F2 — Automaten und formale Sprachen

Berndt Farwer

Fachbereich Informatik
AB „Theoretische Grundlagen der Informatik“ (TGI)
Universität Hamburg
farwer@informatik.uni-hamburg.de

Die Sprachfamilie $\mathcal{C}f$

- **Theorem:** Folgende Aussagen sind äquivalent:
  1. $L \in \mathcal{C}f$
  2. $L = L(A)$ für einen beliebigen PDA A
  3. $L = L(A)$ für einen fast-buchstabierenden PDA A
  4. $L = L(A)$ für einen buchstabierenden PDA A
  5. $L = N(A)$ für einen fast-buchstabierenden PDA A

Präfixfreiheit

- **Definition:** Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **präfixfrei** gdw.

$$\forall w \in L : \forall v \in \Sigma^* : (wv \in L) \rightarrow (v = \lambda).$$

Präfixfreiheit

- **Definition:** Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **präfixfrei** gdw.

$$\forall w \in L : \forall v \in \Sigma^* : (wv \in L) \rightarrow (v = \lambda).$$

- $\min(L) := \{w \in L \mid (w = uv \wedge u \in L) \rightarrow (v = \lambda)\}$ bezeichnet den **präfixfreien Anteil** der Sprache L.

Präfixfreiheit

- **Definition:** Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **präfixfrei** gdw.

$$\forall w \in L : \forall v \in \Sigma^* : (wv \in L) \rightarrow (v = \lambda).$$

- $\min(L) := \{w \in L \mid (w = uv \wedge u \in L) \rightarrow (v = \lambda)\}$ bezeichnet den **präfixfreien Anteil** der Sprache L.
- **Beispiel:** Sei $M := \{a^m b^n \mid m, n \in I\!N : n \geq m\}$, dann ist $\min(M) = \{a^n b^n \mid n \in I\!N\}$, denn es gibt für $n > m$ mindestens einen echten Präfix eines Wortes $a^m b^n$, der wieder als Wort der Menge M vorkommt. Also muss $n = m$ gelten.

Eigenschaften von $det\,\mathcal{C}f$

- **Theorem:** Eine deterministische kontextfreie Sprache $L \in det\,\mathcal{C}f$ ist präfixfrei gdw. ein DPDA A existiert, mit $L = N(A)$.

Eigenschaften von $det\,\mathcal{C}f$

- **Theorem:** Eine deterministische kontextfreie Sprache $L \in det\,\mathcal{C}f$ ist präfixfrei gdw. ein DPDA A existiert, mit $L = N(A)$.
- **Beweisidee:**

Eigenschaften von $det\,\mathcal{C}f$

- **Theorem:** Eine deterministische kontextfreie Sprache $L \in det\,\mathcal{C}f$ ist präfixfrei gdw. ein DPDA A existiert, mit $L = N(A)$.
- **Beweisidee:**

  $\Rightarrow$ DPDA für L kann kein Wort akzeptieren, nachdem ein Endzustand verlassen wurde. Hinzufügen eines neuen Zustands, der den Keller leert und genau von den vormaligen Endzuständen erreichbar ist.

Eigenschaften von $det\,\mathcal{C}f$

- **Theorem:** Eine deterministische kontextfreie Sprache $L \in det\,\mathcal{C}f$ ist präfixfrei gdw. ein DPDA A existiert, mit $L = N(A)$.
- **Beweisidee:**

  $\Rightarrow$ DPDA für L kann kein Wort akzeptieren, nachdem ein Endzustand verlassen wurde. Hinzufügen eines neuen Zustands, der den Keller leert und genau von den vormaligen Endzuständen erreichbar ist.

  $\Leftarrow$ DPDAs können bei leerem Keller keine weiteren Bewegungen vornehmen!

Eigenschaften von $det\,\mathcal{C}f$

- **Korrollar** Die präfixfreien deterministisch kontextfreien Sprachen bilden eine echte Teilfamilie der Familie $det\,\mathcal{C}f$.

Eigenschaften von $det\,\mathcal{C}f$

- **Korrollar** Die präfixfreien deterministisch kontextfreien Sprachen bilden eine echte Teilfamilie der Familie $det\,\mathcal{C}f$.
- **Beweis:** Die Menge $\{a\}^*\{b\}^* = \{a^n b^m \mid m, n \in I\!N\}$ ist, da regulär, deterministisch kontextfrei, aber offensichtlich nicht präfixfrei.

Abschlusseigenschaften

- **Theorem:** Für $L \in det\,\mathcal{C}f$ ist auch $\min(L) \in det\,\mathcal{C}f$.

Abschlusseigenschaften

- **Theorem:** Für $L \in det\,\mathcal{C}f$ ist auch $\min(L) \in det\,\mathcal{C}f$.
- **Beweisidee:** Kanten aus Endzuständen entfernen.

Abschlusseigenschaften

- **Theorem:** Für $L \in det\,\mathcal{C}f$ ist auch $\min(L) \in det\,\mathcal{C}f$.
- **Beweisidee:** Kanten aus Endzuständen entfernen.
- **Theorem:** $det\,\mathcal{C}f \wedge \mathcal{R}eg \subseteq det\,\mathcal{C}f$, d.h., die Familie der deterministischen kontextfreien Sprachen ist gegenüber Durchschnittsbildung mit regulären Mengen abgeschlossen.

