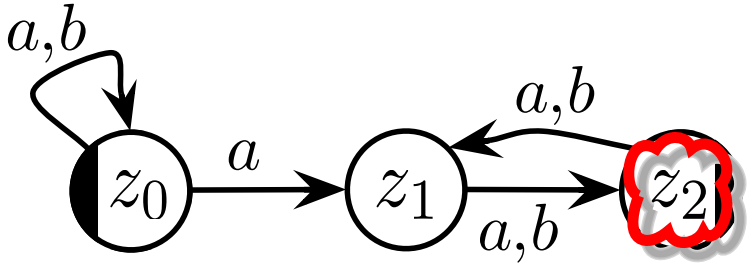


$$[z_0] \longrightarrow a[z_0] \mid b[z_0] \mid a[z_1]$$

$$[z_1] \longrightarrow a[z_2] \mid b[z_2]$$

Beispiel: NFA $\longrightarrow$ RLG

- Wir konstruieren zu einem *endlichen Automaten* eine *rechtslineare Grammatik*:



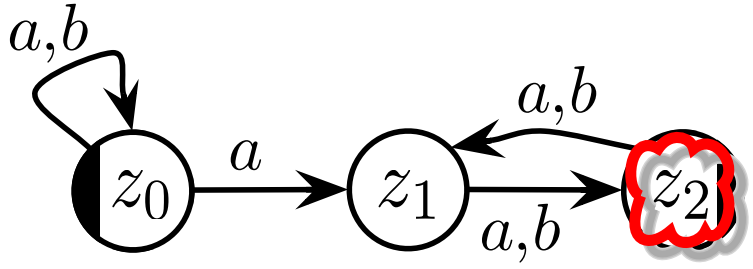
$$[z_0] \longrightarrow a[z_0] \mid b[z_0] \mid a[z_1]$$

$$[z_1] \longrightarrow a[z_2] \mid b[z_2]$$

$$[z_2] \longrightarrow a[z_1] \mid b[z_1] \mid \lambda$$

Beispiel: NFA $\longrightarrow$ RLG

- Wir konstruieren zu einem *endlichen Automaten* eine *rechtslineare Grammatik*:



$$[z_0] \longrightarrow a[z_0] \mid b[z_0] \mid a[z_1]$$

$$[z_1] \longrightarrow a[z_2] \mid b[z_2]$$

$$[z_2] \longrightarrow a[z_1] \mid b[z_1] \mid \lambda$$

$$G = (\{[z_0], [z_1], [z_2]\}, \{a, b\}, P, [z_0])$$

Beispiel: RLG $\longrightarrow$ NFA

- Von einer *rechtslinearen Grammatik* zu einem *NFA*:

$$S \longrightarrow aB \mid bA \mid \lambda$$

$$A \longrightarrow aB \mid c$$

$$B \longrightarrow bA \mid \lambda$$

Beispiel: RLG $\longrightarrow$ NFA

- Von einer *rechtslinearen Grammatik* zu einem *NFA*:

$$S \longrightarrow aB \mid bA \mid \lambda$$

$$A \longrightarrow aB \mid c$$

$$B \longrightarrow bA \mid \lambda$$

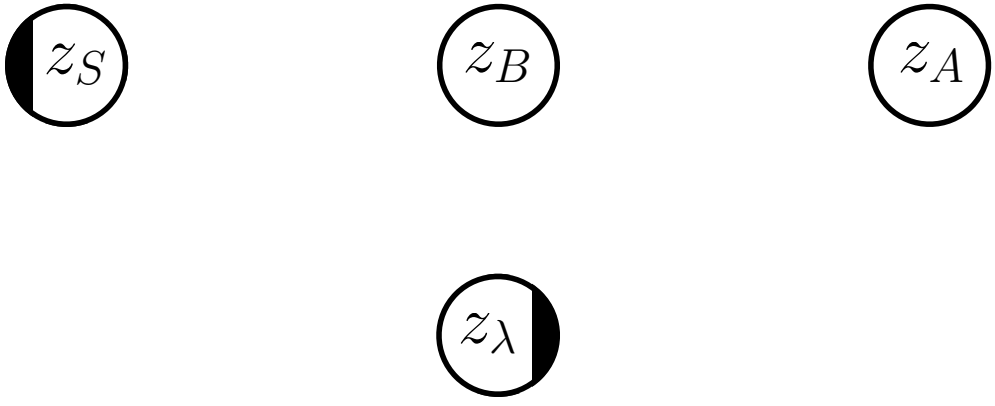
Beispiel: RLG $\longrightarrow$ NFA

- Von einer *rechtslinearen Grammatik* zu einem *NFA*:

$$S \longrightarrow aB \mid bA \mid \lambda$$

$$A \longrightarrow aB \mid c$$

$$B \longrightarrow bA \mid \lambda$$



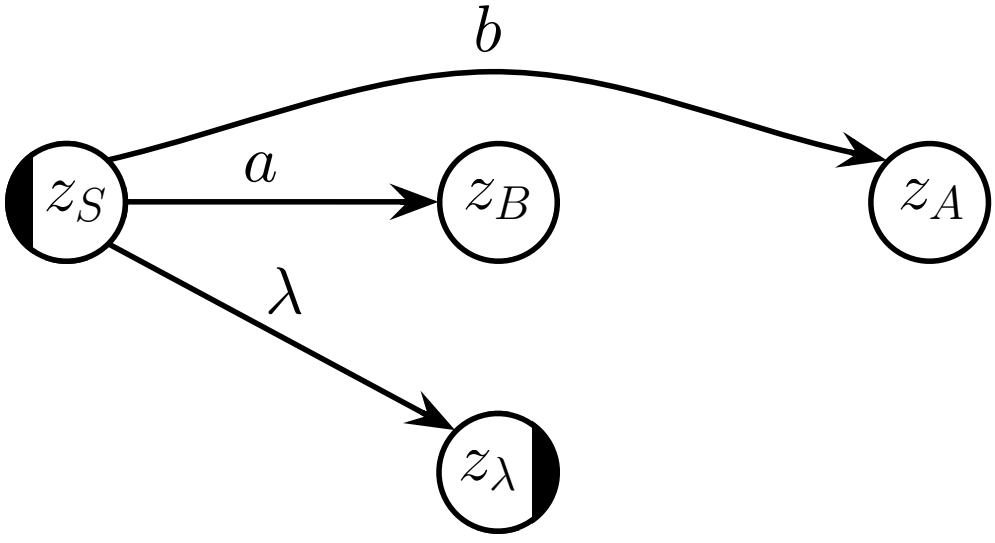
Beispiel: RLG $\longrightarrow$ NFA

- Von einer *rechtslinearen Grammatik* zu einem *NFA*:

$$S \longrightarrow aB \mid bA \mid \lambda$$

$$A \longrightarrow aB \mid c$$

$$B \longrightarrow bA \mid \lambda$$



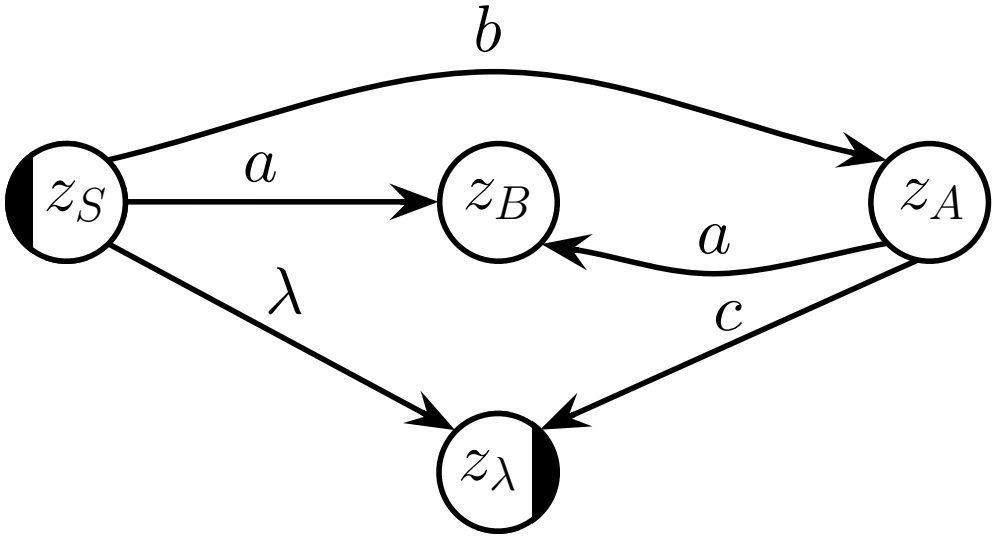
Beispiel: RLG $\longrightarrow$ NFA

- Von einer *rechtslinearen Grammatik* zu einem *NFA*:

$$S \longrightarrow aB \mid bA \mid \lambda$$

$$A \longrightarrow aB \mid c$$

$$B \longrightarrow bA \mid \lambda$$



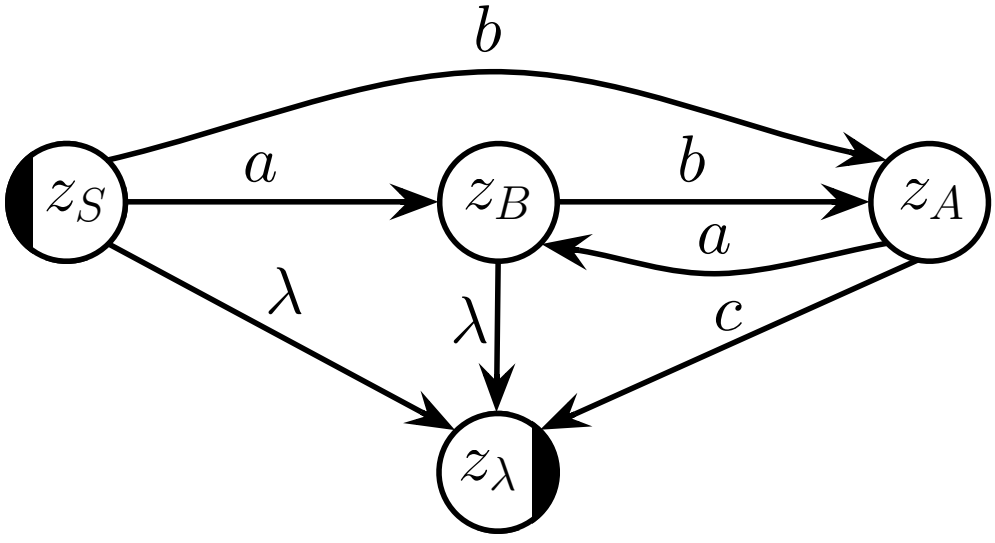
Beispiel: RLG $\longrightarrow$ NFA

- Von einer *rechtslinearen Grammatik* zu einem *NFA*:

$$S \longrightarrow aB \mid bA \mid \lambda$$

$$A \longrightarrow aB \mid c$$

$$B \longrightarrow bA \mid \lambda$$



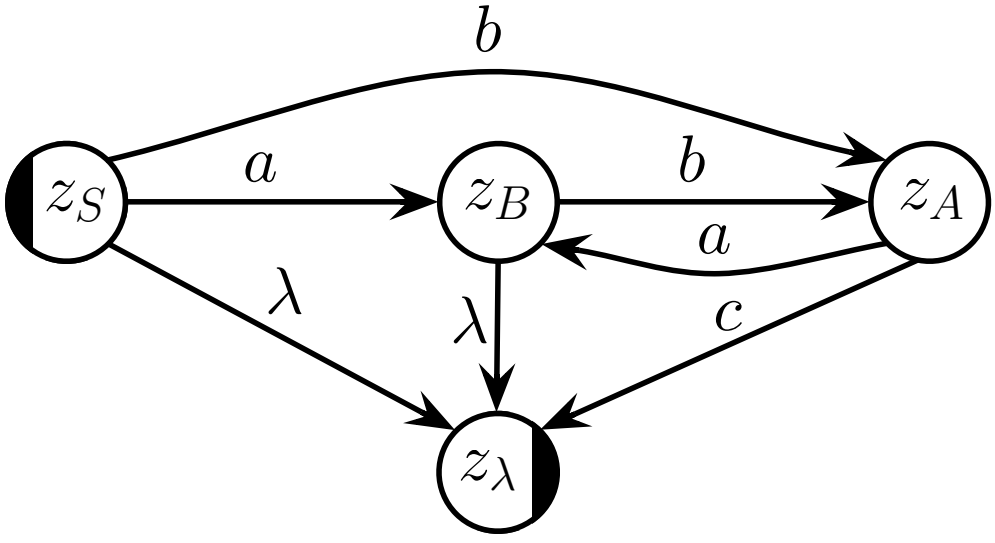
Beispiel: RLG $\longrightarrow$ NFA

- Von einer *rechtslinearen Grammatik* zu einem *NFA*:

$$S \longrightarrow aB \mid bA \mid \lambda$$

$$A \longrightarrow aB \mid c$$

$$B \longrightarrow bA \mid \lambda$$



$$A = (\{z_S, z_A, z_B, z_\lambda\}, \{a, b\}, K, \{z_S\}, \{z_\lambda\})$$

Ergebnisse

- Auch für **linkslineare** Grammatiken lassen sich „äquivalente“ NFAs definieren.

Ergebnisse

- Auch für **linkslineare** Grammatiken lassen sich „äquivalente“ NFAs definieren.
- Allgemein gilt dies nicht für **lineare** Garmmatiken, sondern nur für **einseitig lineare** Grammatiken!

Ergebnisse

- Auch für **linkslineare** Grammatiken lassen sich „äquivalente“ NFAs definieren.
- Allgemein gilt dies nicht für **lineare** Garmmatiken, sondern nur für **einseitig lineare** Grammatiken!
- **Beispiel:** $S \longrightarrow aSb \mid \lambda$ erzeugt die nicht-reguläre Sprache DUP.

Ergebnisse

- Auch für **linkslineare** Grammatiken lassen sich „äquivalente“ NFAs definieren.
- Allgemein gilt dies nicht für **lineare** Garmmatiken, sondern nur für **einseitig lineare** Grammatiken!
- **Beispiel:** $S \longrightarrow aSb \mid \lambda$ erzeugt die nicht-reguläre Sprache DUP.
- . . . also ist die Familie $\mathcal{R}eg$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{C}f$.

Ergebnisse

- Auch für **linkslineare** Grammatiken lassen sich „äquivalente“ NFAs definieren.
- Allgemein gilt dies nicht für **lineare** Garmmatiken, sondern nur für **einseitig lineare** Grammatiken!
- **Beispiel:** $S \longrightarrow aSb \mid \lambda$ erzeugt die nicht-reguläre Sprache DUP.
- . . . also ist die Familie $\mathcal{R}eg$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{C}f$.
- **Fragen:**

Ergebnisse

- Auch für **linkslineare** Grammatiken lassen sich „äquivalente“ NFAs definieren.
- Allgemein gilt dies nicht für **lineare** Garmmatiken, sondern nur für **einseitig lineare** Grammatiken!
- **Beispiel:** $S \longrightarrow aSb \mid \lambda$ erzeugt die nicht-reguläre Sprache DUP.
- . . . also ist die Familie $\mathcal{R}eg$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{C}f$.
- **Fragen:**
  - Wo sind die Grenzen von $\mathcal{C}f$?

