F2 — Automaten und formale Sprachen

Berndt Farwer

Fachbereich Informatik

AB „Theoretische Grundlagen der Informatik“ (TGI)

Universität Hamburg

farwer@informatik.uni-hamburg.de

Themen der heutigen Vorlesung

Wir werden uns beschäftigen mit:

- Eigenschaften von Relationen
  - Reflexivität, Irreflexivität
  - Symmetrie, Asymmetrie, Antisymmetrie
  - Transitivität

Themen der heutigen Vorlesung

Wir werden uns beschäftigen mit:

- Eigenschaften von Relationen
  - Reflexivität, Irreflexivität
  - Symmetrie, Asymmetrie, Antisymmetrie
  - Transitivität
- Ordnungen
  - auf beliebigen Mengen
  - speziell auf Wortmengen

Themen der heutigen Vorlesung

Wir werden uns beschäftigen mit:

- Eigenschaften von Relationen
  - Reflexivität, Irreflexivität
  - Symmetrie, Asymmetrie, Antisymmetrie
  - Transitivität
- Ordnungen
  - auf beliebigen Mengen
  - speziell auf Wortmengen
- formale Sprachen

Themen der heutigen Vorlesung

Wir werden uns beschäftigen mit:

- Eigenschaften von Relationen
  - Reflexivität, Irreflexivität
  - Symmetrie, Asymmetrie, Antisymmetrie
  - Transitivität
- Ordnungen
  - auf beliebigen Mengen
  - speziell auf Wortmengen
- formale Sprachen
- endliche Automaten

Reflexivität

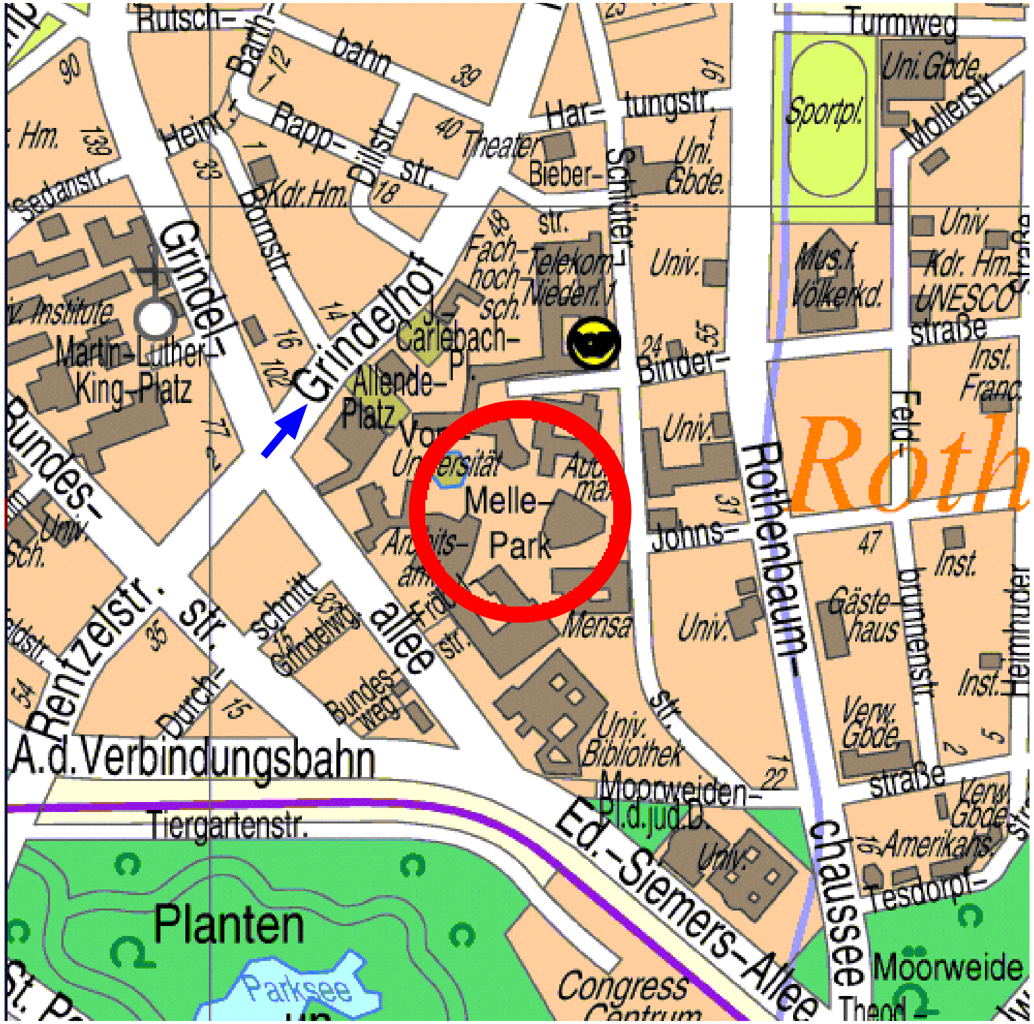
- Sei $R \subseteq A \times A$, dann ist R **reflexiv** gdw. $\forall x \in A : (x, x) \in R$ gilt.

Reflexivität

- Sei $R \subseteq A \times A$, dann ist R **reflexiv** gdw. $\forall x \in A : (x, x) \in R$ gilt.
- Typisches **Beispiel**: Erreichbarkeitsrelationen

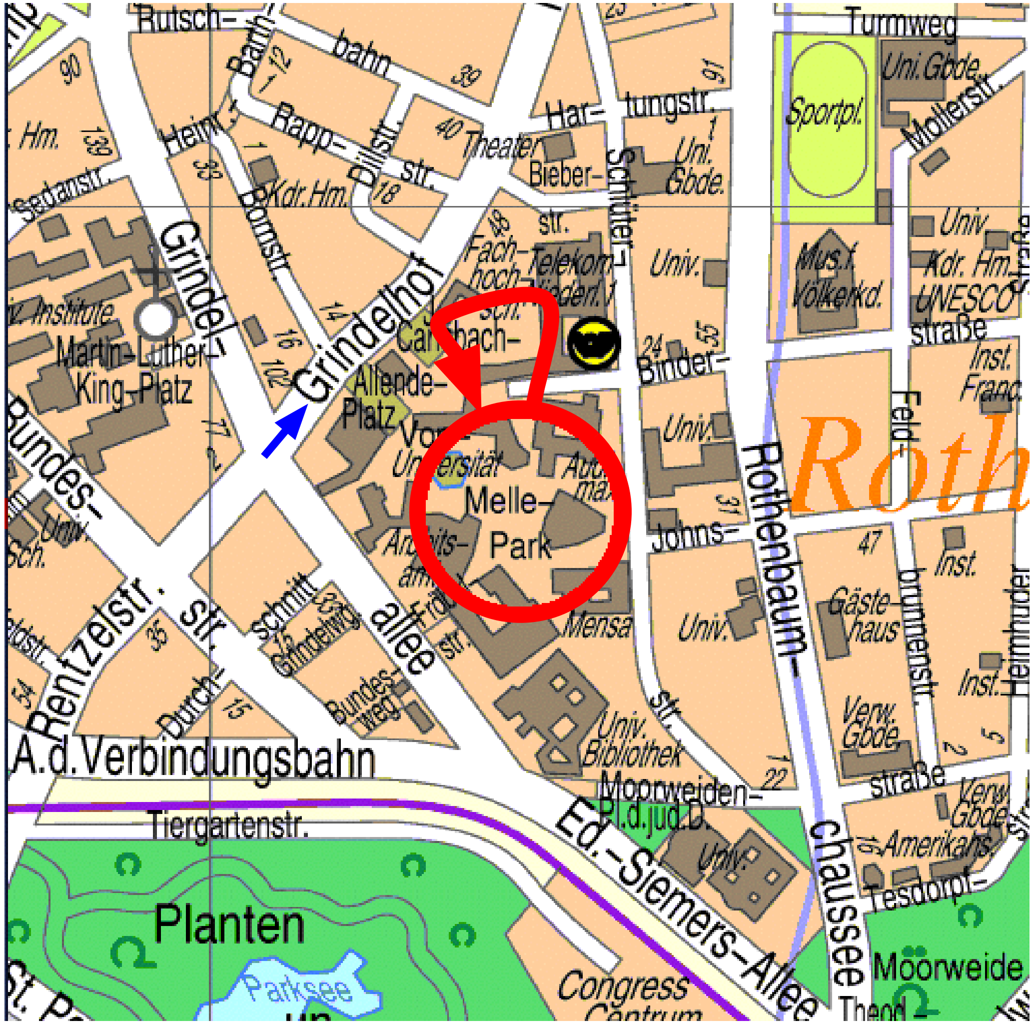
Reflexivität

- Sei $R \subseteq A \times A$, dann ist R **reflexiv** gdw. $\forall x \in A : (x, x) \in R$ gilt.
- Typisches **Beispiel**: Erreichbarkeitsrelationen



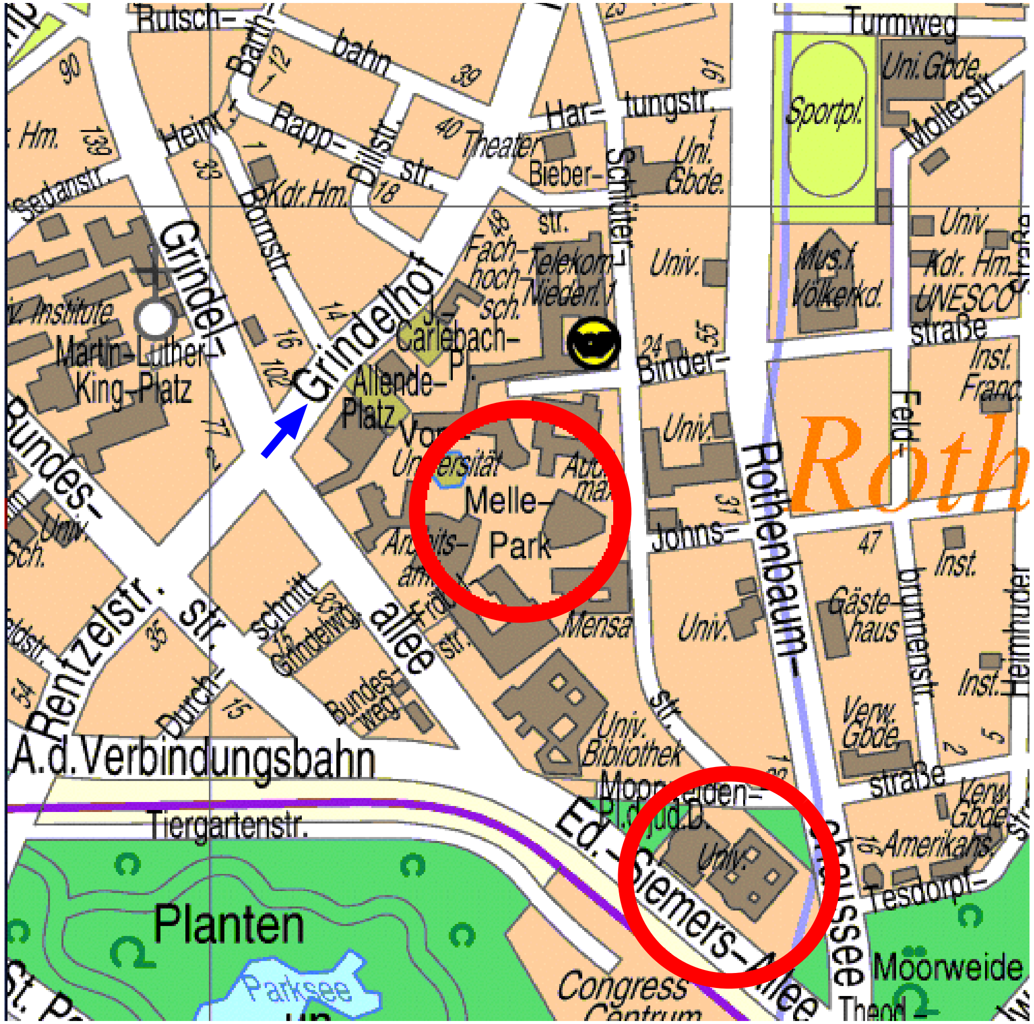
Reflexivität

- Sei $R \subseteq A \times A$, dann ist R **reflexiv** gdw. $\forall x \in A : (x, x) \in R$ gilt.
- Typisches **Beispiel**: Erreichbarkeitsrelationen



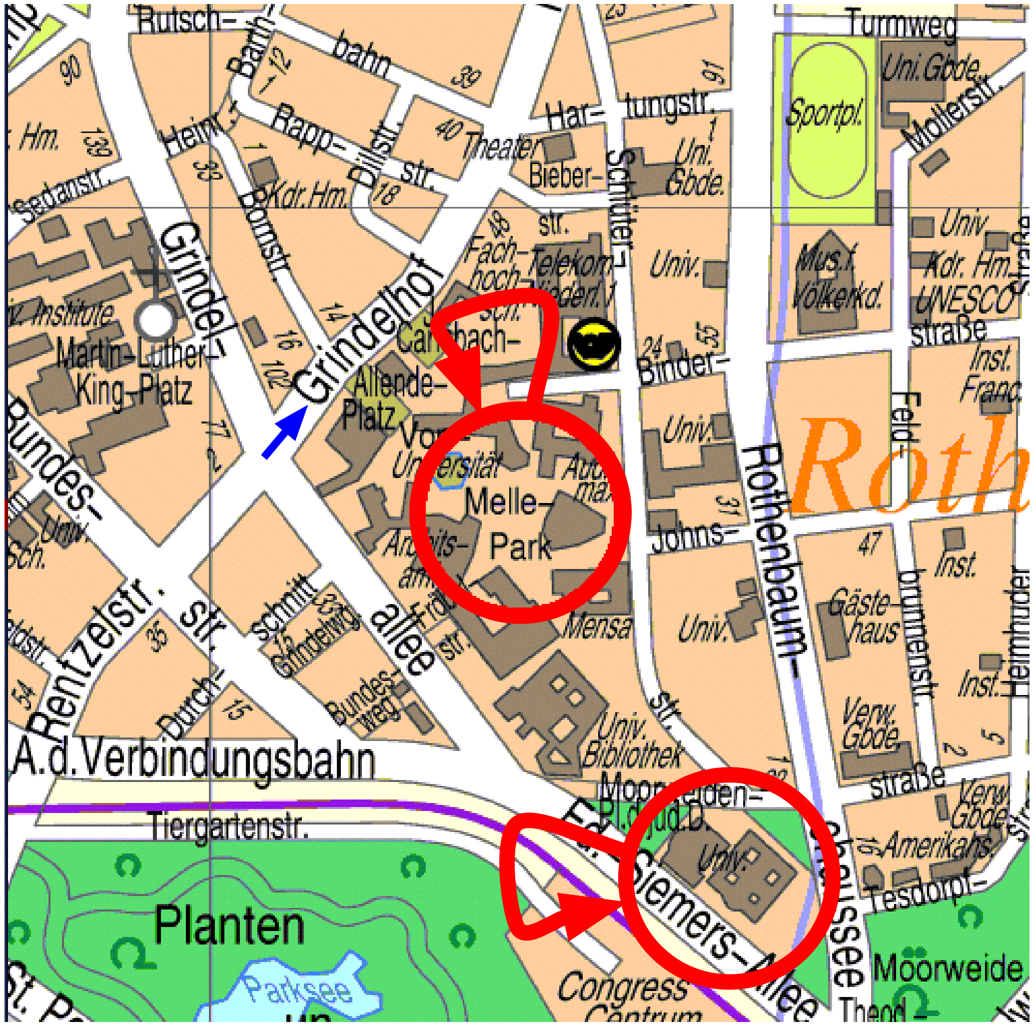
Reflexivität

- Sei $R \subseteq A \times A$, dann ist R **reflexiv** gdw. $\forall x \in A : (x, x) \in R$ gilt.
- Typisches **Beispiel**: Erreichbarkeitsrelationen