Abschlusseigenschaften

- **Theorem:** Für $L \in det\,\mathcal{C}f$ ist auch $\min(L) \in det\,\mathcal{C}f$.
- **Beweisidee:** Kanten aus Endzuständen entfernen.
- **Theorem:** $det\,\mathcal{C}f \wedge \mathcal{R}eg \subseteq det\,\mathcal{C}f$, d.h., die Familie der deterministischen kontextfreien Sprachen ist gegenüber Durchschnittsbildung mit regulären Mengen abgeschlossen.
- **Beweisidee:** Produktautomat zweier DPDAs

Eindeutigkeit vs. Determinismus

- **Theorem:** Die kontextfreie Sprache PAL ist eindeutig, aber nicht deterministisch.

Eindeutigkeit vs. Determinismus

- **Theorem:** Die kontextfreie Sprache PAL ist eindeutig, aber nicht deterministisch.
- **Beweis:**

Eindeutigkeit vs. Determinismus

- **Theorem:** Die kontextfreie Sprache PAL ist eindeutig, aber nicht deterministisch.
- **Beweis:**
  - Eindeutigkeit: $S \longrightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \lambda$

Eindeutigkeit vs. Determinismus

- **Theorem:** Die kontextfreie Sprache PAL ist eindeutig, aber nicht deterministisch.
- **Beweis:**
  - Eindeutigkeit: $S \longrightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \lambda$
  - Wäre nun $PAL \in det\,\mathcal{C}f$, dann wäre auch $K := PAL \cap (ab)^+(ba)^+(ab)^+(ba)^+ \in det\,\mathcal{C}f$.

Eindeutigkeit vs. Determinismus

- **Theorem:** Die kontextfreie Sprache PAL ist eindeutig, aber nicht deterministisch.
- **Beweis:**
  - Eindeutigkeit: $S \longrightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \lambda$
  - Wäre nun $PAL \in det\,\mathcal{C}f$, dann wäre auch $K := PAL \cap (ab)^+(ba)^+(ab)^+(ba)^+ \in det\,\mathcal{C}f$.
  - Dann ist auch $\min(K) \in det\,\mathcal{C}f$.

Eindeutigkeit vs. Determinismus

- **Theorem:** Die kontextfreie Sprache PAL ist eindeutig, aber nicht deterministisch.
- **Beweis:**
  - Eindeutigkeit: $S \longrightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \lambda$
  - Wäre nun $PAL \in det\,\mathcal{C}f$, dann wäre auch $K := PAL \cap (ab)^+(ba)^+(ab)^+(ba)^+ \in det\,\mathcal{C}f$.
  - Dann ist auch $\min(K) \in det\,\mathcal{C}f$.
  - Nun ergibt sich: $\min(K) = \{(ab)^m(ba)^n(ab)^n(ba)^m \mid 0 \leq n \leq m\}$

Eindeutigkeit vs. Determinismus

- **Theorem:** Die kontextfreie Sprache PAL ist eindeutig, aber nicht deterministisch.
- **Beweis:**
  - Eindeutigkeit: $S \longrightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \lambda$
  - Wäre nun $PAL \in det\,\mathcal{C}f$, dann wäre auch $K := PAL \cap (ab)^+(ba)^+(ab)^+(ba)^+ \in det\,\mathcal{C}f$.
  - Dann ist auch $\min(K) \in det\,\mathcal{C}f$.
  - Nun ergibt sich: $\min(K) = \{(ab)^m(ba)^n(ab)^n(ba)^m \mid 0 \leq n \leq m\}$
  - Diese Sprache ist nicht einmal mehr kontextfrei, wie man mit dem $uvwxy$-Theorem zeigen kann.

Eindeutigkeit vs. Determinismus

- **Theorem:** Die kontextfreie Sprache PAL ist eindeutig, aber nicht deterministisch.
- **Beweis:**
  - Eindeutigkeit: $S \longrightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \lambda$
  - Wäre nun $PAL \in det\,\mathcal{C}f$, dann wäre auch $K := PAL \cap (ab)^+(ba)^+(ab)^+(ba)^+ \in det\,\mathcal{C}f$.
  - Dann ist auch $\min(K) \in det\,\mathcal{C}f$.
  - Nun ergibt sich: $\min(K) = \{(ab)^m(ba)^n(ab)^n(ba)^m \mid 0 \leq n \leq m\}$
  - Diese Sprache ist nicht einmal mehr kontextfrei, wie man mit dem $uvwxy$-Theorem zeigen kann.
  - Also kann PAL selbst nicht deterministisch kontextfrei gewesen sein.

Komplementbildung

- **Theorem:** $det\,\mathcal{C}f$ ist gegen Komplementbildung abgeschlossen, d.h. $\forall L \in det\,\mathcal{C}f : \overline{L} \in det\,\mathcal{C}f$.

Komplementbildung

- **Theorem:** $det\,\mathcal{C}f$ ist gegen Komplementbildung abgeschlossen, d.h. $\forall L \in det\,\mathcal{C}f : \overline{L} \in det\,\mathcal{C}f$.
- **Beweisidee:** Endzustände mit Nicht-Endzuständen zu vertauschen reicht hier nicht aus!

Komplementbildung

- **Theorem:** $det\,\mathcal{C}f$ ist gegen Komplementbildung abgeschlossen, d.h. $\forall L \in det\,\mathcal{C}f : \overline{L} \in det\,\mathcal{C}f$.
- **Beweisidee:** Endzustände mit Nicht-Endzuständen zu vertauschen reicht hier nicht aus!
- Gründe für das Nicht-Akzeptieren einer Eingabe beim DPDA:

Komplementbildung

- **Theorem:** $det\,\mathcal{C}f$ ist gegen Komplementbildung abgeschlossen, d.h. $\forall L \in det\,\mathcal{C}f : \overline{L} \in det\,\mathcal{C}f$.
- **Beweisidee:** Endzustände mit Nicht-Endzuständen zu vertauschen reicht hier nicht aus!
- Gründe für das Nicht-Akzeptieren einer Eingabe beim DPDA:
  1. Die Rechnung bricht ab, weil der Keller leer ist.

