Automaten und Komplexität
Lösung zu Aufgabenblatt 1

Sören Glimm, Matthias Jantzen, Georg Zetzsche

10. Mai 2006

1 Aufgabenstellung

Gegeben sind Bauklötze der Größe 1x1x2. Wieviele verschiedene Türme mit der Grundfläche 2x2 und der Höhe n kann man daraus bauen? Auch Türme, die sich nur durch Drehung/Spiegelung voneinander unterscheiden sollen getrennt gezählt werden.

Einen Turm wie in der Aufgabenstellung nennen wir "vollständig". Einen Turm, der durch Hinzufügen eines "liegenden" Steins an der vorderen, oberen Kante zu einem vollständigen Turm wird, nennen wir "unvollständig". Die Höhe eines unvollständigen Turmes sei die Höhe des vollständigen Turmes, den man durch Hinzufügen eines Steins erhält.

2 Aufstellen der Rekurrenzgleichung

f_n sein die gesuchte Anzahl der vollständigen Türme, g_n sei die Anzahl der unvollständigen Türme.

Wie kann das obere Ende eines vollständigen Turms der Höhe n aussehen ($n \geq 2$)? Es kann

- Aus 4 aufrechten Steinen bestehen. Der Rest bildet dann einen vollständigen Turm der Höhe $n-2$.
- Aus 2 liegenden Steinen bestehen. Diese können quer oder längs liegen. Der Rest bildet dann einen vollständigen Turm der Höhe $n-1$.
- Aus 2 aufrechten und einem liegenden Stein bestehen. Dafür gibt es 4 Möglichkeiten. Der Rest bildet dann einen (gedrehten) unvollständigen Turm der Höhe $n-1$.

Das obere Ende eines unvollständigen Turms besteht entweder aus zwei aufrechten oder einem liegenden Stein. Das ergibt die folgenden Rekurrenzgleichungen:

$$f_n = f_{n-2} + 2f_{n-1} + 4g_{n-1} \qquad \text{für } n \geq 2 \tag{1}$$
$$g_n = f_{n-1} + g_{n-1} \qquad \text{für } n \geq 2 \tag{2}$$

Die Startwerte sind

$$f_0 = 1 \qquad f_1 = 2 \qquad g_0 = 0 \qquad g_1 = 1 \tag{3}$$

Wie üblich setze ich

$$f_n = g_n = 0 \qquad \text{für } n < 0 \tag{4}$$

Will man die Startwerte in die Rekurrenzgleichung integrieren, ergibt sich durch Ausprobieren

$$f_n = f_{n-2} + 2f_{n-1} + 4g_{n-1} + [n = 0] \tag{5}$$
$$g_n = f_{n-1} + g_{n-1} \tag{6}$$

3 Erzeugende Funktion

Die Potenzreihen $F(z)$ und $G(z)$ werden gebildet, indem f_n bzw. g_n als Koeffizienten benutzt werden.

$$F(z) := \sum f_n z^n = \sum f_{n-2} z^n + 2 \sum f_{n-1} z^n + 4 \sum g_{n-1} z^n + \sum [n = 0] \tag{7}$$
$$= z^2 F(z) + 2zF(z) + 4zG(z) + 1 \tag{8}$$
$$G(z) := \sum g_n z^n = \sum f_{n-1} z^n + \sum g_{n-1} z^n \tag{9}$$
$$= zF(z) + zG(z) \tag{10}$$

Die letzte Gleichung wird jetzt so umgestellt, dass sie in die davor eingesetzt werden kann:

$$G(z) = \frac{zF(z)}{1 - z} \tag{11}$$
$$F(z) = z^2 F(z) + 2zF(z) + \frac{4z^2 F(z)}{1 - z} + 1 \tag{12}$$