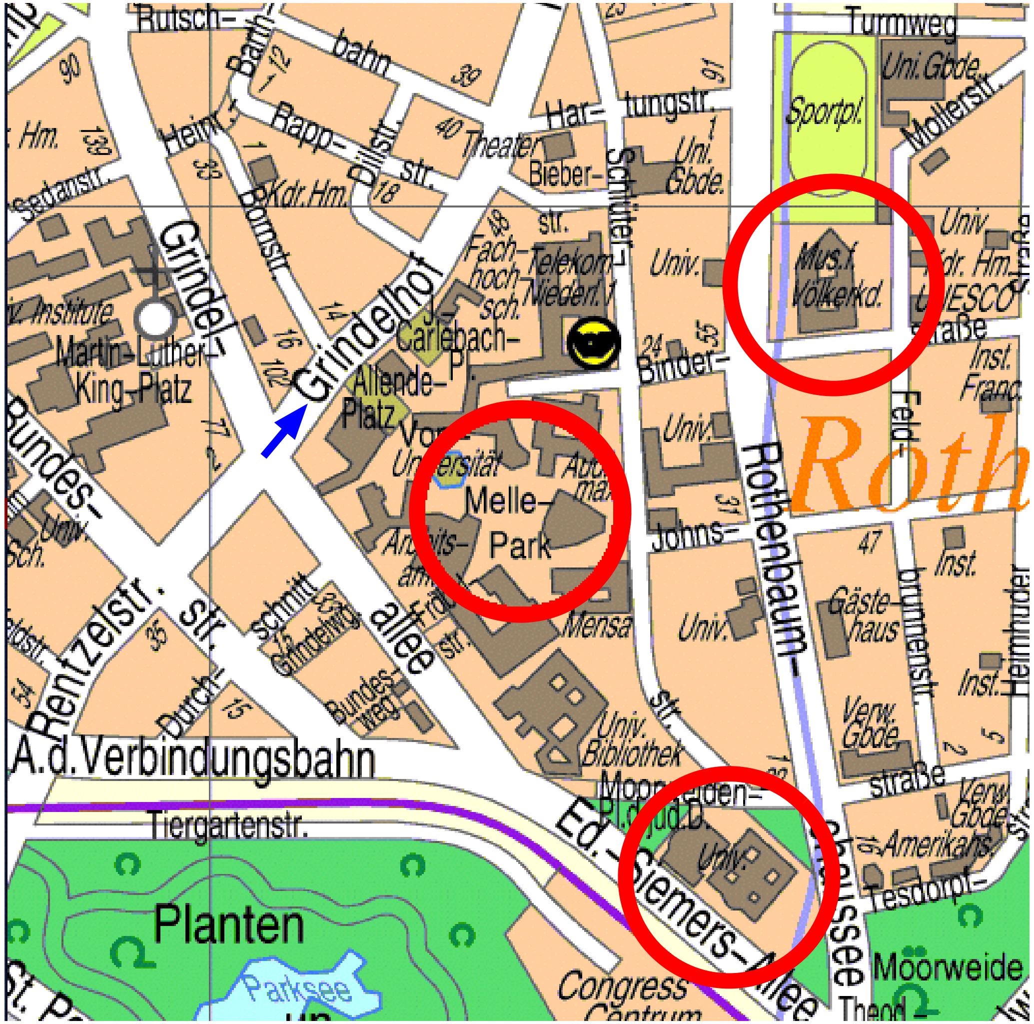
Reflexivität

- Sei $R \subseteq A \times A$, dann ist R **reflexiv** gdw. $\forall x \in A : (x, x) \in R$ gilt.
- Typisches **Beispiel**: Erreichbarkeitsrelationen



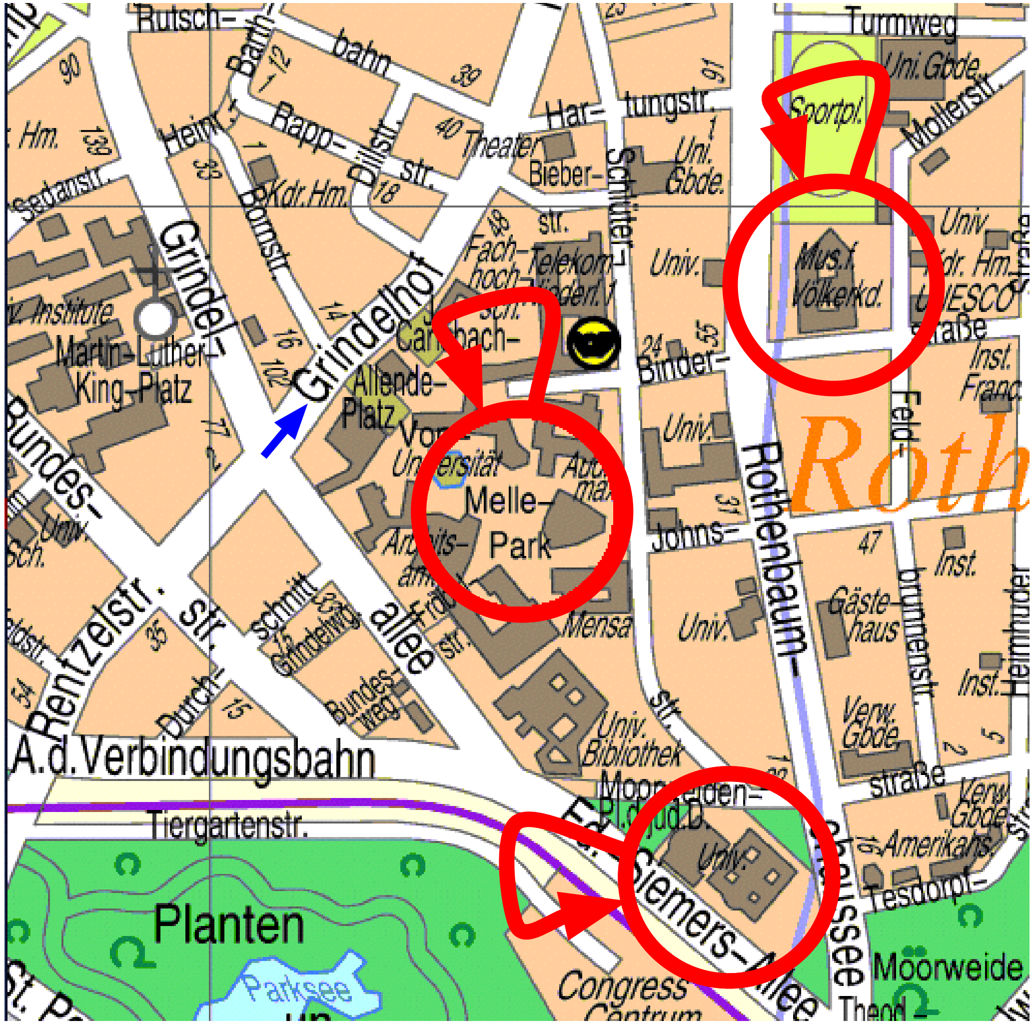
Reflexivität

- Sei $R \subseteq A \times A$, dann ist R **reflexiv** gdw. $\forall x \in A : (x, x) \in R$ gilt.
- Typisches **Beispiel**: Erreichbarkeitsrelationen



Reflexivität

- Sei $R \subseteq A \times A$, dann ist R **reflexiv** gdw. $\forall x \in A : (x, x) \in R$ gilt.
- Typisches **Beispiel**: Erreichbarkeitsrelationen

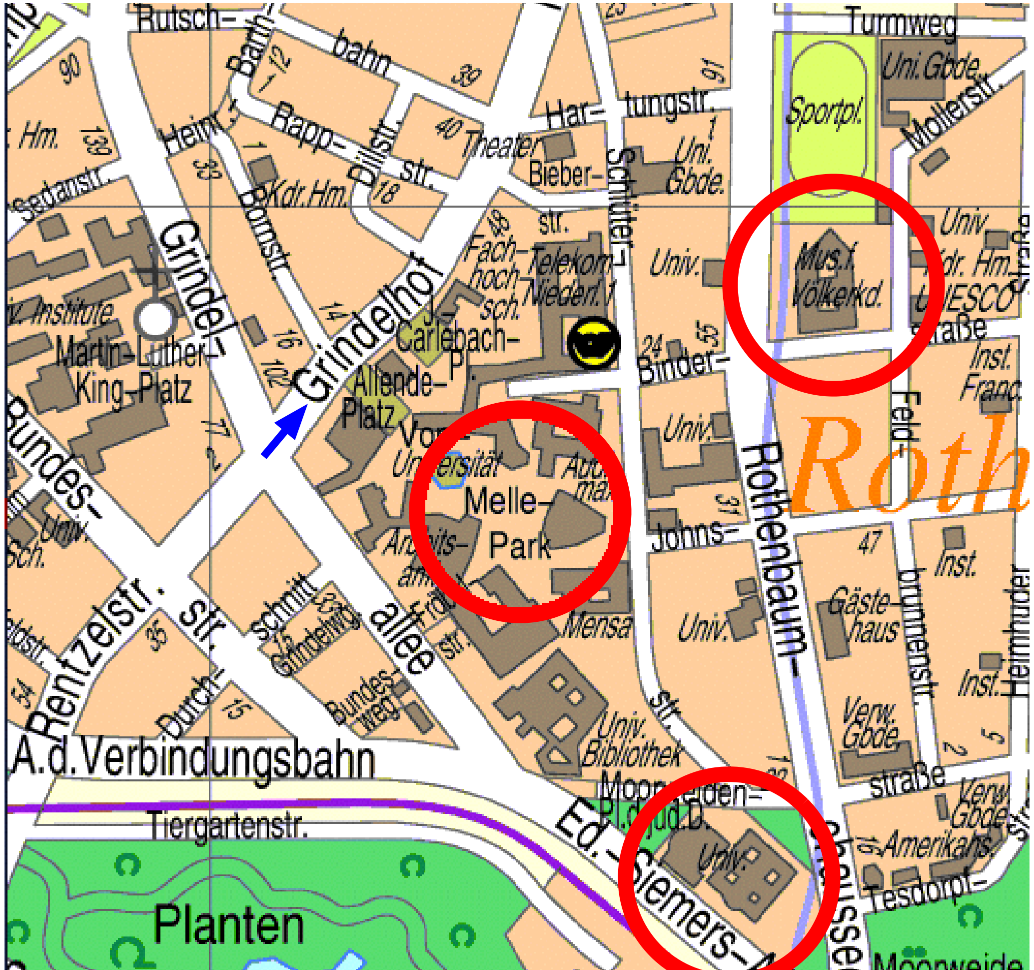


Transitivität

- Sei $R \subseteq A \times A$, dann ist R **transitiv** gdw. $\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$ gilt.

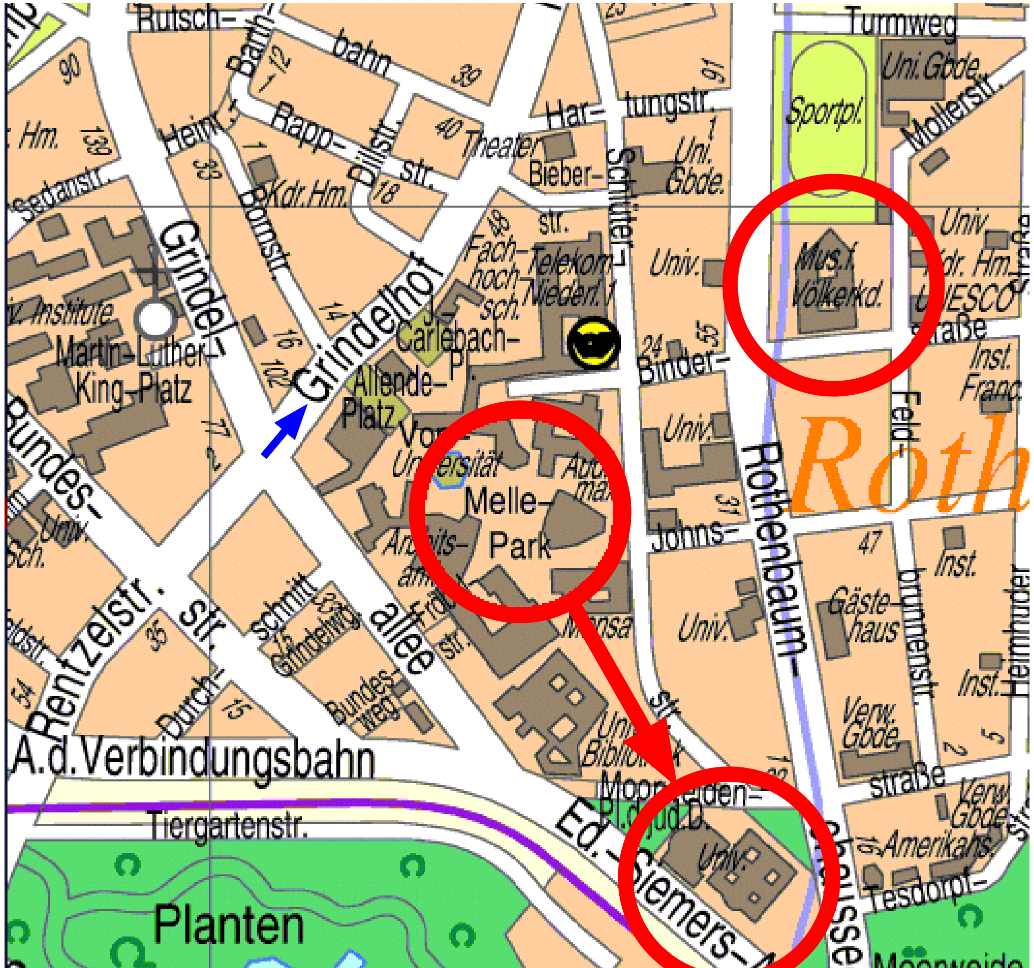
Transitivität

- Sei $R \subseteq A \times A$, dann ist R **transitiv** gdw. $\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$ gilt.
- **Beispiel**: unsere Erreichbarkeitsrelation



