# *Komplexitätstheorie 4*

Montag und Donnerstag
14:15 – 15:45 Uhr
in C-221



## noch mehr Hierarchien

In der
Komplexitätstheorie wie auch der Berechenbarkeitstheorie
kennt und unterscheidet man vielfältige Klassifizierungen durch
Hierarchien von Sprachklassen oder Klassen von Funktionen:

a. Polynomielle Hierarchie (Meyer/Stockmeyer 1973)
*(NP-hart aber nicht mehr in NP)*

b. Arithmetische Hierarchie (auch: Kleene/Mostowski Hierarchie)
*(Rekursionstheorie: Grade der Unentscheidbarkeit)*

c. Analytische Hierarchie (Kleene)
*(Rekursionstheorie: Quantifizierung zweiter Ordnung)*

Nötig dazu das Konzept der Orakel Turingmaschine [A.M. Turing: "Systems of logic based on ordinals", Proc. London Math. Soc., 42 (1939) pp 230-265]

## Die Orakel Turing-Maschine

**Definition:**

Eine Orakel-Turingmaschine $M^A$ ist eine Turingmaschine ($NTM$ oder $DTM$) mit drei zusätzlichen Zuständen „JA“, „NEIN“ und „?“, sowie dem sog. „Orakelband“. Eine Orakel-TM $M^A$ akzeptiert eine Sprache relativ zu dem Orakel $A \subseteq \Sigma^*$, wobei $A$ eine beliebige, auch unentscheidbare Menge sein kann!

Bei Eingabe von $w \in \Sigma^*$ rechnet $M^A$ zunächst wie gewöhnlich. Gerät $M^A$ in den Zustand „?“, so ist der Folgezustand „JA“, falls die augenblickliche Inschrift rechts des LSK in der Menge $A$ ist, andernfalls „NEIN“.

Akzeptiert wird $w$, falls $M^A$ in einen Endzustand gerät.

Wenn statt der Orakelmenge A eine unendliche Zeichenkette $x \in \{0,1\}^\omega$ benutzt wird, so ist diese als charakteristische Funktion einer Menge $B \in I\!N$ anzusehen:

Das n-te bit von $x$ ist 1, genau dann, wenn $n \in B$.



## Turing-Reduktion und many-one Reduktion

**Definition:**

Für $A, B \subseteq \Sigma^*$ sagen wir, dass $A$ rekursiv aufzählbar in $B$ ist, wenn es eine Orakel-Turingmaschine $M^B$ gibt mit $A = L(M^B)$.

Wenn die Orakel-TM $M^B$ stets hält, so nennen wir $A$ Turing reduzierbar auf $B$, notiert als $A <_T B$. (Man sagt auch: $A$ ist rekursiv in $B$.)

$A <_m B$ ist sog. *many-one* Reduktion von $A \subseteq \Sigma^*$ auf $B \subseteq \Gamma^*$, wenn es berechenbare Funktion $g : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt, mit $x \in A \leftrightarrow g(x) \in B$.

Zur Durchführung einer Turing-Reduktion wird sozusagen eine externe, bei verschiedenen Elementen der Sprache $A$ möglicherweise unterschiedliche, Prozedur verwendet ($B$ ist i.A. unendliche Menge). Bei der *many-one* Reduktion, wird immer der gleiche Algorithmus “berechne g” benutzt.

## Turing-Reduktion

**Satz:**

1. Turing-Reduktionen sind transitiv.
2. $<_m$ verfeinert $<_T$, d.h.: $A <_m B$ impliziert $A <_T B$.
3. $<_T$ ist eine echte Vergröberung von $<_m$.

**Beweis:**

1. folgt leicht aus der Definition.
2. einfache Übung.
3. Sei $H$ die Menge, die das Halteproblem codiert.
   Dann gilt für $\overline{H} := \{0,1\}^* \setminus H$ eben $\overline{H} \not<_m H$ aber $\overline{H} <_T H$!
   Jede Menge $A$ ist Turing-reduzierbar auf ihr Komplement: Mit dem Orakel für $A$ fragt man dieses, ob $x \in A$ ist, und akzeptiert bei Antwort **nein** bzw. verwirft bei Antwort **ja**.



## Die Polynomielle Hierarchie (0)

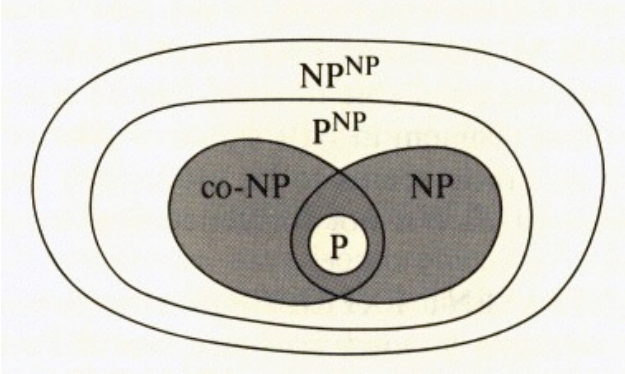
**Definition:**

$$
\begin{aligned}
P^A &:= \{L \subseteq \Sigma^* \mid L = L(M^A) \text{ für eine polynomzeit-beschränkte } \textit{Orakel-}\boldsymbol{DTM}\ M^A\} \\
&= \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ ist } \textbf{deterministisch} \text{ in Polynomzeit Turing-reduzierbar auf } A\} \\
NP^A &:= \{L \subseteq \Sigma^* \mid L = L(M^A) \text{ für eine polynomzeit-beschränkte } \textit{Orakel-}\boldsymbol{NTM}\ M^A\} \\
&= \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ ist } \textbf{nichtdeterministisch} \text{ in Polynomzeit Turing-reduzierbar auf } A\}
\end{aligned}
$$

## Die Polynomielle Hierarchie (1)

**Fakten:**

1. $P^P = P$ und $NP^P = NP$.
2. $NP^A = NP^{\overline{A}}$.
3. $NP \cup co{-}NP \subseteq P^{SAT} \subseteq PSPACE$.
4. $A \in \mathcal{R}ec \rightarrow NP^A \in \mathcal{R}ec$.
5. $P^A \subseteq NP^A$






## *PSPACE* einmal anders

**Satz:**

$$PSPACE \subseteq P^{QBF} \subseteq NP^{QBF} \subseteq NPSPACE = PSPACE$$

also:

$$PSPACE = P^{QBF} = NP^{QBF}$$

**Beweis:**

1. $\subseteq$ Weil $QBF$ vollständig ist für $PSPACE$, kann jedes $L \in PSPACE$ deterministisch in polynomieller Zeit dadurch entschieden werden, dass $L$ auf $QBF$ reduziert wird, und dann das Orakel einmal für "$w \in L$?"befragt wird.
2. $\subseteq$ Das ist trivial, denn $P \subseteq NP$.
3. $\subseteq$ Jede Orakel-$NTM$ $M^{QBF}$ kann durch $PSPACE$-beschränkte $NTM$ simuliert werden, die die Orakelfragen an $QBF$ selbst beantwortet.