Ergebnisse

- Auch für **linkslineare** Grammatiken lassen sich „äquivalente“ NFAs definieren.
- Allgemein gilt dies nicht für **lineare** Garmmatiken, sondern nur für **einseitig lineare** Grammatiken!
- **Beispiel:** $S \longrightarrow aSb \mid \lambda$ erzeugt die nicht-reguläre Sprache DUP.
- . . . also ist die Familie $\mathcal{R}eg$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{C}f$.
- **Fragen:**
  - Wo sind die Grenzen von $\mathcal{C}f$?
  - Was für Abschlusseigenschaften hat $\mathcal{C}f$?

Ergebnisse

- Auch für **linkslineare** Grammatiken lassen sich „äquivalente“ NFAs definieren.
- Allgemein gilt dies nicht für **lineare** Garmmatiken, sondern nur für **einseitig lineare** Grammatiken!
- **Beispiel:** $S \longrightarrow aSb \mid \lambda$ erzeugt die nicht-reguläre Sprache DUP.
- . . . also ist die Familie $\mathcal{R}eg$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{C}f$.
- **Fragen:**
  - Wo sind die Grenzen von $\mathcal{C}f$?
  - Was für Abschlusseigenschaften hat $\mathcal{C}f$?
  - Was für Entscheidbarkeitsresultate kennen wir?

Ergebnisse

- Auch für **linkslineare** Grammatiken lassen sich „äquivalente“ NFAs definieren.
- Allgemein gilt dies nicht für **lineare** Garmmatiken, sondern nur für **einseitig lineare** Grammatiken!
- **Beispiel:** $S \longrightarrow aSb \mid \lambda$ erzeugt die nicht-reguläre Sprache DUP.
- . . . also ist die Familie $\mathcal{R}eg$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{C}f$.
- **Fragen:**
  - Wo sind die Grenzen von $\mathcal{C}f$?
  - Was für Abschlusseigenschaften hat $\mathcal{C}f$?
  - Was für Entscheidbarkeitsresultate kennen wir?
  - Gibt es ein Automatenmodell für $\mathcal{C}f$?

Pumping-Lemma für $\mathcal{C}f$

- Eine kontextfreie Grammatik besitzt nur endlich viele Nonterminale n.

Pumping-Lemma für $\mathcal{C}f$

- Eine kontextfreie Grammatik besitzt nur endlich viele Nonterminale n.
- Ist in einem Ableitungsbaum ein Pfad länger als n, so kommt ein Nonterminal doppelt vor.

Pumping-Lemma für $\mathcal{C}f$

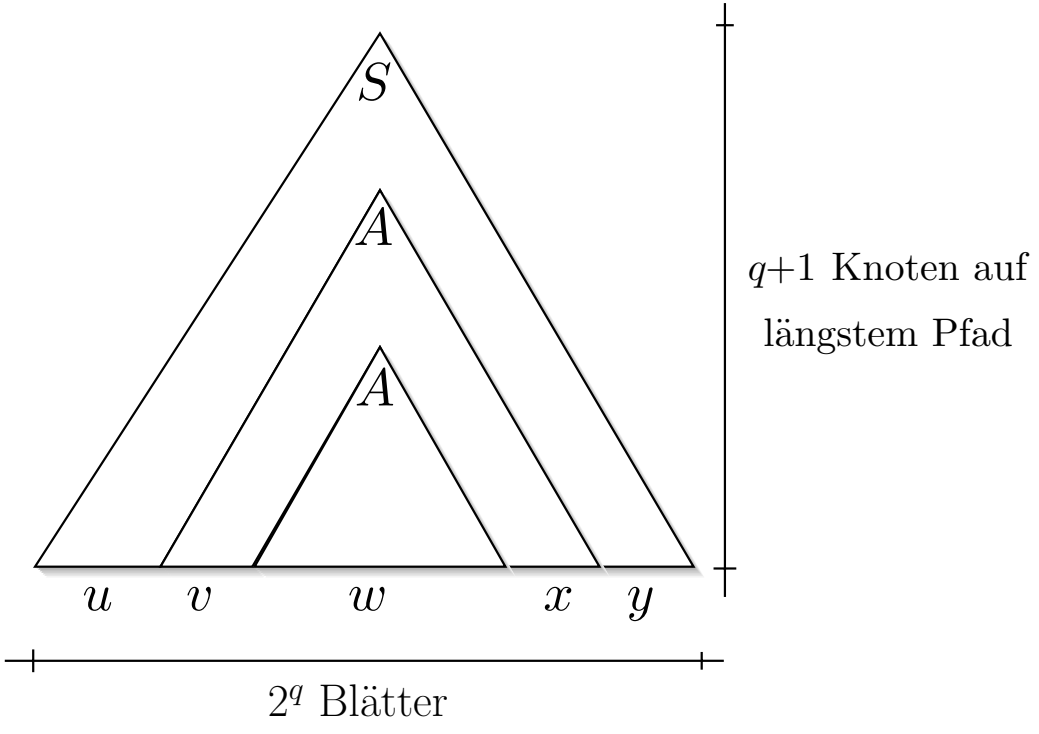
- Eine kontextfreie Grammatik besitzt nur endlich viele Nonterminale n.
- Ist in einem Ableitungsbaum ein Pfad länger als n, so kommt ein Nonterminal doppelt vor.
- Daraus ergeben sich weitere Ableitungsbäume, die ebenfalls zu Terminalwörtern führen!

Pumping-Lemma für $\mathcal{C}f$

- Eine kontextfreie Grammatik besitzt nur endlich viele Nonterminale n.
- Ist in einem Ableitungsbaum ein Pfad länger als n, so kommt ein Nonterminal doppelt vor.
- Daraus ergeben sich weitere Ableitungsbäume, die ebenfalls zu Terminalwörtern führen!
- Ableitungsbäume von CNF-Grammatiken haben besonders schöne Eigenschaften.

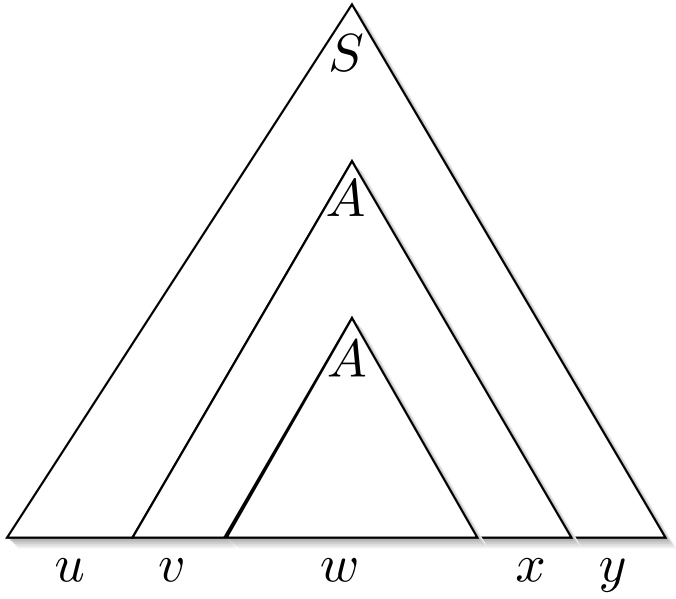
Pumping-Lemma (Beweisidee)

