Theoretische Fundierung von Agentensystemen

Algebraische Petrinetze

Michael Köhler

koehler@informatik.uni-hamburg.de

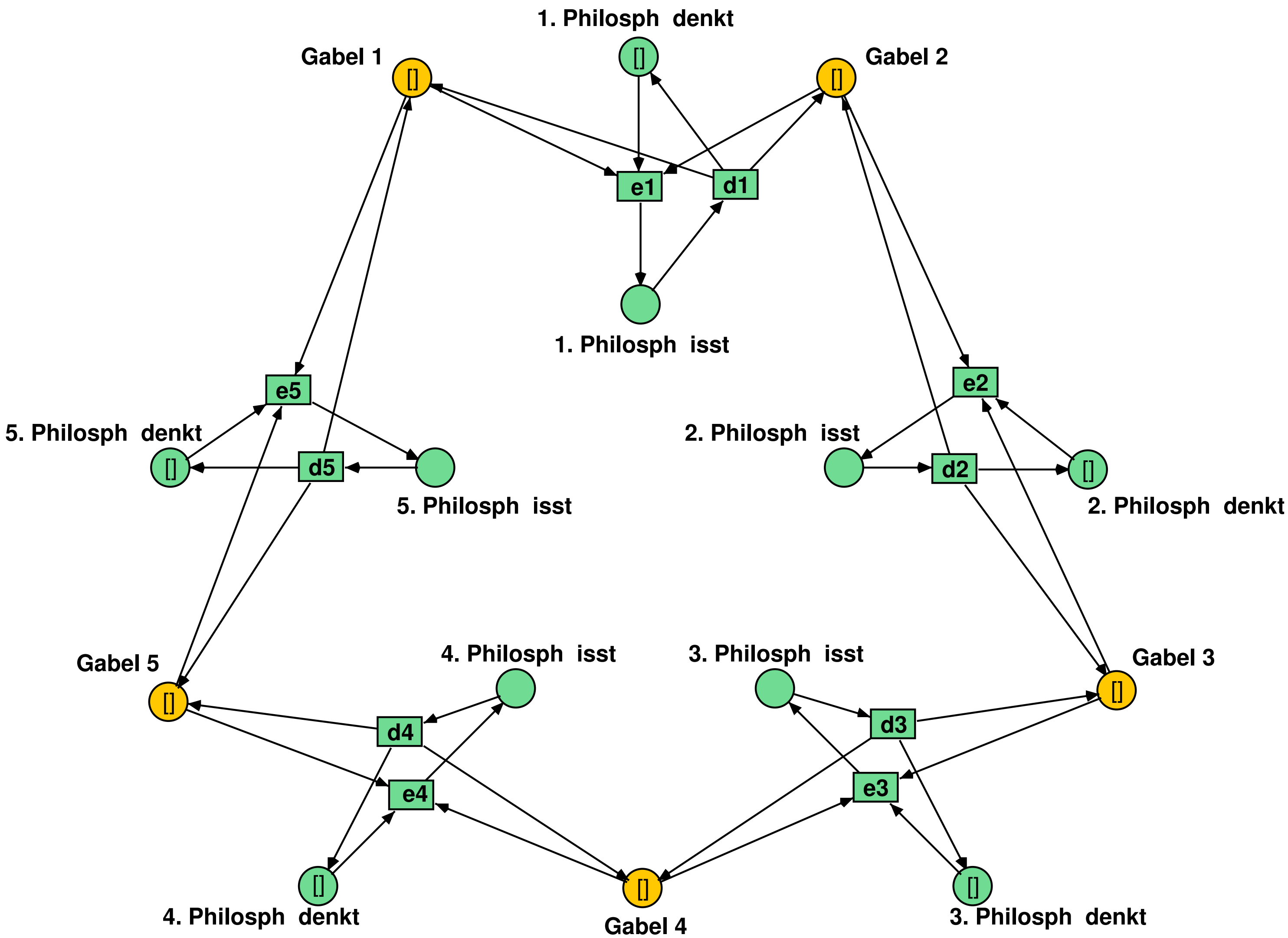
University of Hamburg, Department of Computer Science
Vogt-Kölln-Straße 30, D-22527 Hamburg