## Relativierung

Aus dem letzten Ergebnis folgt, dass sich $P$ und $NP$ relativ zu $QBF$ nicht unterscheiden!

Ist damit auch "$P$=$NP$?"entschieden?
Nein:

**Satz:**

$$\exists B \in \mathcal{R}ec : \; P^B \neq NP^B$$

**Idee:**
Die entscheidbare Sprache $B$ 'diagonalisiert' über alle $DTM$-n und ihre eigenen Anfänge. $B$ wird für jedes $n$ höchstens ein Wort der Länge $n$ enthalten. $L_B := \{0^n \mid \exists w \in B : |w| = n\}$ ist offensichtlich ein Element von $NP^B$.
Zu zeigen ist also nur noch, dass es entscheidbare Sprache $B$ gibt, mit $L_B \notin P^B$.

(Deren Definition ist nicht ganz einfach und in
Papadimitriou: *Computational Complexity* nachzulesen!)



## Die Polynomielle Hierarchie (2)

**Definition:** [Meyer & Stockmeyer, (1973)]

Die *Polynomielle Hierarchie* ist folgende Hierarchie von Sprachfamilien:

1. $\Delta_0(P) := \Sigma_0(P) := \Pi_0(P) = P$.
2. $\Delta_{i+1}(P) := P^{\Delta_i(P)}$ für $i \geq 0$,
3. $\Sigma_{i+1}(P) := NP^{\Sigma_i(P)}$ für $i \geq 0$, und
4. $\Pi_{i+1}(P) := \text{co}-NP^{\Sigma_i(P)}$ für $i \geq 0$, ergibt zusammen:

$$PH := \bigcup_{i \geq 0} \Sigma_i(P)$$

## Eigenschaften

a) $\Delta_1(P) = P$, (weil $\Delta_1(P) := P^P = P$)

b) $\Sigma_{k+1}(P) = NP^{\Pi_k(P)} = NP^{\Delta_k(P)}$,

c) $\Delta_{k+1}(P) = P^{\Pi_k(P)}$,

d) $\Delta_k(P) = \text{co}-\Delta_k(P)$,

e) $P^{\Delta_k(P)} = \Delta_k(P)$,

f) $\Sigma_k(P) \cup \Pi_k(P) \subseteq \Delta_{k+1}(P)$,

g) $\Delta_k(P) \subseteq \Sigma_{k+}(P) \cap \Pi_{k+1}(P)$,

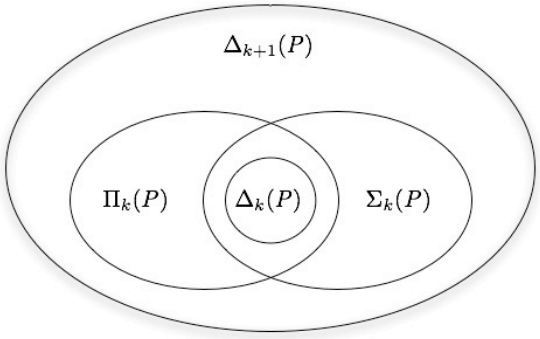
h) alle Stufen sind unter $\cap$, $\cup$ und $<_{\text{pol}}$ abgeschlossen!

i) $\Sigma_k(P) \subseteq \Pi_k(P) \rightarrow \Sigma_k(P) = \Pi_k(P)$

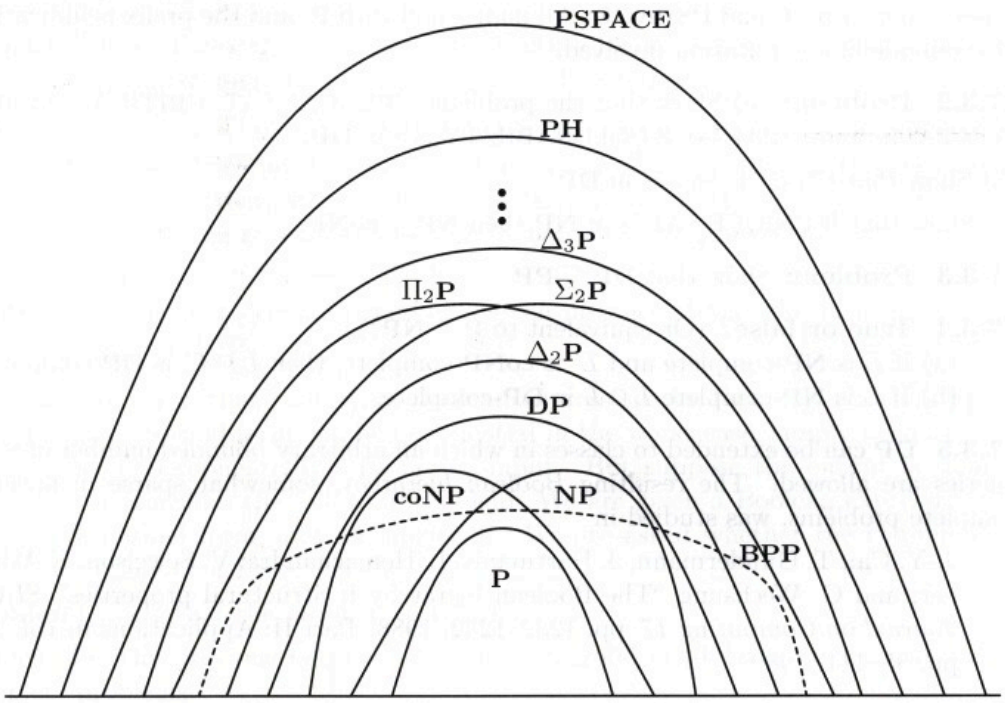


## Die k-te Stufe

*k-te Stufe von polynomieller Hierarchie PH*



## die polynomielle Hierarchie (anschaulich)




( Wir schrieben statt **P** stets ($P$) und statt **coNP** auch co–$NP$ )



## Zielrichtung:

Die Idee dabei: Wenn *downword separation* gilt, dann muss nur die Echtheit der Polynomiellen Hierarchie gezeigt werden, um $P \neq NP$ zu beweisen. Dass das schwierig wird, zeigten die letzten Orakel-Resultate.

*downward separation* $\cong$ *upward equality*...