- **Gegeben:** eine CFG G in CNF



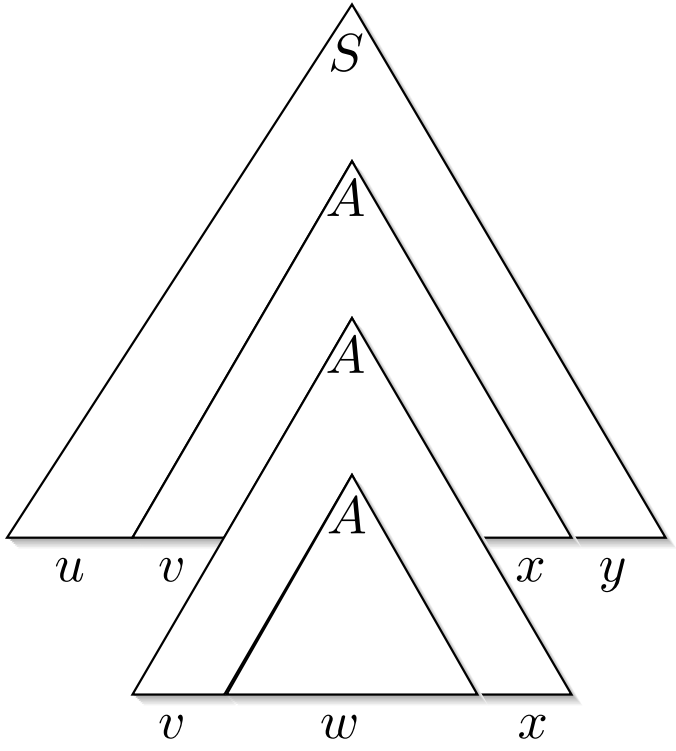
Pumping-Lemma (Beweisidee)

- **Gegeben:** eine CFG G in CNF



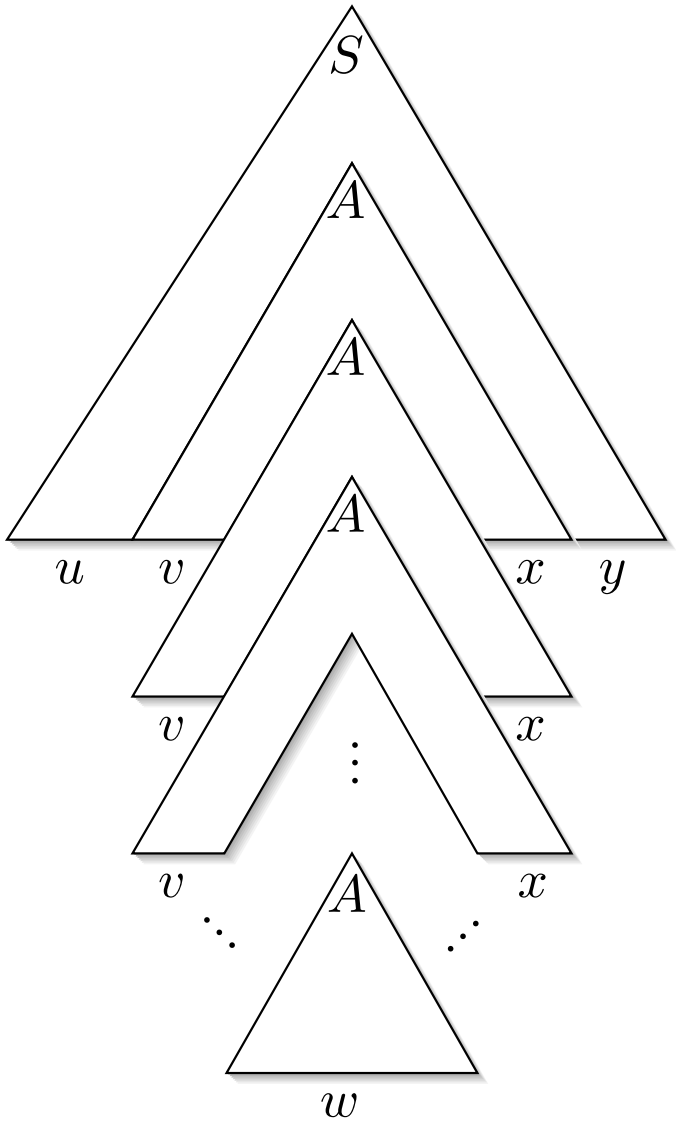
Pumping-Lemma (Beweisidee)

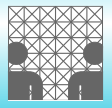
- **Gegeben:** eine CFG G in CNF



Pumping-Lemma (Beweisidee)

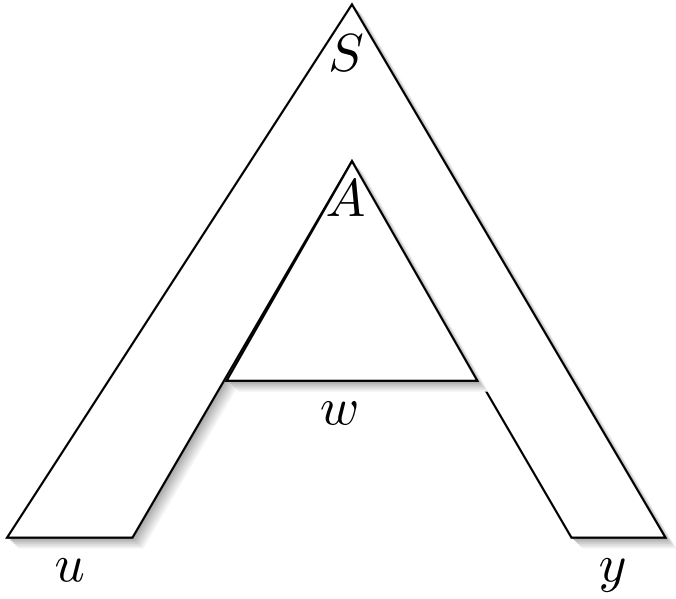
- **Gegeben:** eine CFG G in CNF





Pumping-Lemma (Beweisidee)

- **Gegeben:** eine CFG G in CNF



Pumping-Lemma ($uvwxy$-Theorem)

- **Theorem:** Für jede Sprache $L \in \mathcal{C}f$ gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ besitzt, für die folgendes gilt:

Pumping-Lemma ($uvwxy$-Theorem)

- **Theorem:** Für jede Sprache $L \in \mathcal{C}f$ gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ besitzt, für die folgendes gilt:

  (i) $|vx| \geq 1$

Pumping-Lemma ($uvwxy$-Theorem)

- **Theorem:** Für jede Sprache $L \in \mathcal{C}f$ gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ besitzt, für die folgendes gilt:

  (i) $|vx| \geq 1$

  (ii) $|vwx| \leq n$

Pumping-Lemma ($uvwxy$-Theorem)

- **Theorem:** Für jede Sprache $L \in \mathcal{C}f$ gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ besitzt, für die folgendes gilt:

  (i) $|vx| \geq 1$

  (ii) $|vwx| \leq n$

  (iii) $\forall i \geq 0 : \ uv^i wx^i y \in L$

Pumping-Lemma ($uvwxy$-Theorem)

- **Theorem:** Für jede Sprache $L \in \mathcal{C}f$ gibt es eine Zahl $n \in I\!N$, so dass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ besitzt, für die folgendes gilt:

  (i) $|vx| \geq 1$

  (ii) $|vwx| \leq n$

  (iii) $\forall i \geq 0 : \ uv^i wx^i y \in L$

- Wie beim uvw-Theorem, kann hiermit nicht gezeigt werden, dass eine Sprache kontextfrei ist!!!

Beispiel

- $L := \{a^n b^n c^n \mid n \in I\!N\}$ ist nicht kontextfrei.

Beispiel

- $L := \{a^n b^n c^n \mid n \in I\!N\}$ ist nicht kontextfrei.
- Angenommen L wäre kontextfrei, dann gäbe es ein $k \in I\!N$ für das die Folgerung aus dem $uvwxy$-Theorem zutrifft.

