

Über die Umfärbbarkeit roter Gummibären

Eine informelle Einführung in die Iterationstheorie

Michael Köhler-Bußmeier

Seminar im Modul FGI-3
Fachbereich Informatik
Universität Hamburg

August 1, 2012

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung

Motivation
Probleme und
Fragen
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen

Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

1 Einführung

- Motivation
- Probleme und Fragen
- Die Theorie der Iteration von Ensembles

2 Iterierte Umfärbungen

- Iteration
- Ordnungen
- Eindeutigkeit

3 Umblick

4 Bezug zum M.Sc.

Was sind rote Gummibären

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung

Motivation

Probleme und
Fragen

Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen

Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

Gummibären:

- klein
- süß
- ...

rot

- rot (RGB = FF0000)
- gefärbt mit roter Beete
-

Umgebung

- kleine Tüten
- große Tüten
-

Zielgruppe

- Kinder
- Nicht-Kinder
-

Was sind rote Gummibären

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung

Motivation

Probleme und
Fragen

Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen

Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

Gummibären:

- klein
- süß
- ...

Umgebung

- kleine Tüten
- große Tüten
-

rot

- rot (RGB = FF0000)
- gefärbt mit roter Beete
-

Zielgruppe

- Kinder
- Nicht-Kinder
-

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
**Probleme und
Fragen**
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen
Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

Befasst man sich mit roten Gummibären, so ist folgendes zu beachten:

- ① Rote Gummibären treten selten isoliert auf.
- ② Typischerweise bilden sie Rudel.
- ③ Meist sind die Rudel multi-coloriert.

Man möchte aber Gruppen roter Gummibären studieren:

- ① Gruppen roter Gummibären haben den Vorteil, dass sie sich zu Teilchenpaaren koppeln, die nach außen wie Bosonen wirken.
- ② Es ist daher (anders als bei farblich gemischten Gruppen) möglich, tiefgekühlte Gummibärengruppen zu erstellen – zumindest prinzipiell.
- ③ ...

Das Thema ist spannend, denn:

Mit tiefgekühlte Gummibärengruppen kann man die Welt retten.

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
**Probleme und
Fragen**
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen
Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

- ① Der Filteransatz nach [Trichter et al., 1981]
- ② Der Ansatz stimulierter Farbemission [Couloris, 1983]
- ③ Der 4-Farbenansatz nach [Pizza Mista, 1961]
- ④

Wir betrachten hier einen neuen Ansatz nach [Farb und Froh, 1993]:

Grundidee:

- ① Definition von iterierten Umfärbungen auf farblich gemischten Gruppen.
- ② Algebraische Struktur der Farbauswahl garantiert Termination
- ③ Nichtdeterministische Auswahl

Kernkomponenten:

- ① Algebraische Struktur der Umfärbbarkeit
- ② Wohlordnung auf Farben
- ③ Konfluenzeigenschaft

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
Probleme und
Fragen
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen
Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

- 1 Einführung
 - Motivation
 - Probleme und Fragen
 - Die Theorie der Iteration von Ensembles
- 2 Iterierte Umfärbungen
 - Iteration
 - Ordnungen
 - Eindeutigkeit
- 3 Umblick
- 4 Bezug zum M.Sc.



Färbungen und Umfärbungen

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
Probleme und
Fragen
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen
Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

Wir nehmen eine vorgegebene Mengen an Farben C an.

Der Einfachheit halber identifizieren wir eine Tüte T mit n Gummibären mit dem Intervall $[1, \dots, n]$.

Definition (Färbung)

Eine *Färbung* ist eine Abbildung $f : [1, \dots, n] \rightarrow C$.
Sei F die Menge aller Färbungen

Definition (Umfärbung)

Eine *Umfärbung* ist eine Funktional $u : F \rightarrow F$.

Anmerkung: Wir wollen *Funktional* nicht formal einführen; informal ist es eine Funktion, die Funktionen als Argumente hat (Details in der Ausarbeitung).



Iterierte Umfärbungen

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
Probleme und
Fragen
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen

Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

Sei die Färbung $f : [1, \dots, n] \rightarrow C$ gegeben.

Definition

Die Iteration einer Umfärbung $u : F \rightarrow F$ ist

$$\begin{aligned} u^0(f) &:= f \\ u^{n+1}(f) &:= u(u^n(f)) \end{aligned}$$

Wir hätten es gerne, dass sich $u^n(f)$ für $n \rightarrow \infty$ stabilisiert.



Iterierte Umfärbungen

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
Probleme und
Fragen
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen

Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

Sei die Färbung $f : [1, \dots, n] \rightarrow C$ gegeben.

Definition

Die Iteration einer Umfärbung $u : F \rightarrow F$ ist

$$\begin{aligned} u^0(f) &:= f \\ u^{n+1}(f) &:= u(u^n(f)) \end{aligned}$$

Wir hätten es gerne, dass sich $u^n(f)$ für $n \rightarrow \infty$ stabilisiert.



Stabilisierung iterierter Umfärbungen

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
Probleme und
Fragen
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen

Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

Wir hätten es gerne, dass sich $u^n(f)$ für $n \rightarrow \infty$ stabilisiert.

Definition (Stabilisierung)

Die Iteration einer Umfärbung $u : F \rightarrow F$ stabilisiert sich, wenn
.....