Beispiel (mit *padding*-Technik):

$$\mathcal{L} = \mathcal{NL} \;\rightarrow\; DSPACE\,(n) = \mathcal{C}s.$$

## *upward equality* und *downward separation*

**Lemma:** (*upward equality*)

$$\exists k \in I\!N : \Sigma_k(P) = \Sigma_{k+1}(P) \;\rightarrow\; \forall j \geq 0 : \Sigma_k(P) = \Sigma_{k+j}(P)$$

**Beweis:** (mit Induktion):

$\Sigma_{k+2}(P) = NP^{\Sigma_{k+1}(P)} = NP^{\Sigma_k(P)} = \Sigma_{k+1}(P) = \Sigma_k(P)$

**Lemma:** (*downward separation*)

$$\exists k \in I\!N : \Sigma_k(P) \subsetneq \Sigma_{k+1}(P) \;\rightarrow\; P \neq NP$$

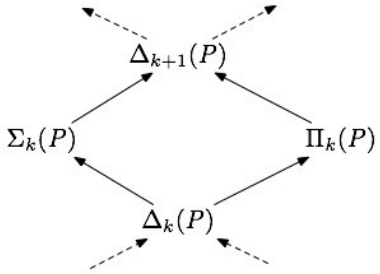
oder allgemeiner:

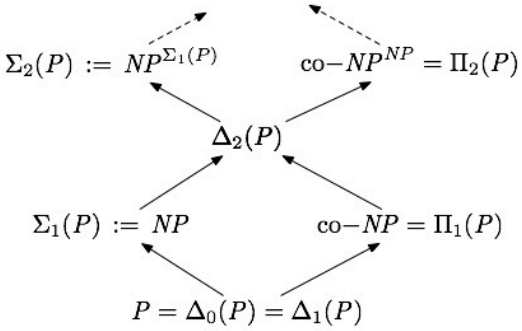
$$\exists k, j \in I\!N : \Sigma_k(P) \subsetneq \Sigma_j(P) \;\rightarrow\; P \neq NP$$



## andere Darstellung der Polynomiellen Hierarchie

*polynomielle Hierarchie*



## *collapsing the PH-hierarchy*

**Folgerung:**

$$P = NP \rightarrow \forall j \geq 0 : \Sigma_1(P) = \Sigma_j(P) = PH$$

**Definition:**
*EQUIV*

**Eingabe:**
Zwei boolesche Formeln $F$ und $G$.

**Frage:**
Sind $F$ und $G$ equivalent?

**Definition:**

$$MINIMAL := \Big\{ F \text{ ist boolesche Formel} \;\Big|\; \text{keine boolesche Formel } G, \text{ die zu } F \text{ equivalent ist, hat weniger Symbole als } F \Big\}$$



## einige Mengen aus *PH*

**Lemma:**

$$EQUIV \in \Pi_1(P) \text{ und } MINIMAL \in \Pi_2(P).$$

Für die Menge *MINIMAL* ist nicht bekannt, ob sie in einer tieferen Stufe der Polynomiellen Hierarchie liegt,
und auch nicht,
ob sie vielleicht sogar vollständig für $\Pi_2(P)$ ist!
Ein Problem in $\Sigma_2(P)$ ist dieses:
Gegeben ein boolscher Ausdruck $A$ in *DNF* und eine Zahl $b$. Besitzt die *KNF* für $A$ höchstens $b$ Klauseln?

Es gibt tatsächlich auch vollständige Sprachen für die $\Sigma$-Stufen der Polynomiellen Hierarchie!

## feste Alternierung

**Definition:**

a) $F_{QSAT_i}$ sei die Menge aller quantifizierten booleschen Formeln in Pränex-Normalform der Art:

$$\exists x_1 \in V_1 \forall x_2 \in V_2 \exists x_3 \in V_3 \cdots Q_i x_i \in V_i \ \Phi,$$

wobei $Q_n := \begin{cases} \forall, & \text{falls } i \text{ gerade,} \\ \exists, & \text{falls } i \text{ ungerade} \end{cases}$ und die sogenannte Matrix $\Phi$ eine boolesche Formel über $\{0, 1, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ in 3-$KNF$ ist. Hierbei ist die Variablenmenge $V$ disjunkt zerlegt in $V = V_1 \uplus V_2 \uplus \cdots \uplus V_i$.

b) Die Menge $QSAT_i$ ist definiert als $QSAT_i := \{w \in F_{QSAT_i} \mid w \text{ besitzt erfüllende Belegung}\}$.

**Satz:**

$QSAT_i$ ist vollständig für $\Sigma_i(P)$ für jedes $i \geq 1$.



## vollständige Sprachen für *PH* ?

**Satz:**

Falls eine Sprache $L$ vollständig für $PH$ ist, dann fällt die Polynomielle Hierarchie bis zu einer festen Höhe zusammen.

**Beweis:** (mit Induktion):

Da $L \in PH$ gilt, gibt es $i \in \mathbb{N}$ mit $L \in \Sigma_i(P)$. Damit gilt für jede Sprache $L' \in \Sigma_{i+1}(P)$ auch $L' <_{\log} L$. Da jedes Level gegenüber Reduktionen abgeschlossen ist, folgt $\Sigma_i(P) = \Sigma_{i+1}(P)$. und damit also $\Sigma_i(P) = \Sigma_j(P)$ für jedes $j \geq i$!

## *PH* und *PSPACE*

**Lemma:**

$PH \subseteq PSPACE$.

Aus $PH = PSPACE$ folgt, dass es ein vollständiges Problem für $PH$ gibt ($PSPACE$ hat solche!) und die Hierarchie $PH$ wird nicht "länger", sondern "kürzer"!

Es gibt Orakel,
für die $PH \neq PSPACE$
und solche,
für die $PH = PSPACE$ gilt!



## Zusammenhang mit *BPP*

Ein weiteres interessantes Resultat ist folgendes Ergebnis:

**Satz:**

Wenn das Erfüllbarkeitsproblem $SAT$ mit booleschem Schaltkreis polynomieller Größe entschieden werden kann, so gilt $PH = \Sigma_2(P)$.

## Exakte Problemvariante zu NP

Im *Cliquen-Problem* wir danach gefragt, ob in einem Graph $G$=($V$,$E$) zu einer Zahl $k$ eine Clique mit mindestens $k$ Knoten existiert.

*Dieses Problem ist in NP*

Im Komplement des *Cliquen-Problems* wir danach gefragt, ob in einem Graph $G$=($V$,$E$) zu einer Zahl $k$ eine Clique mit höchstens $k$ Knoten existiert.