Komplementbildung

- **Theorem:** $det\,\mathcal{C}f$ ist gegen Komplementbildung abgeschlossen, d.h. $\forall L \in det\,\mathcal{C}f : \overline{L} \in det\,\mathcal{C}f$.
- **Beweisidee:** Endzustände mit Nicht-Endzuständen zu vertauschen reicht hier nicht aus!
- Gründe für das Nicht-Akzeptieren einer Eingabe beim DPDA:
  1. Die Rechnung bricht ab, weil der Keller leer ist.
  2. Das Wort w wird mangels Folgekonfiguration nicht vollständig gelesen.

Komplementbildung

- **Theorem:** $det\,\mathcal{C}f$ ist gegen Komplementbildung abgeschlossen, d.h. $\forall L \in det\,\mathcal{C}f : \overline{L} \in det\,\mathcal{C}f$.
- **Beweisidee:** Endzustände mit Nicht-Endzuständen zu vertauschen reicht hier nicht aus!
- Gründe für das Nicht-Akzeptieren einer Eingabe beim DPDA:
  1. Die Rechnung bricht ab, weil der Keller leer ist.
  2. Das Wort w wird mangels Folgekonfiguration nicht vollständig gelesen.
  3. Der DPDA gerät in eine Endlosschleife, ohne weitere Symbole von der Eingabe zu lesen.

Komplementbildung

- **Theorem:** $det\,\mathcal{C}f$ ist gegen Komplementbildung abgeschlossen, d.h. $\forall L \in det\,\mathcal{C}f : \overline{L} \in det\,\mathcal{C}f$.
- **Beweisidee:** Endzustände mit Nicht-Endzuständen zu vertauschen reicht hier nicht aus!
- Gründe für das Nicht-Akzeptieren einer Eingabe beim DPDA:
  1. Die Rechnung bricht ab, weil der Keller leer ist.
  2. Das Wort w wird mangels Folgekonfiguration nicht vollständig gelesen.
  3. Der DPDA gerät in eine Endlosschleife, ohne weitere Symbole von der Eingabe zu lesen.
  4. Erfolgsrechnung, bei der der DPDA ohne weiteres Lesen der Eingabe abwechselnd in End- und Nicht-Endzustände gerät.

Beweisansatz

Zu 1: Neues Kellerbodenzeichen vor das alte setzen.

Beweisansatz

Zu 1: Neues Kellerbodenzeichen vor das alte setzen.

Zu 2: Einführen einer Senke, in die bisher in anderen Zuständen nicht definierte Folgekonfigurationen führen.

Beweisansatz

Zu 1: Neues Kellerbodenzeichen vor das alte setzen.

Zu 2: Einführen einer Senke, in die bisher in anderen Zuständen nicht definierte Folgekonfigurationen führen.

Zu 3: Zwei Unter-Fälle:

Beweisansatz

Zu 1: Neues Kellerbodenzeichen vor das alte setzen.

Zu 2: Einführen einer Senke, in die bisher in anderen Zuständen nicht definierte Folgekonfigurationen führen.

Zu 3: Zwei Unter-Fälle:

a): In der λ-Schleife wird der Keller nie kürzer, aber ein Endzustand kommt vor. Neuer Endzustand und Schleifenanfangskante dahin „umbiegen“, Keller leeren.

Beweisansatz

Zu 1: Neues Kellerbodenzeichen vor das alte setzen.

Zu 2: Einführen einer Senke, in die bisher in anderen Zuständen nicht definierte Folgekonfigurationen führen.

Zu 3: Zwei Unter-Fälle:

a): In der λ-Schleife wird der Keller nie kürzer, aber ein Endzustand kommt vor. Neuer Endzustand und Schleifenanfangskante dahin „umbiegen“, Keller leeren.

b): Falls die Konfiguration xq der Beginn einer λ-Schleife ist, in der niemals ein Endzustand vorkommt: Keller leeren.

Beweisansatz

Zu 1: Neues Kellerbodenzeichen vor das alte setzen.

Zu 2: Einführen einer Senke, in die bisher in anderen Zuständen nicht definierte Folgekonfigurationen führen.

Zu 3: Zwei Unter-Fälle:

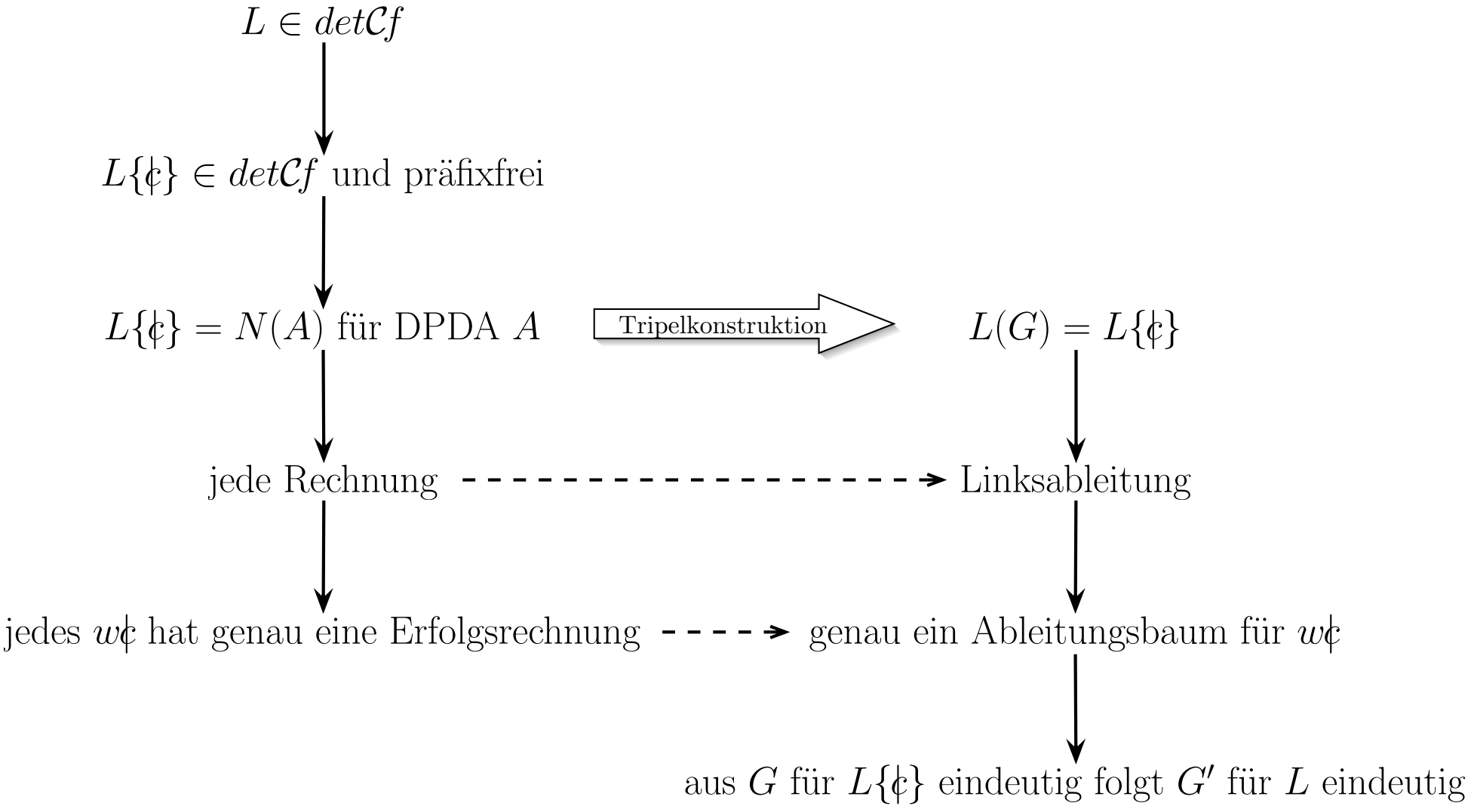
a): In der λ-Schleife wird der Keller nie kürzer, aber ein Endzustand kommt vor. Neuer Endzustand und Schleifenanfangskante dahin „umbiegen“, Keller leeren.

b): Falls die Konfiguration xq der Beginn einer λ-Schleife ist, in der niemals ein Endzustand vorkommt: Keller leeren.

Fall 4: Zu kompliziert . . .

Wichtig für Syntaxanalyse

- **Theorem:** Jede Sprache aus $det\,\mathcal{C}f$ ist eindeutig.



Aufbau eines Compilers (1)

- **Lexikalische Analyse**

Aufbau eines Compilers (1)

- **Lexikalische Analyse**
  - Das Quellprogramm wird analysiert:

Aufbau eines Compilers (1)

- **Lexikalische Analyse**
  - Das Quellprogramm wird analysiert:
  - Symbole einlesen, Leerzeichen unterdrücken, Korrektheit sprachinterner Schlüsselworte prüfen und *Token* ersetzten.

Aufbau eines Compilers (1)

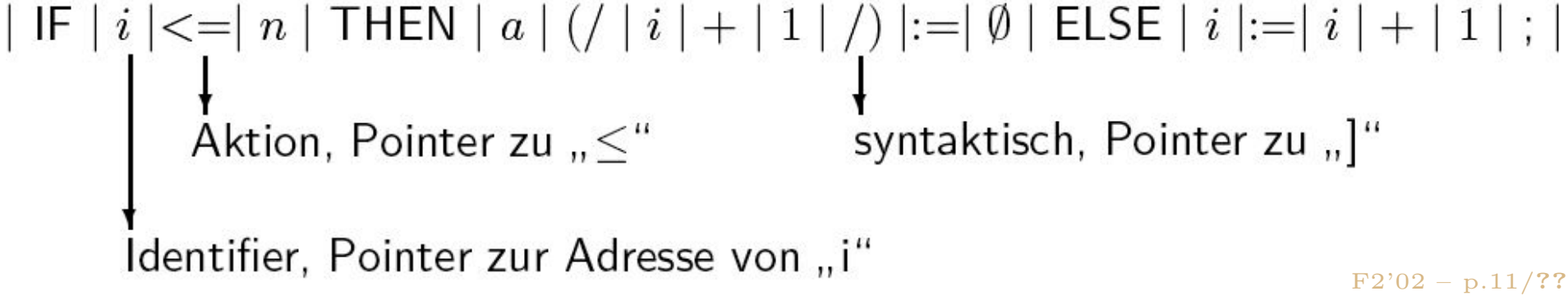
- **Lexikalische Analyse**
  - Das Quellprogramm wird analysiert:
  - Symbole einlesen, Leerzeichen unterdrücken, Korrektheit sprachinterner Schlüsselworte prüfen und *Token* ersetzten.
  - Pointer zu weiteren Informationen (*Wert*, *Tokentyp* und *ASCII-Wert*) anlegen

Aufbau eines Compilers (1)

- **Lexikalische Analyse**
  - Das Quellprogramm wird analysiert:
  - Symbole einlesen, Leerzeichen unterdrücken, Korrektheit sprachinterner Schlüsselworte prüfen und *Token* ersetzten.
  - Pointer zu weiteren Informationen (*Wert*, *Tokentyp* und *ASCII-Wert*) anlegen
  - kontextabhängige (*z.B. nicht deklarierte Variablen*) und syntaktische Fehler suchen.

