

The Boolean Hierarchy over NP

Frank Heitmann

heitmann@informatik.uni-hamburg.de

Gastvortrag im Rahmen der Vorlesung
Komplexitätstheorie

von

Prof. Dr. Matthias Jantzen

23.06.2008

Eine einführende Überlegung

Das Färbungsproblem für Graphen:

- $\{(G, k) \mid \chi(G) \leq k\} \in \mathbf{NP}$
- $\{(G, k) \mid \chi(G) \geq k\} \in \mathbf{coNP}$
- $\{(G, k) \mid \chi(G) = k\} \in \mathbf{NP} \wedge \mathbf{coNP}$

Hausaufgaben zum 23.6.2008

- Findet eine Reduktion g , die 3SAT auf IS in Polynomialzeit reduziert, wobei $g(\phi) = (G, m)$ ist, und

$$\phi \in 3\text{SAT} \implies \alpha(G) = m \quad (1)$$

$$\phi \notin 3\text{SAT} \implies \alpha(G) = m - 1 \quad (2)$$

erfüllt.

- Zeigt, dass IN-Odd und IN-Geq Θ_2 -vollständig sind.

Exact, Critical, and Unique Problems

Anmerkung I

Durch solche *exakten* Varianten von NP-vollständigen Optimierungsproblemen motiviert, führten Papadimitriou und Yannakakis 1982 die Klasse DP ein.

Anmerkung II

- Exakte Probleme \implies Exact- i -Colorability, Exact- i -DNP
- Kritische Probleme \implies Minimal-3-Uncolorability
- Unique Solution Problems \implies Unique-SAT

Die Klasse DP

Definition

Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Klassen von Mengen. Es sei:

$$\begin{aligned} \text{co}\mathcal{C} &= \{\bar{A} \mid A \in \mathcal{C}\} \\ \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} &= \{A \cap B \mid A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D}\} \\ \mathcal{C} \vee \mathcal{D} &= \{A \cup B \mid A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D}\} \end{aligned}$$

Definition (DP)

$$\text{DP} = \text{NP} \wedge \text{coNP} = \{L \mid L = L_1 \cap L_2, L_1 \in \text{NP}, L_2 \in \text{coNP}\}$$

Die Klasse DP

Definition (DP)

$$\text{DP} = \text{NP} \wedge \text{coNP} = \{L \mid L = L_1 \cap L_2, L_1 \in \text{NP}, L_2 \in \text{coNP}\}$$

DP ist

- der Abschluss von $\text{NP} \cup \text{coNP}$ gegenüber Schnittbildung;
- vermutlich nicht gegenüber Vereinigung abgeschlossen;
- vermutlich nicht gegenüber Komplement abgeschlossen.

Es lässt sich daher fortfahren...

Die Boolesche Hierarchie

Definition (Die Boolesche Hierarchie)

Die *Boolesche Hierarchie* wird induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} \text{BH}_0 &= \text{P}, \\ \text{BH}_1 &= \text{NP}, \\ \text{BH}_k &= \begin{cases} \text{BH}_{k-1} \wedge \text{coNP} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \text{BH}_{k-1} \vee \text{NP} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{für } k \geq 2, \\ \text{BH} &= \bigcup_{k \geq 0} \text{BH}_k. \end{aligned}$$

Die Boolesche Hierarchie

Anmerkung

Die Komplemente werden wie gewohnt definiert, so ist

- $\text{coBH}_1 = \text{coNP}$ und
- $\text{coBH}_2 = \text{coDP} = \text{co}(\text{NP} \wedge \text{coNP}) = \text{coNP} \vee \text{NP}$.

Anmerkung

Seien A_1, \dots, A_k Mengen. Es sei

$$A_1 - A_2 - \dots - A_{k-1} - A_k := A_1 - (A_2 - (\dots - (A_{k-1} - A_k) \dots))$$

die geschachtelte Differenz von k Mengen.

Die Boolesche Hierarchie - Alternative Darstellungen

Es folgen alternative Darstellungen der Booleschen Hierarchie...