Beispiel

- $L := \{a^n b^n c^n \mid n \in I\!N\}$ ist nicht kontextfrei.
- Angenommen L wäre kontextfrei, dann gäbe es ein $k \in I\!N$ für das die Folgerung aus dem $uvwxy$-Theorem zutrifft.
- Wähle $z := a^k b^k c^k$.

Beispiel

- $L := \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kontextfrei.
- Angenommen L wäre kontextfrei, dann gäbe es ein $k \in \mathbb{N}$ für das die Folgerung aus dem $uvwxy$-Theorem zutrifft.
- Wähle $z := a^k b^k c^k$.
- Da $z \in L$ und $|z| \geq k$ gelten, muss eine Aufspaltung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq k$ und $|vx| \geq 1$ existieren, so dass $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Beispiel

- $L := \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kontextfrei.
- Angenommen L wäre kontextfrei, dann gäbe es ein $k \in \mathbb{N}$ für das die Folgerung aus dem $uvwxy$-Theorem zutrifft.
- Wähle $z := a^k b^k c^k$.
- Da $z \in L$ und $|z| \geq k$ gelten, muss eine Aufspaltung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq k$ und $|vx| \geq 1$ existieren, so dass $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
- Alle Aufspaltungen führen zum Widerspruch:

Beispiel

- $L := \{a^n b^n c^n \mid n \in I\!N\}$ ist nicht kontextfrei.
- Angenommen L wäre kontextfrei, dann gäbe es ein $k \in I\!N$ für das die Folgerung aus dem $uvwxy$-Theorem zutrifft.
- Wähle $z := a^k b^k c^k$.
- Da $z \in L$ und $|z| \geq k$ gelten, muss eine Aufspaltung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq k$ und $|vx| \geq 1$ existieren, so dass $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \in I\!N$.
- Alle Aufspaltungen führen zum Widerspruch:
  - v oder x enthält a's und b's

Beispiel

- $L := \{a^n b^n c^n \mid n \in I\!N\}$ ist nicht kontextfrei.
- Angenommen L wäre kontextfrei, dann gäbe es ein $k \in I\!N$ für das die Folgerung aus dem $uvwxy$-Theorem zutrifft.
- Wähle $z := a^k b^k c^k$.
- Da $z \in L$ und $|z| \geq k$ gelten, muss eine Aufspaltung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq k$ und $|vx| \geq 1$ existieren, so dass $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \in I\!N$.
- Alle Aufspaltungen führen zum Widerspruch:
  - v oder x enthält a's und b's
  - v oder x enthält b's und c's

Beispiel

- $L := \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kontextfrei.
- Angenommen L wäre kontextfrei, dann gäbe es ein $k \in \mathbb{N}$ für das die Folgerung aus dem $uvwxy$-Theorem zutrifft.
- Wähle $z := a^k b^k c^k$.
- Da $z \in L$ und $|z| \geq k$ gelten, muss eine Aufspaltung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq k$ und $|vx| \geq 1$ existieren, so dass $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
- Alle Aufspaltungen führen zum Widerspruch:
  - v oder x enthält a's und b's
  - v oder x enthält b's und c's
  - v oder x enhält nur a's, nur b's oder nur c's

Beispiel: $\{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \in I\!N\}$

Sei k die Zahl aus dem Pumping-Lemma. Für $z := a^k b^{k+1} c^k d^{k+1}$ gibt es keine Aufspaltung $z = uvwxy$ mit $\forall i \in I\!N : uv^i wx^i y \in L$.

- $\underbrace{a^k}\, b^{k+1} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht nur aus a's.

Beispiel: $\{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

Sei k die Zahl aus dem Pumping-Lemma. Für $z := a^k b^{k+1} c^k d^{k+1}$ gibt es keine Aufspaltung $z = uvwxy$ mit $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i wx^i y \in L$.

- $\underbrace{a^k} b^{k+1} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht nur aus a's.
- $\underbrace{a^k b^{k+1}} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht aus a's und b's.

Beispiel: $\{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \in I\!N\}$

Sei k die Zahl aus dem Pumping-Lemma. Für $z := a^k b^{k+1} c^k d^{k+1}$ gibt es keine Aufspaltung $z = uvwxy$ mit $\forall i \in I\!N : uv^i wx^i y \in L$.

- $\underbrace{a^k} b^{k+1} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht nur aus a's.
- $\underbrace{a^k b^{k+1}} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht aus a's und b's.
- $a^k \underbrace{b^{k+1}} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht nur aus b's.

Beispiel: $\{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \in I\!N\}$

Sei k die Zahl aus dem Pumping-Lemma. Für $z := a^k b^{k+1} c^k d^{k+1}$ gibt es keine Aufspaltung $z = uvwxy$ mit $\forall i \in I\!N : uv^i wx^i y \in L$.

- $\underbrace{a^k} b^{k+1} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht nur aus a's.
- $\underbrace{a^k b^{k+1}} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht aus a's und b's.
- $a^k \underbrace{b^{k+1}} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht nur aus b's.
- $a^k \underbrace{b^{k+1} c^k} d^{k+1}$, d.h. vwx besteht aus b's und c's.

Beispiel: $\{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \in I\!N\}$

Sei k die Zahl aus dem Pumping-Lemma. Für $z := a^k b^{k+1} c^k d^{k+1}$ gibt es keine Aufspaltung $z = uvwxy$ mit $\forall i \in I\!N : uv^i wx^i y \in L$.

- $\underbrace{a^k} b^{k+1} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht nur aus a's.
- $\underbrace{a^k b^{k+1}} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht aus a's und b's.
- $a^k \underbrace{b^{k+1}} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht nur aus b's.
- $a^k \underbrace{b^{k+1} c^k} d^{k+1}$, d.h. vwx besteht aus b's und c's.
- $a^k b^{k+1} \underbrace{c^k} d^{k+1}$, d.h. vwx besteht nur aus c's.

Beispiel: $\{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \in I\!N\}$

Sei k die Zahl aus dem Pumping-Lemma. Für $z := a^k b^{k+1} c^k d^{k+1}$ gibt es keine Aufspaltung $z = uvwxy$ mit $\forall i \in I\!N : uv^i wx^i y \in L$.

- $\underbrace{a^k} b^{k+1} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht nur aus a's.
- $\underbrace{a^k b^{k+1}} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht aus a's und b's.
- $a^k \underbrace{b^{k+1}} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht nur aus b's.
- $a^k \underbrace{b^{k+1} c^k} d^{k+1}$, d.h. vwx besteht aus b's und c's.
- $a^k b^{k+1} \underbrace{c^k} d^{k+1}$, d.h. vwx besteht nur aus c's.
- $a^k b^{k+1} \underbrace{c^k d^{k+1}}$, d.h. vwx besteht aus c's und d's.

Beispiel: $\{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

Sei k die Zahl aus dem Pumping-Lemma. Für $z := a^k b^{k+1} c^k d^{k+1}$ gibt es keine Aufspaltung $z = uvwxy$ mit $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i wx^i y \in L$.

- $\underbrace{a^k} b^{k+1} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht nur aus a's.
- $\underbrace{a^k b^{k+1}} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht aus a's und b's.
- $a^k \underbrace{b^{k+1}} c^k d^{k+1}$, d.h. vwx besteht nur aus b's.
- $a^k \underbrace{b^{k+1} c^k} d^{k+1}$, d.h. vwx besteht aus b's und c's.
- $a^k b^{k+1} \underbrace{c^k} d^{k+1}$, d.h. vwx besteht nur aus c's.
- $a^k b^{k+1} \underbrace{c^k d^{k+1}}$, d.h. vwx besteht aus c's und d's.
- $a^k b^{k+1} c^k \underbrace{d^{k+1}}$, d.h. vwx besteht nur aus d's.