Aufbau eines Compilers (1)

- **Lexikalische Analyse**
  - Das Quellprogramm wird analysiert:
  - Symbole einlesen, Leerzeichen unterdrücken, Korrektheit sprachinterner Schlüsselworte prüfen und *Token* ersetzten.
  - Pointer zu weiteren Informationen (*Wert*, *Tokentyp* und *ASCII-Wert*) anlegen
  - kontextabhängige (*z.B. nicht deklarierte Variablen*) und syntaktische Fehler suchen.



Aufbau eines Compilers (2)

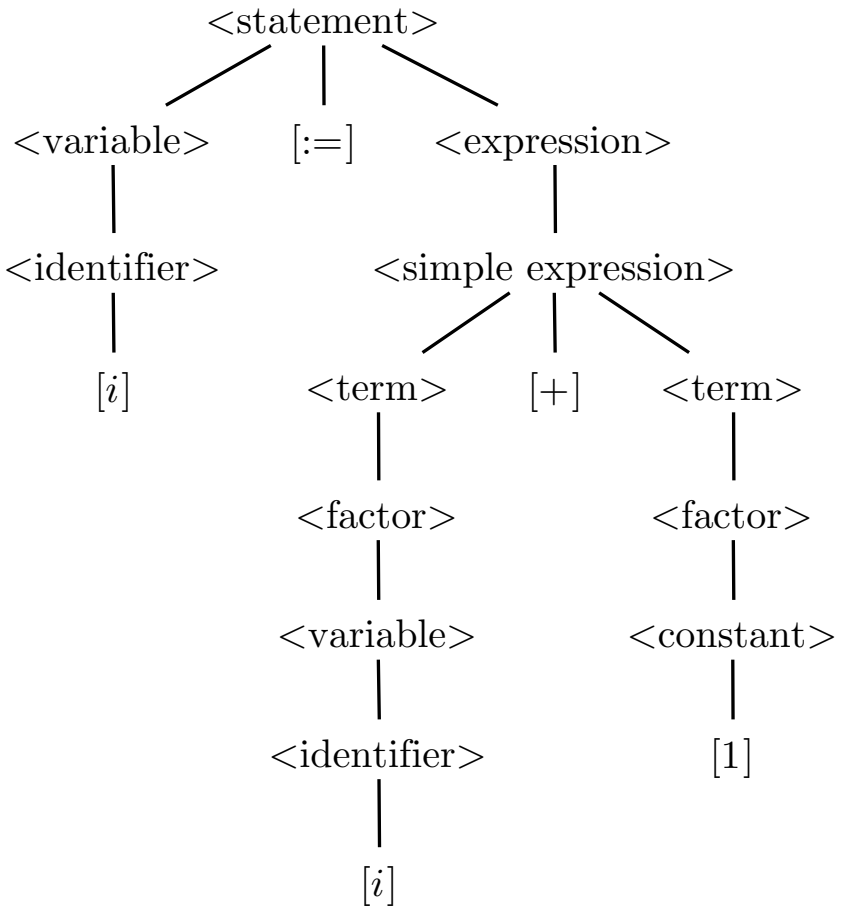
- **Syntaktische Analyse**

Aufbau eines Compilers (2)

- **Syntaktische Analyse**
  - Einen Ableitungsbaum zu der von der lexikalischen Analyse erstellten Token-Kette erzeugen.

Aufbau eines Compilers (2)

- **Syntaktische Analyse**
  - Einen Ableitungsbaum zu der von der lexikalischen Analyse erstellten Token-Kette erzeugen. Bsp.: $|i| := |i| + |1|$



Aufbau eines Compilers (3)

- **Semantische Analyse und Codegenerierung**

Aufbau eines Compilers (3)

- **Semantische Analyse und Codegenerierung**
  - Synthese-Phase: es wird ein **abstrakter Syntaxbaum** aus dem Ableitungsbaum konstruiert

Aufbau eines Compilers (3)

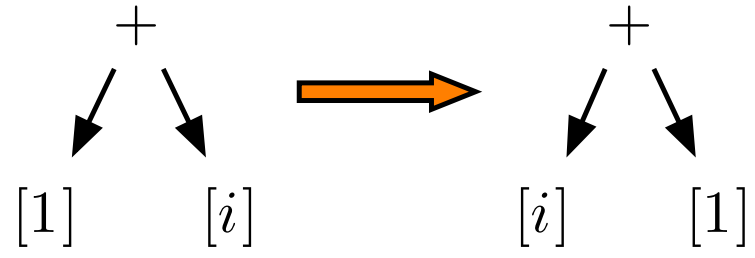
- **Semantische Analyse und Codegenerierung**
  - Synthese-Phase: es wird ein **abstrakter Syntaxbaum** aus dem Ableitungsbaum konstruiert
  - ähnlich der Baumdarstellung eines arithmetischen Ausdrucks

Aufbau eines Compilers (3)

- **Semantische Analyse und Codegenerierung**
  - Synthese-Phase: es wird ein **abstrakter Syntaxbaum** aus dem Ableitungsbaum konstruiert
  - ähnlich der Baumdarstellung eines arithmetischen Ausdrucks
  - „Normalisierung“

Aufbau eines Compilers (3)

- **Semantische Analyse und Codegenerierung**
  - Synthese-Phase: es wird ein **abstrakter Syntaxbaum** aus dem Ableitungsbaum konstruiert
  - ähnlich der Baumdarstellung eines arithmetischen Ausdrucks
  - „Normalisierung“



Aufbau eines Compilers (4)

- **Codeoptimierung**

Aufbau eines Compilers (4)

- **Codeoptimierung**
  - Beispiel: Summe „+“ mit zwei Operanden.