Die Boolesche Hierarchie - Alternative Darstellungen

Definition (Boolesche Hierarchie 2)

Die *Hierarchie verschachtelter Differenzen* wird induktiv definiert durch:

$$\mathbf{BH}'_0 = \mathbf{P},$$

$$\mathbf{BH}'_k = \left\{ L \mid L = A_1 - A_2 - \dots - A_k \text{ für Mengen } A_i \in \mathbf{NP} \right. \\ \left. 1 \leq i \leq k, \text{ mit } A_k \subseteq A_{k-1} \subseteq \dots \subseteq A_1 \right\},$$

$$\mathbf{BH}' = \bigcup_{k \geq 0} \mathbf{BH}'_k.$$

Die Boolesche Hierarchie - Alternative Darstellungen

Definition (Boolesche Hierarchie 3)

$$\mathbf{BH}''_0 = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{BH}''_1 = \mathbf{NP}$$

$$\mathbf{BH}''_2 = \mathbf{DP}$$

$$\mathbf{BH}''_k = \begin{cases} \mathbf{BH}''_{k-1} \vee \mathbf{NP} & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ \mathbf{BH}''_{k-2} \vee \mathbf{DP} & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases} \quad \text{für } k \geq 3$$

$$\mathbf{BH}'' = \bigcup_{k \geq 0} \mathbf{BH}''_k$$

Die Boolesche Hierarchie - Alternative Darstellungen

Definition (Boolescher Abschluss)

Sei \mathcal{C} eine beliebige Klasse von Mengen. Der *Boolesche Abschluss*, $\mathbf{BC}(\mathcal{C})$, von \mathcal{C} ist die kleinste Klasse \mathcal{B} von Mengen, die \mathcal{C} enthält und gegenüber den folgenden Booleschen Operationen abgeschlossen ist:

- ① \mathcal{B} ist gegenüber Vereinigung abgeschlossen, d.h. mit $A, B \in \mathcal{B}$ ist auch $A \cup B \in \mathcal{B}$;
- ② \mathcal{B} ist gegenüber Durchschnitt abgeschlossen, d.h. mit $A, B \in \mathcal{B}$ ist auch $A \cap B \in \mathcal{B}$;
- ③ \mathcal{B} ist gegenüber Komplementbildung abgeschlossen, d.h. mit $A \in \mathcal{B}$ ist auch $\bar{A} \in \mathcal{B}$.

Die Boolesche Hierarchie - Alternative Darstellungen

Satz (Die BH - Äquivalenzen)

- ① $BH_k = BH'_k = BH''_k$ für alle $k \geq 0$
- ② $BH = BH' = BH''$
- ③ $BH = BC(NP)$

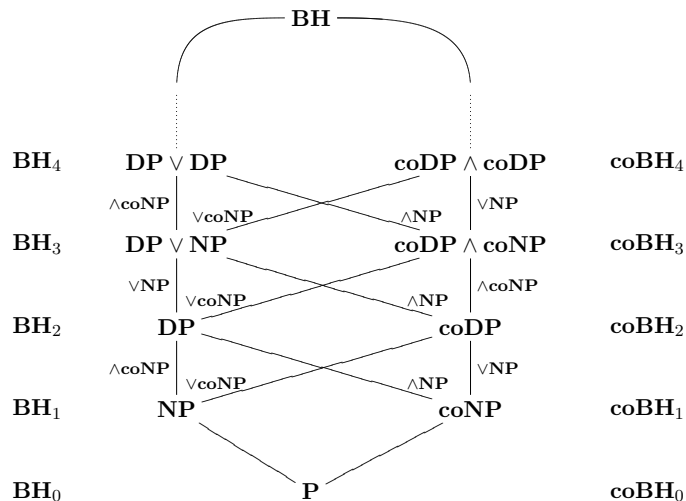
Anmerkung

- (i) $L \in BH_k$
- (ii) $L = (\dots(((L_1 - L_2) + L_3) - L_4) \dots)(-1)^{k-1}L_k$ für Mengen $L_1, \dots, L_k \in NP$
- (iii) $L = (\dots(((L_1 - L_2) + L_3) - L_4) \dots)(-1)^{k-1}L_k$ für Mengen $L_1, \dots, L_k \in NP$ mit $L_k \subseteq L_{k-1} \subseteq \dots \subseteq L_1$
- (iv) $L \in BH'_k$
- (v) $L \in BH''_k$

Teilmengenbeziehungen

Satz (Teilmengenbeziehungen)

- ① $BH_k \subseteq BH_{k+1}$ und $coBH_k \subseteq coBH_{k+1}$
- ② $BH_k \subseteq coBH_{k+1}$ und $coBH_k \subseteq BH_{k+1}$
- ③ $BH_k \vee coNP = coBH_{k+1}$ und $coBH_k \wedge NP = BH_{k+1}$
- ④ $BH_k \cup coBH_k \subseteq BH_{k+1}$ und $BH_k \cup coBH_k \subseteq coBH_{k+1}$



Zusammenbruch

Ein Ergebnis wie das in der polynomiellen Hierarchie:

Satz (Zusammenbruch der Booleschen Hierarchie)

- ① Gilt $BH_k = BH_{k+1}$ für ein $k \geq 0$, so folgt $BH_k = coBH_k = BH_{k+1} = coBH_{k+1} = \dots = BH$.
- ② Gilt $BH_k = coBH_k$ für ein $k \geq 1$, so folgt $BH_k = coBH_k = BH_{k+1} = coBH_{k+1} = \dots = BH$.