Entscheidbarkeitsresultate

- **Theorem:** Das **spezielle Wortproblem** für kontextfreie Sprachen ist entscheidbar, d.h. es gibt ein Verfahren, das zu einer durch eine CFG G spezifizierten Sprache $L = L(G)$ für jedes w feststellt, ob $w \in L$ gilt.

Entscheidbarkeitsresultate

- **Theorem:** Das **spezielle Wortproblem** für kontextfreie Sprachen ist entscheidbar, d.h. es gibt ein Verfahren, das zu einer durch eine CFG G spezifizierten Sprache $L = L(G)$ für jedes w feststellt, ob $w \in L$ gilt.
- **Beweisidee:** O.B.d.A. liege G in GNF vor. Da in einer Ableitung $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} v$ in jedem Schritt ein weiteres Terminal erzeugt wird, brauchen nur die endlich vielen Ableitungen der Länge $|w|$ daraufhin überprüft zu werden, ob eine darunter ist, die das Wort w generiert.

Entscheidbarkeitsresultate

- **Theorem:** Das **spezielle Wortproblem** für kontextfreie Sprachen ist entscheidbar, d.h. es gibt ein Verfahren, das zu einer durch eine CFG G spezifizierten Sprache $L = L(G)$ für jedes w feststellt, ob $w \in L$ gilt.
- **Beweisidee:** O.B.d.A. liege G in GNF vor. Da in einer Ableitung $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} v$ in jedem Schritt ein weiteres Terminal erzeugt wird, brauchen nur die endlich vielen Ableitungen der Länge $|w|$ daraufhin überprüft zu werden, ob eine darunter ist, die das Wort w generiert.
- Das Verfahren benötigt **exponentiellen** Aufwand!

Entscheidbarkeitsresultate

- **Theorem:** Das **spezielle Wortproblem** für kontextfreie Sprachen ist entscheidbar, d.h. es gibt ein Verfahren, das zu einer durch eine CFG G spezifizierten Sprache $L = L(G)$ für jedes w feststellt, ob $w \in L$ gilt.
- **Beweisidee:** O.B.d.A. liege G in GNF vor. Da in einer Ableitung $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} v$ in jedem Schritt ein weiteres Terminal erzeugt wird, brauchen nur die endlich vielen Ableitungen der Länge $|w|$ daraufhin überprüft zu werden, ob eine darunter ist, die das Wort w generiert.
- Das Verfahren benötigt **exponentiellen** Aufwand!
- Entscheidung des **allgemeinen Wortproblems** erfordert zusätzlich die Konstruktion einer äquivalenten GNF.

Spezielles Wortproblem

- Das **spezielle Wortproblem** für CNF-Grammatiken kann auch mit polynomiellem Aufwand entschieden werden!

Spezielles Wortproblem

- Das **spezielle Wortproblem** für CNF-Grammatiken kann auch mit polynomiellem Aufwand entschieden werden!
- Sei $G = (V_N, V_T, P, S)$ CFG in CNF und $w \in V_T^*$ mit $w = x_1 x_2 \ldots x_n$, für $x_i \in V_T$.

Spezielles Wortproblem

- Das **spezielle Wortproblem** für CNF-Grammatiken kann auch mit polynomiellem Aufwand entschieden werden!
- Sei $G = (V_N, V_T, P, S)$ CFG in CNF und $w \in V_T^*$ mit $w = x_1 x_2 \dots x_n$, für $x_i \in V_T$.
- Für alle $i, j \in \{0, 1, 2, \dots n\}$ mit $0 \leq i \leq j$ definieren wir Mengen $V_{i,j} \subseteq V_N$ durch $V_{i-1,j} := \{A \in V_N \mid A \stackrel{*}{\Longrightarrow} x_i x_{i+1} \dots x_j\}$, die sukzessive als die Elemente der Felder $V_{i,j}$ einer $(n+1) \times (n+1)$-Matrix mit Elementen aus V bestimmt werden.

Spezielles Wortproblem

- Das **spezielle Wortproblem** für CNF-Grammatiken kann auch mit polynomiellem Aufwand entschieden werden!
- Sei $G = (V_N, V_T, P, S)$ CFG in CNF und $w \in V_T^*$ mit $w = x_1 x_2 \dots x_n$, für $x_i \in V_T$.
- Für alle $i, j \in \{0, 1, 2, \dots n\}$ mit $0 \leq i \leq j$ definieren wir Mengen $V_{i,j} \subseteq V_N$ durch $V_{i-1,j} := \{A \in V_N \mid A \stackrel{*}{\Longrightarrow} x_i x_{i+1} \dots x_j\}$, die sukzessive als die Elemente der Felder $V_{i,j}$ einer $(n+1) \times (n+1)$-Matrix mit Elementen aus V bestimmt werden.
- Am Ende ist $V_{0,n}$ bestimmt, und es gilt $S \in V_{0,n}$ genau dann, wenn $w \in L(G)$ ist.

Abschlusseigenschaften

- Die Familie $\mathcal{C}f$ ist abgeschlossen gegenüber:

Abschlusseigenschaften

- Die Familie $\mathcal{C}f$ ist abgeschlossen gegenüber:
  1. Vereinigung, d.h. $\mathcal{C}f \vee \mathcal{C}f \subseteq \mathcal{C}f$

Abschlusseigenschaften

- Die Familie $\mathcal{C}f$ ist abgeschlossen gegenüber:
  1. Vereinigung, d.h. $\mathcal{C}f \vee \mathcal{C}f \subseteq \mathcal{C}f$
  2. Komplexprodukt, d.h. $\mathcal{C}f \cdot \mathcal{C}f \subseteq \mathcal{C}f$

Abschlusseigenschaften

- Die Familie $\mathcal{C}f$ ist abgeschlossen gegenüber:
  1. Vereinigung, d.h. $\mathcal{C}f \vee \mathcal{C}f \subseteq \mathcal{C}f$
  2. Komplexprodukt, d.h. $\mathcal{C}f \cdot \mathcal{C}f \subseteq \mathcal{C}f$
  3. Kleene'sche Hülle (Sternbildung), d.h. $\mathcal{C}f^* \subseteq \mathcal{C}f$

Abschlusseigenschaften

- Die Familie $\mathcal{C}f$ ist abgeschlossen gegenüber:
  1. Vereinigung, d.h. $\mathcal{C}f \vee \mathcal{C}f \subseteq \mathcal{C}f$
  2. Komplexprodukt, d.h. $\mathcal{C}f \cdot \mathcal{C}f \subseteq \mathcal{C}f$
  3. Kleene'sche Hülle (Sternbildung), d.h. $\mathcal{C}f^* \subseteq \mathcal{C}f$
- **Beweis:** Für $i \in \{1, 2\}$ seien L_i gegeben durch $L_i := L(G_i)$ für $G_i := (V_{i,N}, V_{i,T}, P_i, S_i)$.

