F2 — Automaten und formale Sprachen

Berndt Farwer

Fachbereich Informatik

AB „Theoretische Grundlagen der Informatik“ (TGI)

Universität Hamburg

farwer@informatik.uni-hamburg.de

Zielgruppe

Die Vorlesung wendet sich an Studierende der folgenden Studienrichtungen:

1. Informatik (2. Semester)
2. Wirtschaftsinformatik (2. Semester)
3. Nebenfach Informatik
4. Lehramt-Studium

Wichtig:

Beginn 10:15

Ende 11:45

Übungsgruppen

Mi 8–9	C-221	Berndt Farwer
Mi 9–10	C-221	Daniel Moldt
Mi 10–11	C-221	Daniel Moldt
Mi 11–12	C-221	Markus Guhe
Mi 12–13	C-221	Heiko Rölke
Mi 13–14	C-221	Heiko Rölke
Mi 14–15	F-132	Mark-Oliver Stehr
Mi 15–16	F-132	Mark-Oliver Stehr
Mi 16–17	C-221	Michael Köhler
Mi 17–18	C-221	Michael Köhler
Fr 10–11	F-132	Mark-Oliver Stehr
Fr 11–12	F-132	Mark-Oliver Stehr

Übungsgruppen

Mi 8–9	C-221	Berndt Farwer
Mi 9–10	C-221	Daniel Moldt
Mi 10–11	C-221	Daniel Moldt
Mi 11–12	C-221	Markus Guhe
Mi 12–13	C-221	Heiko Rölke
Mi 13–14	C-221	Heiko Rölke
Mi 13–14	F-132	Mark-Oliver Stehr
Mi 14–15	F-132	Mark-Oliver Stehr
Mi 15–16	F-132	Mark-Oliver Stehr
Mi 16–17	C-221	Michael Köhler
Mi 17–18	C-221	Michael Köhler
Fr 10–11	F-132	Mark-Oliver Stehr
Fr 11–12	F-132	Mark-Oliver Stehr

Scheinkriterien

Bedingungen für die Ausstellung eines Scheines:

- 50% der erreichbaren Punkte (d.h. mindestens 75 von 150 Punkten)
- regelmäßige, aktive Teilnahme an den Übungsgruppen
- $2\times$ Vorrechnen an der Tafel
- max. zweimaliges unentschuldigtes Fehlen
- Bearbeiten aller 12 Übungszettel
- Gruppenarbeit: pro Gruppe *mindestens 2* und *höchstens 3* Personen

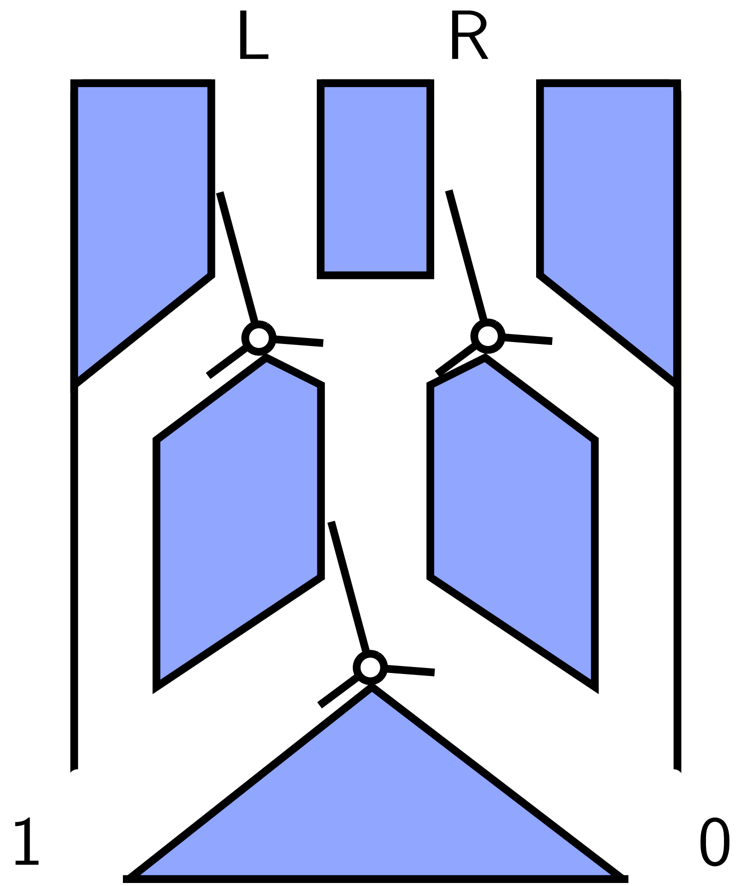
Skript

Das Skript zur Vorlesung ist erhältlich:

1. **gedruckt** über
   - die Übungsgruppe
   - das Sekretariat von TGI (C-218)
2. **elektronisch**
   - http://www.informatik.uni-hamburg.de
   - $\longrightarrow$ Studium und Prüfungen $\longrightarrow$ Skripte
     ... dort auch elektronische Versionen der Folien, Übungsaufgaben und Musterlösungen sowie aktuelle Ankündigungen!
   - Die genaue URL lautet:
     http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/lehre/vl/SS02/F2/index.html

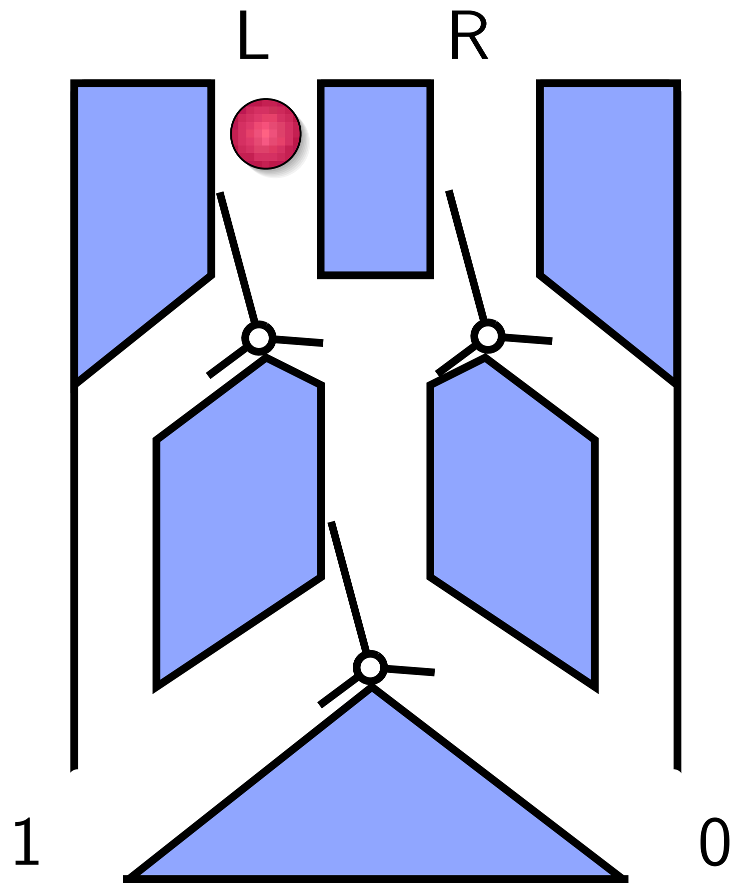

Σ
$*$ $*$ $*$
z_0

Kugelautomat



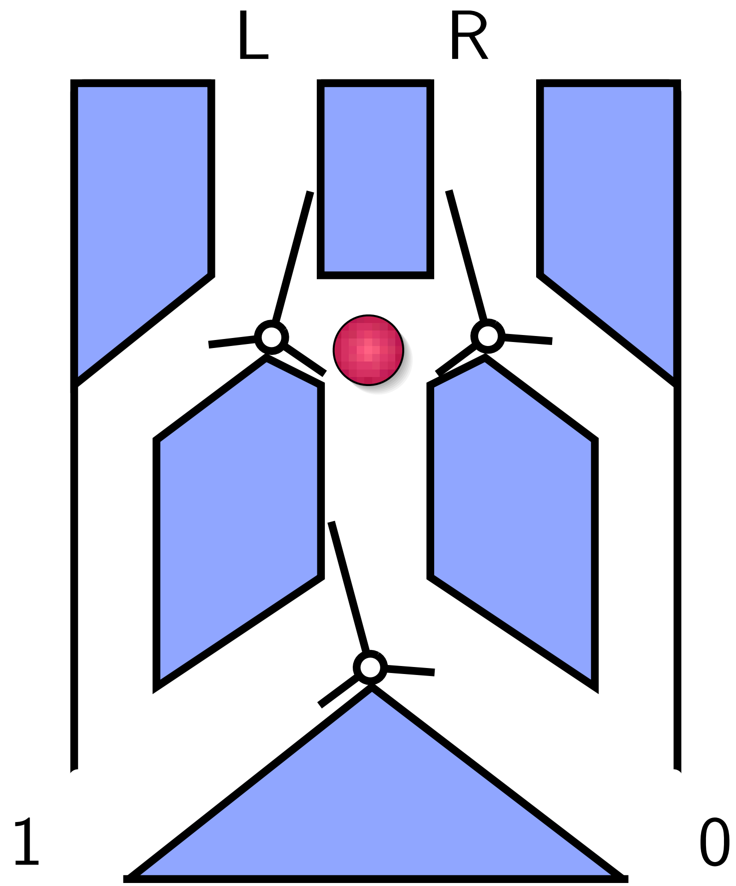
Gesucht ist eine *geeignete* **Darstellung** des möglichen Verhaltens . . .