Aufbau eines Compilers (4)

- **Codeoptimierung**
  - Beispiel: Summe „$+$“ mit zwei Operanden.
  - Statt „$+1$“ einen Befehl „increment“ verwenden.

Aufbau eines Compilers (4)

- **Codeoptimierung**
  - Beispiel: Summe „+“ mit zwei Operanden.
  - Statt „+1“ einen Befehl „increment“ verwenden.
  - Vereinfachungen von einfachen Laufschleifen durch Splitten, Zusammenfassen, Abwickeln oder Herausziehen von Anweisungen können vorgenommen werden.

Eine CFG

$$
\begin{aligned}
E &\longrightarrow E + T \mid T \\
T &\longrightarrow T * F \mid F \\
F &\longrightarrow (E) \mid i
\end{aligned}
$$

LR(1)-Parsing

Kellerboden ↓ Kellerinhalt	↓ Vorausschau	zu lesende Eingabe	
		$i + i * i$	*Start*
	i	$+ i * i$	*shift*
i	$+$	$i * i$	*shift*
F	$+$	$i * i$	*reduce*
T	$+$	$i * i$	*reduce*
E	$+$	$i * i$	*reduce*
$+ E$	i	$* i$	*shift*
$i + E$	$*$	i	*shift*
$F + E$	$*$	i	*reduce*
$T + E$	$*$	i	*reduce* *)
$* T + E$	i		*shift*
$i * T + E$			*shift*

Eine andere CFG

$$
\begin{aligned}
E &\longrightarrow TE' \\
E' &\longrightarrow +TE' \mid \lambda \\
T &\longrightarrow FT' \\
T' &\longrightarrow *FT' \mid \lambda \\
F &\longrightarrow (E) \mid i
\end{aligned}
$$

LL(1)-Parsing

Präfix der Satzform im Keller

Kellerboden ↓ ↓ Vorausschau

Kellerinhalt		zu lesende Eingabe	
E		$i + i * i$	*Start*
E	i	$+ i * i$	*positioning*
TE'	i	$+ i * i$	*expand*
$FT'E'$	i	$+ i * i$	*expand*
$iT'E'$	i	$+ i * i$	*expand*
$T'E'$		$+ i * i$	*reduce*
$T'E'$	$+$	$i * i$	*positioning*
E'	$+$	$i * i$	*expand*$(T' \longrightarrow \lambda)$
$+TE'$	$+$	$i * i$	*expand*
TE'		$i * i$	*reduce*
TE'	i	$* i$	*positioning*
$FT'E'$	i	$* i$	*expand*

LR(k)-Grammatiken

LR-Parsing ist aus folgenden Gründen attraktiv:

- Jede deterministische kontextfreie Sprache kann mit diesem Bottom-up Verfahren analysiert und übersetzt werden

LR(k)-Grammatiken

LR-Parsing ist aus folgenden Gründen attraktiv:

- Jede deterministische kontextfreie Sprache kann mit diesem Bottom-up Verfahren analysiert und übersetzt werden
- Verfahren kann effizient implementiert werden.

LR(k)-Grammatiken

LR-Parsing ist aus folgenden Gründen attraktiv:

- Jede deterministische kontextfreie Sprache kann mit diesem Bottom-up Verfahren analysiert und übersetzt werden
- Verfahren kann effizient implementiert werden.
- Syntaktische Fehler können so früh wie möglich erkannt werden.

LR(k)-Grammatiken

LR-Parsing ist aus folgenden Gründen attraktiv:

- Jede deterministische kontextfreie Sprache kann mit diesem Bottom-up Verfahren analysiert und übersetzt werden
- Verfahren kann effizient implementiert werden.
- Syntaktische Fehler können so früh wie möglich erkannt werden.
- Viele existierende Compiler-Generatoren bieten Hilfen an, wenn eine Grammatik keine LR-Grammatik ist, Mehrdeutigkeiten aufweist und daher geändert werden muss.

LR(k)-Grammatiken

LR-Parsing ist aus folgenden Gründen attraktiv:

- Jede deterministische kontextfreie Sprache kann mit diesem Bottom-up Verfahren analysiert und übersetzt werden
- Verfahren kann effizient implementiert werden.
- Syntaktische Fehler können so früh wie möglich erkannt werden.
- Viele existierende Compiler-Generatoren bieten Hilfen an, wenn eine Grammatik keine LR-Grammatik ist, Mehrdeutigkeiten aufweist und daher geändert werden muss.
- Die LR-Parsingmethode ist das am besten ausgebaute Verfahren, und beinahe jede Programmiersprachensyntax besitzt eine LR(k)-Grammatik.

Definition LR(k)

- Sei $G := (V_N, V_T, P, S)$ eine **reduzierte CFG**, bei der S in keiner rechten Seite einer Produktion vorkommt.
- Für alle $k \in I\!N$ und jedes $w \in V^*$ bezeichne $\text{first}_k(w)$ den Präfix von w der Länge k.
- Die CFG G heißt $\text{LR}(k)$, falls die Bedingungen 1., 2. und 3. die Aussage 4. implizieren:

1. $\exists \alpha, \beta, \gamma \in V^* \; \exists A \in V_N : \; S \overset{*}{\underset{\text{re}}{\Longrightarrow}} \alpha A \gamma \underset{\text{re}}{\Longrightarrow} \alpha\beta\gamma$

2. $\exists \alpha', \gamma', \gamma'' \in V^* \; \exists B \in V_N : \; S \overset{*}{\underset{\text{re}}{\Longrightarrow}} \alpha' B \gamma' \underset{\text{re}}{\Longrightarrow} \alpha\beta\gamma''$

3. $\text{first}_k(\gamma) = \text{first}_k(\gamma'')$
4. $A = B, \alpha = \alpha'$ und $\gamma' = \gamma''$

Eigenschaften

- Jede $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik ist eindeutig.

