Erzeugende Funktionen
- eine Einführung -

für Christin, Malte und Satta :)

Einführung

In der Informatik, insb. bei der Analyse von Algorithmen, treten häufig (unendliche) Folgen von Zahlen auf (z.B. bei Algorithmen, die Rekursion nutzen). Will man aber die Laufzeit eines Algorithmus beschreiben, so ist die Angabe einer Folge meist ungeeignet; gesucht ist eine einfache, geschlossene Formel F derart, dass $F(n) = a_n$ ist (wobei (a_n) die ursprüngliche Folge ist).

Die Benutzung von *erzeugenden Funktionen* ist eine Möglichkeit solch eine geschlossene Formel zu gewinnen. Man betrachtet dabei die ursprüngliche Folge zunächst als die Koeffizienten einer Potenzreihe für die man dann wiederum versucht die erzeugende Funktion zu bestimmen. Bspw. wird der Folge $1, 1, 1, \ldots$ die Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} 1 \cdot x^n = \sum_{n\geq 0} x^n$ zugeordnet. Diese Potenzreihe hat die erzeugende Funktion $\frac{1}{1-x}$ (man überzeugt sich leicht, dass $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ gilt, indem man auf beiden Seiten mit $1 - x$ multipliziert).[1]

Die erzeugende Funktion selbst ist dabei *nicht* die gesuchte geschlossene Formel. Sie ist aber ein unverzichtbares Hilfsmittel beim gleich folgenden Verfahren zur Bestimmung einer geschlossenen Formel für eine Folge von Zahlen. Im Unterschied zu anderen Verfahren (z.B. vollständige Induktion, Reduzierung der Rekurrenzgleichung auf Summen, siehe [Jan04]) wird bei dem folgenden Verfahren die Lösung tatsächlich *berechnet* und muss nicht geraten werden.

Das Verfahren

Wir verfahren in mehreren Schritten und illustrieren die einzelnen Schritte an einem einfachen Beispiel. Gegeben ist folgende Rekurrenzgleichung für die eine explizite Darstellung gesucht ist:

$$a_n = a_{n-1} + 1 \text{ für } n \geq 1 \text{ und } a_0 = 1$$

Wenn man ein paar Werte ausrechnet, sieht man schnell ein, dass $a_n = n+1$ gilt ($a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, \ldots$). Wir wollen trotzdem an diesem Beispiel das Verfahren demonstrieren, das sich dann auch auf kompliziertere Rekurrenzgleichungen anwenden lässt.

[1] Mit erzeugenden Funktionen ist es also möglich eine Folge von Zahlen als *Ganzes* zu betrachten.

1. Aufstellen der erzeugenden Funktion:

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

2. Die Summe so umformen, dass der Anfangswert und die Rekursionsgleichung eingesetzt werden können:

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} (a_{n-1} + 1) x^n$$

3. Weiter umformen, so dass unendliche Summen durch $A(x)$ ersetzt werden können:

$$\begin{aligned}
A(x) &= 1 + \sum_{n\geq 1} (a_{n-1} + 1) x^n \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} a_{n-1} x^n + \sum_{n\geq 1} x^n \\
&= 1 + x \sum_{n\geq 1} a_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} x^n \\
&= x \sum_{n\geq 1} a_{n-1} x^{n-1} + (1 + \sum_{n\geq 1} x^n) \\
&= x \sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} x^n \\
&= xA(x) + \frac{1}{1-x}
\end{aligned}$$

4. Auflösen nach $A(x)$. Man erhält eine (hoffentliche einfache) geschlossene Formel für die Potenzreihe:

$$\begin{aligned}
A(x) = xA(x) + \frac{1}{1-x} \quad &\Leftrightarrow \quad A(x) - xA(x) = \frac{1}{1-x} \\
&\Leftrightarrow \quad A(x)(1-x) = \frac{1}{1-x} \\
&\Leftrightarrow \quad A(x) = \frac{1}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

5. Umschreiben von $A(x)$ als formale Potenzreihe[2], um den Koeffizienten von a_n zu bestimmen:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = A(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) x^n$$

[2] D.h. die im vorherigen Schritt gewonnene geschlossene Form soll nun in eine Potenzreihe entwickelt werden - z.B. mittels Partialbruchzerlegung oder Nachschlagen. Hier nutzt man, dass aus $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ durch Ableiten auf beiden Seiten $\sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ folgt.

6. Ablesen der *expliziten* Darstellung der a_n durch Koeffizientenvergleich: Wegen
$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^n$$
führt ein Koeffizientenvergleich zu $a_n = n+1$.

Ausblick

Dieses Verfahren lässt sich auch für sehr viel kompliziertere Rekurrenzgleichungen anwenden (bspw. um eine geschlossene Formel für die Fibonacci-Zahlen zu finden). Das Schwierigste ist meistens der vorletzte Schritt bei dem aus der geschlossenen Formel eine formale Potenzreihe gewonnen werden soll. Hier hilft meist ein Blick auf die in der Literatur zu findenen Ergebnisse (siehe z.B. Tabelle 2.1 in [Jan04]). Für viele in der Praxis auftretende "Formen" gibt es Berechnungsvorschriften, die man aber meist nicht alle im Kopf behalten kann (die Sätze 2.4 bis 2.6 in [Jan04] beschäftigen sich z.B. damit wie man bei gebrochen rationalen Funktionen vorgehen kann), daher schlägt man sie am besten dann nach, wenn man sie braucht.

Eine nett geschriebene Einführung in das Thema (mathematische) Analyse von Algorithmen ist in [Ste02] (Kapitel 4; ca. 40 Seiten) zu finden. Dort findet man auch einen Abschnitt zu erzeugenden Funktionen.

Literatur

[Jan04] Matthias Jantzen. *Automaten und Komplexität. Vorlesungsskript.* Universität Hamburg, 2004.

[Ste02] Angelika Steger. *Diskrete Strukturen. Band 1.* Springer, Berlin, 2002.