Kugelautomat



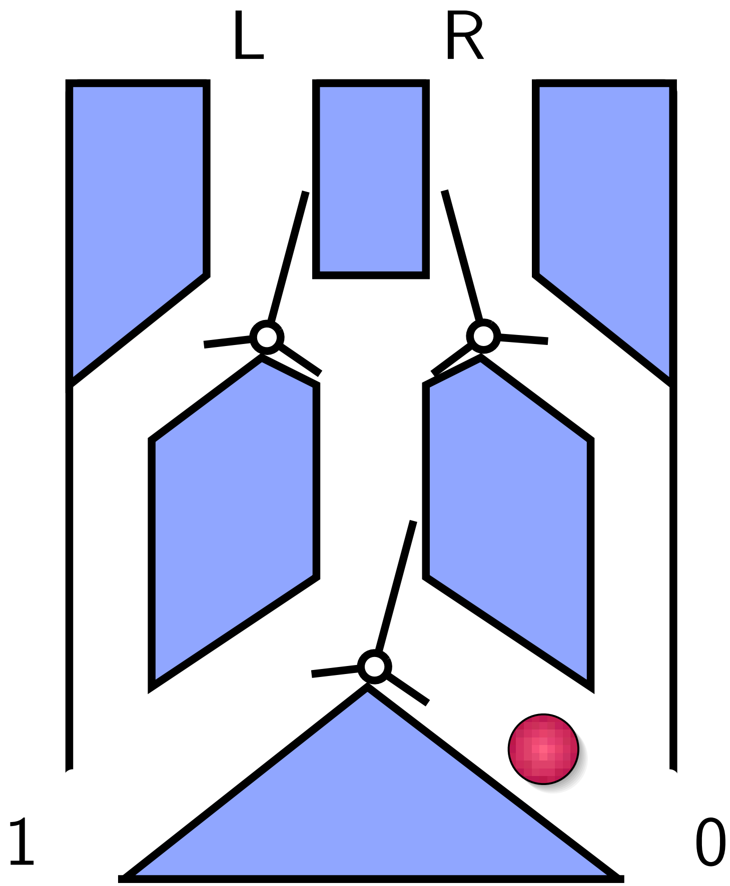
Werfen wir eine Kugel auf der linken Seite in den Kugelautomaten, . . .

Kugelautomat



. . . so verändert sich zunächst die Hebelstellung des linken oberen Hebels . . .

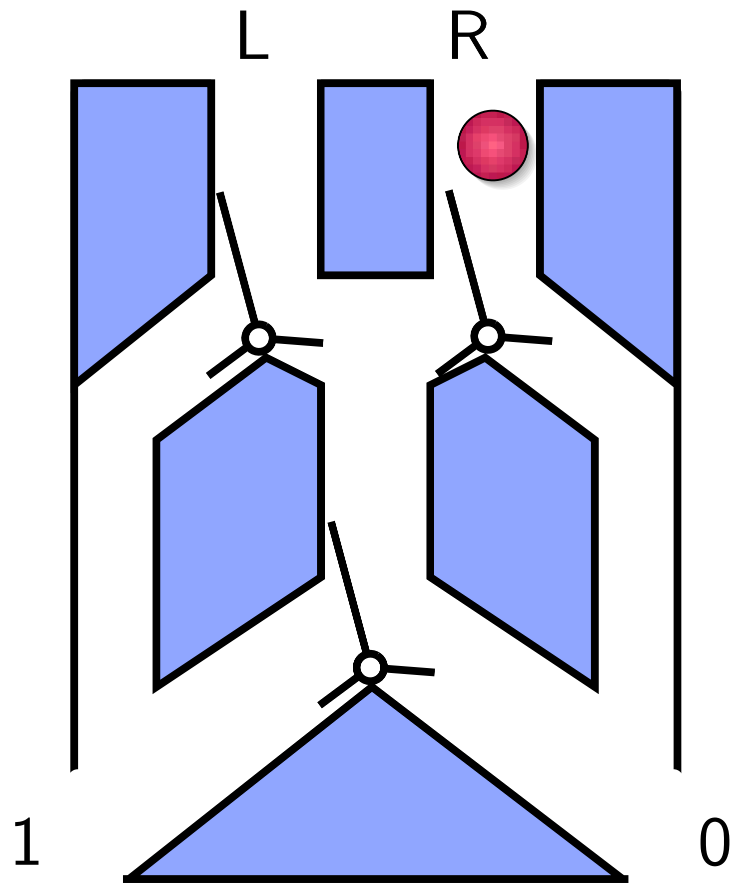
Kugelautomat



. . . und dann auch noch die des unteren Hebels.

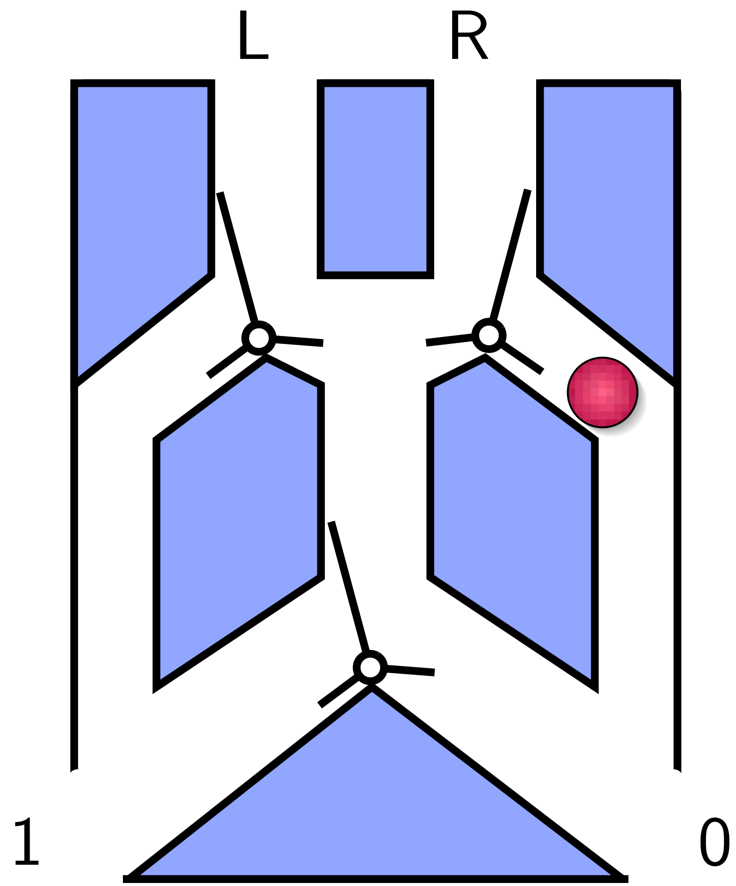
Die Kugel verläßt den Automaten bei Ausgang 0.

Kugelautomat



Werfen wir hingegen in der anfänglichen Situation rechts eine Kugel ein, . . .

Kugelautomat



. . . so ändert sich die Hebelstellung rechts oben und die Kugel verläßt den Automaten auf ebenfalls bei Ausgang 0.

Erste Erkenntnisse

Das Beispiel zeigt:

- Durch Aktionen wird der **interne Zustand** des Systems verändert.

Erste Erkenntnisse

Das Beispiel zeigt:

- Durch Aktionen wird der **interne Zustand** des Systems verändert.
- Unterschiedliche Eingaben können zu derselben Ausgabe führen.

Erste Erkenntnisse

Das Beispiel zeigt:

- Durch Aktionen wird der **interne Zustand** des Systems verändert.
- Unterschiedliche Eingaben können zu derselben Ausgabe führen.
- Frage: Führt dieselbe Eingabe immer zu derselben Ausgabe?