Formale Ansätze

- Bislang: Anonyme Marken ohne Struktur
- Im Folgenden: Komplexere Datentypen

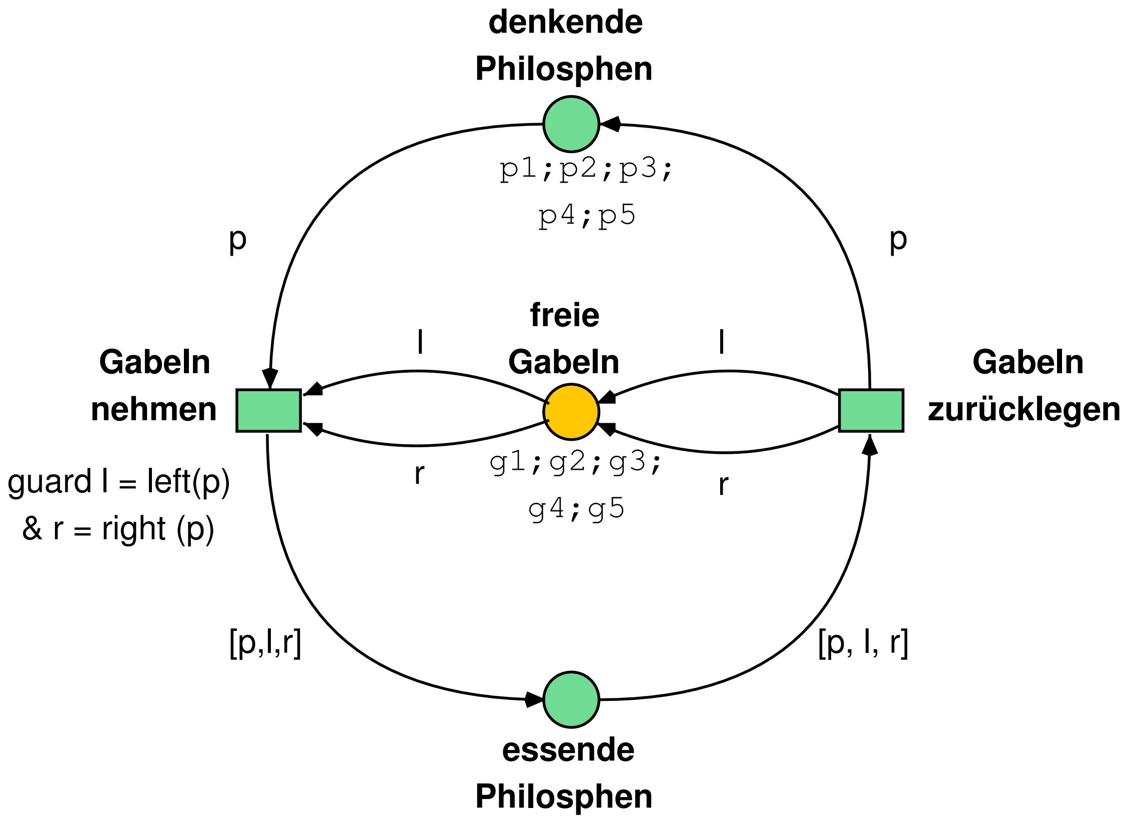
Strukturähnlichkeiten

Das Fünf-Philosophen-Problem als S/T-Petrinetz:



Gefärbtes Netz

Das Fünf-Philosophen-Problem als gefärbtes Petrinetz:



Signaturen und Algebren

- Eine *Signatur* $\Sigma = (K, \Omega)$ besteht aus einer endlichen Menge an Sorten K und einer endlichen Menge an Operatoren Ω.
- Eine Σ-*Algebra* $A = ([\![K]\!]_A, [\![\Omega]\!]_A)$ zu Σ besteht aus einer (disjunkten) Trägermengenfamilie

$$[\![K]\!]_A = \{[\![k]\!]_A\}_{k \in K}$$

und einer Funktionenfamilie

$$[\![\Omega]\!] = \{ \quad [\![\omega]\!]_A : [\![k_1]\!]_A \times \cdots \times [\![k_n]\!]_A \to [\![k]\!]_A \mid \omega \in \Omega_{k_1 \cdots k_n, k} \}_{k_1 \cdots k_n, k}.$$

Terme

Gegeben: Signatur $\Sigma = (K, \Omega)$ und eine Familie $X = \{X_k\}_{k \in K}$ disjunkter Variablenmengen.