Beispiele zur Stabilisierung

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
Probleme und
Fragen
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen

Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

Manchmal stabilisiert sich $u^n(f)$ für $n \rightarrow \infty$:

Example

Sei

Das sich $u^n(f)$ nicht immer stabilisiert, zeigt folgendes Beispiel:

Example

Sei

Manchmal stabilisiert sich $u^n(f)$ für $n \rightarrow \infty$:

Example

Sei

Das sich $u^n(f)$ nicht immer stabilisiert, zeigt folgendes Beispiel:

Example

Sei



Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
Probleme und
Fragen
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen
Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

Angenommen wir haben die Menge von Umfärbungen
 $U = \{u_1, \dots, u_k : F \rightarrow F\}$, genannt *Umfärbungsensemble*.

Dann können wir U auch iterieren, indem wir im n -ten Schritt
eine der k Umfärbungen anwenden.

Formal haben wir dazu eine Abbildung $g : \mathbb{N} \rightarrow [1, \dots, k]$, die
im n -ten Schritt die Umfärbung $u_{g(n)}$ auswählt.

Definition

Die *Iteration von f durch das Umfärbungsensemble U mit
Auswahl g* ist:

$$U_g^0(f) := f$$

$$U_g^{n+1}(f) := u_{g(n+1)}(U_g^n(f))$$

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
Probleme und
Fragen
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen
Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

Im folgenden: Hinreichendes Kriterium für die Stabilisierung.

Definition (Wohlordnungen)

Eine Wohlordnungen ist ...

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
Probleme und
Fragen
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen
Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

Theorem (Hans und Riegel, 1994)

Zu jeder wohlgeordneten Menge von Gummibärenfarben ...



Das Problem der Eindeutigkeit

- Über die Umfärbbarkeit roter Gummibären
- Köhler-Bußmeier
- Einführung
- Motivation
- Probleme und Fragen
- Die Theorie der Iteration von Ensembles
- Iterierte Umfärbungen
- Iteration
- Ordnungen
- Eindeutigkeit**
- Umblick
- Bezug zum M.Sc.

Es gibt eine Besonderheit des Wohlordnungssatz auf Gummibärenfarben:

Der Wohlordnungssatz auf Gummibärenfarben garantiert die Stabilisierung.

Er garantiert aber nicht die Eindeutigkeit des Endergebnisses.

Das Endergebnis hängt von der Auswahlfunktion $g : \mathbb{N} \rightarrow [1, \dots, k]$ auf dem Umfärbungsensemble ab.

Frage

Für welche Umfärbungsensembles ist auch das Endergebnis eindeutig?



Kolossale Umfärbungsensembles

Definition (Kolossale Umfärbungsensembles)

Kolossale Umfärbungsensembles sind

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung

Motivation

Probleme und
Fragen

Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte

Umfärbungen

Iteration

Ordnungen

Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
Probleme und
Fragen
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen
Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

1 Einführung

- Motivation
- Probleme und Fragen
- Die Theorie der Iteration von Ensembles

2 Iterierte Umfärbungen

- Iteration
- Ordnungen
- Eindeutigkeit

3 Umblick

4 Bezug zum M.Sc.

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
Probleme und
Fragen
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen
Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

Die *take home message* noch einmal auf einer Folie:

- 1 Spannend, weil ...
- 2 Theorie der Iteration als Ansatz für ...
- 3 Wohlordnungssatz garantiert ...
- 4 Kolossale Ensembles garantieren ...
- 5 Aber: Kolossale Ensembles sind schwer zu finden ...

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
Probleme und
Fragen
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen
Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

Ähnlich zum Ansatz der iterierten Umfärbung sind die Ideen zur...

- ① Ondulierten Umfärbung: ...
- ② Iterierte Verfärbung: ...
- ③ Gefärbte Iteration:
- ④

Blick nach rechts: Was nicht gesagt wurde...

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
Probleme und
Fragen
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen
Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

..., was aber in der Hausarbeit stehen wird:

- ① Formale Definition der Stabilisation
- ② Wohlordnungssatz auf Gummibärenfarben
- ③

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
Probleme und
Fragen
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen
Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

..., ich aber weggelassen habe, weil es den Rahmen des Seminars sprengt:

- ① Umfärbung auf unendlich großen Tüten
- ②

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
Probleme und
Fragen
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen
Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

- 1 Einführung
 - Motivation
 - Probleme und Fragen
 - Die Theorie der Iteration von Ensembles
- 2 Iterierte Umfärbungen
 - Iteration
 - Ordnungen
 - Eindeutigkeit
- 3 Umblick
- 4 Bezug zum M.Sc.

Über die
Umfärb-
barkeit roter
Gummibären

Köhler-
Bußmeier

Einführung
Motivation
Probleme und
Fragen
Die Theorie
der Iteration
von
Ensembles

Iterierte
Umfärbungen
Iteration
Ordnungen
Eindeutigkeit

Umblick

Bezug zum
M.Sc.

Wie könnte eine Masterarbeit aussehen, die auf dieser Theorie aufbaut?

- Entwicklung eines Simulators zur Gummibärenumfärbung
- Entwicklung einer Umfärbungstheorie für Lakritzschnecken
-