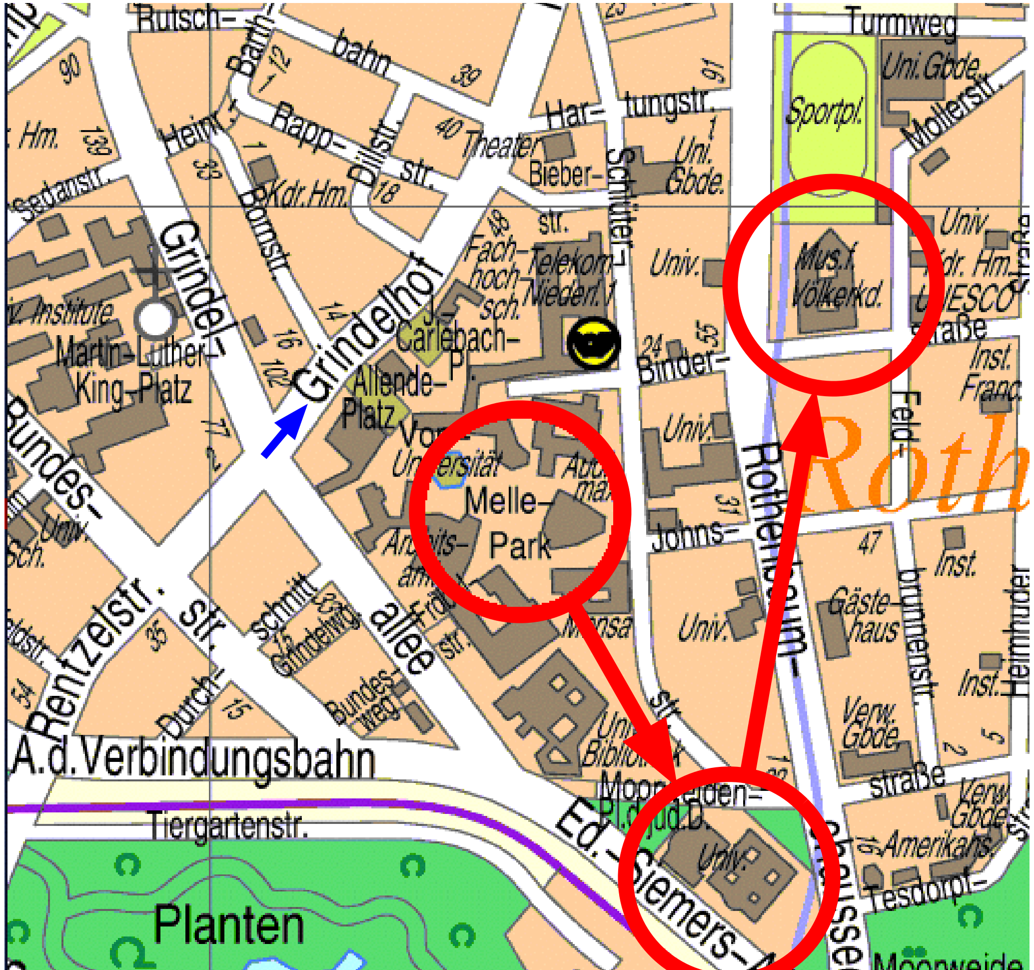
Transitivität

- Sei $R \subseteq A \times A$, dann ist R **transitiv** gdw. $\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$ gilt.
- **Beispiel**: unsere Erreichbarkeitsrelation



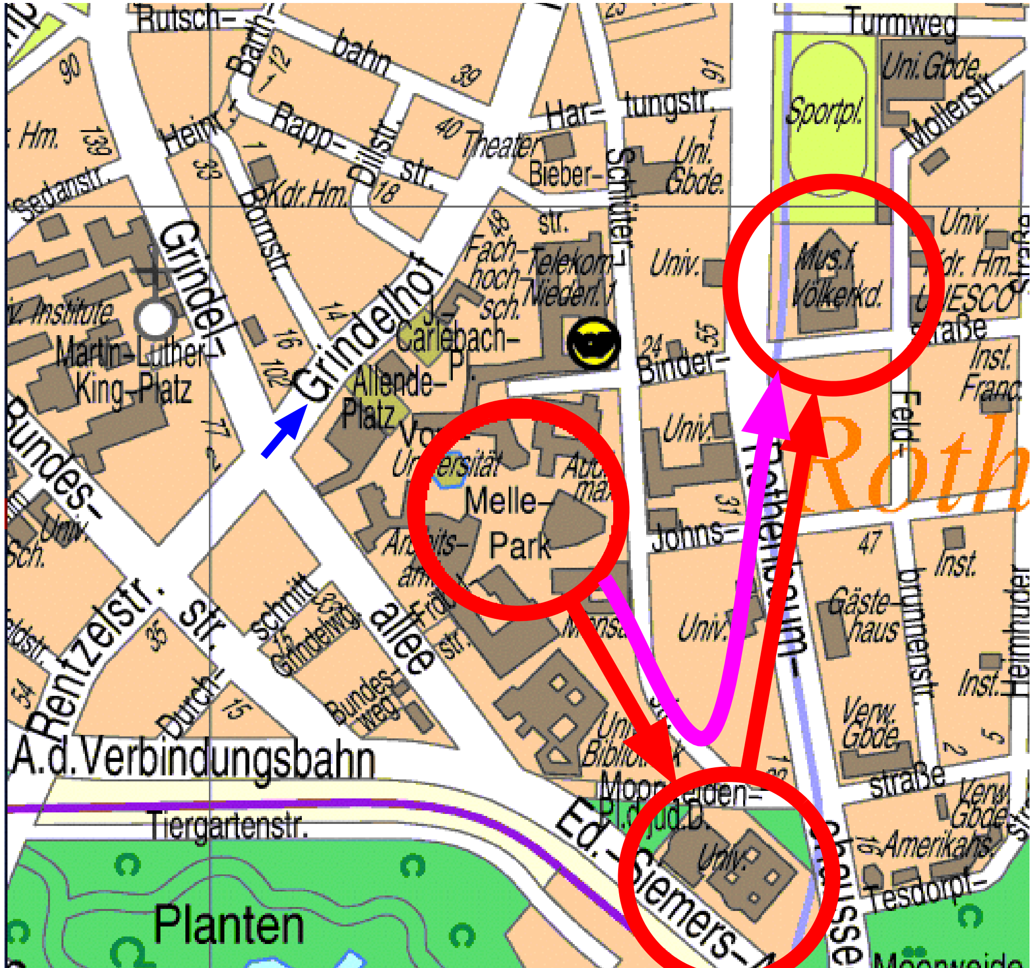
Transitivität

- Sei $R \subseteq A \times A$, dann ist R **transitiv** gdw.
  $\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$
  gilt.
- **Beispiel**: unsere Erreichbarkeitsrelation



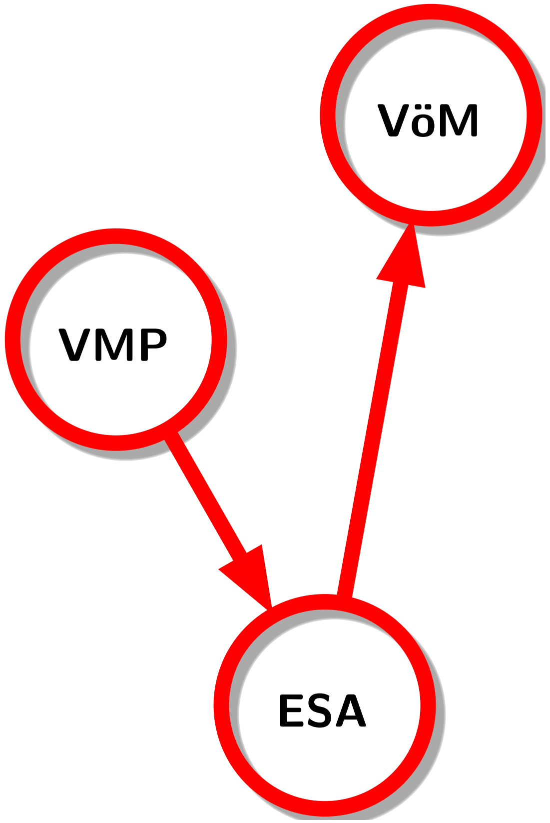
Transitivität

- Sei $R \subseteq A \times A$, dann ist R **transitiv** gdw. $\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$ gilt.
- **Beispiel**: unsere Erreichbarkeitsrelation



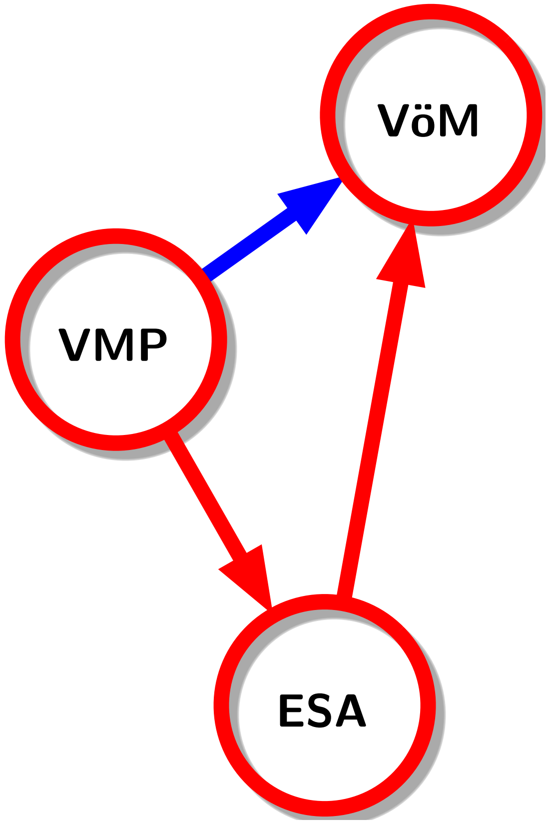
Transitivität

- Fortsetzung des Beispiels:



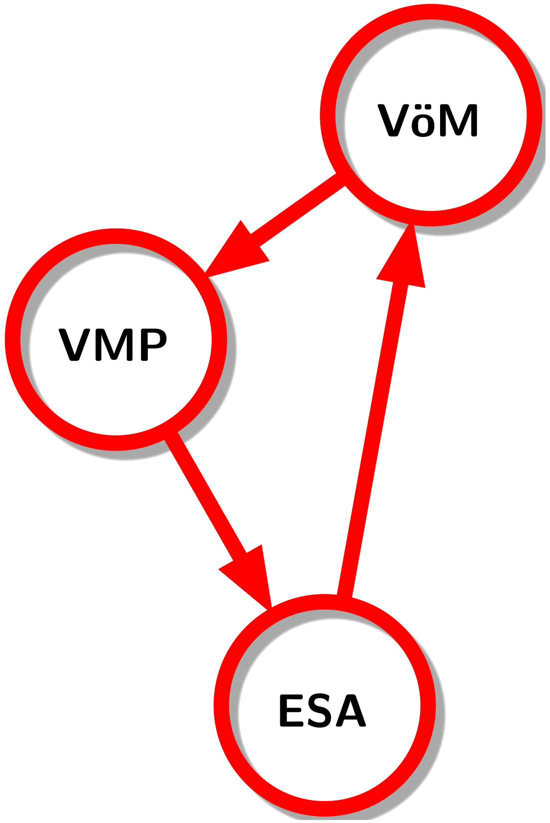
Transitivität

- Fortsetzung des Beispiels:



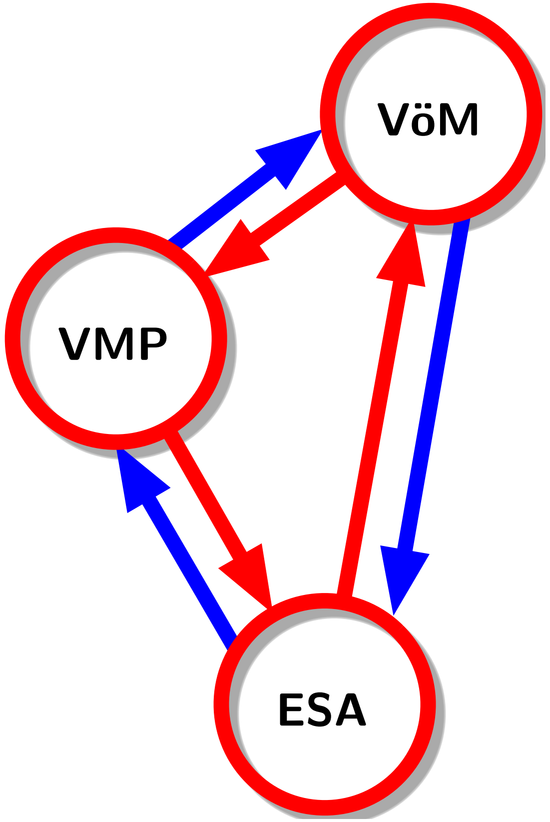
Transitivität

- Fortsetzung des Beispiels:



Transitivität

- Fortsetzung des Beispiels: (zusätzliche Kante)



Transitiver Abschluss

- Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf der Menge A. Dann seien R^+, der **transitive Abschluss** (auch **transitive Hülle**), und R^*, der **reflexive, transitive Abschluss**, von R wie folgt erklärt:

$$R^+ := \bigcup_{i \geq 1} R_i \text{ mit } R_1 := R \quad \text{und} \quad R_{i+1} := R_i \cdot R.$$