- *Terme der Sorte* k: $\mathbb{T}_\Sigma^k(X)$
  1. Für alle Variablen $x_k \in X_k$ gilt $x_k \in \mathbb{T}_\Sigma^k(X)$.
  2. Für alle Konstanten $\omega : \lambda \to k$ gilt $\omega \in \mathbb{T}_\Sigma^k(X)$.
  3. Sei $\omega : k_1 \cdots k_n \to k$ und $t_i \in \mathbb{T}_\Sigma^{k_i}(X)$ für alle $1 \leq i \leq n$, dann gilt $\omega(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{T}_\Sigma^k(X)$.
- *Terme*: $\mathbb{T}_\Sigma(X) := \bigcup_{k \in K} \mathbb{T}_\Sigma^k(X)$
- *Grundterme*: $\mathbb{T}_\Sigma := \bigcup_{k \in K} \mathbb{T}_\Sigma^k$ mit $\mathbb{T}_\Sigma^k := \mathbb{T}_\Sigma^k(\emptyset)$

Spezifikation

Eine *Datentyp-Spezifikation* $\mathcal{D} = (\Sigma, X, E)$ besitzt

1. eine Signatur $\Sigma = (K, \Omega)$,
2. eine Variablenfamilie $X = \{X_k\}_{k \in K}$
3. und eine Menge E von Axiomen.

Ein *Axiom* $e \in E$ der Sorte k ist ein Termpaar:

$$e = (w_1, w_2) \in \mathbb{T}_\Sigma^k(X) \times \mathbb{T}_\Sigma^k(X)$$

Ein Axiom $e = (w_1, w_2)$ wird $w_1 = w_2$ notiert.

Beispiel

Die Sorte *Nat* der natürlichen Zahlen als Gleichungsspezifikation in MAUDE-Syntax:

```
fmod NAT is
  sort Nat .
  op 0 : -> Nat .
  op suc : Nat -> Nat .
  op _+_: Nat Nat -> Nat .

  vars M N : Nat .
  eq 0 + N = N .
  eq suc(M) + N = suc(M + N) .
endfm
```

Belegung

Eine *Variablenbelegung* $\alpha : X \to A$ ist eine Familie $\{\alpha_k\}_{k \in K}$ von Abbildungen $\alpha_k : X_k \to [\![k]\!]$.

Jede Variablenbelegung α induziert die Auswertung $\overline{\alpha} : \mathbb{T}_\Sigma(X) \to A$ auf Termen:

1. $\overline{\alpha}(x_k) = \alpha(x_k)$ für $x_k \in X_k$.
2. $\overline{\alpha}(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = [\![\omega]\!](\overline{\alpha}(t_1), \ldots, \overline{\alpha}(t_n))$ für $\omega(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{T}_\Sigma^k(X)$.

Theorie

Die Gültigkeit eines Axioms $(M = N) \in E$ der Spezifikation $\mathcal{D} = (\Sigma, X, E)$ unter einer Belegung α ist definiert durch:

$$A, \alpha \models (M = N) \iff \alpha(M) = \alpha(N)$$

Ein Axiom e ist gültig in der Algebra A, gdw. es in allen Belegungen α gültig ist.

Eine Σ-Algebra A, für die alle Axiome gültig sind, heißt *$\mathcal{D}$-Theorie*.

Modelle

Eine Signatur Σ generiert die *Kategorie* Σ-Alg. Objekte sind Σ-Algebren; ein Σ-Algebra-Morphismus $h : A \to B$ ist eine Familie

$$h = \{h_k : [\![k]\!]_A \to [\![k]\!]_B\}_{k \in K},$$

mit der Kommutativität:

$$\begin{array}{ccc}
\bar{a} & \xrightarrow{[\![\omega]\!]_A} & [\![\omega]\!]_A(\bar{a}) \\
{\scriptstyle h_{\bar{k}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h_{\bar{k}}} \\
h_{\bar{k}}(\bar{a}) & \xrightarrow{[\![\omega]\!]_B} & \begin{array}{c}[\![\omega]\!]_B(h_{\bar{k}}(\bar{a})) = \\ h_k([\![\omega]\!]_A(\bar{a}))\end{array}
\end{array}$$

Dabei sei $h_{\bar{k}}(\bar{a}) = (h_{k_1}(a_1), \ldots h_{k_n}(a_n))$.

Initiale Algebra

Die initiale Algebra ist in die *Termalgebra* $T(\Sigma)$. Sie interpretiert jeden Operator ω in Σ durch sich selbst:

$$[\![\omega]\!]_{T(\Sigma)}(t_1, \ldots, t_n) = \omega(t_1, \ldots, t_n)$$

Die Termalgebra ist das *initiale Objekt* der Kategorie Σ-Alg, d.h. zu jeder Σ-Algebra A existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $h : T(\Sigma) \to A$.