Verallgemeinerung von SAT

Als Verallgemeinerung von SAT erhält man vollständige Probleme für jede Stufe der Booleschen Hierarchie:

$$\begin{aligned} L_{\text{BH}_2} &= \{(F_1, F_2) \mid F_1 \in \text{SAT} \text{ und } F_2 \in \overline{\text{SAT}}\} \\ L_{\text{BH}_3} &= \{(F_1, F_2, F_3) \mid (F_1 \in \text{SAT} \text{ und } F_2 \in \overline{\text{SAT}}) \text{ oder } F_3 \in \text{SAT}\} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BH}_1 &= \text{NP} \\ \text{BH}_2 &= \text{NP} \wedge \text{coNP} \\ \text{BH}_3 &= (\text{NP} \wedge \text{coNP}) \vee \text{NP} \end{aligned}$$

Verallgemeinerung von $\overline{\text{SAT}}$

Ebenso definiert man vollständige Probleme für coBH_k :

$$\begin{aligned} L_{\text{coBH}_2} &= \{(F_1, F_2) \mid F_1 \in \overline{\text{SAT}} \text{ oder } F_2 \in \text{SAT}\} \\ L_{\text{coBH}_3} &= \{(F_1, F_2, F_3) \mid (F_1 \in \overline{\text{SAT}} \text{ oder } F_2 \in \text{SAT}) \text{ und } F_3 \in \overline{\text{SAT}}\} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{\text{BH}_2} &= \{(F_1, F_2) \mid F_1 \in \text{SAT} \text{ und } F_2 \in \overline{\text{SAT}}\} \\ L_{\text{BH}_3} &= \{(F_1, F_2, F_3) \mid (F_1 \in \text{SAT} \text{ und } F_2 \in \overline{\text{SAT}}) \text{ oder } F_3 \in \text{SAT}\} \\ &\dots \end{aligned}$$

Ein vollständiges Problem

Satz

$L_{\text{BH}_2} = \{(F_1, F_2) \mid F_1 \in \text{SAT} \text{ und } F_2 \in \overline{\text{SAT}}\}$ ist **DP-vollständig**.

Beweis.

- Sei $L \in \text{DP}$. $L = L_1 \cap L_2$ mit $L_1 \in \text{NP}$, $L_2 \in \text{coNP}$.
- Es gilt $L_1 \leq_m^P \text{SAT}$ und $L_2 \leq_m^P \overline{\text{SAT}}$.
-

$$\begin{aligned} w \in L &\Leftrightarrow w \in L_1 \text{ und } w \in L_2 \\ &\Leftrightarrow f(w) \in \text{SAT} \text{ und } g(w) \in \overline{\text{SAT}} \\ &\Leftrightarrow (f(w), g(w)) \in L_{\text{BH}_2} \end{aligned}$$

□

Mehr vollständige Probleme

Satz

Für jedes $k \geq 1$ gilt

1. L_{BH_k} ist BH_k -vollständig und
2. L_{coBH_k} ist coBH_k -vollständig.

Beweis.

Der Beweis von 1. ist induktiv und verläuft ansonsten völlig analog zu dem vorherigen Beweis. Anschließend folgt 2. dann direkt aus 1. durch Komplementbildung. □

Zwischenbemerkung

Anmerkung

Mit den Problemen $L_{\mathbf{BH}_k}$ ist schnell ersichtlich, dass die Boolesche Hierarchie in der polynomiellen Hierarchie eingebettet ist. Um für ein k -Tupel aus Formeln zu entscheiden, ob $(F_1, \dots, F_k) \in L_{\mathbf{BH}_k}$ gilt, genügt es, SAT als Orakel zu benutzen und maximal k Fragen zu stellen.

Zur Vollständigkeit in der BH...

Ein paar Anmerkungen:

- Wenig natürliche Probleme für die höheren Stufen der Hierarchie bekannt (ähnlich wie bei der PH).
- Auch in den unteren Stufen konnten bisher nur wenige vollständige Probleme gefunden werden.
- Problematisch ist, dass, anders als obiger Beweis es suggerieren mag, es sehr schwierig ist, bekannte Ergebnisse bezüglich der **NP**-Vollständigkeit auf **DP**-Vollständigkeit zu übertragen.
- Hier hilft nun Wagners Lemma...