Eigenschaften

- Jede $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik ist eindeutig.
- Folgende drei Aussagen sind äquivalent:

Eigenschaften

- Jede $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik ist eindeutig.
- Folgende drei Aussagen sind äquivalent:
  1. L ist präfixfreie, deterministisch kontextfreie Sprache

Eigenschaften

- Jede $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik ist eindeutig.
- Folgende drei Aussagen sind äquivalent:
  1. L ist präfixfreie, deterministisch kontextfreie Sprache
  2. $L = L(G)$ für eine $\mathrm{LR}(0)$-Grammatik

Eigenschaften

- Jede $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik ist eindeutig.
- Folgende drei Aussagen sind äquivalent:
  1. L ist präfixfreie, deterministisch kontextfreie Sprache
  2. $L = L(G)$ für eine $\mathrm{LR}(0)$-Grammatik
  3. $L = N(A)$ für einen DPDA

Eigenschaften

- Jede $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik ist eindeutig.
- Folgende drei Aussagen sind äquivalent:
  1. L ist präfixfreie, deterministisch kontextfreie Sprache
  2. $L = L(G)$ für eine $\mathrm{LR}(0)$-Grammatik
  3. $L = N(A)$ für einen DPDA
- Folgende drei Aussagen sind äquivalent:

Eigenschaften

- Jede $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik ist eindeutig.
- Folgende drei Aussagen sind äquivalent:
  1. L ist präfixfreie, deterministisch kontextfreie Sprache
  2. $L = L(G)$ für eine $\mathrm{LR}(0)$-Grammatik
  3. $L = N(A)$ für einen DPDA
- Folgende drei Aussagen sind äquivalent:
  1. L ist deterministisch kontextfrei, d.h. $L = L(A)$ für einen DPDA A.

Eigenschaften

- Jede $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik ist eindeutig.
- Folgende drei Aussagen sind äquivalent:
  1. L ist präfixfreie, deterministisch kontextfreie Sprache
  2. $L = L(G)$ für eine $\mathrm{LR}(0)$-Grammatik
  3. $L = N(A)$ für einen DPDA
- Folgende drei Aussagen sind äquivalent:
  1. L ist deterministisch kontextfrei, d.h. $L = L(A)$ für einen DPDA A.
  2. $L = L(G)$ für eine $\mathrm{LR}(1)$-Grammatik G.

Eigenschaften

- Jede $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik ist eindeutig.
- Folgende drei Aussagen sind äquivalent:
  1. L ist präfixfreie, deterministisch kontextfreie Sprache
  2. $L = L(G)$ für eine $\mathrm{LR}(0)$-Grammatik
  3. $L = N(A)$ für einen DPDA
- Folgende drei Aussagen sind äquivalent:
  1. L ist deterministisch kontextfrei, d.h. $L = L(A)$ für einen DPDA A.
  2. $L = L(G)$ für eine $\mathrm{LR}(1)$-Grammatik G.
  3. $L = L(G)$ für eine $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik G für ein $k \geq 1$.

Eigenschaften

- Jede $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik ist eindeutig.
- Folgende drei Aussagen sind äquivalent:
  1. L ist präfixfreie, deterministisch kontextfreie Sprache
  2. $L = L(G)$ für eine $\mathrm{LR}(0)$-Grammatik
  3. $L = N(A)$ für einen DPDA
- Folgende drei Aussagen sind äquivalent:
  1. L ist deterministisch kontextfrei, d.h. $L = L(A)$ für einen DPDA A.
  2. $L = L(G)$ für eine $\mathrm{LR}(1)$-Grammatik G.
  3. $L = L(G)$ für eine $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik G für ein $k \geq 1$.
- Zu jedem $k \geq 1$ gibt es eine kontextfreie Grammatik die $\mathrm{LR}(k)$ aber nicht LR$(k-1)$ ist.

LL(k)-Grammatiken

- Sei $G := G = (V_N, V_T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik, $k \in I\!N$ und $w \in (V_N \cup V_T)^*$.

$$\text{FIRST}_k(w) := \{u \in V_T^* \mid w \overset{*}{\underset{\text{li}}{\Longrightarrow}} u \text{ und } |u| < k \text{ oder}$$

$$\exists v \in (V_N \cup V_T)^* : w \overset{*}{\underset{\text{li}}{\Longrightarrow}} uv \text{ mit } |u| = k \}$$

LL(k)-Grammatiken

- Sei $G := G = (V_N, V_T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik, $k \in I\!N$ und $w \in (V_N \cup V_T)^*$.

  $$\text{FIRST}_k(w) := \{u \in V_T^* \mid w \overset{*}{\underset{\text{li}}{\Longrightarrow}} u \text{ und } |u| < k \text{ oder}$$

  $$\exists v \in (V_N \cup V_T)^* : w \overset{*}{\underset{\text{li}}{\Longrightarrow}} uv \text{ mit } |u| = k \}$$

- Eine reduzierte CFG $G := G = (V_N, V_T, P, S)$ heißt $\text{LL}(k)$ für ein $k \in I\!N$, falls für je zwei Linksableitungen

  $$S \overset{*}{\underset{\text{li}}{\Longrightarrow}} uA\alpha \underset{\text{li}}{\Longrightarrow} uv\alpha \overset{*}{\underset{\text{li}}{\Longrightarrow}} uw \text{ und}$$

  $$S \overset{*}{\underset{\text{li}}{\Longrightarrow}} uA\alpha \underset{\text{li}}{\Longrightarrow} uv'\alpha \overset{*}{\underset{\text{li}}{\Longrightarrow}} uw' \text{ mit } u, w, w' \in V_T^* \text{ und}$$

  $\alpha, v, v' \in (V_N \cup V_T)^*$, aus $\text{FIRST}_k(w) = \text{FIRST}_k(w')$ stets $v = v'$ folgt.