Die Termalgebra ist minimal und enthält keine trivialen Gleichungen.

Gefärbte Marken

Sei $N = (P, T, F)$ ein Petrinetz.

- Stellentypisierung $d : P \to \mathcal{C}$ mit $C \subseteq K$
- Gefärbte Marke: $c \in \mathbb{T}_{\Sigma}^{cd(p)}$ für $d(p) \in \mathcal{C}$.
- Multimengensorte: $MS(C) \in K$ für alle $C \in \mathcal{C}$.
- Kanteninschrift: $W(f) \in \mathbb{T}_{\Sigma,E}^{MS(d(p))}(X)$ für $f = (p, t)$ oder $f = (t, p)$.

Algebraische Petrinetze

Ein *algebraisches Netz* ist das Tupel

$$APN = (\mathcal{D}_C, N, d, W, G, I_0)$$

- $\mathcal{D}_C = (\Sigma, X, E)$ mit $\Sigma = (\mathcal{C}, \Omega)$ ist die Farbspezifikation.
- $N = (P, T, F)$ ist ein Petrinetz.
- $d : P \to \mathcal{C}$ ist die Stellentypisierung.
- $G : T \to \mathbb{T}^{bool}_{\Sigma,E}(X)$ ist die Aktivierungsbedingung.
- $W : F \to \mathbb{T}_{\Sigma,E}(X)$ ist die Kanteninschrift mit $W(f) \in \mathbb{T}^{MS(d(p))}_{\Sigma,E}(X)$.
- $I_0 : P \to \mathbb{T}_{\Sigma,E}$ ist der initiale Ausdruck mit $I_0(p) \in \mathbb{T}^{MS(d(p))}_{\Sigma,E}(\emptyset)$.

Schaltregel

Eine Transition t heißt in der Markierung M *aktiviert* unter der Variablenzuweisung $\alpha : X \to [\![K]\!]_A$, gdw. gilt:

1. $\overline{\alpha}(G(t)) =$ true und
2. $M(p) \geq \overline{\alpha}(W(p,t))$ für alle $p \in P$.

Die *Nachfolgemarkierung* ergibt sich als:

$$M'(p) = M(p) - \overline{\alpha}(W(p,t)) + \overline{\alpha}(W(t,p))$$

(Dabei ist $\overline{\alpha}(W(p,t))$ die Auswertung der Kantenausdrücke durch Belegung der Variablen.)

Beispielnetz: 5 Philosophen

Algebra $\mathcal{D}_C = (\Sigma, X, E)$ mit $\Sigma = (\mathcal{C}, \Omega)$:

$$\mathcal{C} = \{\text{PHIL}, \text{GABEL}, \text{PHIL} \times \text{GABEL} \times \text{GABEL}, \text{BOOL}\}$$

$$\begin{array}{lcll} \Omega_{\lambda,\text{PHIL}} & = & \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} & \Omega_{\lambda,\text{BOOL}} = \{\text{false}, \text{true}\} \\ \Omega_{\lambda,\text{GABEL}} & = & \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\} & \Omega_{\text{BOOL}^2,\text{BOOL}} = \{\wedge\} \\ \Omega_{\text{PHIL},\text{GABEL}} & = & \{\mathit{left}, \mathit{right}\} & \end{array}$$

$$X_{\text{PHIL}} = \{p\}, X_{\text{GABEL}} = \{l, r\}$$

$$E_{\text{GABEL}} = \{\mathit{left}(p_1) = g_1, \mathit{left}(p_2) = g_2, \ldots, \mathit{left}(p_5) = g_5,$$
$$\mathit{right}(p_1) = g_2, \mathit{right}(p_2) = g_3, \ldots, \mathit{right}(p_5) = g_1\}$$

Netzstruktur $N = (P, T, F)$: $P = \{\mathsf{dP}, \mathsf{eP}, \mathsf{fG}\}$, $T = \{\mathsf{Gn}, \mathsf{Gz}\}$ und $F = \{(\mathsf{dP}, \mathsf{Gn}), (\mathsf{fG}, \mathsf{Gn}), (\mathsf{Gn}, \mathsf{eP}), (\mathsf{eP}, \mathsf{Gz}), (\mathsf{Gz}, \mathsf{dP}), (\mathsf{Gz}, \mathsf{fG})\}$.