*Dieses Problem ist in co−NP*

Das *exakte Cliquen-Problem* ist die Frage, ob in einem Graph $G$=($V$,$E$) zu einer Zahl $k$ eine Clique mit genau $k$ Knoten existiert.

*Dieses Problem ist in* $DP := NP \wedge co-NP$
*mit*
$NP \wedge co-NP := \{A \cap B \mid A \in NP,\ B \in co-NP\}$.



## die Differenz zu NP

$DP := \{A \cap B \mid A \in NP, B \in \text{co}-NP\}$ bedeutet, dass für $\bar{B} := \Sigma^* \setminus B$ eben $A \cap B = A \setminus \bar{B}$ mit $\bar{B} \in NP$ gilt.

Somit ist

$$DP = \{L_1 \setminus L_2 \mid L_1, L_2 \in NP\}.$$

Die Klasse $DP$ ist gegenüber Durchschnittsbildung abgeschlossen, genauso wie $NP$ und $P$.

Gegenüber Vereinigung (und damit Komplement) ist die Familie $DP$ wahrscheinlich nicht abgeschlossen, aber man kann zunächst die sog.

**Boolesche Hierarchie**, **BH**,

definieren.

## die Boolesche Hierarchie

$$BH_0 := P$$

$$BH_1 := NP$$

$$\vdots$$

$$BH_k := \begin{cases} BH_{k-1} \wedge co{-}NP, & \text{falls } k \geq 2 \text{ gerade.} \\ BH_{k-1} \vee NP, & \text{falls } k \geq 2 \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$BH := \bigcup_{k \geq 0} BH_k$$

Wegen $\emptyset, \Sigma^* \in NP$ und $\emptyset, \Sigma^* \in co{-}NP$, ist

$$BH_{k-1} \subseteq BH_k \quad \text{und} \quad co{-}BH_{k-1} \subseteq co{-}BH_k$$



## Boolescher Abschluss

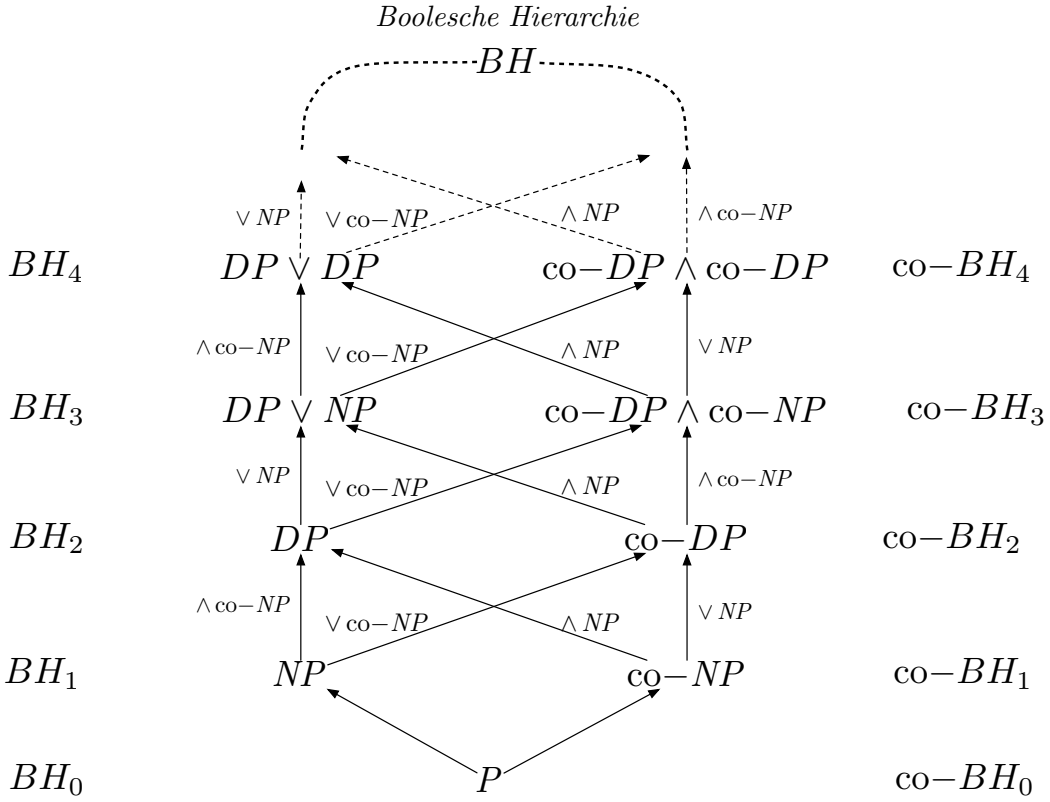
**Definition:**
Zu einer beliebigen Familie von Mengen $C$ sei deren Boolscher Abschluss, $BC(C)$, definiert als kleinste Klasse von Mengen, die $C$ enthält und abgeschlossen ist gegenüber:

1. Vereinigung
2. Durchschnitt
3. Komplementbildung

**Satz:**

$$BH = BC(NP)$$

## Das Gesamtbild als Hasse Diagramm






## Vollständige Probleme für $BH_k$

$L_{BH_2} := \{(F_1,\ F_2) \mid F_1$ ist erfüllbar und $F_2$ ist unerfüllbar$\}$

$L_{BH_3} := \{(F_1,\ F_2,\ F_3) \mid (F_1$ ist erfüllbar und $F_2$ ist unerfüllbar)
oder $F_3$ ist erfüllbar $\}$

$\ldots$

**Satz:**

$L_{BH_2}$ ist $DP$-vollständig $(= BH_2$-vollständig)

**Satz:**

Für $k \geq 1$ gilt:

$L_{BH_k}$ ist $BH_k$-vollständig

## Beweis für $L_{BH_2}$

- $L_{BH_2} \in DP$ ist klar.
- Sei $L \in DP$, *d.h.* $L = L_1 \cap L_2$ für $L_1 \in NP$, $L_2 \in co\text{-}NP$.
  Also gibt es Reduktionen $f_1$, $f_2$ mit
  $x \in L_1 \Leftrightarrow f_1(x) \in SAT$ und $x \in L_2 \Leftrightarrow f_2(x) \in co\text{-}SAT$.

  mit Abbildung $f$, die $x$ auf $(f_1(x), f_2(x))$ abbildet ist dann
  $$\begin{aligned} x \in L &\Leftrightarrow x \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow x \in L_1 \text{ und } x \in L_2 \\ &\Leftrightarrow f_1(x) \in SAT \text{ und } f_2(x) \in co\text{-}SAT \\ &\Leftrightarrow (f_1(x), f_2(x)) \in L_{BH_2} \end{aligned}$$

  die gesuchte Polynomialzeit-Reduktion.