Erste Erkenntnisse

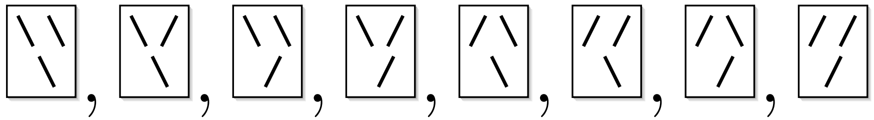
Das Beispiel zeigt:

- Durch Aktionen wird der **interne Zustand** des Systems verändert.
- Unterschiedliche Eingaben können zu derselben Ausgabe führen.
- Frage: Führt dieselbe Eingabe immer zu derselben Ausgabe?

Wir benötigen eine umfassende (formale) Beschreibung des Systems!

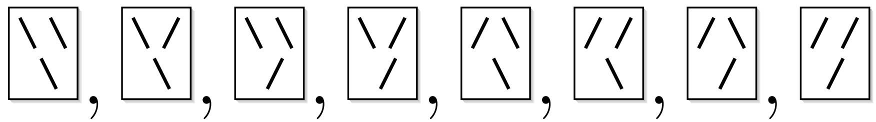
Interne Zustände

Der Kugelautomat befindet sich immer in einem

Zustand aus: $Z := \{$  $\}$

Interne Zustände

Der Kugelautomat befindet sich immer in einem

Zustand aus: $Z := \Big\{$  $\Big\}$

- Sind alle diese Zustände auch erreichbar?

Interne Zustände

Der Kugelautomat befindet sich immer in einem

Zustand aus: $$Z := \left\{ \boxed{\begin{smallmatrix}\backslash & \backslash\\ \multicolumn{2}{c}{\backslash}\end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix}\backslash & /\\ \multicolumn{2}{c}{\backslash}\end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix}\backslash & \backslash\\ \multicolumn{2}{c}{/}\end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix}\backslash & /\\ \multicolumn{2}{c}{/}\end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix}/ & \backslash\\ \multicolumn{2}{c}{\backslash}\end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix}/ & /\\ \multicolumn{2}{c}{\backslash}\end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix}/ & \backslash\\ \multicolumn{2}{c}{/}\end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix}/ & /\\ \multicolumn{2}{c}{/}\end{smallmatrix}} \right\}$$

- Sind alle diese Zustände auch erreichbar?
- Falls ja, was muß getan werden, um einen bestimmten Zustand herbeizuführen?

Interne Zustände

Der Kugelautomat befindet sich immer in einem

Zustand aus: $$Z := \left\{ \boxed{\begin{array}{cc}\backslash & \backslash \\ \multicolumn{2}{c}{\backslash}\end{array}}, \boxed{\begin{array}{cc}\backslash & / \\ \multicolumn{2}{c}{\backslash}\end{array}}, \boxed{\begin{array}{cc}\backslash & \backslash \\ \multicolumn{2}{c}{/}\end{array}}, \boxed{\begin{array}{cc}\backslash & / \\ \multicolumn{2}{c}{/}\end{array}}, \boxed{\begin{array}{cc}/ & \backslash \\ \multicolumn{2}{c}{\backslash}\end{array}}, \boxed{\begin{array}{cc}/ & / \\ \multicolumn{2}{c}{\backslash}\end{array}}, \boxed{\begin{array}{cc}/ & \backslash \\ \multicolumn{2}{c}{/}\end{array}}, \boxed{\begin{array}{cc}/ & / \\ \multicolumn{2}{c}{/}\end{array}} \right\}$$

- Sind alle diese Zustände auch erreichbar?
- Falls ja, was muß getan werden, um einen bestimmten Zustand herbeizuführen?
- Kann aus jedem beliebigen Zustand heraus wieder der Anfangszustand erreicht werden?

Interne Zustände

Der Kugelautomat befindet sich immer in einem

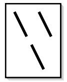
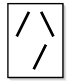
Zustand aus: $$Z := \left\{ \boxed{\begin{smallmatrix}\backslash & \backslash\\ \multicolumn{2}{c}{\backslash}\end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix}\backslash & /\\ \multicolumn{2}{c}{\backslash}\end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix}\backslash & \backslash\\ \multicolumn{2}{c}{/}\end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix}\backslash & /\\ \multicolumn{2}{c}{/}\end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix}/ & \backslash\\ \multicolumn{2}{c}{\backslash}\end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix}/ & /\\ \multicolumn{2}{c}{\backslash}\end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix}/ & \backslash\\ \multicolumn{2}{c}{/}\end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix}/ & /\\ \multicolumn{2}{c}{/}\end{smallmatrix}} \right\}$$

- Sind alle diese Zustände auch erreichbar?
- Falls ja, was muß getan werden, um einen bestimmten Zustand herbeizuführen?
- Kann aus jedem beliebigen Zustand heraus wieder der Anfangszustand erreicht werden?

> Zur Beschreibung des Systems gehören neben den Zuständen auch noch die **Aktionen** und deren **Wirkung**.

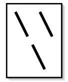
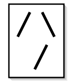
. . . mühsame Systembeschreibung

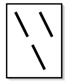
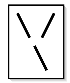
Wir können versuchen das Verhalten textuell zu beschreiben:

1. Wenn in der Situation  die Kugel bei **L** eingeworfen wird, dann kommt sie beim Ausgang **0** heraus und die Hebelstellung danach ist: .

. . . mühsame Systembeschreibung

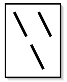
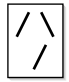
Wir können versuchen das Verhalten textuell zu beschreiben:

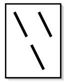
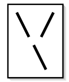
1. Wenn in der Situation  die Kugel bei **L** eingeworfen wird, dann kommt sie beim Ausgang **0** heraus und die Hebelstellung danach ist: .

2. Wenn in der Situation  die Kugel bei **R** eingeworfen wird, dann kommt sie beim Ausgang **0** heraus und die Hebelstellung danach ist: .

. . . mühsame Systembeschreibung

Wir können versuchen das Verhalten textuell zu beschreiben:

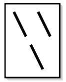
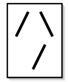
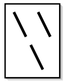
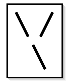
1. Wenn in der Situation  die Kugel bei **L** eingeworfen wird, dann kommt sie beim Ausgang **0** heraus und die Hebelstellung danach ist: .

2. Wenn in der Situation  die Kugel bei **R** eingeworfen wird, dann kommt sie beim Ausgang **0** heraus und die Hebelstellung danach ist: .

3. bis 16. (analog)

. . . mühsame Systembeschreibung

Wir können versuchen das Verhalten textuell zu beschreiben:

1. Wenn in der Situation  die Kugel bei **L** eingeworfen wird, dann kommt sie beim Ausgang **0** heraus und die Hebelstellung danach ist: .
2. Wenn in der Situation  die Kugel bei **R** eingeworfen wird, dann kommt sie beim Ausgang **0** heraus und die Hebelstellung danach ist: .
3. bis 16. (analog)

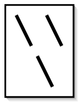
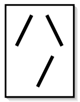
. . . Das ist ziemlich umständlich und zudem nicht gerade übersichtlich!!!

Alternative Beschreibungen

Das Verhalten des Kugelautomaten kann auch anders beschrieben werden:

(i) als Funktion:

$$\delta : Z \times \{L, R\} \longrightarrow Z \times \{0, 1\}$$

mit $\Bigg($  $, L\Bigg) \mapsto \Bigg($  $, 0\Bigg), \; \ldots$

Alternative Beschreibungen

Das Verhalten des Kugelautomaten kann auch anders beschrieben werden:

(i) als Funktion:

$$\delta : Z \times \{L, R\} \longrightarrow Z \times \{0, 1\}$$

$$\text{mit} \quad \left(\boxed{\begin{smallmatrix} \backslash & \backslash \\ & \backslash \end{smallmatrix}}, L \right) \mapsto \left(\boxed{\begin{smallmatrix} / & \backslash \\ & / \end{smallmatrix}}, 0 \right), \; \ldots$$

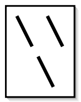
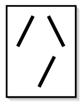
$$\text{als Notation für } \delta \left(\boxed{\begin{smallmatrix} \backslash & \backslash \\ & \backslash \end{smallmatrix}}, L \right) := \left(\boxed{\begin{smallmatrix} / & \backslash \\ & / \end{smallmatrix}}, 0 \right), \; \ldots$$

Alternative Beschreibungen

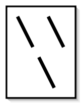
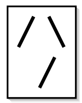
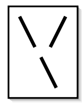
Das Verhalten des Kugelautomaten kann auch anders beschrieben werden:

(i) als Funktion:

$$\delta : Z \times \{L, R\} \longrightarrow Z \times \{0, 1\}$$

mit $\Big($  $, L\Big) \mapsto \Big($  $, 0\Big)$, ...