Transitiver Abschluss

- Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf der Menge A. Dann seien R^+, der **transitive Abschluss** (auch **transitive Hülle**), und R^*, der **reflexive, transitive Abschluss**, von R wie folgt erklärt:

$$R^+ := \bigcup_{i \geq 1} R_i \text{ mit } R_1 := R \quad \text{und} \quad R_{i+1} := R_i \cdot R.$$

- Für eine Teilmenge $M \subseteq H$ einer Halbgruppe $(H, \odot)$ seien der **transitive Abschluss** M^+ sowie der **transitive und reflexive Abschluss** M^*

$$M^+ := \bigcup_{i \geq 1} M^i \text{ mit } M^1 := M \text{ und } M^{i+1} := M^i \cdot M$$

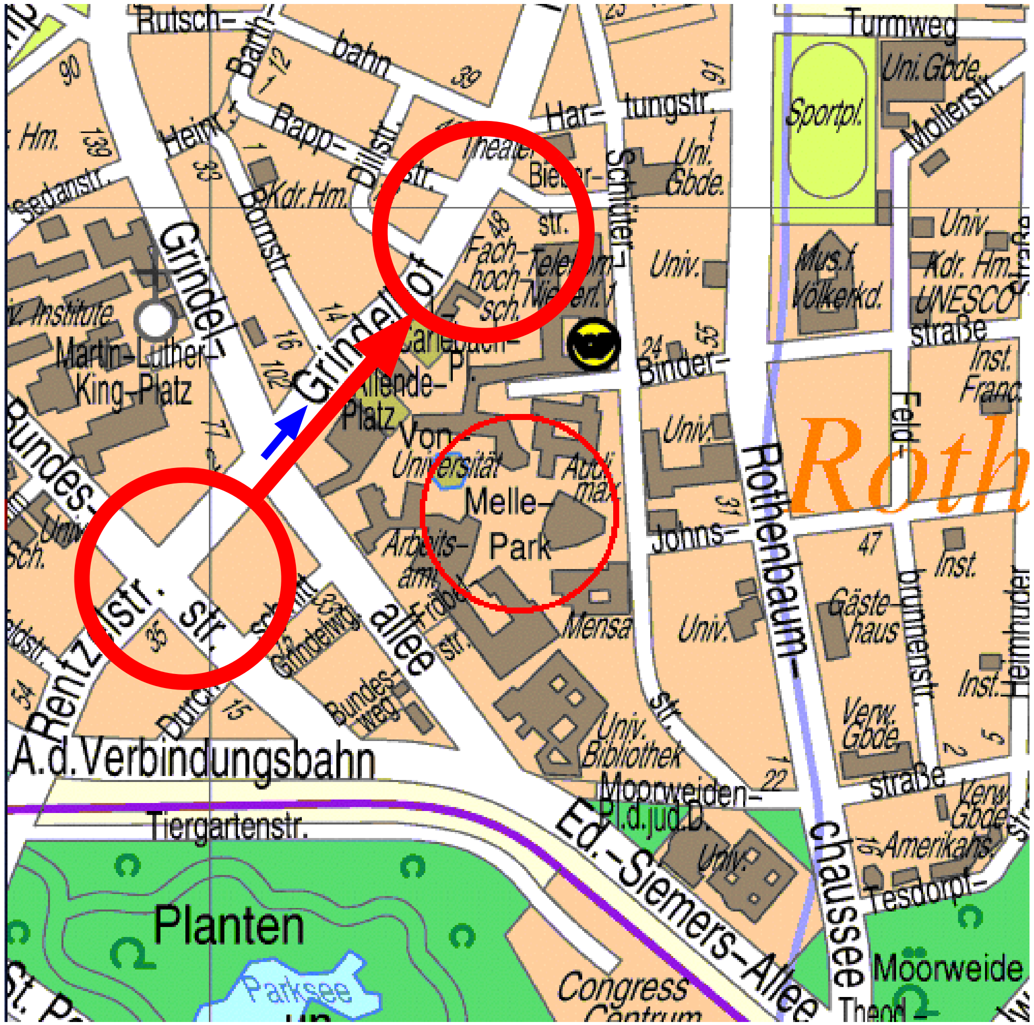
$$M^* := M^+ \cup \{e_H\}$$

Symmetrie

- Sei $R \subseteq A \times A$, dann ist R **symmetrisch** gdw. $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \to (y, x) \in R$ gilt.

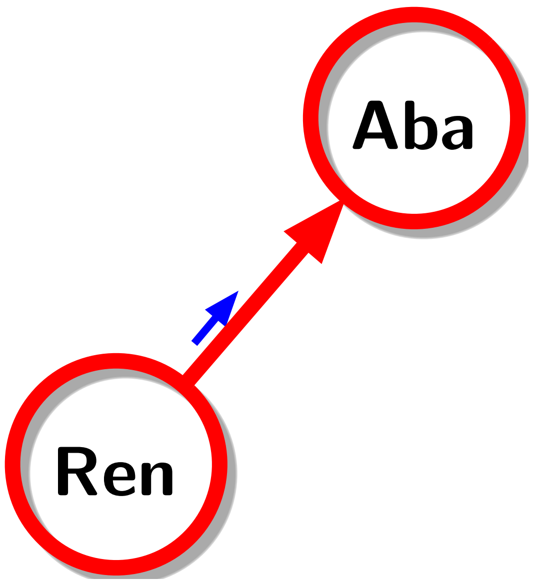
Symmetrie

- Sei $R \subseteq A \times A$, dann ist R **symmetrisch** gdw. $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$ gilt.



Symmetrie

- Sei $R \subseteq A \times A$, dann ist R **symmetrisch** gdw. $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$ gilt.



Erreichbarkeitsrelationen müssen nicht symmetrisch sein!

Weitere Eigenschaften

Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf A. R heißt

- **asymmetrisch** gdw. aus $(a, b) \in R$ immer $(b, a) \notin R$ folgt.

  Eine asymmetrische Relation ist also immer irreflexiv, aber eine irreflexive Relation braucht nicht asymmetrisch zu sein!

Weitere Eigenschaften

Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf A. R heißt

- **asymmetrisch** gdw. aus $(a, b) \in R$ immer $(b, a) \notin R$ folgt.

  Eine asymmetrische Relation ist also immer irreflexiv, aber eine irreflexive Relation braucht nicht asymmetrisch zu sein!

- **antisymmetrisch**, falls für alle $a, b \in A$ gilt:

$$(a, b) \in R \ \wedge \ (b, a) \in R \ \rightarrow \ a = b$$

Weitere Eigenschaften

Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf A. R heißt

- **asymmetrisch** gdw. aus $(a,b) \in R$ immer $(b,a) \notin R$ folgt.

  Eine asymmetrische Relation ist also immer irreflexiv, aber eine irreflexive Relation braucht nicht asymmetrisch zu sein!

- **antisymmetrisch**, falls für alle $a, b \in A$ gilt:

$$(a,b) \in R \ \wedge \ (b,a) \in R \ \longrightarrow \ a = b$$

- **linear** genau dann, wenn für beliebige $a, b \in A$ genau eine der drei Bedingungen:
  $a = b$ oder $(a,b) \in R$ oder $(b,a) \in R$ erfülllt ist.

Begriffe

- Keine zwei der folgenden Eigenschaften sind identisch:

Begriffe

- Keine zwei der folgenden Eigenschaften sind identisch:
  - Die Relation R ist **symmetrisch**.

Begriffe

- Keine zwei der folgenden Eigenschaften sind identisch:
  - Die Relation R ist **symmetrisch**.
  - Die Relation R ist **asymmetrisch**.

Begriffe

- Keine zwei der folgenden Eigenschaften sind identisch:
  - Die Relation R ist **symmetrisch**.
  - Die Relation R ist **asymmetrisch**.
  - Die Relation R ist **antisymmetrisch**.

Begriffe

- Keine zwei der folgenden Eigenschaften sind identisch:
  - Die Relation R ist **symmetrisch**.
  - Die Relation R ist **asymmetrisch**.
  - Die Relation R ist **antisymmetrisch**.
  - Die Relation R ist **nicht symmetrisch**.

Begriffe

- Keine zwei der folgenden Eigenschaften sind identisch:
  - Die Relation R ist **symmetrisch**.
  - Die Relation R ist **asymmetrisch**.
  - Die Relation R ist **antisymmetrisch**.
  - Die Relation R ist **nicht symmetrisch**.
- Beispiele dazu im Skript und in den Übungen!

Formale Sprache

- Eine **formale Sprache** über dem Alphabet Σ ist eine Menge von Wörtern aus Σ^*.
  - *Zur Erinnerung:* Ein **Alphabet** ist eine endliche Menge von Symbolen.

Formale Sprache

- Eine **formale Sprache** über dem Alphabet Σ ist eine Menge von Wörtern aus Σ^*.
  - *Zur Erinnerung:* Ein **Alphabet** ist eine endliche Menge von Symbolen.
- Statt *formale Sprache* verwenden wir auch einfach *Sprache*.

Formale Sprache

- Eine **formale Sprache** über dem Alphabet Σ ist eine Menge von Wörtern aus Σ^*.
  - *Zur Erinnerung:* Ein **Alphabet** ist eine endliche Menge von Symbolen.
- Statt *formale Sprache* verwenden wir auch einfach *Sprache*.
- **Beispiele:**
  - $\{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb\}$ ist eine Sprache über dem Alphabet $\{a, b\}$.

Formale Sprache

- Eine **formale Sprache** über dem Alphabet Σ ist eine Menge von Wörtern aus Σ^*.
  - *Zur Erinnerung:* Ein **Alphabet** ist eine endliche Menge von Symbolen.
- Statt *formale Sprache* verwenden wir auch einfach *Sprache*.
- **Beispiele:**
  - $\{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb\}$ ist eine Sprache über dem Alphabet $\{a, b\}$.
  - $\{w \in \{a, b\}^* \mid w = av \wedge v \in \{a, b\}^*\}$ ist ebenfalls eine Sprache über dem Alphabet $\{a, b\}$.

Beschreibung formaler Sprachen

- Eine Sprache muss durch eine **endliche Repräsentation** dargestellt werden.

Beschreibung formaler Sprachen

- Eine Sprache muss durch eine **endliche Repräsentation** dargestellt werden.
- Die Beschreibung einer Sprache muss **eindeutig** sein.

Beschreibung formaler Sprachen

- Eine Sprache muss durch eine **endliche Repräsentation** dargestellt werden.
- Die Beschreibung einer Sprache muss **eindeutig** sein.
- Es kann **unterschiedliche Beschreibungen** für dieselbe Sprache geben.

Beschreibung formaler Sprachen

- Eine Sprache muss durch eine **endliche Repräsentation** dargestellt werden.
- Die Beschreibung einer Sprache muss **eindeutig** sein.
- Es kann **unterschiedliche Beschreibungen** für dieselbe Sprache geben.
- Wir werden dazu kennenlernen:
  - endliche Automaten
  - rationale Ausdrücke
  - rechtslineare Grammatiken

Beschreibung formaler Sprachen

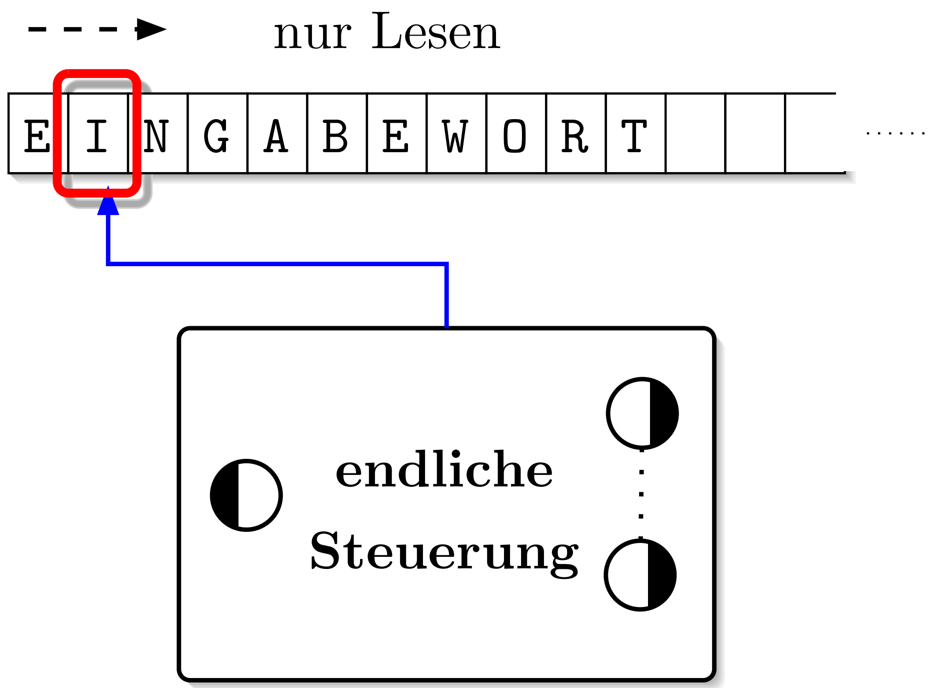
- Eine Sprache muss durch eine **endliche Repräsentation** dargestellt werden.
- Die Beschreibung einer Sprache muss **eindeutig** sein.
- Es kann **unterschiedliche Beschreibungen** für dieselbe Sprache geben.
- Wir werden dazu kennenlernen:
  - **endliche Automaten**
  - rationale Ausdrücke
  - rechtslineare Grammatiken

endlicher Automat (DFA)

- Zustandsübergangsdiagramme werden zu **deterministischen endlichen Automaten** erweitert:

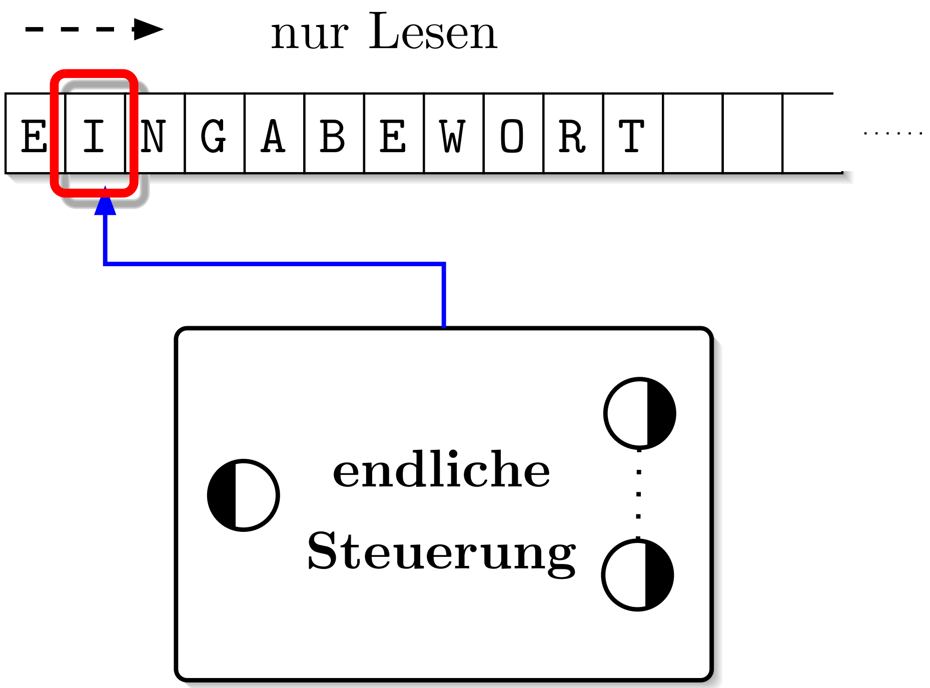
endlicher Automat (DFA)

- Zustandsübergangsdiagramme werden zu **deterministischen endlichen Automaten** erweitert:



endlicher Automat (DFA)

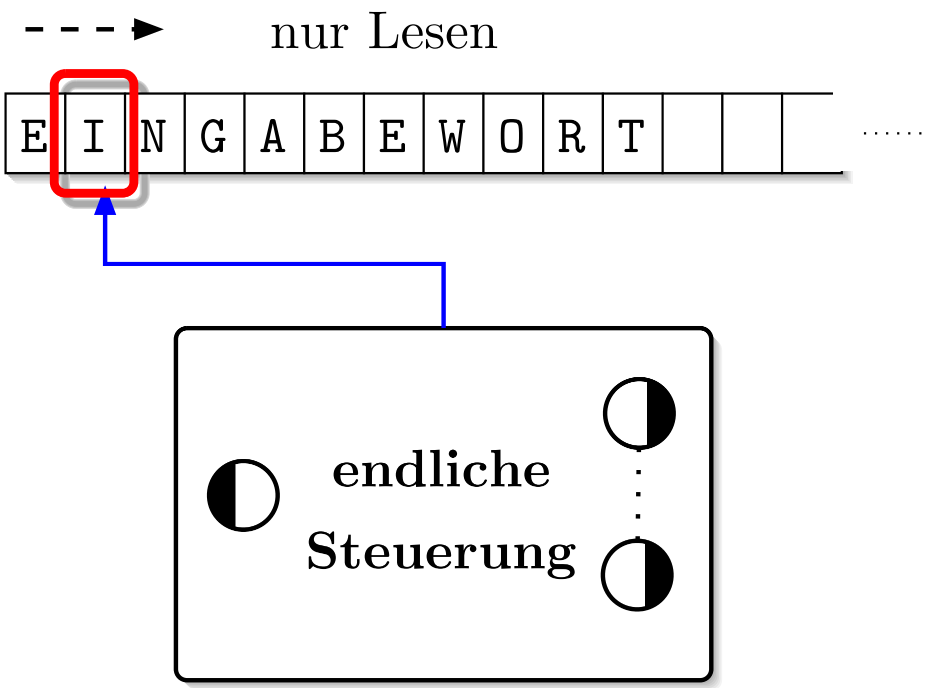
- Zustandsübergangsdiagramme werden zu **deterministischen endlichen Automaten** erweitert:



- Start- und Endzustände

endlicher Automat (DFA)

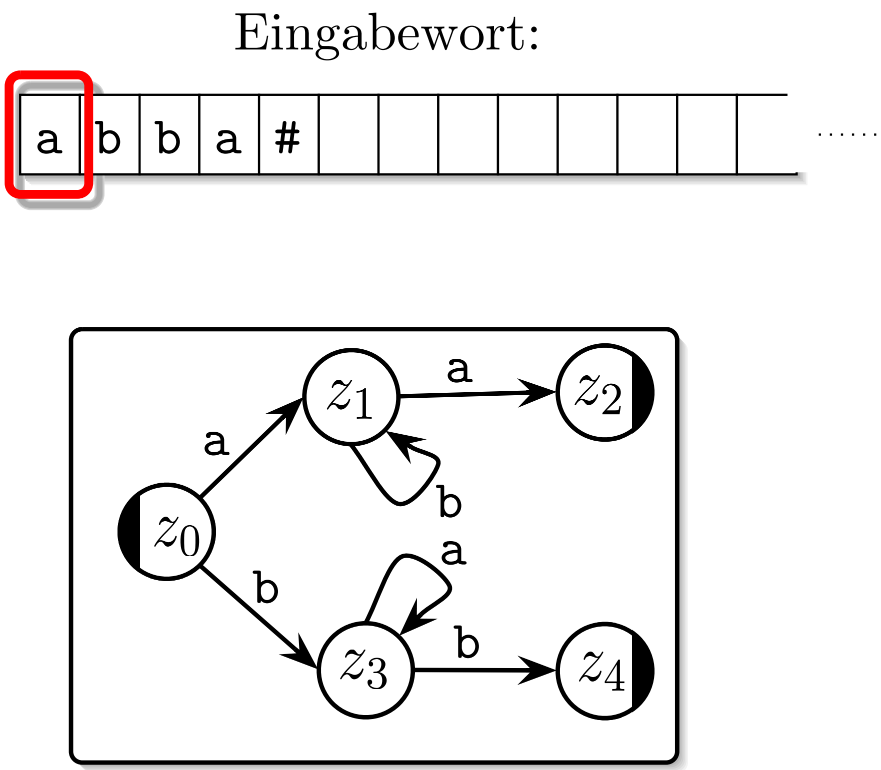
- Zustandsübergangsdiagramme werden zu **deterministischen endlichen Automaten** erweitert:



- Start- und Endzustände
- endliche Steuerung = konstanter Speicher

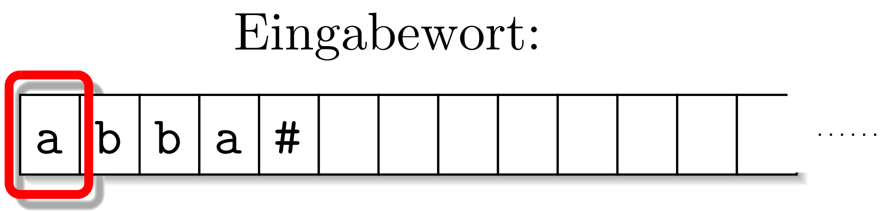
Funktionsweise des DFA

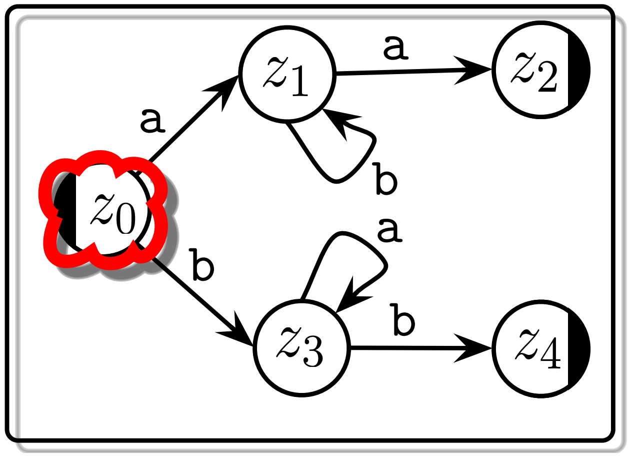
- Bei Eingabe eines Wortes wird durch die endliche Kontrolle das Verhalten des DFA bestimmt:



Funktionsweise des DFA

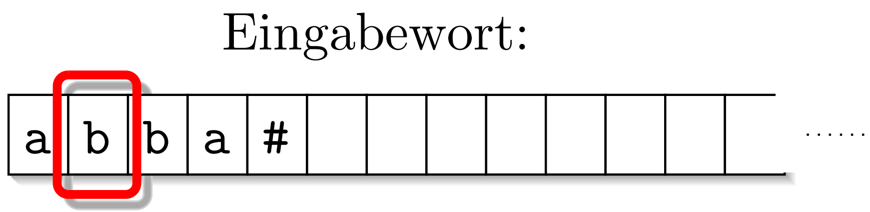
- Bei Eingabe eines Wortes wird durch die endliche Kontrolle das Verhalten des DFA bestimmt:

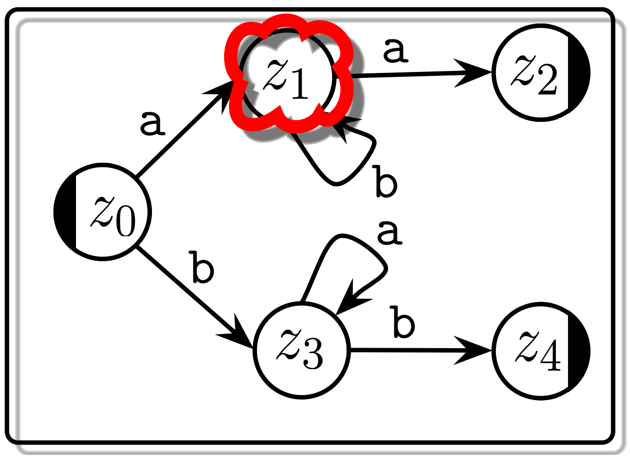




Funktionsweise des DFA

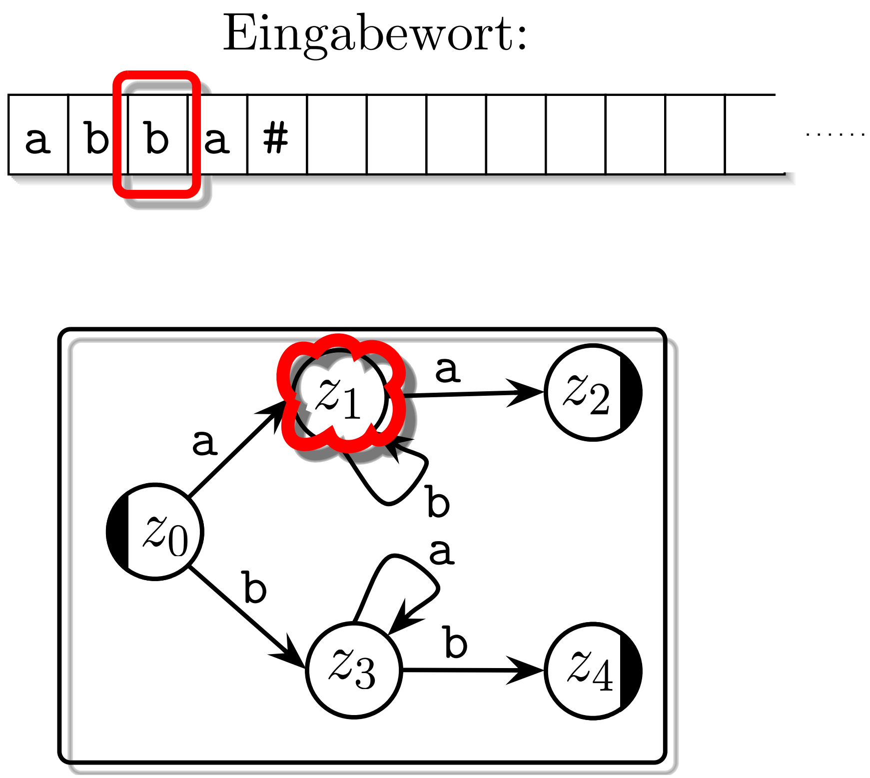
- Bei Eingabe eines Wortes wird durch die endliche Kontrolle das Verhalten des DFA bestimmt:





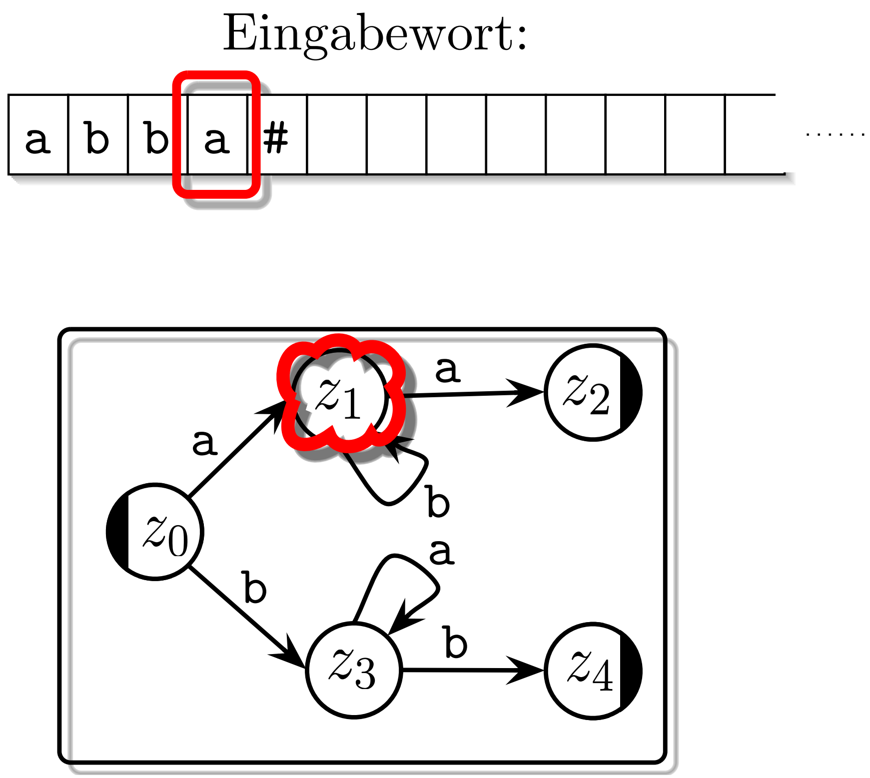
Funktionsweise des DFA

- Bei Eingabe eines Wortes wird durch die endliche Kontrolle das Verhalten des DFA bestimmt:



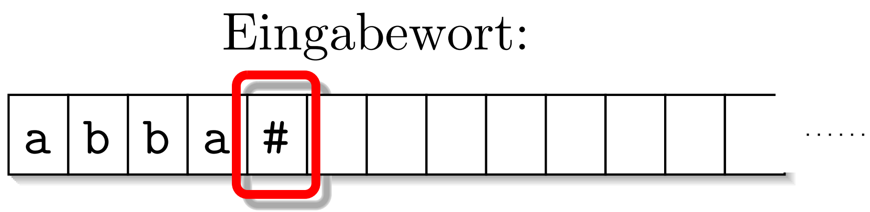
Funktionsweise des DFA

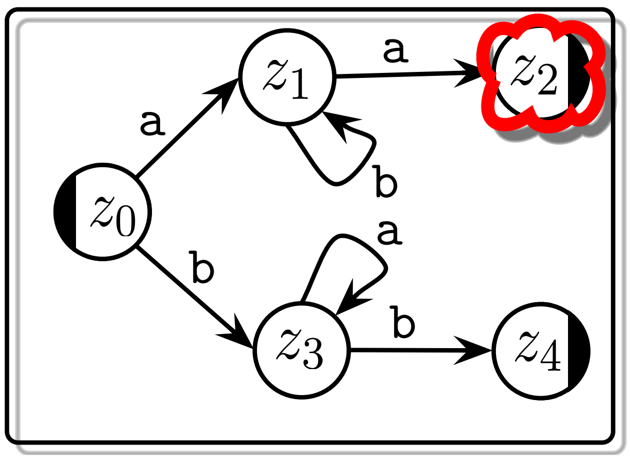
- Bei Eingabe eines Wortes wird durch die endliche Kontrolle das Verhalten des DFA bestimmt:



Funktionsweise des DFA

- Bei Eingabe eines Wortes wird durch die endliche Kontrolle das Verhalten des DFA bestimmt:

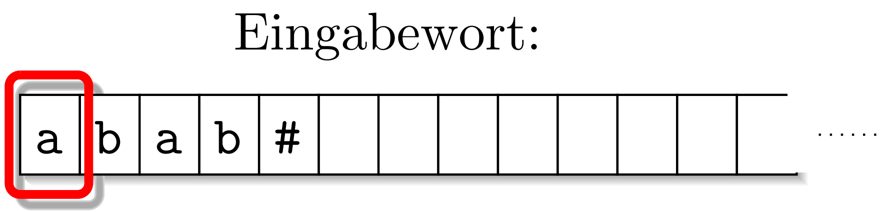


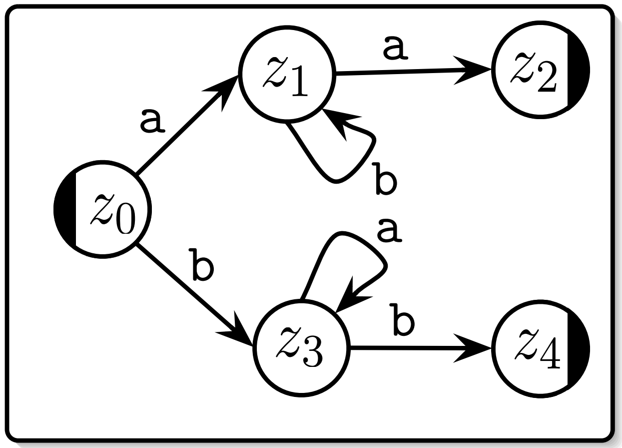


Die Rechnung des Automaten endet in z_2, einem Endzustand. Die Eingabe ist komplett gelesen, d.h. der Lesekopf steht hinter der Eingabe.

Funktionsweise des DFA

- Eine andere Eingabe bewirkt auch ein anderes Verhalten:

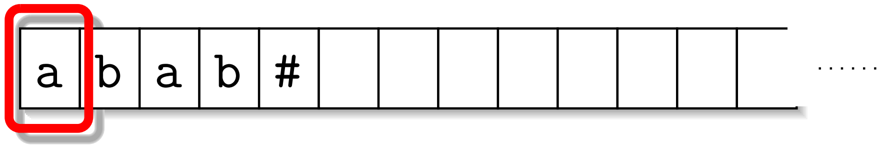


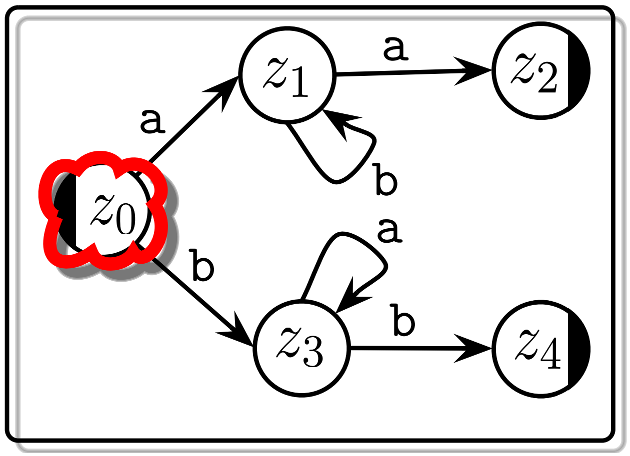


Funktionsweise des DFA

- Eine andere Eingabe bewirkt auch ein anderes Verhalten:

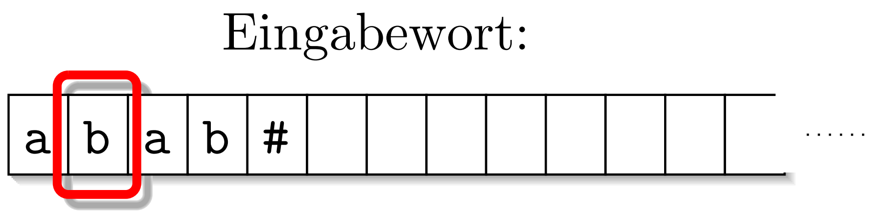
Eingabewort:

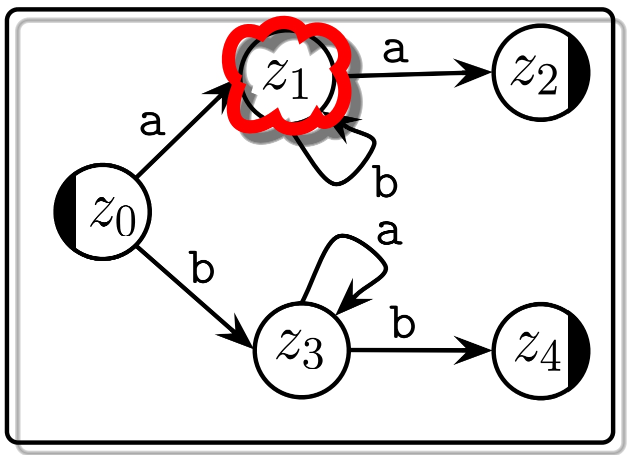




Funktionsweise des DFA

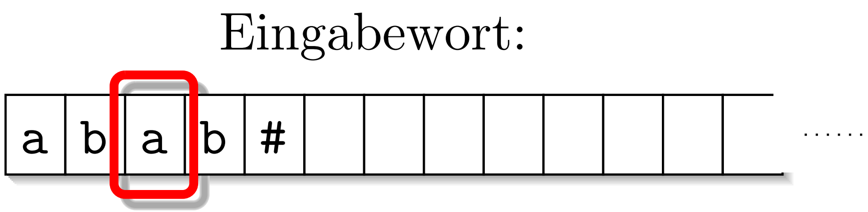
- Eine andere Eingabe bewirkt auch ein anderes Verhalten:

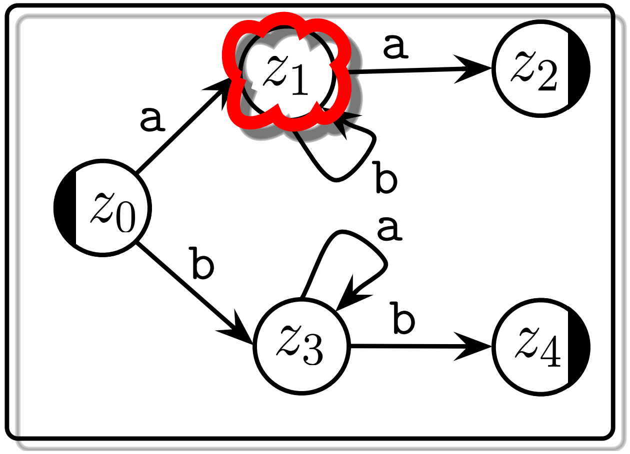




Funktionsweise des DFA

- Eine andere Eingabe bewirkt auch ein anderes Verhalten:

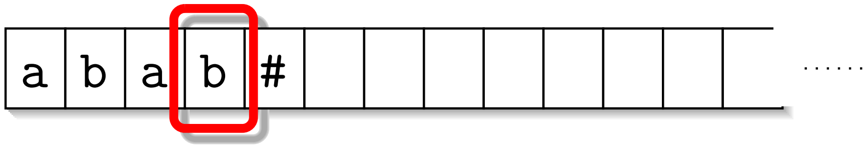


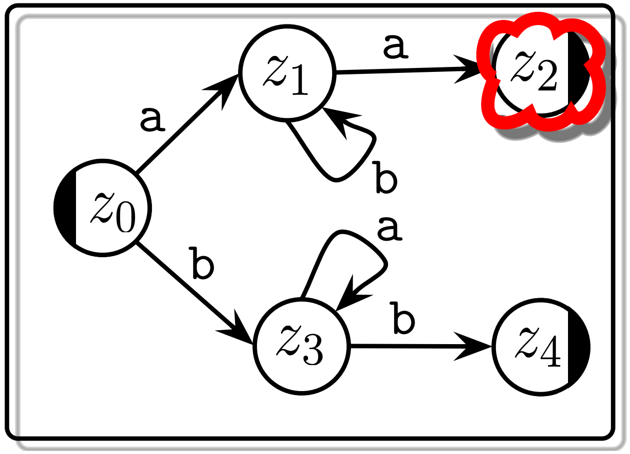


Funktionsweise des DFA

- Eine andere Eingabe bewirkt auch ein anderes Verhalten:

Eingabewort:





Die Rechnung des Automaten endet wieder in z_2, aber die Eingabe ist nicht vollständig gelesen.

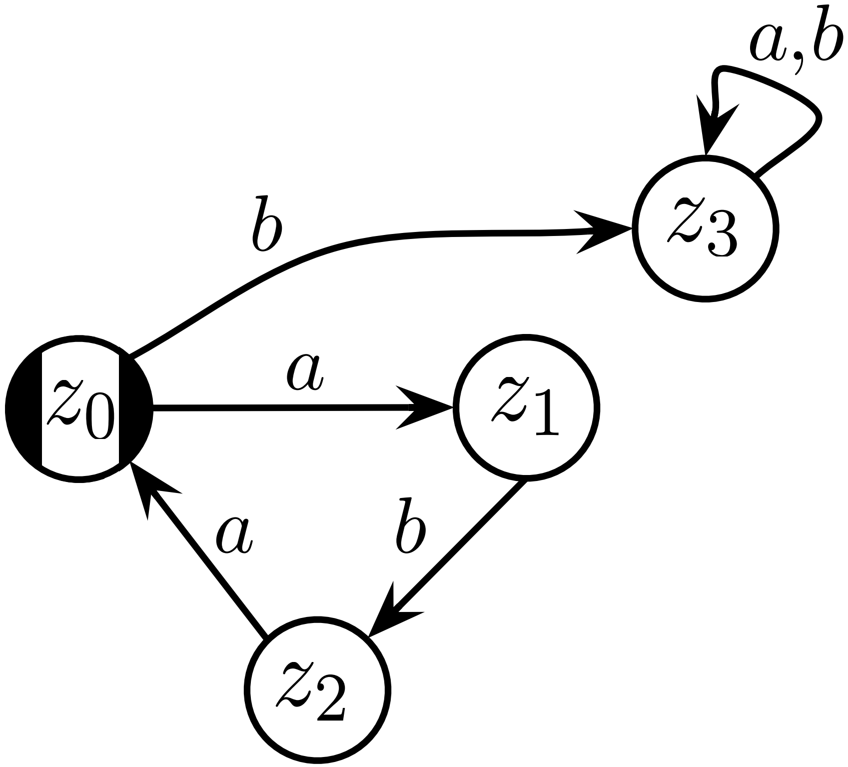
Definition: DFA

Ein **deterministischer endlicher Automat** (**DFA** für **d***eterministic* **f***inite* **a***utomaton*) wird durch ein Quintupel $A := (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z_{\text{end}})$ beschrieben, wobei

- Z eine endliche Menge von **Zuständen** ist,
- Σ ein endliches Alphabet von **Eingabesymbolen** ist,
- $\delta :\subseteq Z \times \Sigma \longrightarrow Z$ die nicht notwendigerweise totale **Überführungsfunktion** ist,
- $z_0 \in Z$ der **Startzustand** ist und
- $Z_{\text{end}} \subseteq Z$ die Menge der **Endzustände** ist.