- Für die Sprachen $L_{BH_k}$ geht das dann analog.



## Orakelmaschinen mit verschiedenen Abfragemodi

**Definition:**

Sei $FP$ die Klasse der polynomzeit berechenbaren, totalen Funktionen von $\Sigma^*$ nach $\Sigma^*$

Wir schreiben $A \leq^{\mathrm{p}}_{\mathrm{tt}} B$ genau dann, wenn

$\exists f \in FP : f(x) = \langle \tau, q_1, q_2, \ldots, q_k \rangle$, so dass

$$x \in A \iff \tau(\chi_B(q_1), \chi_B(q_2), \ldots, \chi_B(q_k)) = 1.$$

Hierbei ist $\tau$ eine boolesche Funktion, die über einen Schaltkreis beschrieben und berechnet wird.

Die Zahl $k$ der Orakelfragen ist polynomiell in $|x|$, da $f$ in $FP$ ist!

**Definition:**

Die $\leq^{\mathrm{p}}_{\mathrm{tt}}$ Hülle einer Klasse $\mathcal{C}$ ist:

$$P^{\mathcal{C}}_{\mathrm{tt}} := \{A \mid \exists B \in \mathcal{C} : A \leq^{\mathrm{p}}_{\mathrm{tt}} B$$

## Query Hierarchie

**Definition:**

Die Query-Hierarchie über $NP$ ist definiert durch

$$P^{NP[k]} := \left\{ L \;\middle|\; \begin{array}{l} L = L(M^{SAT}) \text{ für DPOTM } M, \text{ die maximal} \\ k \text{ Turing-Anfragen an } SAT \text{ stellt.} \end{array} \right\}$$

$$P^{NP[O(1)]} := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P^{NP[k]} \quad \text{und} \quad P^{NP[O(\log)]} := \bigcup_{k(\log)} P^{NP[k]}$$

$$P^{NP}_{k-\mathrm{tt}} := \left\{ L \;\middle|\; \begin{array}{l} L = L(M^{SAT}) \text{ für DPOTM } M, \text{ die maximal} \\ k \textit{ truth-table}\text{-Anfragen an } SAT \text{ stellt.} \end{array} \right\}$$



## Boolesche Hierarchie ist in Polynomieller Hierarchie enthalten!

Recht kompliziert zu beweisen ist das folgende Theorem,
aus dem obige Aussage folgt:

**Theorem:**

1. $P^{NP}_{k-\mathrm{tt}} = P^{A[1]}$ für eine $\leq^p_m$-vollständige Menge $A \in BH_k$.
2. $P^{NP[k]} = P^{NP}_{(2^k-1)-\mathrm{tt}}$
3. $BH_k \cup \mathrm{co}{-}BH_k \subseteq P^{NP}_{k-\mathrm{tt}} \subseteq BH_{k+1} \cup \mathrm{co}{-}BH_{k+1}$
4. $BH_{2^k-1} \cup \mathrm{co}{-}BH_{2^k-1} \subseteq P^{NP} \subseteq BH_{2^k} \cup \mathrm{co}{-}BH_{2^k}$

**Korollar:**

$$BH = P^{NP[O(1)]} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P^{NP}_{k-\mathrm{tt}} = BC(NP)$$

## Der Satz von Kadin

**Satz:**

Falls es $k \in I\!N$ gibt, mit $BH_k = \text{co}-BH_k$, dann kollabiert die Polynomielle Hierarche auf der dritten Stufe zusammen, d.h., dann gilt $PH = \Sigma_3 \cap \Pi_3$.

Dies Originalergebnis von Kadin benutzt sog. „Dünne Mengen“ (*sparse sets*) mit Ergebnissen von Yap (1983) unter Verwendung einer Technik, die als „*easy-hard-technique*“ bezeichnet wird. Yap zeigte, diesen Zusammenbruch der Polynomiellen Hierarchie, sobald es eine dünne Menge $S$ gibt, mit co-$NP \subseteq NP^S$.
Spätere Arbeiten von Wagner (1987, 1989) und Chang und Kadin (1991) verbesserten das Ergebnis letztlich zum Zusammenbruch bei $PH = BC(\Sigma_2)$.



## Dünne Mengen

**Definition:**

Eine Menge $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *dünn*, wenn

$$\left| \{ w \in L \,|\, n = |w| \} \right| \leq p(n)$$

für ein Polynom $p(n)$.

Die Menge $B$, mit der $P^B \neq NP^B$ gezeigt wurde, ist eine dünne Menge.
Mahaney zeigte (1982), dass unter der Voraussetzung $P \neq NP$ keine dünne Menge $NP$–schwer sein kann.
Satz (Mahaney):
Wenn $A \in NP^S$ für eine dünne Menge $S$ gilt, dann folgt $A \in P^{NP[\ell og]}$.

Der wichtige Satz für den Beweis von Kadin stammte von Yap (1983):

## Das Lemma von Yap

**Lemma:**

Falls es eine dünne Menge $S$ gibt, mit $co-NP \subseteq NP^S$, dann kollabiert die Polynomielle Hierarche auf der dritten Stufe zusammen, d.h., dann gilt $PH = \Sigma_3 \cap \Pi_3$.

Der Beweis über die sog. *easy-hard technique* verlangt weitere Definitionen und ist hier weggelassen. Die bislang stärkste Kopplung zwischen Boolscher Hierarchie und dem Kollaps der Polynomiellen Hierarchie ist wohl von E. und L. Hemaspaandra & Hempel (1989) gleichfalls Reith & Wagner (2001).



## Das bisher stärkste und allgemeinste Resultat:

E. und L. Hemaspaandra und H. Hempel zeigten 2001:

**Satz:**

$$\forall k > 0 : \forall i > 1 :$$

$$P^{\Sigma_i}_{k-\mathrm{tt}} = P^{\Sigma_i}_{(k+1)-\mathrm{tt}} \Longrightarrow BH_k(\Sigma_i) = \mathrm{co}-BH_k(\Sigma_i)$$

Dazu sei die benutzte Notation erklärt:

**Definition:**

Mit $A_1 - A_2 - \cdots - A_{k-1} - A_k := A_1 - (A_2 - (\cdots - (A_{k-1} - A_k \cdots))$
sei für eine Menge $\mathcal{C}$

$$BH_k(\mathcal{C} := \left\{ L \;\middle|\; \begin{array}{l} L = A_1 - A_2 - \cdots - A_k \text{ für Mengen } A_i \in \mathcal{C} \\ 1 \leq i \leq k \text{ mit } A_k \subseteq A_{k-1} \subseteq \cdots \subseteq A_1 \end{array} \right\}$$

und

$$BH(\mathcal{C}) := BC(\mathcal{C})$$

## die Arithmetische Hierarchie

**Definition:**

Die *Arithmetische Hierarchie* ist folgende Hierarchie von Sprachfamilien:

1. $\Sigma_0 := \Delta_0 := \Pi_0 = \mathcal{R}ec$.
2. $\Sigma_{i+1} := \mathcal{R}e^{\Sigma_i}$ für $i \geq 0$,
3. $\Pi_i := \text{co}-\Sigma_i$ für $i \geq 0$,
4. $\Delta_i := \Sigma_i \cap \Pi_i$ für $i \geq 0$.