Entstehung eines Satzes...

- Sei $X \in \mathbf{BH}_k$ beliebig
- Ziel: Irgendwas wie

$$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in B,$$

um zu schliessen, dass B \mathbf{BH}_k -schwierig ist.

- Am liebsten so, dass ein Zusammenhang zur **NP**-Vollständigkeit besteht...

Entstehung eines Satzes...

- Zunächst können wir X anders darstellen:

$$X = Y_1 - Y_2 - \dots - Y_k = \bigcup_{i=1}^m (Y_{2i-1} \cap \overline{Y_{2i}})$$

wobei $Y_1, \dots, Y_k \in \mathbf{NP}$, $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots \supseteq Y_k$ und $k = 2m$ gilt. (Hier nur der Fall für gerade k . Anderer analog.)

- Um das Problem so *umzuformulieren* und diese *Struktur* 'reinzukriegen', ist Kreativität nötig.
- Vergleiche aber das Problem $L_{\mathbf{BH}_2} = \text{SAT} \wedge \overline{\text{SAT}}$

Entstehung eines Satzes...

- Was können wir nun noch ausnutzen?
- Da Y_1, \dots, Y_k in **NP** sind, hilft vielleicht ein **NP**-vollständiges Problem dabei die Probleme 'anzugleichen'. (Auch dies ist ein kreativer Schritt, aber man wollte ja auch was mit NPC machen!)
- Sei A **NP**-vollständig. Dann gibt es Reduktionen $r_1, \dots, r_k \in \mathbf{FP}$ mit $x \in Y_j \Leftrightarrow r_j(x) \in A$ und wegen $Y_1 \supseteq \dots \supseteq Y_k$ zusätzlich $r_{j+1}(x) \in A \Rightarrow r_j(x) \in A$.
- Damit:

$$x \in X \Leftrightarrow |\{i \mid r_i(x) \in A\}| \text{ ist ungerade}$$

Entstehung eines Satzes...

- Nun weiss man nicht so recht weiter und schliesst ab:

$$\begin{aligned} x \in X &\Leftrightarrow |\{i \mid r_i(x) \in A\}| \text{ ist ungerade} \\ &\Leftrightarrow f(r_1(x), \dots, r_k(x)) \in B \end{aligned}$$

- Nun sammelt man noch die nötigen Vorbedingungen ein und kann das Lemma formulieren...

Das Lemma von Wagner

Satz (Wagner)

Sei A eine **NP**-vollständige Menge, B eine beliebige Menge und $k \geq 1$ fest. Existiert eine in Polynomialzeit berechenbare Funktion f derart, dass für alle $v_1, v_2, \dots, v_k \in \Sigma^*$ mit $v_{j+1} \in A \Rightarrow v_j \in A$

$$|\{i \mid v_i \in A\}| \text{ ist ungerade} \Leftrightarrow f(v_1, \dots, v_k) \in B$$

erfüllt ist, so ist B **BH**_k-schwierig.

Anmerkung

$v_{j+1} \in A \Rightarrow v_j \in A$ ist keine weitere (störende) Vorbedingung, sondern eine *Einschränkung* der Vorbedingung!

Vollständigkeit in der BH

Mit dem Lemma von Wagner wollen wir nun ein komplizierteres Problem als Vollständig für die Boolesche Hierarchie nachweisen. Dazu

- Definieren wir das *domatic number problem*
- Zeigen, dass dieses **NP**-vollständig ist
- Definieren die exakten Varianten
- Zeigen, dass dieses **DP**- und **BH**_k-vollständig ist..

Defintion des DNP

Definition (Domatic Number Problem)

Sei G ein ungerichteter Graph. Ein *dominating set* von G ist eine Teilmenge $D \subseteq V(G)$ derart, dass zu jedem Knoten $u \in V(G) \setminus D$ ein Knoten $v \in D$ existiert mit $\{v, u\} \in E$. Die maximale Anzahl an disjunkten dominating sets wird mit $\delta(G)$ bezeichnet.

Die Entscheidungsvariante des *domatic number problems* wird definiert durch:

$$\text{DNP} = \{(G, k) \mid G \text{ ist ein Graph mit } \delta(G) \geq k\}$$

Anmerkung

Es gilt stets $\delta(G) \leq \min - \deg(G) + 1$.