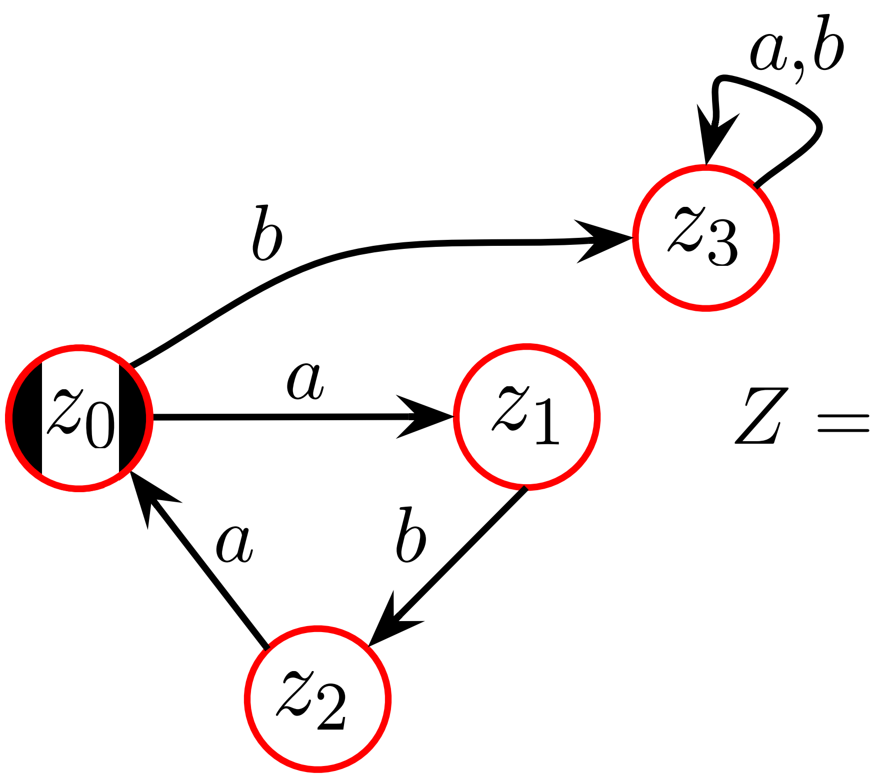
Ein Beispiel

Die graphische Darstellung eines DFA:



Ein Beispiel

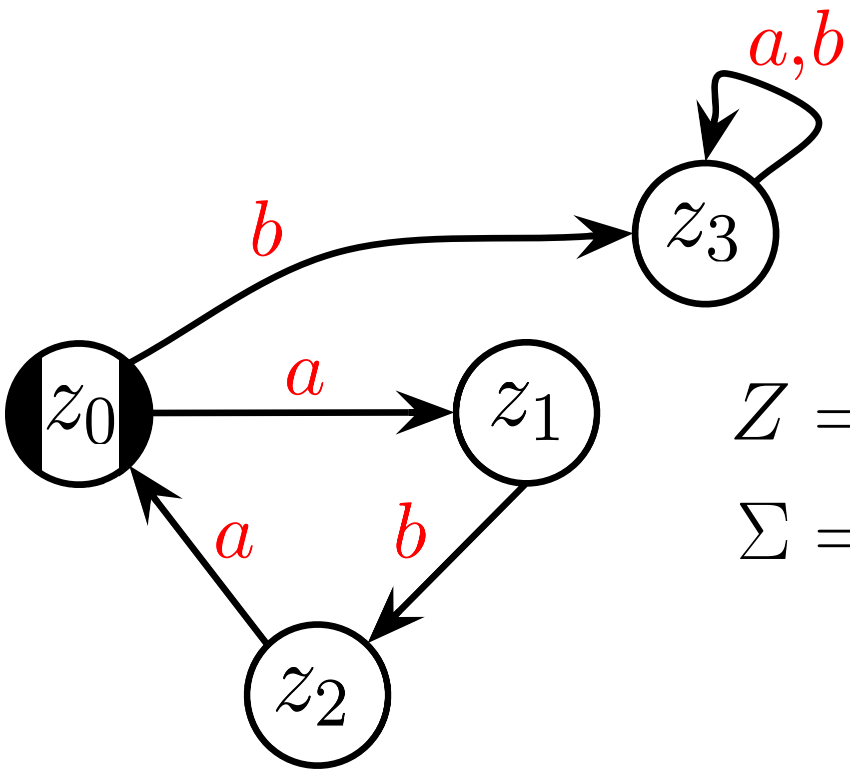
Die graphische Darstellung eines DFA:



$$Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$

Ein Beispiel

Die graphische Darstellung eines DFA:

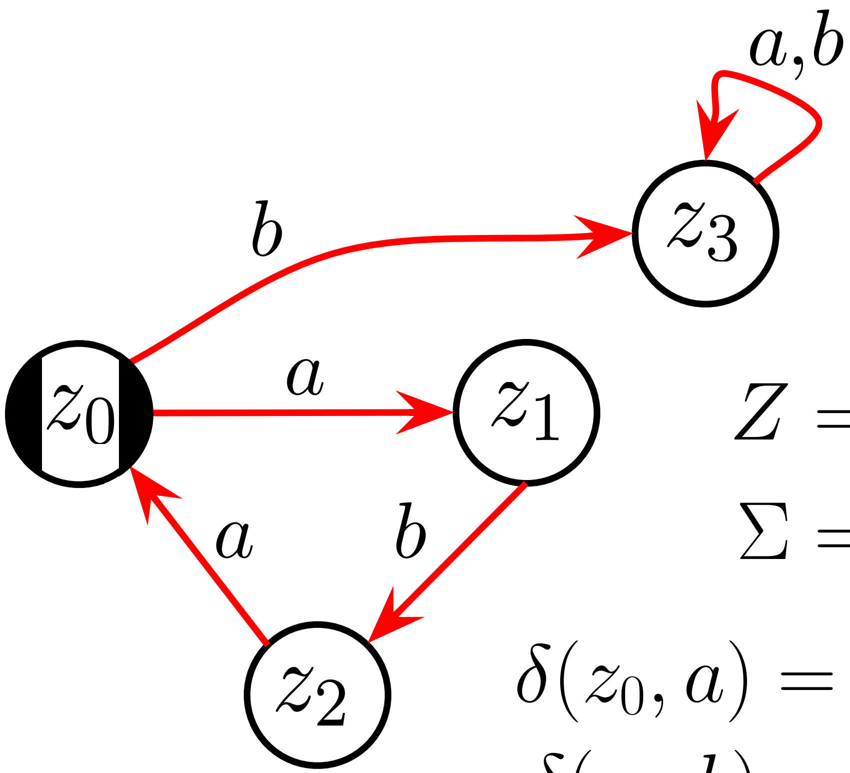


$$Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

Ein Beispiel

Die graphische Darstellung eines DFA:



$$Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\delta(z_0, a) = z_1 \qquad \delta(z_2, a) = z_0$$

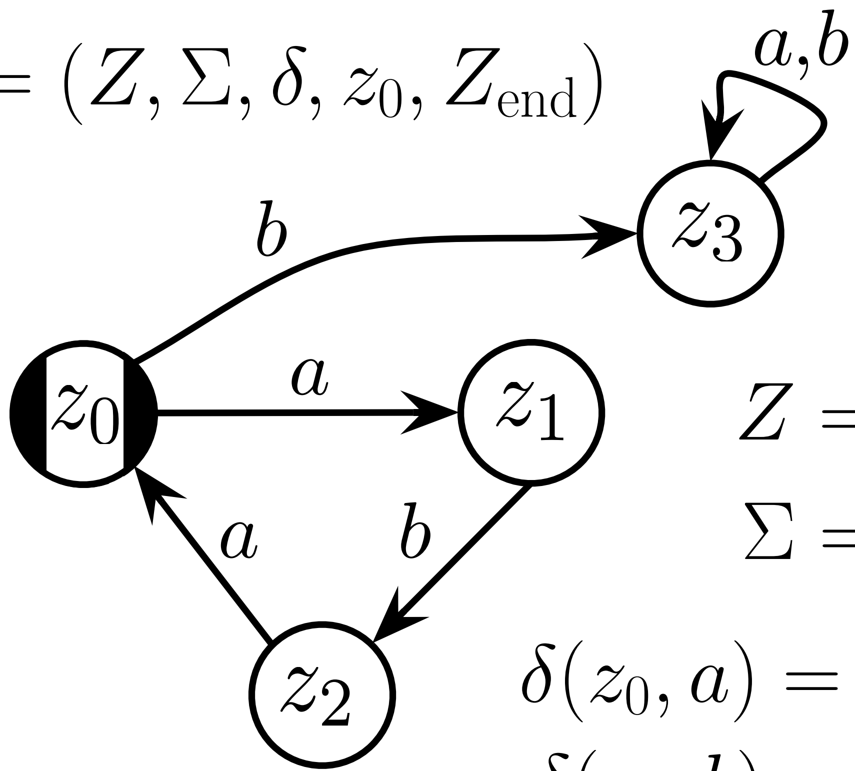
$$\delta(z_0, b) = z_3 \qquad \delta(z_3, a) = z_3$$

$$\delta(z_1, b) = z_2 \qquad \delta(z_3, b) = z_3$$

Ein Beispiel

Die graphische Darstellung eines DFA:

$$A = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z_{\text{end}})$$



$$Z_{\text{end}} = \{z_0\}$$

$$Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

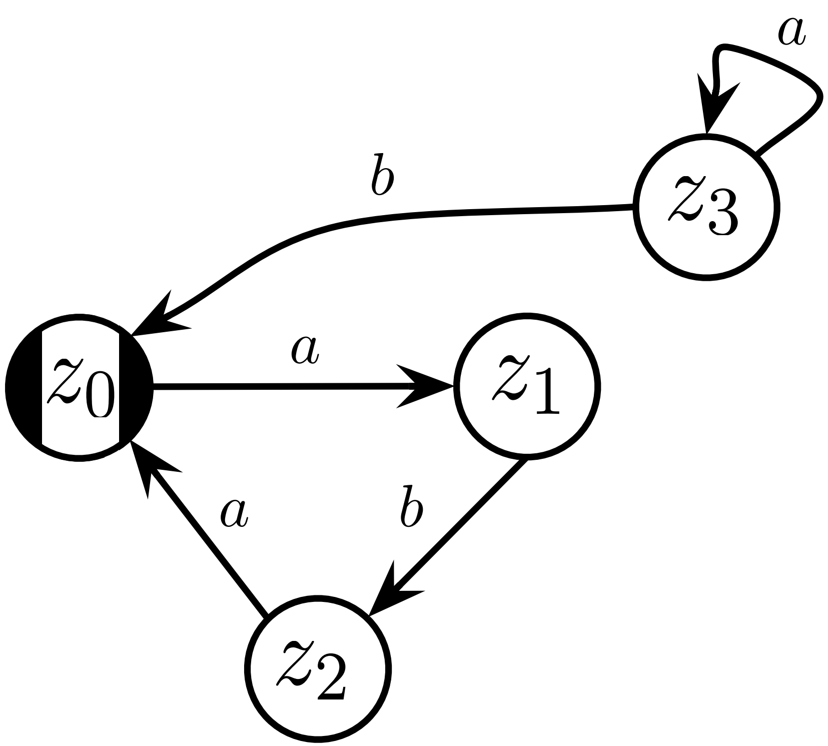
$$\delta(z_0, a) = z_1 \qquad \delta(z_2, a) = z_0$$

$$\delta(z_0, b) = z_3 \qquad \delta(z_3, a) = z_3$$

$$\delta(z_1, b) = z_2 \qquad \delta(z_3, b) = z_3$$

Ein Beispiel

Die graphische Darstellung eines DFA:



. . . ist übrigens auch ein DFA!

Akzeptierte Sprache

- Zu einem DFA $A := (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z_{\text{end}})$ definieren wir die **erweiterte Überführungsfunktion** $\widehat{\delta} : Z \times \Sigma^* \longrightarrow Z$ durch:

$$\widehat{\delta}(z, xw) := \widehat{\delta}(\delta(z, x), w)$$

für alle Zustände $z \in Z$, alle Symbole $x \in \Sigma$ und alle Wörter $w \in \Sigma^*$, sowie

$$\forall\, z_i \in Z : \widehat{\delta}(z_i, \lambda) := z_i.$$

Akzeptierte Sprache

- Zu einem DFA $A := (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z_{\mathsf{end}})$ definieren wir die **erweiterte Überführungsfunktion** $\widehat{\delta} : Z \times \Sigma^* \longrightarrow Z$ durch:

$$\widehat{\delta}(z, xw) := \widehat{\delta}(\delta(z, x), w)$$

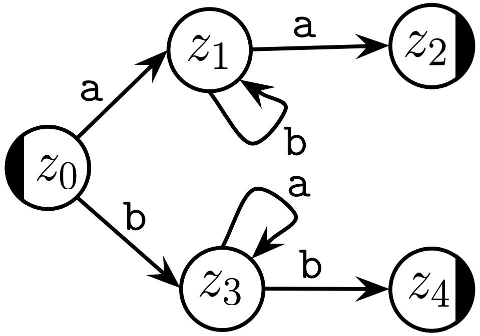
für alle Zustände $z \in Z$, alle Symbole $x \in \Sigma$ und alle Wörter $w \in \Sigma^*$, sowie

$$\forall\, z_i \in Z : \widehat{\delta}(z_i, \lambda) := z_i.$$

- Die von dem DFA A **akzeptierte Sprache** ist die Menge

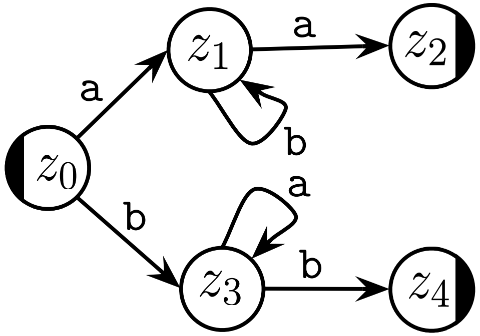
$$L(A) := \{w \in \Sigma^* | \widehat{\delta}(z_0, w) \in Z_{\mathsf{end}}\}.$$

Der Beispiel-DFA als Akzeptor



$$L(A) = \{w \in \{a,b\}^* \mid \exists n \in I\!N : (w = ab^n a \vee w = ba^n b)\}$$

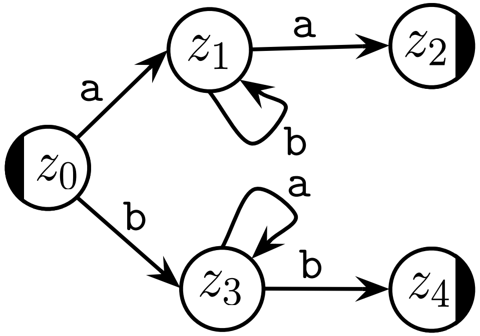
Der Beispiel-DFA als Akzeptor



$$L(A) = \{w \in \{a,b\}^* \mid \exists n \in I\!N : (w = ab^n a \vee w = ba^n b)\}$$

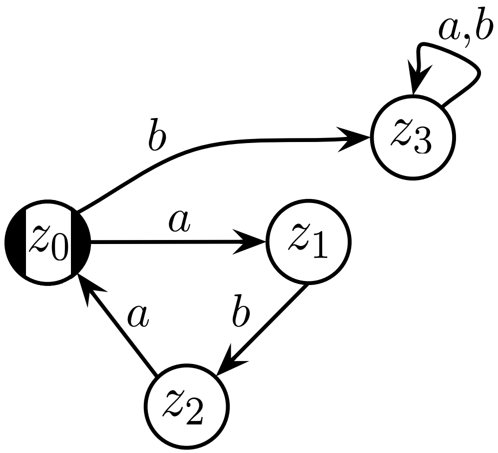
... alle Wörter, die mit a beginnen und enden und dazwischen nur b's haben und umgekehrt.

Der Beispiel-DFA als Akzeptor



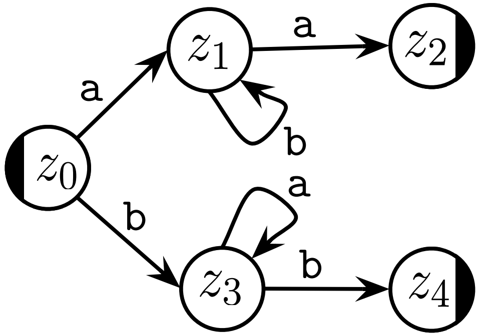
$$L(A) = \{w \in \{a,b\}^* \mid \exists n \in I\!N : (w = ab^n a \vee w = ba^n b)\}$$

... alle Wörter, die mit a beginnen und enden und dazwischen nur b's haben und umgekehrt.