Eigenschaften

- Keine $\mathrm{LL}(k)$-Grammatik besitzt Linksrekursionen.

Eigenschaften

- Keine $\mathrm{LL}(k)$-Grammatik besitzt Linksrekursionen.
- Jede $\mathrm{LL}(k)$-Grammatik ist eindeutig und zugleich eine $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik. Folglich ist jede $\mathrm{LL}(k)$-Sprache eine deterministische, kontextfreie Sprache.

Eigenschaften

- Keine $\mathrm{LL}(k)$-Grammatik besitzt Linksrekursionen.
- Jede $\mathrm{LL}(k)$-Grammatik ist eindeutig und zugleich eine $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik. Folglich ist jede $\mathrm{LL}(k)$-Sprache eine deterministische, kontextfreie Sprache.
- Zu festem $k \in I\!N$ gibt es einen Algorithmus, der zu jeder beliebig vorgegebenen Grammatik G feststellt, ob dies eine $\mathrm{LL}(k)$-Grammatik ist.

Eigenschaften

- Keine $\mathrm{LL}(k)$-Grammatik besitzt Linksrekursionen.
- Jede $\mathrm{LL}(k)$-Grammatik ist eindeutig und zugleich eine $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik. Folglich ist jede $\mathrm{LL}(k)$-Sprache eine deterministische, kontextfreie Sprache.
- Zu festem $k \in \mathbb{N}$ gibt es einen Algorithmus, der zu jeder beliebig vorgegebenen Grammatik G feststellt, ob dies eine $\mathrm{LL}(k)$-Grammatik ist.
- Es gibt keinen Algorithmus, der von jeder beliebig vorgelegten CFG feststellt, ob diese eine $\mathrm{LL}(k)$-Sprache für irgend ein $k \in \mathbb{N}$ generiert.

Weitere Eigenschaften

- Es ist gibt kein Verfahren, das für jede beliebige CFG feststellt, ob diese eine LL(1)-Sprache erzeugt.

Weitere Eigenschaften

- Es ist gibt kein Verfahren, das für jede beliebige CFG feststellt, ob diese eine LL(1)-Sprache erzeugt.
- Es ist unentscheidbar, ob eine beliebig gegebene $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik zugleich für irgendein $n \in \mathbb{N}$ eine LL(n)-Grammatik ist.

Weitere Eigenschaften

- Es ist gibt kein Verfahren, das für jede beliebige CFG feststellt, ob diese eine LL(1)-Sprache erzeugt.
- Es ist unentscheidbar, ob eine beliebig gegebene $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik zugleich für irgendein $n \in I\!N$ eine LL(n)-Grammatik ist.
- Die $\mathrm{LL}(k)$-Sprachen bilden eine echte Hierarchie: Zu jedem $k \in I\!N$ gibt es eine $\mathrm{LL}(k)$-Grammatik G_k, so dass$L(G_k) \neq L(G_{k-1})$ für jede LL$(k-1)$-Grammatik G_{k-1}.

Weitere Eigenschaften

- Es ist gibt kein Verfahren, das für jede beliebige CFG feststellt, ob diese eine LL(1)-Sprache erzeugt.
- Es ist unentscheidbar, ob eine beliebig gegebene $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik zugleich für irgendein $n \in I\!N$ eine LL(n)-Grammatik ist.
- Die $\mathrm{LL}(k)$-Sprachen bilden eine echte Hierarchie: Zu jedem $k \in I\!N$ gibt es eine $\mathrm{LL}(k)$-Grammatik G_k, so dass$L(G_k) \neq L(G_{k-1})$ für jede LL$(k-1)$-Grammatik G_{k-1}.
- Nicht jede deterministische, kontextfreie Sprache besitzt eine $\mathrm{LL}(k)$-Grammatik: Die Sprache $\{a^n b^m \mid 1 \leq n \leq m\}$ besitzt eine $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik, aber keine $\mathrm{LL}(k)$-Grammatik.

Weitere Eigenschaften

- Es ist gibt kein Verfahren, das für jede beliebige CFG feststellt, ob diese eine LL(1)-Sprache erzeugt.
- Es ist unentscheidbar, ob eine beliebig gegebene $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik zugleich für irgendein $n \in I\!N$ eine LL(n)-Grammatik ist.
- Die $\mathrm{LL}(k)$-Sprachen bilden eine echte Hierarchie: Zu jedem $k \in I\!N$ gibt es eine $\mathrm{LL}(k)$-Grammatik G_k, so dass$L(G_k) \neq L(G_{k-1})$ für jede LL$(k-1)$-Grammatik G_{k-1}.
- Nicht jede deterministische, kontextfreie Sprache besitzt eine $\mathrm{LL}(k)$-Grammatik: Die Sprache $\{a^n b^m \mid 1 \leq n \leq m\}$ besitzt eine $\mathrm{LR}(k)$-Grammatik, aber keine $\mathrm{LL}(k)$-Grammatik.
- Für zwei $\mathrm{LL}(k)$-Grammatiken G und G' ist entscheidbar, ob $L(G) = L(G')$ gilt.