(ii) als Tabelle:

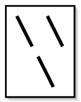
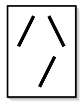
Zustand	Eingabe L	Eingabe R
	( , 0)	( , 0)
⋮	⋮	⋮

Alternative Beschreibungen

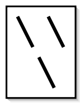
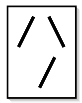
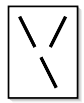
Das Verhalten des Kugelautomaten kann auch anders beschrieben werden:

(i) als Funktion:

$$\delta : Z \times \{L, R\} \longrightarrow Z \times \{0, 1\}$$

mit (, L) $\mapsto$ (, 0), $\ldots$

(ii) als Tabelle:

Zustand	Eingabe L	Eingabe R
	(, 0)	(, 0)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(iii) graphisch $\ldots$

Codierung

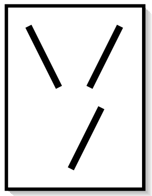
Zunächst eine abkürzende Schreibweise.

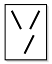
Wir kodieren Zustände durch Binärzahlen nach folgendem Schema:

Codierung

Zunächst eine abkürzende Schreibweise.

Wir kodieren Zustände durch Binärzahlen nach folgendem Schema:



$\mathrm{code}($  $) :=$

Codierung

Zunächst eine abkürzende Schreibweise.

Wir kodieren Zustände durch Binärzahlen nach folgendem Schema:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{0}\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{array}} \qquad \mathrm{code}(\square) := 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 = [011]_2$$

Codierung

Zunächst eine abkürzende Schreibweise.

Wir kodieren Zustände durch Binärzahlen nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{|cc|}\hline \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \multicolumn{2}{|c|}{\mathbf{1}} \\ \hline\end{array} \qquad \text{code}(\boxed{\diagdown\diagup \atop \diagup}) := 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 = [011]_2$$

Allgemein:

$$\begin{array}{|cc|}\hline i_2 & i_0 \\ \multicolumn{2}{|c|}{i_1} \\ \hline\end{array} \qquad \text{code}(\boxed{{}^{i_2\, i_0}_{\;i_1}}) := i_0 \cdot 2^0 + i_1 \cdot 2^1 + i_2 \cdot 2^2$$

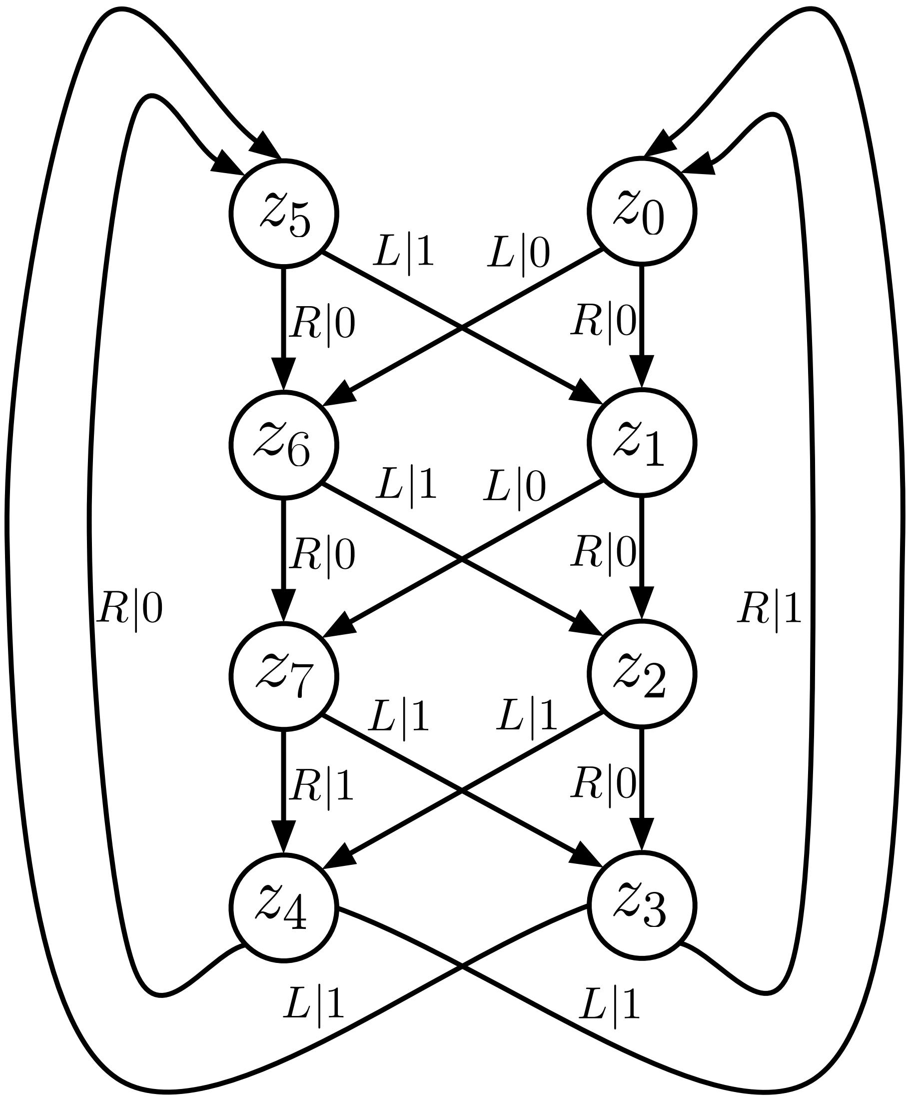
Zustandscodierung

. . . insgesamt ergeben sich folgende Codes:

Zustand	Binärdarstellung	Dezimaldarstellung
\ \ \	$[000]_2$	$[0]_{10}$
\ / \	$[001]_2$	$[1]_{10}$
\ \ /	$[010]_2$	$[2]_{10}$
\ / /	$[011]_2$	$[3]_{10}$
/ \ \	$[100]_2$	$[4]_{10}$
/ / \	$[101]_2$	$[5]_{10}$
/ \ /	$[110]_2$	$[6]_{10}$
/ / /	$[111]_2$	$[7]_{10}$

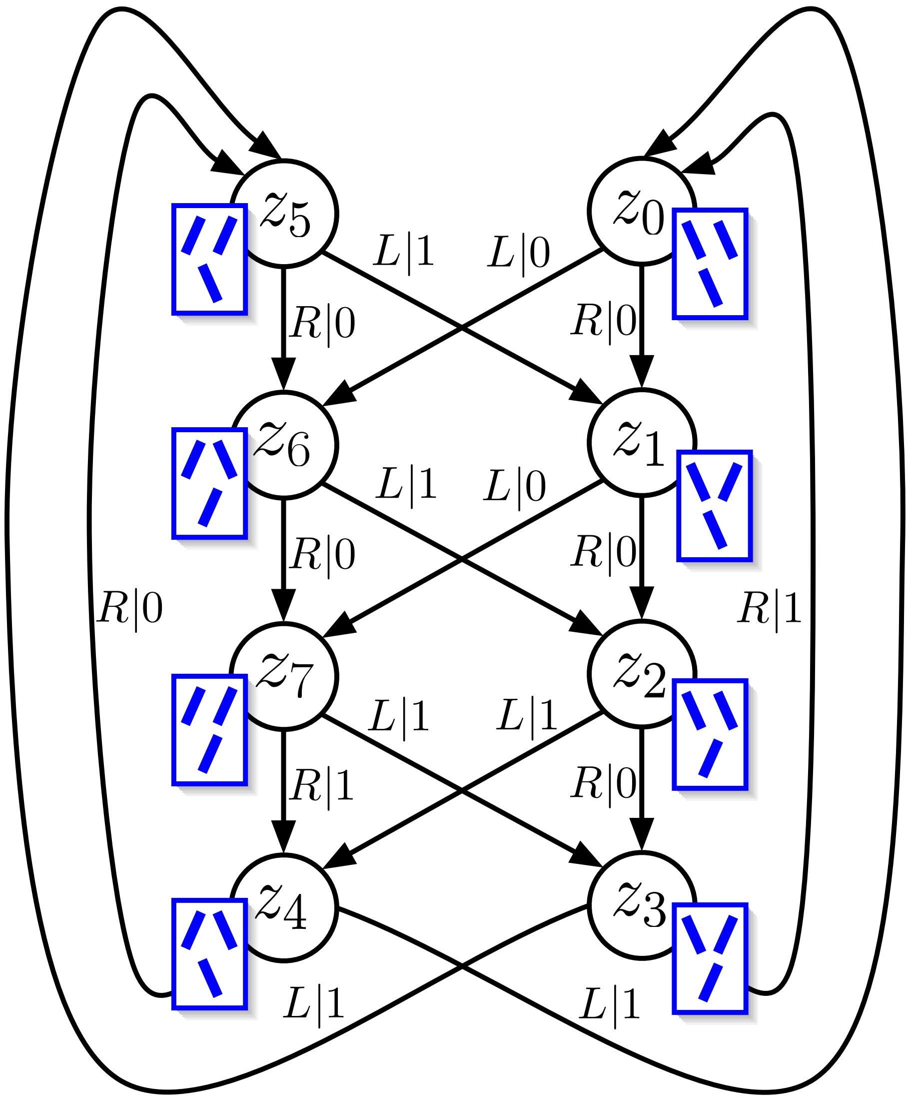
Graphische Beschreibung

Das **Zustandsübergangsdiagramm** für den Kugelautomaten hat die Form:



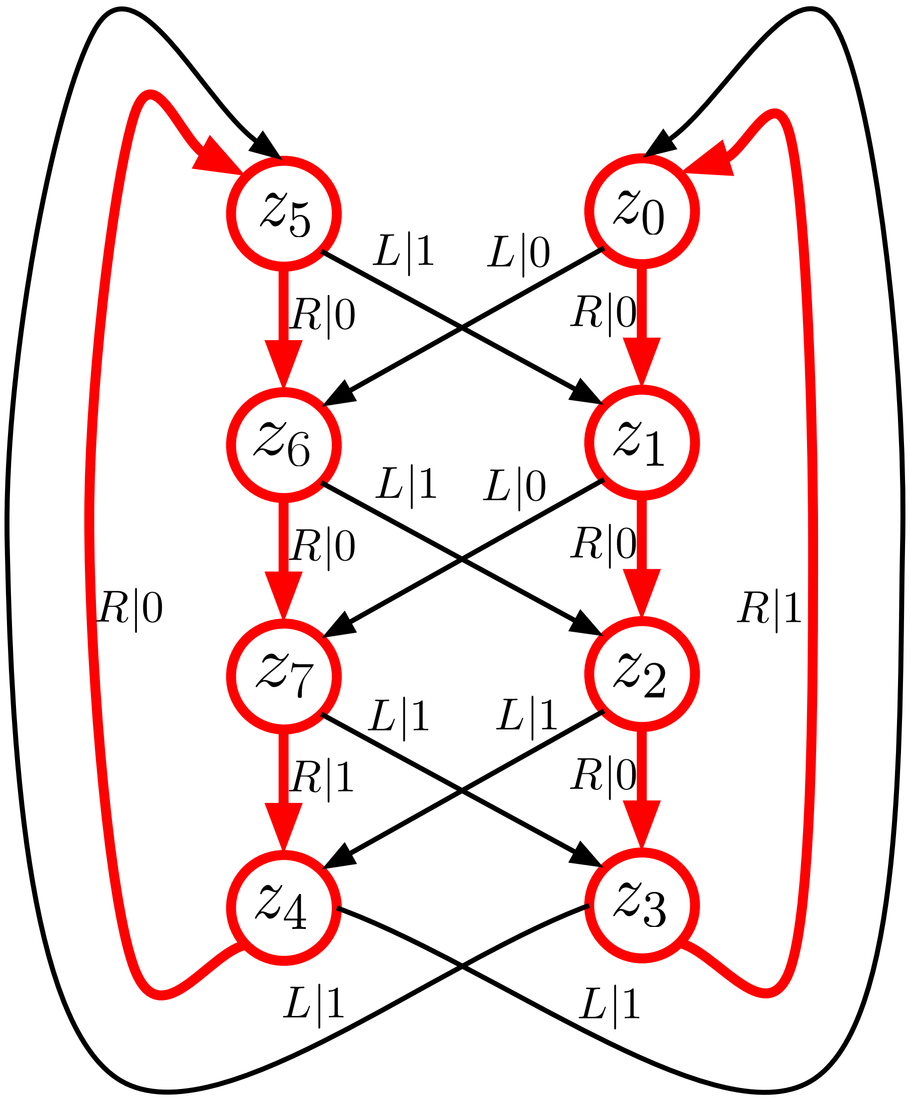
Graphische Beschreibung

Das **Zustandsübergangsdiagramm** für den Kugelautomaten hat die Form:



Systemeigenschaften

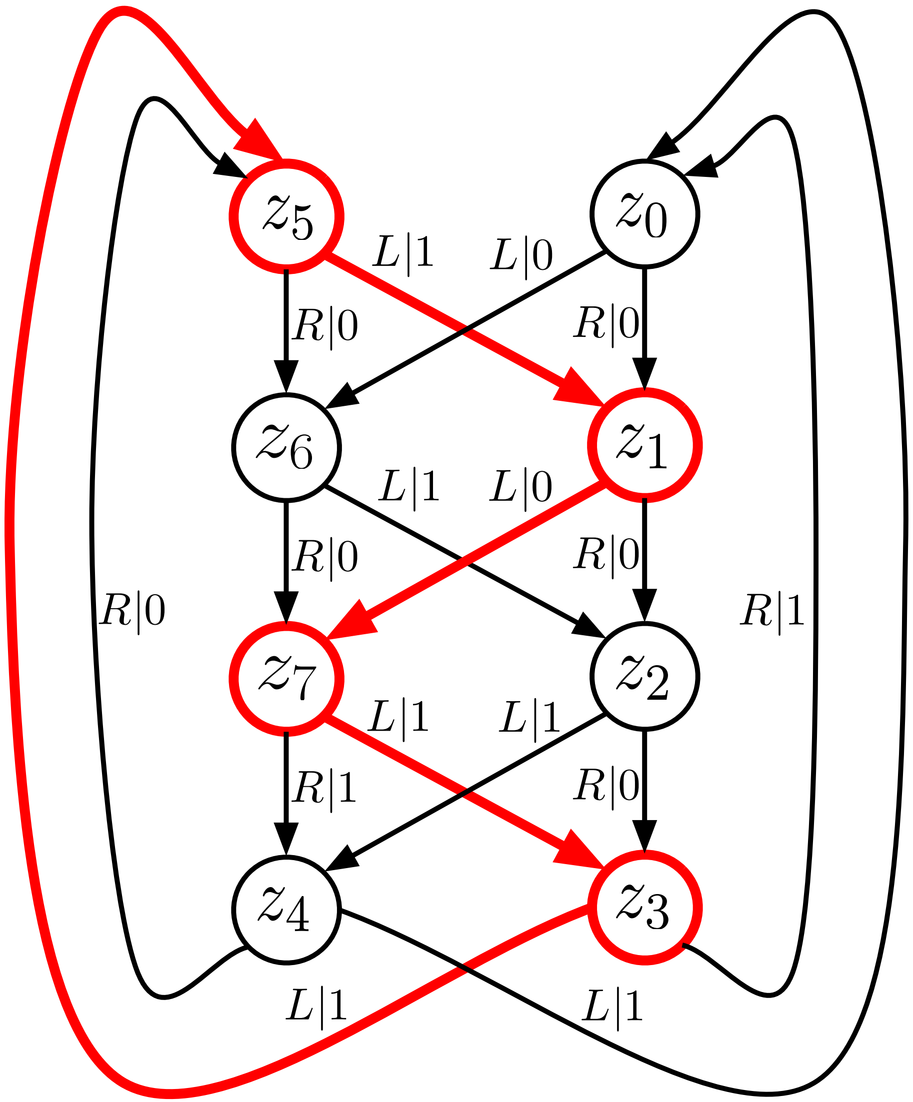
Einige Folgen von Aktionen führen zum Ausgangszustand zurück:



$RRRR$

Systemeigenschaften

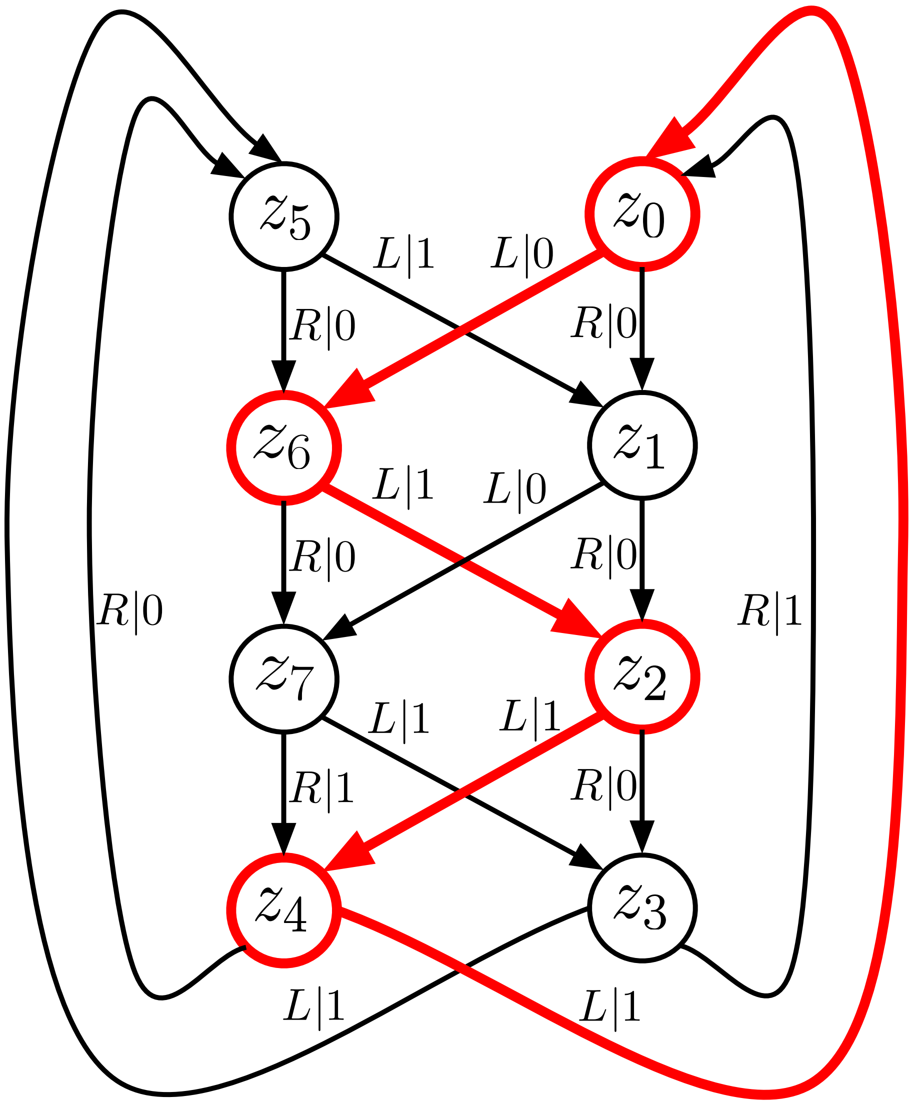
Einige Folgen von Aktionen führen zum Ausgangszustand zurück:



$LLLL$

Systemeigenschaften

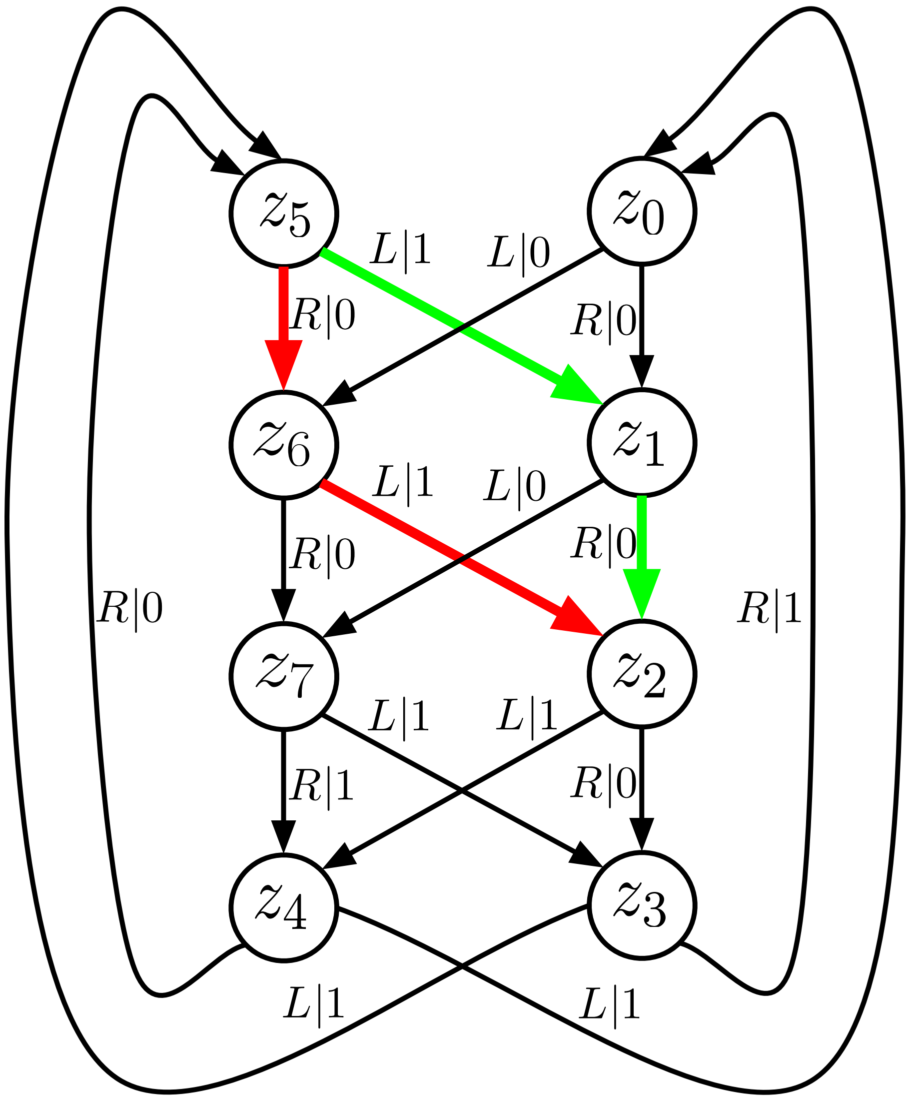
Einige Folgen von Aktionen führen zum Ausgangszustand zurück:



$LLLL$

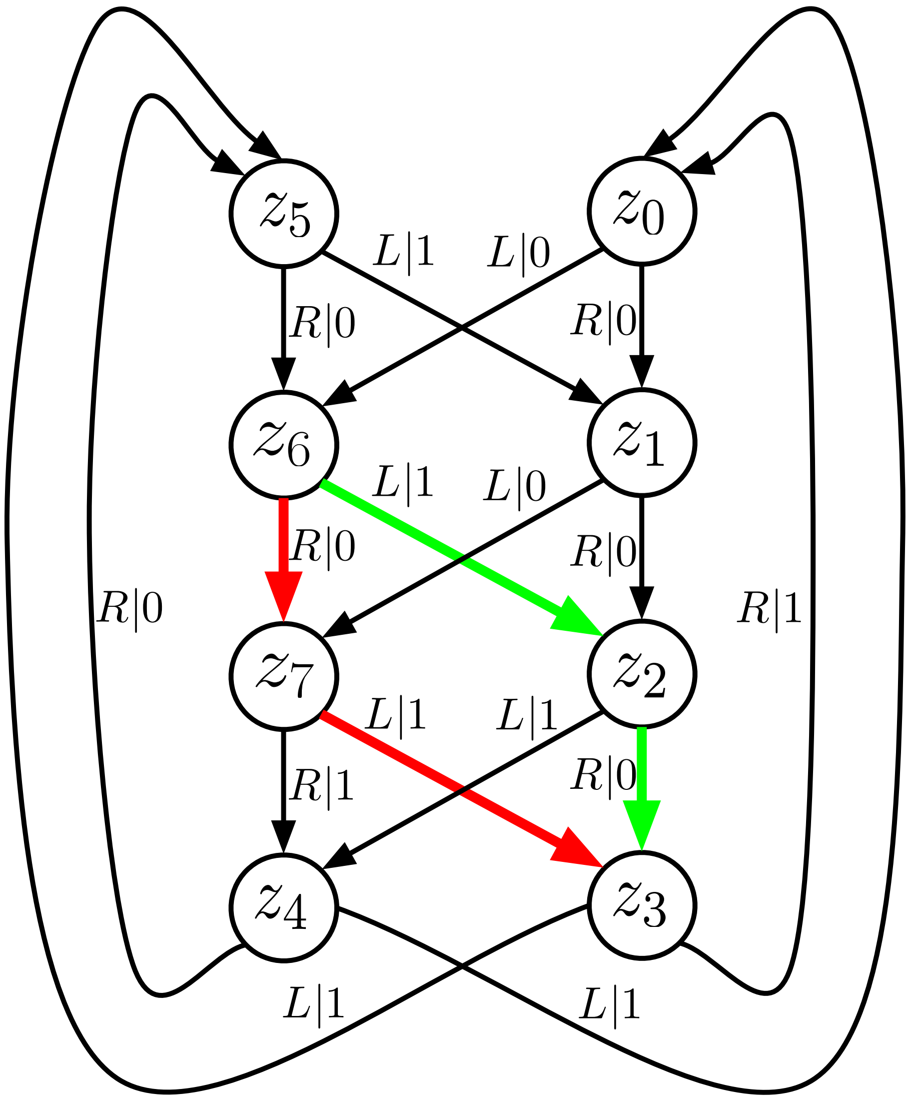
Äquivalenzen

Die Eingabe von LR und RL führt immer in den gleichen Zustand:



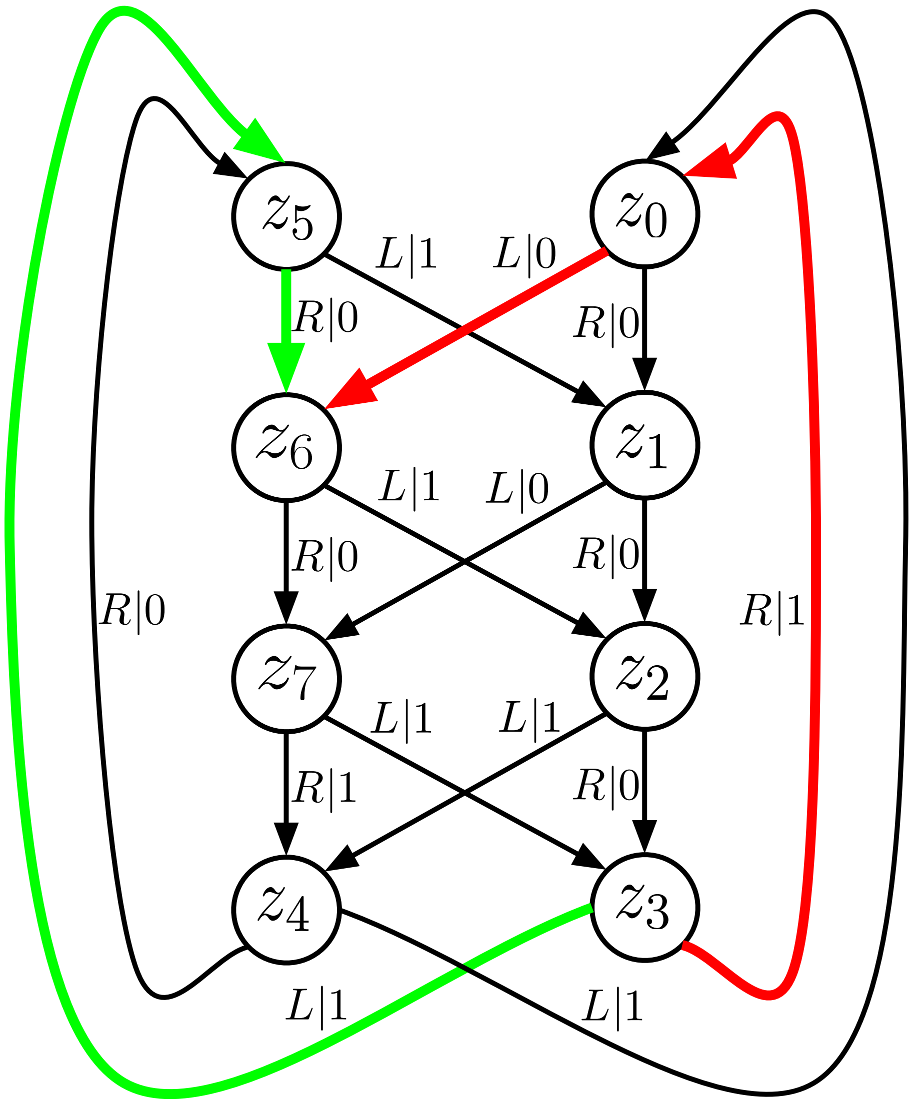
Äquivalenzen

Die Eingabe von LR und RL führt immer in den gleichen Zustand:



Äquivalenzen

Die Eingabe von LR und RL führt immer in den gleichen Zustand:



Konsequenzen

Möchten wir wissen, in welchen Zustand das Gerät gelangt, wenn wir beginnend im Zustand z_0 die Kugel z.B. in der Folge

$$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRRLRRRLRRLRRRLRR$$

einwerfen, so können wir dies am Zustandsdiagramm ablesen.

Konsequenzen

Möchten wir wissen, in welchen Zustand das Gerät gelangt, wenn wir beginnend im Zustand z_0 die Kugel z.B. in der Folge

$$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRRLRRRLRRLRRRLRR$$

einwerfen, so können wir dies am Zustandsdiagramm ablesen.

Alternative: **Vereinfachen der Folge**
Wende die folgenden Regeln solange an, wie dies möglich ist:

a) Wenn in der Folge eine der Sequenzen $LLLL$ oder $RRRR$ vorkommt, lösche diese. $(LLLL \longrightarrow \lambda)$

b) Wenn in der Folge die Sequenz RL auftritt, ersetze diese durch die Sequenz LR. $(RL \longrightarrow LR)$

Transformation

$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRRLRRRLR\textcolor{green}{RL}RRRLRR$

Transformation

$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRRLRRRLRRLRRRLRR$

$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRRLRRRLRLRRRRLRR$

Transformation

$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRRLRRRLRRLRRRLRR$

$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRRLRRRLRLRRRRLRR$

$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRRLRRRLRLLRR$

Transformation

$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRRLRRRLR{\color{green}RL}RRRLRR$

$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRRLRRRLRL{\color{red}RRRR}LRR$

$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLR{\color{green}RL}RRRLRLLRR$

$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRL{\color{red}RRRR}LRLLRR$

Transformation

$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRRLRRRLR{\color{green}RL}RRRLRR$

$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRRLRRRLRL{\color{red}RRRR}LRR$

$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLR{\color{green}RL}RRRLRLLRR$

$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRL{\color{red}RRRR}LRLLRR$

$LL{\color{green}RL}R{\color{green}RLRLRL}LR{\color{green}RLRL}L{\color{green}RLRL}L{\color{green}RL}LRR$

Transformation

$$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRRLRRRLRRLRRRLRR$$

$$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRRLRRRLRLRRRRLRR$$

$$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRRLRRRLRLLRR$$

$$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRLRRRRLRLLRR$$

$$LLRLRRLRLRLLRRLRLLRLRLLRLLRR$$

$$\vdots$$

$$RLRLRLRR$$

$$LRLRLRRR$$

$$LLRLRRRR$$

$$LLLR$$

…ist etwas einfacher als die ursprüngliche Folge!

Verwendete Notationen

Mengen

- **Darstellung** durch Aufzählung der Elemente oder Angabe von Eigenschaften:

$$M := \{0, 1, 2, \ldots, 7\} \quad \text{oder} \quad \{x \in I\!N \mid 0 \leq x \leq 7\}$$

Verwendete Notationen

Mengen

- **Darstellung** durch Aufzählung der Elemente oder Angabe von Eigenschaften:

  $$M := \{0, 1, 2, \ldots, 7\} \quad \text{oder} \quad \{x \in I\!N \mid 0 \le x \le 7\}$$

- $|M| = 8$ bezeichnet die **Kardinalität** von M.

Verwendete Notationen

Mengen

- **Darstellung** durch Aufzählung der Elemente oder Angabe von Eigenschaften:

  $$M := \{0, 1, 2, \ldots, 7\} \quad \text{oder} \quad \{x \in I\!N \mid 0 \leq x \leq 7\}$$

- $|M| = 8$ bezeichnet die **Kardinalität** von M.
- **Operationen**: Seien A und B Mengen.
  - cartesisches Produkt: $A \times B$
  - Komplexprodukt: $A \cdot B$

Cartesisches Produkt

- Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Mengen und $x_1 \in A_1$, $\ldots$, $x_n \in A_n$, dann heißt $(x_1, \ldots, x_n)$ ein **(geordnetes)** n-**Tupel** von Elementen über $A_1, \ldots, A_n$.

Cartesisches Produkt

- Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Mengen und $x_1 \in A_1$, ..., $x_n \in A_n$, dann heißt $(x_1, \ldots, x_n)$ ein **(geordnetes)** n-**Tupel** von Elementen über $A_1, \ldots, A_n$.
- Die Menge aller geordneten n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$ heißt **cartesisches Produkt** der Mengen A_1 bis A_n und wird geschrieben als $A_1 \times A_2 \ldots \times A_n$.

Cartesisches Produkt

- Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Mengen und $x_1 \in A_1, \ldots,$ $x_n \in A_n$, dann heißt $(x_1, \ldots, x_n)$ ein **(geordnetes)** n-**Tupel** von Elementen über $A_1, \ldots, A_n$.
- Die Menge aller geordneten n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$ heißt **cartesisches Produkt** der Mengen A_1 bis A_n und wird geschrieben als $A_1 \times A_2 \ldots \times A_n$.
- Es ist also $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n :=$ $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\}$.

Halbgruppe, Monoid

- Sei H eine Menge und $\odot : H \times H \longrightarrow H$ eine Abbildung für die das *Assoziativgesetz* gilt, d.h. $\forall a, b, c \in H : \; (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$, dann heißt $(H, \odot)$ **Halbgruppe**.