**Fakten:**

1. $\Sigma_1 = \mathcal{R}e$
2. $\forall i \geq 0 : \Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$ und $\Pi_i \subseteq \Pi_{i+1}$.
3. $\forall i \geq 0 : \Sigma_i \cup \Pi_i \subseteq \Delta_{i+1}$.
4. $A \in \Sigma_{i+1} \leftrightarrow A \in \mathcal{R}e^{\Sigma_i}$.
5. $\Delta_{i+1} = \mathcal{R}ec^{\Sigma_i}$



## alternative Charakterisierung der Arithmischen Hierarchie

**Definition:**

a) Es gilt $L \in \Sigma_n$ genau dann, wenn es entscheidbares, $n+1$-stelliges Prädikat $R$ gibt, mit

$$L = \{y \mid \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \cdots Q_n x_n : R(y, x_1, \ldots, x_n),$$

wobei $Q_n := \begin{cases} \forall, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \exists, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

b) Es gilt $L \in \Pi_n$ genau dann, wenn es entscheidbares, $n+1$-stelliges Prädikat $R$ gibt, mit

$$L = \{y \mid \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \cdots Q_n x_n : R(y, x_1, \ldots, x_n)$$

wobei $Q_n := \begin{cases} \exists, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \forall, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

## einige Sprachen in der Arithmetischen Hierarchie

**Definition und Einstufung:**

1. $EMPTY := \left\{ M \text{ ist DTM} \;\middle|\; L(M) = \emptyset \right\} \in \Pi_1$,
2. $TOTAL := \left\{ M \text{ ist DTM} \;\middle|\; L(M) \in \mathcal{R}ec \right\} \in \Pi_2$,
3. $FINITE := \left\{ M \text{ ist DTM} \;\middle|\; L(M) \text{ ist endlich} \right\} \in \Sigma_2$,
4. $COFIN := \left\{ M \text{ ist DTM} \;\middle|\; \Sigma^* \setminus L(M) \text{ ist endlich} \right\} \in \Sigma_3$.

**Begründung:**

1. $EMPTY = \{M \mid \forall w \forall t : M \text{ akzeptiert } w \text{ nicht in } t \text{ Schritten}\}$,
2. $TOTAL = \{M \mid \forall w \exists t : M \text{ akzeptiert } w \text{ in } t \text{ Schritten}\}$,
3. $FINITE = \{M \mid \exists n \forall w \forall t : |w| \leq n \text{ oder } M \text{ akzeptiert } w \text{ nicht in } t \text{ Schritten}\}$,
4. $COFIN = \{M \mid \exists n \forall w \exists t : |w| \leq n \text{ oder } M \text{ akzeptiert } w \text{ in } t \text{ Schritten}\}$.



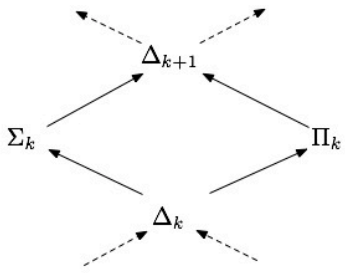
## Arithmetische Hierarchie, anschaulich

*arithmetische Hierarchie*

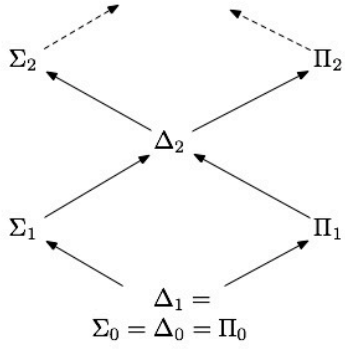
Alle Inklusionen sind echt!

Alle Klassen sind abgeschlossen gegenüber $\cap$, $\cup$ und $<_{\text{pol}}$.

Die Klassen $\Delta_k$ sind dazu gegenüber Komplement abgeschlossen!




$\Delta_k = \Sigma_k \cap \Pi_k$




$\Delta_2 = \Sigma_2 \cap \Pi_2$

$\Delta_1 = \Sigma_1 \cap \Pi_1$

## Alternierendes Akzeptieren

Alternierung ist Verallgemeinerung des Konzepts des Nichtdeterminismus bei Turingmaschinen oder endlichen Automaten!

Bisher ist nichtdeterministisches Akzeptieren existentiell definiert:

$w \in L$ wird akzeptiert,
wenn mindestens eine Erfolgsrechnung existiert!

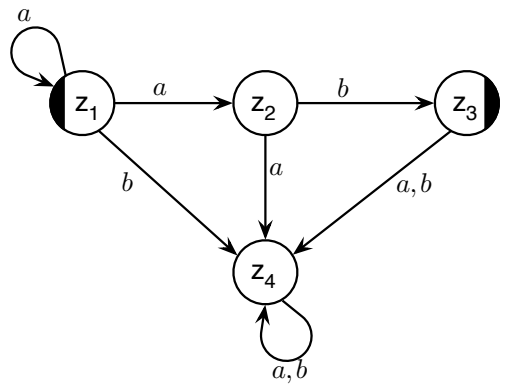
existentiell

$w \in L$ wird akzeptiert,
wenn alle Rechnungen Erfolgsrechnungen sind!