DNP \in NPC - Ziel

Wir wollen nun DNP als **NP**-vollständig nachweisen...

$$3\text{-Colorability} \leq_m^P \text{DNP}$$

Dazu geben wir ein $f \in \mathbf{FP}$ an mit $f(G) = (H, 3)$, wobei

$$G \in 3\text{-Colorability} \implies \delta(H) = 3$$

$$G \notin 3\text{-Colorability} \implies \delta(H) = 2$$

Anmerkung

- $\chi(G) \geq 3$
- G hat keine isolierten Knoten (impliziert $\delta(G) \geq 2$)

DNP \in NPC - Konstruktion

H entsteht aus G indem

- auf jede Kante von G ein neuer Knoten gesetzt wird und
- alle Knoten in G in H verbunden werden (Clique)

Anmerkung

- Jede Kante in G induziert ein Dreieck in H .
- Jedes Paar in G nicht verbundener Knoten ist in H verbunden.

DNP \in NPC - Konstruktion (formal)

Sei $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Nun sei

$$V(H) = V(G) \cup \{u_{i,j} \mid \{v_i, v_j\} \in E(G)\}$$

$$E(H) = \{\{v_i, u_{i,j}\}, \{u_{i,j}, v_j\} \mid \{v_i, v_j\} \in E(G)\} \cup \{\{v_i, v_j\} \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$$

Anmerkung

Wegen $\min - \deg(H) = 2$ und da H keine isolierten Knoten hat, gilt

$$2 \leq \delta(H) \leq 3$$

DNP \in NPC

$G \in 3\text{-Colorability} \implies \delta(H) = 3$

- Seien $C_k = \{v_i \mid v_i \in V(G) \text{ ist mit } k \text{ gefärbt}\}$, $k = 1, 2, 3$
- Seien nun $C'_k = C_k \cup \{u_{i,j} \mid \{v_i, v_j\} \in E(G) \wedge v_i, v_j \notin C_k\}$
- Wegen $C'_k \cap V(G) \neq \emptyset$ für jedes k und da $V(G)$ in H eine Clique induziert, dominiert jedes C'_k $V(G)$ in H .
- Jedes Dreieck $\{v_i, u_{i,j}, v_j\}$ in H enthält ein Element aus jedem C'_k , also dominiert jedes C'_k auch $\{u_{i,j} \mid \{v_i, v_j\} \in E(G)\}$.
- Also: $\delta(H) = 3$.

DNP \in NPC

$G \in 3\text{-Colorability} \iff \delta(H) = 3$

- Sei C'_1, C'_2, C'_3 eine Partition von H in drei dominating sets
- Färbe C'_k mit Farbe k
- Jedes Dreieck $\{v_i, u_{i,j}, v_j\}$ ist jetzt dreigefärbt
- Diese Färbung von $V(H)$ induziert eine legale Färbung von G
- Wegen $2 \leq \delta(H) \leq 3$ folgt damit dann auch $G \notin 3\text{-Colorability} \implies \delta(H) = 2$

Die exakte Variante

Definition (Exact Domatic Number Problem)

Sei $i \in \mathbb{N}$ fest. Das *exact domatic number problem* wird definiert durch:

$$\text{Exact-}i\text{-DNP} = \{(G, k) \mid G \text{ ist ein Graph mit } \delta(G) = k\}$$

Definition (Exact Domatic Number Problem (Generalized Version))

Sei $M_k \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge von k Zahlen. Das *allgemeine exact domatic number problem* wird definiert durch:

$$\text{Exact-}M_k\text{-DNP} = \{G \mid G \text{ ist ein Graph mit } \delta(G) \in M_k\}$$

Nächstes Mal...

Nächstes Mal wollen wir zeigen:

Satz

Sei $k \geq 1$ fest gewählt. Sei $M_k = \{4k + 1, 4k + 3, \dots, 6k - 1\}$.
Dann ist Exact- M_k -DNP **BH** $_{2k}$ -vollständig.

Satz

Exact-5-DNP ist **DP**-vollständig.

Nächstes Mal...

Ausserdem kommt nächstes Mal:

- Die Query Hierarchie
- Die parallele Query Hierarchie
- Der Satz, der diese Hierarchien (und die BH) miteinander verzahnt (mit Beweis; *mind change technique*)
- Der Satz von Kadin (wird nur erwähnt/skizziert; *easy-hard-technique*)

Kurz vor Schluss...

Gleich ist noch Zeit für Fragen, jetzt heißt es erstmal...

Hausaufgaben

...

Ende...

Danke für die Aufmerksamkeit
!