($G(z)$ kann ab jetzt ignoriert werden, da ja nur eine Formel für vollständige Türme gesucht ist) Das ganze nach $F(z)$ auflösen:

$$(1 - 2z - z^2 - \frac{4z^2}{1-z})F(z) = 1 \tag{13}$$

$$(1 - z - 2z + 2z^2 - z^2 + z^3 - 4z^2)F(z) = 1 - z \tag{14}$$

$$(1 - 3z - 3z^2 + z^3)F(z) = 1 - z \tag{15}$$

$$F(z) = \frac{1-z}{1 - 3z - 3z^2 + z^3} \tag{16}$$

4 Partialbruchzerlegung

Sei $q(z) := 1 - 3z - 3z^2 + z^3$ der Nenner von $F(z)$. Für das gespiegelte Polynom gilt $q^R(z) = q(z)$ mit den Nullstellen -1, $2 + \sqrt{3}$ und $2 - \sqrt{3}$, weswegen sich $q^R(z)$ (und $q(z)$) sich also wie folgt schreiben lässt:

$$q(z) = (1 - (-1)z)(1 - (2 + \sqrt{3})z)(1 - (2 - \sqrt{3})z) \tag{17}$$

und setze an:

$$F(z) = \frac{1-z}{q(z)} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1 - (2+\sqrt{3})z} + \frac{c}{1 - (2-\sqrt{3})z} \tag{18}$$

Auf den Hauptnenner bringen:

$$\begin{aligned} 1 - z = {} & (1 - 4z + z^2)a \\ & + (1 - (1 - \sqrt{3})z - (2 - \sqrt{3})z^2)b \\ & + (1 - (1 + \sqrt{3})z - (2 + \sqrt{3})z^2)c \end{aligned} \tag{19}$$

Koeffizientenvergleich ($1 \cdot z^0$, $-1 \cdot z^1$, $0 \cdot z^2$):

$$1 = a + b + c \tag{20}$$

$$-1 = -4a - (1 - \sqrt{3})b - (1 + \sqrt{3})c \tag{21}$$

$$0 = a - (2 - \sqrt{3})b - (2 + \sqrt{3})c \tag{22}$$

$$\text{aus } (22) - (21): \; 1 = 5a - b - c \tag{23}$$

$$\text{oder: } b + c = 5a - 1 \tag{24}$$

$$\text{aus } (23) - (20): \; a = \frac{1}{3} \tag{25}$$

Der Rest folgt durch Einsetzen und weiteres, übliches Ausrechnen.

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist dann:

$$a = \frac{1}{3} \qquad b = \frac{1}{6}(2 + \sqrt{3}) \qquad c = \frac{1}{6}(2 - \sqrt{3}) \tag{26}$$

5 Angeben der Potenzreihe

Durch Einsetzen erhält man

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-(2+\sqrt{3})z} + \frac{c}{1-(2-\sqrt{3})z} && (27)\\
&= a\sum(-1)^n z^n + b\sum(2+\sqrt{3})^n z^n + c\sum(2-\sqrt{3})^n z^n && (28)\\
&= \sum\left(a(-1)^n + b(2+\sqrt{3})^n + c(2-\sqrt{3})^n\right) z^n && (29)\\
&= \frac{1}{6}\sum\left(2(-1)^n + (2+\sqrt{3})^{n+1} + (2-\sqrt{3})^{n+1}\right) z^n && (30)
\end{aligned}
$$

Und somit ist

$$
f_n = \frac{1}{6}\left(2(-1)^n + (2+\sqrt{3})^{n+1} + (2-\sqrt{3})^{n+1}\right) \qquad (31)
$$

6 Probe

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \frac{1}{6}(2+2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}) = \frac{6}{6} = 1 && (32)\\
f_1 &= \frac{1}{6}(-2+(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2) = \frac{12}{6} = 2 && (33)\\
f_2 &= \frac{1}{6}(2+(2+\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^3) = \frac{54}{6} = 9 && (34)\\
f_3 &= \frac{1}{6}(-2+(2+\sqrt{3})^4+(2-\sqrt{3})^4) = 32 && (35)
\end{aligned}
$$

Die letzte Zahl ist nicht sofort als richtig zu erkennen, stimmt aber auch!