universell

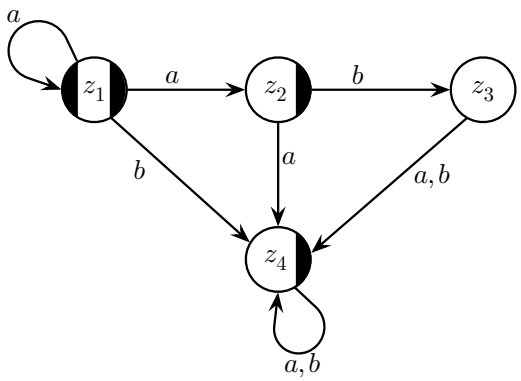


## universelles und existentielles Akzeptieren bei $NFA$




existentiell: $\{a\}^+\{b\}$

universell: $\varnothing$



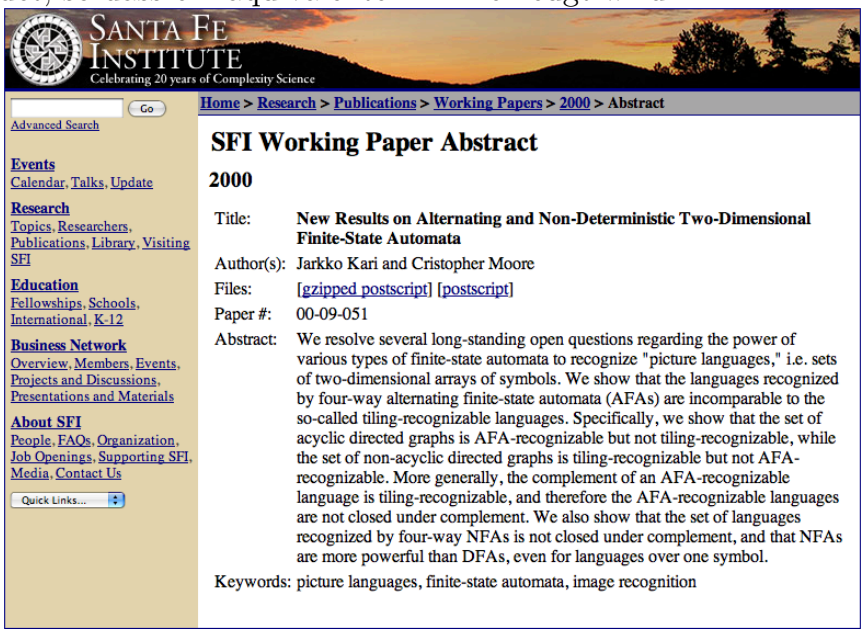

existentiell: (a+b)*

universell: $\{a, b\}^* \setminus \{a\}^+\{b\}$

# $AFA$ = alternierende $NFA$

Alternierende $NFA$ akzeptieren nicht mehr als alle $NFA$:

die Potenzautomatenkonstruktion wird bei den universellen Zuständen variiert angewendet, so dass ein äquivalenter $DFA$ erzeugt wird.



SANTA FE INSTITUTE
Celebrating 20 years of Complexity Science

Home > Research > Publications > Working Papers > 2000 > Abstract

Advanced Search

Events
Calendar, Talks, Update

Research
Topics, Researchers, Publications, Library, Visiting SFI

Education
Fellowships, Schools, International, K-12

Business Network
Overview, Members, Events, Projects and Discussions, Presentations and Materials

About SFI
People, FAQs, Organization, Job Openings, Supporting SFI, Media, Contact Us

Quick Links...

**SFI Working Paper Abstract**

**2000**

Title: **New Results on Alternating and Non-Deterministic Two-Dimensional Finite-State Automata**

Author(s): Jarkko Kari and Cristopher Moore

Files: [gzipped postscript] [postscript]

Paper #: 00-09-051

Abstract: We resolve several long-standing open questions regarding the power of various types of finite-state automata to recognize "picture languages," i.e. sets of two-dimensional arrays of symbols. We show that the languages recognized by four-way alternating finite-state automata (AFAs) are incomparable to the so-called tiling-recognizable languages. Specifically, we show that the set of acyclic directed graphs is AFA-recognizable but not tiling-recognizable, while the set of non-acyclic directed graphs is tiling-recognizable but not AFA-recognizable. More generally, the complement of an AFA-recognizable language is tiling-recognizable, and therefore the AFA-recognizable languages are not closed under complement. We also show that the set of languages recognized by four-way NFAs is not closed under complement, and that NFAs are more powerful than DFAs, even for languages over one symbol.

Keywords: picture languages, finite-state automata, image recognition

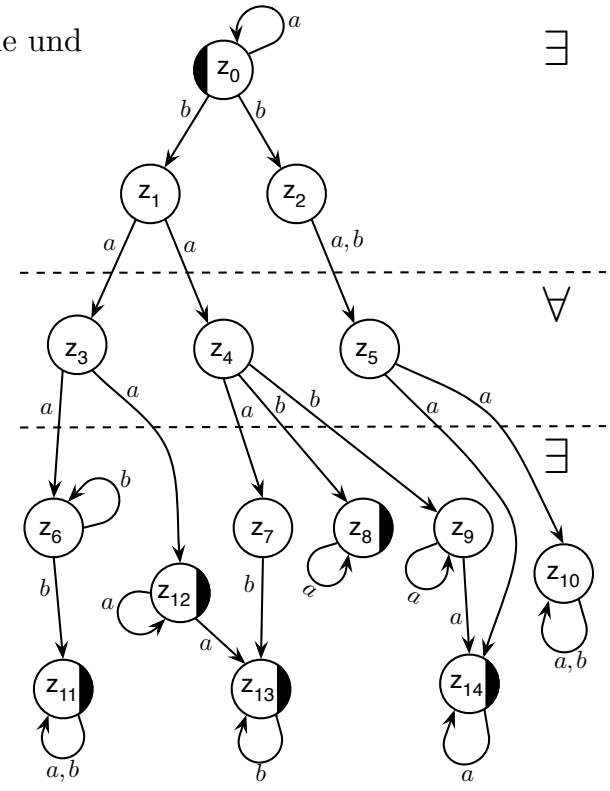
Man kennt auch Arbeiten zu $AFA$, die mit Zeitverhalten gekoppelt sind.



# alternierende Turingmaschinen: $ATM$

Eine ATM hat akzeptierende, nicht akzeptierende sowie sog. existentielle und universelle Zustände.

Ein Zustandswechsel von existentiell zu universell nennt man eine Alternierung.
Die Zeit, die eine Berechnung zum Akzeptieren eines Wortes $w$ benötigt wird gemessen in der Tiefe des alternierenden Akzeptierungsbaums:




$L = a^*baba^+ \cup a^*baab^+$

## ein Beispiel zur alternierenden Akzeptanz

**Definition:**

*USAT* := $\{F \mid F$ *ist boolesche Formel mit genau einer erfüllenden Belegung*$\}$

*USAT* ist von *ATM* $\exists\forall$-akzeptierbar!

rate existentiell eine Variablenmenge $X$

rate universell eine Variablenmenge $Y \neq X$

prüfe ob $F(X) = \mathit{true}$ und $F(Y) = \mathit{false}$ gilt.
wenn ja, akzeptiere Belegung $X \cup Y$