Abschlusseigenschaften

- Die Familie $\mathcal{C}f$ ist abgeschlossen gegenüber:
  1. Vereinigung, d.h. $\mathcal{C}f \vee \mathcal{C}f \subseteq \mathcal{C}f$
  2. Komplexprodukt, d.h. $\mathcal{C}f \cdot \mathcal{C}f \subseteq \mathcal{C}f$
  3. Kleene'sche Hülle (Sternbildung), d.h. $\mathcal{C}f^* \subseteq \mathcal{C}f$
- **Beweis:** Für $i \in \{1, 2\}$ seien L_i gegeben durch $L_i := L(G_i)$ für $G_i := (V_{i,N}, V_{i,T}, P_i, S_i)$.
  1. $L_1 \cup L_2 = L(G_3)$ für
     $G_3 := (V_{1,N} \uplus V_{2,N} \uplus \{S_3\}, V_{1,T} \cup V_{2,T}, P_3, S_3)$ mit
     $P_3 := P_1 \cup P_2 \cup \{S_3 \longrightarrow S_1,\ S_3 \longrightarrow S_2\}$

Abschlusseigenschaften

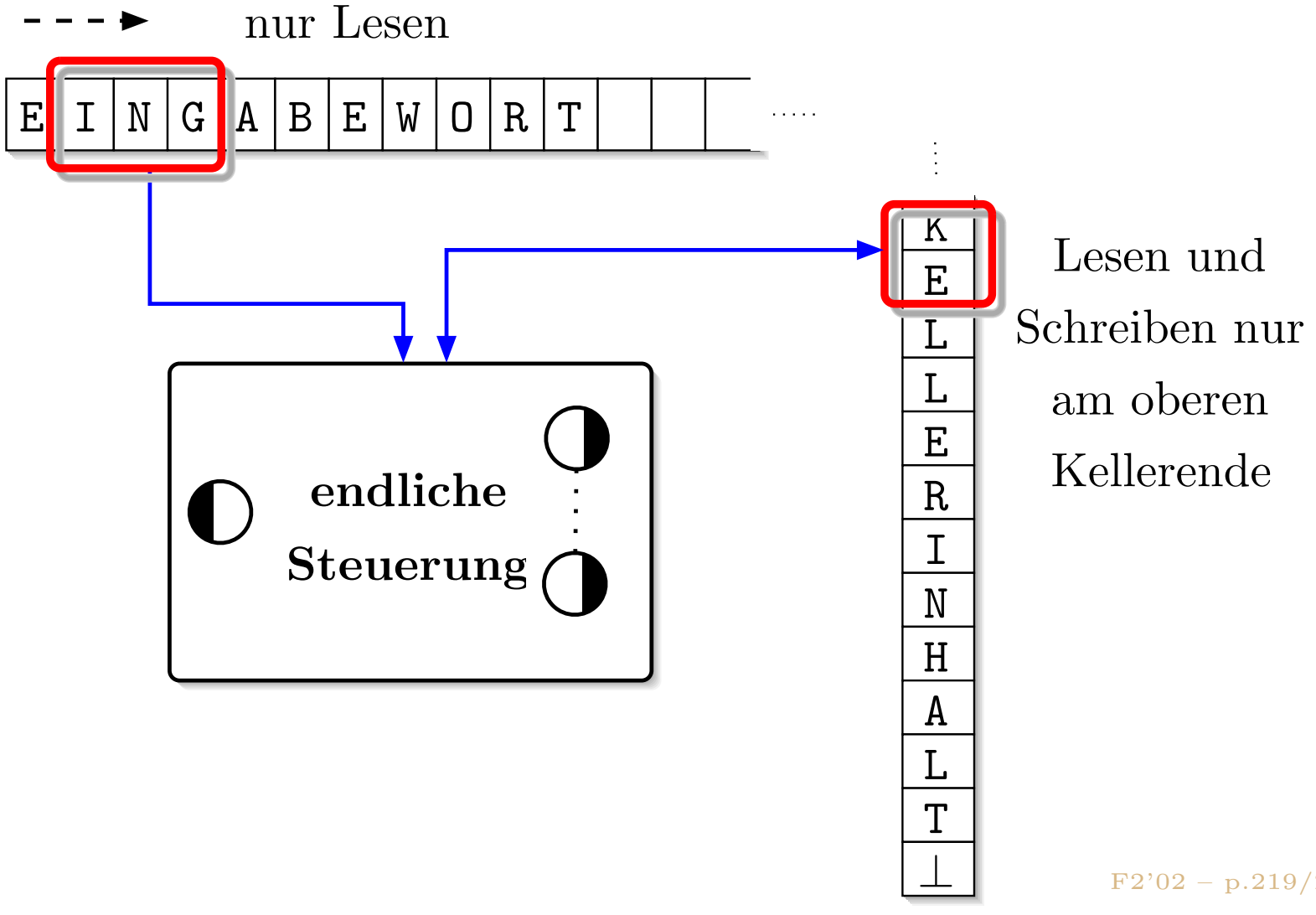
- Die Familie $\mathcal{C}f$ ist abgeschlossen gegenüber:
  1. Vereinigung, d.h. $\mathcal{C}f \vee \mathcal{C}f \subseteq \mathcal{C}f$
  2. Komplexprodukt, d.h. $\mathcal{C}f \cdot \mathcal{C}f \subseteq \mathcal{C}f$
  3. Kleene'sche Hülle (Sternbildung), d.h. $\mathcal{C}f^* \subseteq \mathcal{C}f$
- **Beweis:** Für $i \in \{1, 2\}$ seien L_i gegeben durch $L_i := L(G_i)$ für $G_i := (V_{i,N}, V_{i,T}, P_i, S_i)$.
  1. $L_1 \cup L_2 = L(G_3)$ für
     $G_3 := (V_{1,N} \uplus V_{2,N} \uplus \{S_3\}, V_{1,T} \cup V_{2,T}, P_3, S_3)$ mit
     $P_3 := P_1 \cup P_2 \cup \{S_3 \longrightarrow S_1,\ S_3 \longrightarrow S_2\}$
  2. $L_1 \cdot L_2 = L(G_4)$ für
     $G_4 := (V_{1,N} \uplus V_{2,N} \uplus \{S_4\}, V_{1,T} \cup V_{2,T}, P_4, S_4)$ mit
     $P_4 := P_1 \cup P_2 \cup \{S_4 \longrightarrow S_1 S_2\}$

Abschlusseigenschaften

- Die Familie $\mathcal{C}f$ ist abgeschlossen gegenüber:
  1. Vereinigung, d.h. $\mathcal{C}f \vee \mathcal{C}f \subseteq \mathcal{C}f$
  2. Komplexprodukt, d.h. $\mathcal{C}f \cdot \mathcal{C}f \subseteq \mathcal{C}f$
  3. Kleene'sche Hülle (Sternbildung), d.h. $\mathcal{C}f^* \subseteq \mathcal{C}f$
- **Beweis:** Für $i \in \{1,2\}$ seien L_i gegeben durch $L_i := L(G_i)$ für $G_i := (V_{i,N}, V_{i,T}, P_i, S_i)$.
  1. $L_1 \cup L_2 = L(G_3)$ für
     $G_3 := (V_{1,N} \uplus V_{2,N} \uplus \{S_3\}, V_{1,T} \cup V_{2,T}, P_3, S_3)$ mit
     $P_3 := P_1 \cup P_2 \cup \{S_3 \longrightarrow S_1,\ S_3 \longrightarrow S_2\}$
  2. $L_1 \cdot L_2 = L(G_4)$ für
     $G_4 := (V_{1,N} \uplus V_{2,N} \uplus \{S_4\}, V_{1,T} \cup V_{2,T}, P_4, S_4)$ mit
     $P_4 := P_1 \cup P_2 \cup \{S_4 \longrightarrow S_1 S_2\}$
  3. $L_1^* = L(G_5)$ für $G_5 := (V_{1,N} \uplus \{S_5\}, V_{1,T}, P_5, S_5)$ mit
     $P_5 := P_1 \cup \{S_5 \longrightarrow S_1 S_5,\ S_5 \longrightarrow \lambda\}$

Kellerautomaten

- Eine Kelerautomat ist ein endlicher Automat mit Kellerspeicher:



Kellerautomat (formal)

- Ein **nichtdeterministischer Kellerautomat** (PDA für *push down automaton*) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\mathsf{start}}, Z_{\mathsf{end}}, \perp)$, wobei gilt:

Kellerautomat (formal)

- Ein **nichtdeterministischer Kellerautomat** (PDA für *push down automaton*) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$, wobei gilt:
  - Z ist endliche Menge von **Zuständen**.