Beispielnetz 2/2

Typisierung: $d(\mathsf{dP}) = \textsc{Phil}$, $d(\mathsf{eP}) = \textsc{Phil} \times \textsc{Gabel} \times \textsc{Gabel}$ und $d(\mathsf{fG}) = \textsc{Gabel}$.

Die Anschriften W, G und I_0 sind:

$$
\begin{array}{ll}
W(\mathsf{dP},\mathsf{Gn}) = p, & W(\mathsf{fG},\mathsf{Gn}) = r + l, \\
W(\mathsf{Gn},\mathsf{eP}) = (p,l,r), & W(\mathsf{eP},\mathsf{Gz}) = (p,l,r), \\
W(\mathsf{Gz},\mathsf{dP}) = p, & W(\mathsf{Gz},\mathsf{fG}) = r + l
\end{array}
$$

$$G(\mathsf{Gn}) = (l = \mathit{left}(p) \wedge r = \mathit{right}(p)), \quad G(\mathsf{Gz}) = \text{true}$$

$$I_0(\mathsf{dP}) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5, \quad I_0(\mathsf{eP}) = 0,$$

$$I_0(\mathsf{fG}) = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5$$

Ersetzungstheorie, Maude

Eine *bedingte Ersetzungstheorie* $\mathcal{R}$ ist ein Tupel $\mathcal{R} = (\mathcal{D}, L, R)$, wobei gilt:

- $\mathcal{D} = (\Sigma, X, E)$ ist eine Spezifikation.
- L ist eine Menge von Labeln.
- R ist eine Teilmenge von Paaren der Form

$$R \subseteq L \times (\mathbb{T}_{\Sigma,E}(X)^2)^+$$

Notation: $l : [t] \to [t'] \text{ if } [u_1] \to [v_1] \wedge \ldots \wedge [u_k] \to [v_k]$

Beispiel 1/3

```
mod DINING-PHILOSOPHERS is

sort Marking .
op m-nil : -> Marking .
op __ : Marking Marking -> Marking [assoc comm id: m-nil
var M  : Marking .

sort PHIL .
ops p1 p2 p3 p4 p5 : -> PHIL .
var p : PHIL .

sort GABEL .
ops g1 g2 g3 g4 g5 : -> GABEL .
vars l r : GABEL .
```

Beispiel 2/3

```
op left : PHIL -> GABEL .
eq left(p1) = g1 . eq left(p2) = g2 . eq left(p3) = g3 .
eq left(p4) = g4 . eq left(p5) = g5 .

op right : PHIL -> GABEL .
eq right(p1) = g2 . eq right(p2) = g3 . eq right(p3) = g
eq right(p4) = g5 .  eq right(p5) = g1 .

op denkendePhilosophen : PHIL ->  Marking .
op essendePhilosophen : PHIL GABEL GABEL ->  Marking .
op freieGabeln : GABEL ->  Marking .

op Init :  ->  Marking .
```

Beispiel 3/3

```
eq Init = denkendePhilosophen(p1) denkendePhilosophen(p2)
 denkendePhilosophen(p3) denkendePhilosophen(p4)
 denkendePhilosophen(p5)
 freieGabeln(g1) freieGabeln(g2) freieGabeln(g3)
 freieGabeln(g4) freieGabeln(g5) .

crl [Gabeln nehmen] :
  denkendePhilosophen(p) freieGabeln(l) freieGabeln(r)
  =>  essendePhilosophen(p, l, r)
  if  l == left(p) and r == right(p) .

rl [Gabeln zuruecklegen] :
  essendePhilosophen(p, l, r)
  =>   denkendePhilosophen(p)
       freieGabeln(l)  freieGabeln(r) .

endm
```

Deduktion 1/2

- Reflexivität. Für jedes $[t] \in \mathbb{T}_{\Sigma,E}(X)$ existiert die Regel

$$\frac{}{[t] \to [t]}$$

- Für jedes Funktionssymbol $f \in \Sigma_n, n \in \mathbb{N}$ existiert die Regel

$$\frac{[t_1] \to [t'_1] \ldots [t_n] \to [t'_n]}{f([t_1, \ldots, t_n]) \to f([t'_1, \ldots, t'_n])}$$

- Transitivität.