## zur Erinnerung: Charakterisierung der Arithmischen Hierarchie

**Definition:**

a) Es gilt $L \in \Sigma_n$ genau dann, wenn es entscheidbares, $n+1$-stelliges Prädikat $R$ gibt, mit

$$L = \{y \mid \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \cdots Q_n x_n : R(y, x_1, \ldots, x_n),$$

wobei $Q_n := \begin{cases} \forall, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \exists, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

b) Es gilt $L \in \Pi_n$ genau dann, wenn es entscheidbares, $n+1$-stelliges Prädikat $R$ gibt, mit

$$L = \{y \mid \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \cdots Q_n x_n : R(y, x_1, \ldots, x_n)$$

wobei $Q_n := \begin{cases} \exists, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \forall, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

## Die Alternierungsklassen

**Definition:**

1. $ATIME(t)$ := Familie von Sprachen, die von $t$-zeitbeschränkter $ATM$ akzeptiert werden,
2. $ASPACE(s)$ := Familie von Sprachen, die von $s$-platzbeschränkter $ATM$ akzeptiert werden,
3. $ATIME - SPACE(t, s)$ := Familie von Sprachen, die von simultan $t$-zeitbeschränkter und $s$-platzbeschränkter $ATM$ akzeptiert werden,
4. $ATIME - ALT(t, a)$ := Familie von Sprachen, die von simultan $t$-zeitbeschränkter und $a$-alternierungsbeschränkter $ATM$ akzeptiert werden,
5. $AALT - SPACE(a, s)$ := Familie von Sprachen, die von simultan $a$-alternierungsbeschränkter und $s$-platzbeschränkter $ATM$ akzeptiert werden.



## Die Alternierungs-Einstufung:

$$
\begin{array}{ccccc}
EXPTIME & = & DTIME\left(2^{n^{O(1)}}\right) & = & ASPACE\left(n^{O(1)}\right) \\
\bigcup| & & & & \\
PSPACE & = & DSPACE\left(n^{O(1)}\right) & = & ATIME\left(n^{O(1)}\right) \\
\bigcup| & & & & \\
P & = & DTIME\left(n^{O(1)}\right) & = & ASPACE\left(\log n\right) \\
\bigcup| & & & & \\
L & = & DSPACE\left(\log n\right) & \supseteq & ATIME\left(\log n\right)
\end{array}
$$

Das alles folgt aus folgenden Einzelergebnissen:

**Satz:**

$DSPACE\big(f(n)\big) \subseteq ATIME\left(\big(f(n)\big)^2\right).$

## Beweisidee

Wenn $L \in DSPACE(f(n))$ ist, dann hat jedes $w \in L$ eine akzeptierende Rechnung einer Länge $2^{O(f(n))}$. Eine rekursive Prozedur prüft nun die Erreichbarkeit einer Endkonfiguration von der Startkonfiguration:

$\beta$ ist von $\alpha$ in höchstens $2^{t+1}$ Schritten erreichbar, wenn es eine Konfiguration $\gamma$ gibt, für die gilt:

a) $\gamma$ ist in $2^t$ Schritten von $\alpha$ aus erreichbar

und

b) $\beta$ ist in $2^t$ Schritten von $\gamma$ aus erreichbar.

Für platzkonstruierbare Funktion $f$ können $f(n)$ Speicherzellen markiert werden und in diesem Platz

***existentiell*** die Konfiguration $\gamma$ geraten werden.

Dann werden die Eigenschaften a) und b) ***universell*** verifiziert.

Die Rekursionstiefe ist $O(f(n))$ und in jedem Level ist die Zeit ebenfalls $O(f(n))$ und damit gilt $DSPACE(f(n)) \subseteq ATIME(f^2(n))$.



## noch zum Beweis

Sollte $f$ nicht platzkonstruierbar sein, so rät die $ATM$ ***existentiell*** eine unäre Darstellung eines Wertes $f(n) = 1, 2, 3, \ldots$.wenn die $ATM$ dann $w$ akzeptiert, so benötigt sie ebenfalls nur eine Tiefe des Akzeptierungsbaums von $O(f^2(n))$.

**Folgerung:**

Sei $f(n) \geq \log n$, dann gilt:

$$DSPACE(f(n)) \subseteq ATIME - SPACE\left(\left(f(n)\right)^2, f(n)\right)$$

## weitere Ergebnisse (ohne Beweis)

**Proposition:**

Sei $t(n) \geq \log n$, dann gilt:

$$ATIME\,(t(n)) \subseteq DSPACE\,(t(n))$$

**Proposition:**

Sei $s(n) \geq \log n$, dann gilt:

$$ASPACE\,(s(n)) \subseteq DTIME\left(2^{O(s(n))}\right)$$

**Proposition:**

Sei $t(n) \geq \log n$, dann gilt:

$$DTIME\,(t(n)) \subseteq ASPACE\,(\log(t(n)))$$



## eine neue Hierarchie?

Das Hauptergebnis war:

Alternierende Polynomzeit = polynomieller Platz

**Definition:**

Eine $A\Sigma_k$- (bzw. $A\Pi_k$-) ATM ist eine ATM, die in existentiellen (bzw. universellen) Zuständen beginnt, und höchstens $(k-1)$-mal alterniert.

Die *Alternierungs Hierarchie* ist folgende Hierarchie von Sprachfamilien:

1. $A\Sigma_i(P) := \Big\{ L \Big| L$ wird von einer $A\Sigma_i$-$ATM$ in Polynomzeit akzeptiert$\Big\}$,
2. $A\Pi_i(P) := \Big\{ L \Big| L$ wird von einer $A\Pi_i$-$ATM$ in Polynomzeit akzeptiert$\Big\}$.

## wirklich eine neue Hierarchie?

Offensichtlich gilt:

**Lemma:**

$$A\Sigma_i(P) = \text{co}-A\Pi_i(P)$$

$$A\Sigma_i(P) \subseteq A\Sigma_{i+1}(P)$$

Was sind das für Klassen?

$$A\Sigma_0(P) = P$$

$$A\Sigma_1(P) = NP$$

$$A\Sigma_2(P) = \ ?$$



## Nix Neues durch Alternierung!

**Satz:**

$$\forall k \geq 0 : A\Sigma_k(P) = \Sigma_k(P)$$

$$\forall k \geq 0 : A\Pi_k(P) = \Pi_k(P)$$

Alternierungs Hierarchie = Polynomielle Hierarchie

# Wie geht's weiter

- logarithmische Alternierungsklassen
- mehr zu Schaltkreisen
- Kolmogorov Komplexität
- Mehr zu NP-Vollständigkeitsbeweisen durch Reduktionen
- NC (Nicks Class) und logarithmische parallele Berechnungen
- Randomisierte Berechnungen
- Approximationsverfahren