Kellerautomat (formal)

- Ein **nichtdeterministischer Kellerautomat** (PDA für *push down automaton*) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$, wobei gilt:
  - Z ist endliche Menge von **Zuständen**.
  - Σ ist endliches **Eingabealphabet**.

Kellerautomat (formal)

- Ein **nichtdeterministischer Kellerautomat** (PDA für *push down automaton*) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$, wobei gilt:
  - Z ist endliche Menge von **Zuständen**.
  - Σ ist endliches **Eingabealphabet**.
  - Γ ist endliches **Kelleralphabet**.

Kellerautomat (formal)

- Ein **nichtdeterministischer Kellerautomat** (PDA für *push down automaton*) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$, wobei gilt:
  - Z ist endliche Menge von **Zuständen**.
  - Σ ist endliches **Eingabealphabet**.
  - Γ ist endliches **Kelleralphabet**.
  - $K \subseteq Z \times \Sigma^* \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Z$ ist die endliche **Zustandsüberführungsrelation**.

Kellerautomat (formal)

- Ein **nichtdeterministischer Kellerautomat** (PDA für *push down automaton*) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$, wobei gilt:
  - Z ist endliche Menge von **Zuständen**.
  - Σ ist endliches **Eingabealphabet**.
  - Γ ist endliches **Kelleralphabet**.
  - $K \subseteq Z \times \Sigma^* \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Z$ ist die endliche **Zustandsüberführungsrelation**.
  - $Z_{\text{start}} \subseteq Z$ ist die Menge der **Startzustände**.

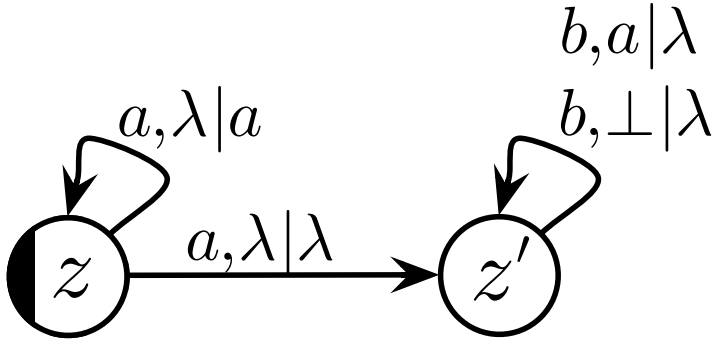
Kellerautomat (formal)

- Ein **nichtdeterministischer Kellerautomat** (PDA für *push down automaton*) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$, wobei gilt:
  - Z ist endliche Menge von **Zuständen**.
  - Σ ist endliches **Eingabealphabet**.
  - Γ ist endliches **Kelleralphabet**.
  - $K \subseteq Z \times \Sigma^* \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Z$ ist die endliche **Zustandsüberführungsrelation**.
  - $Z_{\text{start}} \subseteq Z$ ist die Menge der **Startzustände**.
  - $Z_{\text{end}} \subseteq Z$ ist die Menge der **Endzustände**.

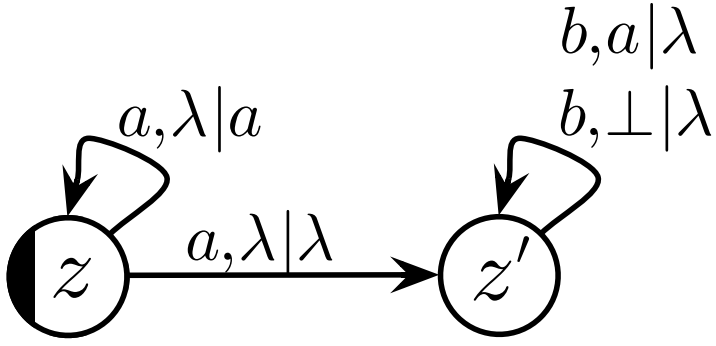
Kellerautomat (formal)

- Ein **nichtdeterministischer Kellerautomat** (PDA für *push down automaton*) ist ein Tupel $A = (Z, \Sigma, \Gamma, K, Z_{\text{start}}, Z_{\text{end}}, \perp)$, wobei gilt:
  - Z ist endliche Menge von **Zuständen**.
  - Σ ist endliches **Eingabealphabet**.
  - Γ ist endliches **Kelleralphabet**.
  - $K \subseteq Z \times \Sigma^* \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Z$ ist die endliche **Zustandsüberführungsrelation**.
  - $Z_{\text{start}} \subseteq Z$ ist die Menge der **Startzustände**.
  - $Z_{\text{end}} \subseteq Z$ ist die Menge der **Endzustände**.
  - $\perp \in \Gamma$ ist das **Kellerbodenzeichen** oder **Kellerbodensymbol**.

Beispiel

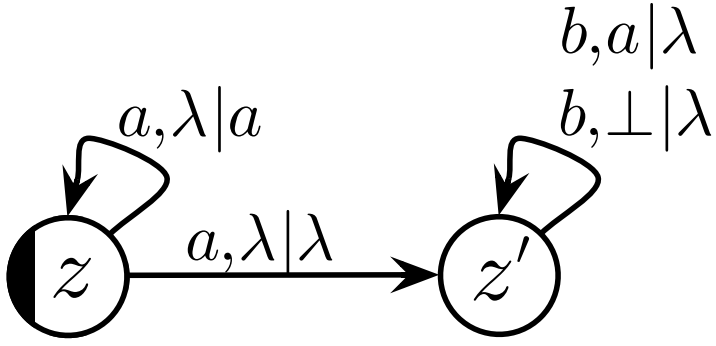


Beispiel



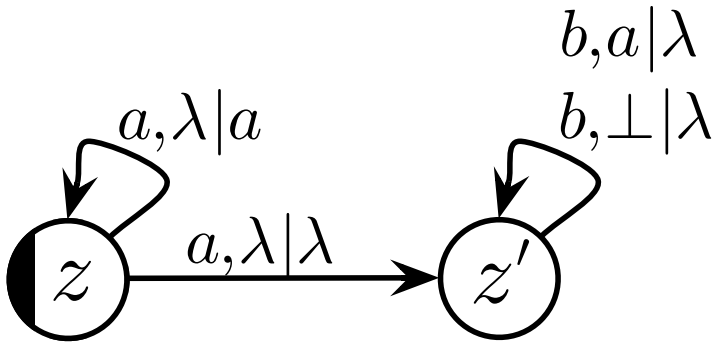
- Was ist die akzeptierte Sprache?

Beispiel



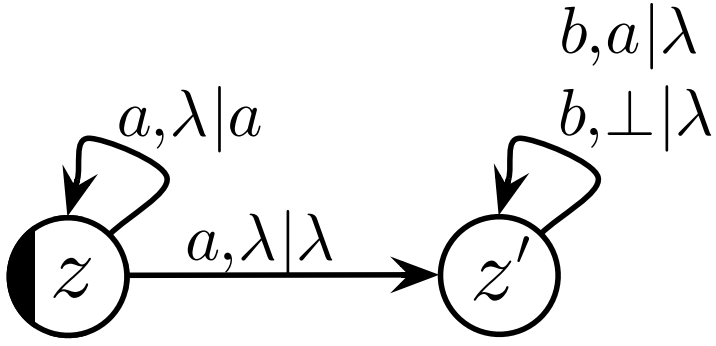
- Was ist die akzeptierte Sprache?
- Was ist eine Rechnung eines PDA?

Beispiel



- Was ist die akzeptierte Sprache?
- Was ist eine Rechnung eines PDA?
- Was ist eine Konfiguration eines PDA?

Beispiel



- Was ist die akzeptierte Sprache?
- Was ist eine Rechnung eines PDA?
- Was ist eine Konfiguration eines PDA?

Das wird Gegenstand der Vorlesung in der nächsten Woche sein!