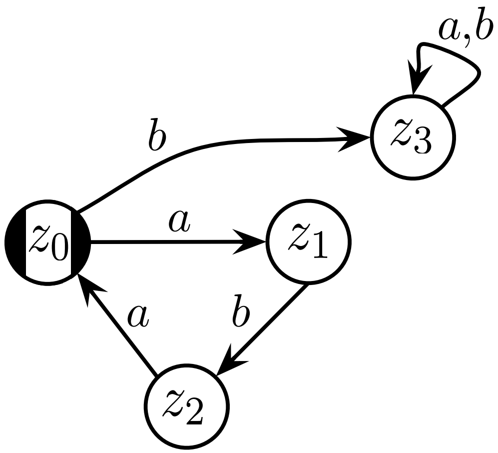
$$L(B) = \{aba\}^* = \{\lambda, aba, abaaba, abaabaaba, \ldots\}$$

Der Beispiel-DFA als Akzeptor



$L(A) = \{w \in \{a,b\}^* \mid \exists n \in \mathbb{N} : (w = ab^n a \vee w = ba^n b)\}$

... alle Wörter, die mit a beginnen und enden und dazwischen nur b's haben und umgekehrt.



$L(B) = \{aba\}^* = \{\lambda, aba, abaaba, abaabaaba, \ldots\}$

... alle Wörter, die sich durch endlich häufiges Hintereinanderschreiben von aba ergeben.

Akzeptieren vs. Berechenbarkeit

- Sei $M \subseteq C$, dann ist die **charakteristische Funktion** von M die auf ganz C definierte Funktion $\chi_M : C \longrightarrow \{0, 1\}$ mit $\chi_M(x) := [x \in M]$.

Akzeptieren vs. Berechenbarkeit

- Sei $M \subseteq C$, dann ist die **charakteristische Funktion** von M die auf ganz C definierte Funktion $\chi_M : C \longrightarrow \{0, 1\}$ mit $\chi_M(x) := [x \in M]$.
- Ist p ein Prädikat, so ist $[p]$ definiert als:

$$[p] := \begin{cases} 1 & \text{falls } p \text{ wahr ist} \\ 0 & \text{falls } p \text{ nicht wahr ist.} \end{cases}$$

Akzeptieren vs. Berechenbarkeit

- Sei $M \subseteq C$, dann ist die **charakteristische Funktion** von M die auf ganz C definierte Funktion $\chi_M : C \longrightarrow \{0,1\}$ mit $\chi_M(x) := [x \in M]$.
- Ist p ein Prädikat, so ist $[p]$ definiert als:

$$[p] := \begin{cases} 1 & \text{falls } p \text{ wahr ist} \\ 0 & \text{falls } p \text{ nicht wahr ist.} \end{cases}$$

- ... also direkte Definition:

$$\chi_M(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Akzeptieren vs. Berechenbarkeit

- Sei $M \subseteq C$, dann ist die **charakteristische Funktion** von M die auf ganz C definierte Funktion $\chi_M : C \longrightarrow \{0, 1\}$ mit $\chi_M(x) := [x \in M]$.
- Ist p ein Prädikat, so ist $[p]$ definiert als:

$$[p] := \begin{cases} 1 & \text{falls } p \text{ wahr ist} \\ 0 & \text{falls } p \text{ nicht wahr ist.} \end{cases}$$

- …also direkte Definition:

$$\chi_M(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Frage:** Ist die charakteristische Funktion *berechenbar*?

Beweis $L(A) = L$

- Das Akzeptieren oder Nicht-Akzeptieren kann als Berechnung der charakteristischen Funktion angesehen werden.

Beweis $L(A) = L$

- Das Akzeptieren oder Nicht-Akzeptieren kann als Berechnung der charakteristischen Funktion angesehen werden.
- Nur die Angabe eines DFA genügt nicht! Es muss bewiesen werden, dass er **genau** die gewünschte Sprache akzeptiert.

Beweis $L(A) = L$

- Das Akzeptieren oder Nicht-Akzeptieren kann als Berechnung der charakteristischen Funktion angesehen werden.
- Nur die Angabe eines DFA genügt nicht! Es muss bewiesen werden, dass er **genau** die gewünschte Sprache akzeptiert.
- Dies geschieht meist durch den Beweis von $L \subseteq L(A)$ und $L(A) \subseteq L$.

Beweis $L(A) = L$

- Das Akzeptieren oder Nicht-Akzeptieren kann als Berechnung der charakteristischen Funktion angesehen werden.
- Nur die Angabe eines DFA genügt nicht! Es muss bewiesen werden, dass er **genau** die gewünschte Sprache akzeptiert.
- Dies geschieht meist durch den Beweis von $L \subseteq L(A)$ und $L(A) \subseteq L$.
- Wir beweisen heute nicht die Korrektheit der Beispielautomaten und -sprachen.

Beweistechniken

- Folgende Beweistechniken werden immer wieder benötigt:

Beweistechniken

- Folgende Beweistechniken werden immer wieder benötigt:
  - vollständige Induktion

Beweistechniken

- Folgende Beweistechniken werden immer wieder benötigt:
  - vollständige Induktion
  - Widerspruchsbeweise

Beweistechniken

- Folgende Beweistechniken werden immer wieder benötigt:
  - vollständige Induktion
  - Widerspruchsbeweise
  - Diagonalisierung

Beweistechniken

- Folgende Beweistechniken werden immer wieder benötigt:
  - vollständige Induktion
  - Widerspruchsbeweise
  - Diagonalisierung
- **Feststellung:** Hierfür muss oft systematisch jedes Wort (allgemeiner: jedes Objekt) betrachtet werden!

Ordnungsrelationen

- **Quasiordnung:** reflexiv, transitiv

Ordnungsrelationen

- **Quasiordnung:** reflexiv, transitiv
- **partielle Ordnung:** reflexiv, transitiv, antisymmetrisch

Ordnungsrelationen

- **Quasiordnung:** reflexiv, transitiv
- **partielle Ordnung:** reflexiv, transitiv, antisymmetrisch
- **Halbordnung:** transitiv, antisymmetrisch

Ordnungsrelationen

- **Quasiordnung:** reflexiv, transitiv
- **partielle Ordnung:** reflexiv, transitiv, antisymmetrisch
- **Halbordnung:** transitiv, antisymmetrisch
- **Striktordnung:** transitiv, asymmetrisch

Ordnungsrelationen

- **Quasiordnung:** reflexiv, transitiv
- **partielle Ordnung:** reflexiv, transitiv, antisymmetrisch
- **Halbordnung:** transitiv, antisymmetrisch
- **Striktordnung:** transitiv, asymmetrisch
- **lineare Ordnung:** partielle Ordnung, für die jede zwei unterschiedlichen Elemente x, y entweder $(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$.

Lexikographische Ordnung

- Sei $(\Sigma, \prec)$ ein mit $\prec$ linear geordnetes Alphabet, dann ist die **lexikographische Erweiterung** $\prec^{\text{lex}} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ von $\prec$ definiert durch:
  1. $\lambda \prec^{\text{lex}} w$ für alle $w \in \Sigma^*$.
  2. $\forall\, x, y \in \Sigma\ \forall\, u, v \in \Sigma^+$:

$$(xu \prec^{\text{lex}} yv) \leftrightarrow (x \prec y) \vee \left[(x = y) \wedge (u \prec^{\text{lex}} v)\right]$$

Lexikographische Ordnung

- Sei $(\Sigma, \prec)$ ein mit $\prec$ linear geordnetes Alphabet, dann ist die **lexikographische Erweiterung** $\prec^{\text{lex}} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ von $\prec$ definiert durch:
  1. $\lambda \prec^{\text{lex}} w$ für alle $w \in \Sigma^*$.
  2. $\forall\, x, y \in \Sigma\ \forall\, u, v \in \Sigma^+$:

  $$(xu \prec^{\text{lex}} yv) \leftrightarrow (x \prec y) \vee \left[(x = y) \wedge (u \prec^{\text{lex}} v)\right]$$

- $\preceq^{\text{lex}} := \prec^{\text{lex}} \cup Id_{\Sigma^*}$ heißt **lexikographische Ordnung** auf Σ^*.

Lexikographische Ordnung

- Sei $(\Sigma, \prec)$ ein mit $\prec$ linear geordnetes Alphabet, dann ist die **lexikographische Erweiterung** $\prec^{\text{lex}} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ von $\prec$ definiert durch:
  1. $\lambda \prec^{\text{lex}} w$ für alle $w \in \Sigma^*$.
  2. $\forall\, x, y \in \Sigma\ \forall\, u, v \in \Sigma^+ :$

$$(xu \prec^{\text{lex}} yv) \leftrightarrow (x \prec y) \vee \left[(x = y) \wedge (u \prec^{\text{lex}} v)\right]$$

- $\preceq^{\text{lex}} := \prec^{\text{lex}} \cup\, Id_{\Sigma^*}$ heißt **lexikographische Ordnung** auf Σ^*.
- **Beispiel:** ALLE $\prec^{\text{lex}}$ FINDEN $\prec^{\text{lex}}$ THEORIE $\prec^{\text{lex}}$ WUNDERBAR

Lexikographische Ordnung

- Sei $(\Sigma, \prec)$ ein mit $\prec$ linear geordnetes Alphabet, dann ist die **lexikographische Erweiterung** $\prec^{\text{lex}} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ von $\prec$ definiert durch:
  1. $\lambda \prec^{\text{lex}} w$ für alle $w \in \Sigma^*$.
  2. $\forall\, x, y \in \Sigma\ \forall\, u, v \in \Sigma^+ :$

  $$(xu \prec^{\text{lex}} yv) \leftrightarrow (x \prec y) \vee \left[(x = y) \wedge (u \prec^{\text{lex}} v)\right]$$

- $\preceq^{\text{lex}} := \prec^{\text{lex}} \cup\, Id_{\Sigma^*}$ heißt **lexikographische Ordnung** auf Σ^*.
- **Beispiel:** ALLE $\prec^{\text{lex}}$ FINDEN $\prec^{\text{lex}}$ THEORIE $\prec^{\text{lex}}$ WUNDERBAR
- Wenn wir systematisch alle Wörter aus $\{a, b\}^*$ mit $a \prec b$ aufzählen wollen, eignet sich $\prec^{\text{lex}}$ nicht!

Lexikographische Ordnung

- Sei $(\Sigma, \prec)$ ein mit $\prec$ linear geordnetes Alphabet, dann ist die **lexikographische Erweiterung** $\prec^{\text{lex}} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ von $\prec$ definiert durch:
  1. $\lambda \prec^{\text{lex}} w$ für alle $w \in \Sigma^*$.
  2. $\forall x, y \in \Sigma\ \forall u, v \in \Sigma^+$:

  $$(xu \prec^{\text{lex}} yv) \leftrightarrow (x \prec y) \vee \left[(x = y) \wedge (u \prec^{\text{lex}} v)\right]$$

- $\preceq^{\text{lex}} := \prec^{\text{lex}} \cup Id_{\Sigma^*}$ heißt **lexikographische Ordnung** auf Σ^*.
- **Beispiel:** ALLE $\prec^{\text{lex}}$ FINDEN $\prec^{\text{lex}}$ THEORIE $\prec^{\text{lex}}$ WUNDERBAR
- Wenn wir systematisch alle Wörter aus $\{a, b\}^*$ mit $a \prec b$ aufzählen wollen, eignet sich $\prec^{\text{lex}}$ nicht!

$$\lambda, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \ldots$$

Lexikalische Ordnung

- Sei $(\Sigma, \prec)$ ein mit $\prec$ linear geordnetes Alphabet, dann ist die **lexikalische** Erweiterung $\prec^{\mathrm{lg-lex}}$ von $\prec$ definiert durch:

Lexikalische Ordnung

- Sei $(\Sigma, \prec)$ ein mit $\prec$ linear geordnetes Alphabet, dann ist die **lexikalische** Erweiterung $\prec^{\text{lg}-\text{lex}}$ von $\prec$ definiert durch:
  - $w_1 \prec^{\text{lg}-\text{lex}} w_2$ gelte für beliebige Wörter $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gdw.

$$|w_1| < |w_2| \text{ oder } |w_1| = |w_2| \ \wedge \ w_1 \prec^{\text{lex}} w_2.$$

Lexikalische Ordnung

- Sei $(\Sigma, \prec)$ ein mit $\prec$ linear geordnetes Alphabet, dann ist die **lexikalische** Erweiterung $\prec^{\text{lg}-\text{lex}}$ von $\prec$ definiert durch:
  - $w_1 \prec^{\text{lg}-\text{lex}} w_2$ gelte für beliebige Wörter $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gdw.

    $$|w_1| < |w_2| \text{ oder } |w_1| = |w_2| \wedge w_1 \prec^{\text{lex}} w_2.$$

  - $\preceq^{\text{lg}-\text{lex}} := \prec^{\text{lg}-\text{lex}} \cup Id_{\Sigma^*}$ heißt **lexikalische Ordnung** auf Σ^*.

Lexikalische Ordnung

- Sei $(\Sigma, \prec)$ ein mit $\prec$ linear geordnetes Alphabet, dann ist die **lexikalische** Erweiterung $\prec^{\mathrm{lg-lex}}$ von $\prec$ definiert durch:
  - $w_1 \prec^{\mathrm{lg-lex}} w_2$ gelte für beliebige Wörter $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gdw.

    $$|w_1| < |w_2| \text{ oder } |w_1| = |w_2| \wedge w_1 \prec^{\mathrm{lex}} w_2.$$

  - $\preceq^{\mathrm{lg-lex}} := \prec^{\mathrm{lg-lex}} \cup Id_{\Sigma^*}$ heißt **lexikalische Ordnung** auf Σ^*.
- ... und hiermit ist das Problem gelöst:

$\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, aaaa, \ldots$

Ausblick

- Eigenschaften und Abwandlungen des endlichen Automaten
- Eigenschaften der von DFAs akzeptierten Sprachen

- FUER $\prec^{\mathrm{lg-lex}}$ HEUT $\prec^{\mathrm{lg-lex}}$ SEID $\prec^{\mathrm{lg-lex}}$ ERLOEST $\prec^{\mathrm{lg-lex}}$ ERLAUCHTE $\prec^{\mathrm{lg-lex}}$ HOERERSCHAFT