$$\frac{[t_1] \to [t_2] \qquad [t_2] \to [t_3]}{[t_1] \to [t_3]}$$

Deduktion 2/2

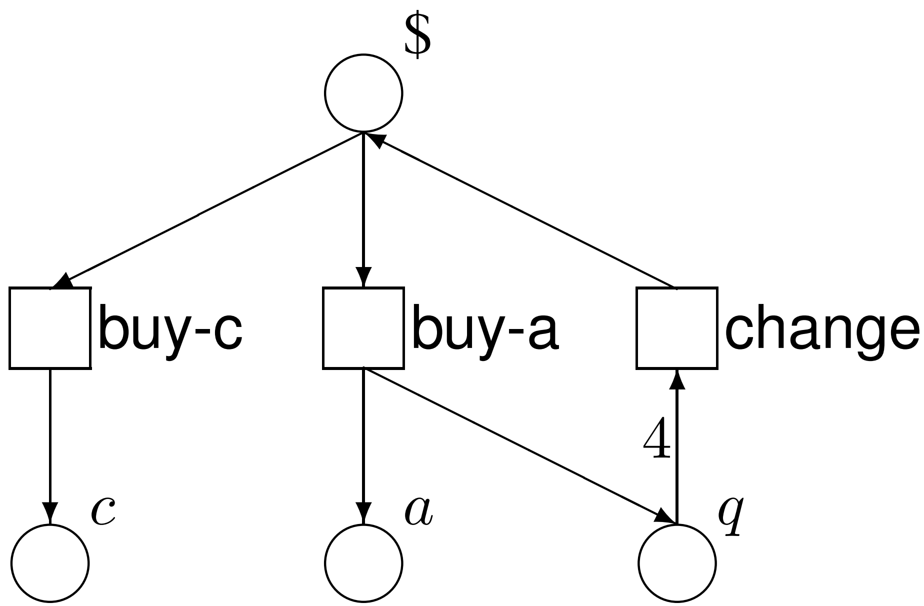
- Ersetzung. Für jede Ersetzungsregel

  $$r : [t(\bar{x})] \longrightarrow [t'(\bar{x})] \text{ if } [u_1(\bar{x})] \longrightarrow [v_1(\bar{x})] \wedge \ldots \wedge [u_k(\bar{x})] \longrightarrow [v_k(\bar{x})]$$

  in $\mathcal{R}$ existiert die Deduktionsregel:

  $$\frac{\begin{array}{ccc} [w_1] \longrightarrow [w'_1] & \ldots & [w_n] \longrightarrow [w'_n] \\ [u_1(\bar{w}/\bar{x})] \longrightarrow [v_1(\bar{w}/\bar{x})] & \ldots & [u_k(\bar{w}/\bar{x})] \longrightarrow [v_k(\bar{w}/\bar{x})] \end{array}}{[t(\bar{w}/\bar{x})] \quad \longrightarrow \quad [t'(\bar{w}'/\bar{x})]}$$

Beispiel




```
mod CANDY-PN is
 sorts Place Marking .
 subsort Place < Marking .
 op _ _ : Marking Marking -> Marking [assoc comm] .
 ops $ q a c : -> Place .

 rl [buy-c] : $ => c .
 rl [buy-a] : $ => a  q .
 rl [change] : q  q  q  q => $ .
endm
```

Analyse des Beispiels 1/2

```
mod CHECK-CANDY is
 inc CANDY-PN .  inc MODEL-CHECKER .

 subsort Marking < State .
 ops p-candy  p-apple :  -> Prop .
 var M : Marking .

 eq ((M c)  |= p-candy) = true .
 eq ((M a)  |= p-apple) = true .

 op phi1 : -> Prop .
 eq phi1 = <> (p-candy \/ p-apple) .

 op phi2 : -> Prop .
 eq phi2 = <> p-candy .
endm
```

Analyse des Beispiels 2/2

```
Maude> rew [10] $ $ |= phi1 .
rewrite [10] in CHECK-CANDY : M0 |= phi1 .
rewrites: 11 in 10ms cpu (7ms real) (1100 rewrites/s
result Bool: true

Maude> rew [10] $ $ |= phi2 .
rewrite [10] in CHECK-CANDY : M0 |= phi2 .
rewrites: 15 in 0ms cpu (6ms real) (~ rewrites/secon
result ModelCheckResult:
  counterexample({candy apple quarter,'buy-apple}
     {candy apple quarter,'buy-apple},
     {apple apple quarter quarter,deadlock})
```

Zusammenfassung

- Erweiterung auf gefärbte Petrinetze
- Algebraische Datentypen
- Algebraische Petrinetze
- Termersetzungsysteme
- Kategorien als Struktur
- Zustandsraumanalyse