Halbgruppe, Monoid

- Sei H eine Menge und $\odot : H \times H \longrightarrow H$ eine Abbildung für die das *Assoziativgesetz* gilt, d.h. $\forall a, b, c \in H : \ (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$, dann heißt $(H, \odot)$ **Halbgruppe**.
- Eine Halbgruppe $(H, \odot)$ heißt **Monoid** genau dann, wenn es ein **neutrales Element** $e_H \in H$ gibt, so dass $e_H \odot m = m \odot e_H = m$ für jedes $m \in H$ gilt.

Halbgruppe, Monoid

- Sei H eine Menge und $\odot : H \times H \longrightarrow H$ eine Abbildung für die das *Assoziativgesetz* gilt, d.h. $\forall a, b, c \in H : \ (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$, dann heißt $(H, \odot)$ **Halbgruppe**.
- Eine Halbgruppe $(H, \odot)$ heißt **Monoid** genau dann, wenn es ein **neutrales Element** $e_H \in H$ gibt, so dass $e_H \odot m = m \odot e_H = m$ für jedes $m \in H$ gilt.
- **Beispiel:** $(I\!N \setminus \{0\}, +)$ ist eine Halbgruppe, während $(I\!N, +)$ ein Monoid mit der Null als neutralem Element ist.

Komplexprodukt

- Für Teilmengen U, V einer Halbgruppe oder eines Monoides $(H, \odot)$ sei die Menge $U \cdot V := \{u \odot v \mid u \in U, v \in V\}$ das **Komplexprodukt** von U und V.

Komplexprodukt

- Für Teilmengen U, V einer Halbgruppe oder eines Monoides $(H, \odot)$ sei die Menge $U \cdot V := \{u \odot v \mid u \in U, v \in V\}$ das **Komplexprodukt** von U und V.
- Mit dem Komplexprodukt zweier Teilmengen einer Halbgruppe, wird die Halbgruppenoperation auf die elementweise Verknüpfung übernommen!

Komplexprodukt

- Für Teilmengen U, V einer Halbgruppe oder eines Monoides $(H, \odot)$ sei die Menge $U \cdot V := \{u \odot v \mid u \in U, v \in V\}$ das **Komplexprodukt** von U und V.
- Mit dem Komplexprodukt zweier Teilmengen einer Halbgruppe, wird die Halbgruppenoperation auf die elementweise Verknüpfung übernommen!
- **Beispiel:** Für Mengen von Wörtern ist die verwendete Operation die Konkatenation, so dass $U \cdot V$ alle Wörter enthält, die sich durch Hintereinanderschreiben eines Wortes aus U und eines Wortes aus V ergeben!

Relationen

- Eine Teilmenge $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ heißt n-**stellige Relation** über A_1 bis A_n.

Relationen

- Eine Teilmenge $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ heißt n-**stellige Relation** über A_1 bis A_n.
- Ist $n = 2$, so spricht man von einer **binären** statt von einer 2-stelligen **Relation**.

Relationen

- Eine Teilmenge $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ heißt n-**stellige Relation** über A_1 bis A_n.
- Ist $n = 2$, so spricht man von einer **binären** statt von einer 2-stelligen **Relation**.
- **Beispiel:** Kugelautomat

$$\equiv \subseteq \{L, R\}^* \times \{L, R\}^*$$

mit

$$(LR, RL) \in \equiv \quad \text{und} \quad (RL, LR) \in \equiv$$

Eigenschaften von Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf A. R heißt

- **reflexiv** gdw. $(a, a) \in R$ für alle $a \in A$ gilt.

Eigenschaften von Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf A. R heißt

- **reflexiv** gdw. $(a, a) \in R$ für alle $a \in A$ gilt.
- **symmetrisch** gdw. für $(a, b) \in R$ stets auch $(b, a) \in R$ gilt.

Eigenschaften von Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf A. R heißt

- **reflexiv** gdw. $(a, a) \in R$ für alle $a \in A$ gilt.
- **symmetrisch** gdw. für $(a, b) \in R$ stets auch $(b, a) \in R$ gilt.
- **transitiv** gdw. aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ stets $(a, c) \in R$ folgt. R ist also transitiv, wenn $R \cdot R \subseteq R$ gilt.

Eigenschaften von Relationen

Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf A. R heißt

- **reflexiv** gdw. $(a, a) \in R$ für alle $a \in A$ gilt.
- **symmetrisch** gdw. für $(a, b) \in R$ stets auch $(b, a) \in R$ gilt.
- **transitiv** gdw. aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ stets $(a, c) \in R$ folgt. R ist also transitiv, wenn $R \cdot R \subseteq R$ gilt.

Eine Relation heißt **Äquivalenzrelation** gdw. sie **reflexiv**, **symmetrisch** und **transitiv** ist.

Transitiver Abschluss

- Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf der Menge A. Dann seien R^+, der **transitive Abschluss** (auch **transitive Hülle**), und R^*, der **reflexive, transitive Abschluss**, von R wie folgt erklärt:

$$R^+ := \bigcup_{i \geq 1} R_i \text{ mit } R_1 := R \quad \text{und} \quad R_{i+1} := R_i \cdot R.$$

Transitiver Abschluss

- Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf der Menge A. Dann seien R^+, der **transitive Abschluss** (auch **transitive Hülle**), und R^*, der **reflexive, transitive Abschluss**, von R wie folgt erklärt:

$$R^+ := \bigcup_{i \geq 1} R_i \text{ mit } R_1 := R \quad \text{und} \quad R_{i+1} := R_i \cdot R.$$

- Für eine Teilmenge $M \subseteq H$ einer Halbgruppe $(H, \odot)$ seien der **transitive Abschluss** M^+ sowie der **transitive und reflexive Abschluss** M^*

$$M^+ := \bigcup_{i \geq 1} M^i \text{ mit } M^1 := M \text{ und } M^{i+1} := M^i \cdot M$$

$$M^* := M^+ \cup \{e_H\}$$

Wortmengen

- Ein **Alphabet** ist eine (total geordnete) endliche Menge von unterschiedlichen **Zeichen** (oder **Symbolen**).

Wortmengen

- Ein **Alphabet** ist eine (total geordnete) endliche Menge von unterschiedlichen **Zeichen** (oder **Symbolen**).
- Für ein Alphabet Σ, ist Σ^* das **freie Monoid** mit der **Konkatenation** oder Hintereinanderschreibung der einzelnen Zeichen als Monoidoperation, und dem leeren Wort λ als neutralem Element. Für $w \in \Sigma^*$ schreiben wir w^k anstelle von $\underbrace{ww \cdots w}_{k}$.

  Jede Menge $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **formale Sprache**.

Wortmengen

- Ein **Alphabet** ist eine (total geordnete) endliche Menge von unterschiedlichen **Zeichen** (oder **Symbolen**).
- Für ein Alphabet Σ, ist Σ^* das **freie Monoid** mit der **Konkatenation** oder Hintereinanderschreibung der einzelnen Zeichen als Monoidoperation, und dem leeren Wort λ als neutralem Element. Für $w \in \Sigma^*$ schreiben wir w^k anstelle von $\underbrace{ww \cdots w}_{k}$.

  Jede Menge $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **formale Sprache**.
- Σ^* bezeichnet also die **Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet Σ**

Zahlensysteme

- Die b-**näre Darstellung** benutzt die Symbole der Ziffernmenge $B := \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Ist $b = 2$, so spricht man von einer **binären** Zahlendarstellung.

Zahlensysteme

- Die b-**näre Darstellung** benutzt die Symbole der Ziffernmenge $B := \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Ist $b = 2$, so spricht man von einer **binären** Zahlendarstellung.
- Eine Zahl $n \in I\!N$ wird zur Basis $b = |B|$ dargestellt durch eine Folge $a_k a_{k-1} \cdots a_0$ von Symbolen $a_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ gdw. $n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b^i$ gilt.

  Wir notieren dies durch $[a_k a_{k-1} \cdots a_0]_b = n$.

Ziele der Vorlesung

Wir wollen den Begriff der „**Berechenbarkeit**“ mit eingeschränkten Speichermodellen einführen:

1. konstanter Speicher

Ziele der Vorlesung

Wir wollen den Begriff der „**Berechenbarkeit**“ mit eingeschränkten Speichermodellen einführen:

1. konstanter Speicher
2. beliebig viel Speicher, aber eingeschränkter Zugriff

Ziele der Vorlesung

Wir wollen den Begriff der „**Berechenbarkeit**“ mit eingeschränkten Speichermodellen einführen:

1. konstanter Speicher
2. beliebig viel Speicher, aber eingeschränkter Zugriff
3. beliebig viel Speicher, beliebiger Zugriff

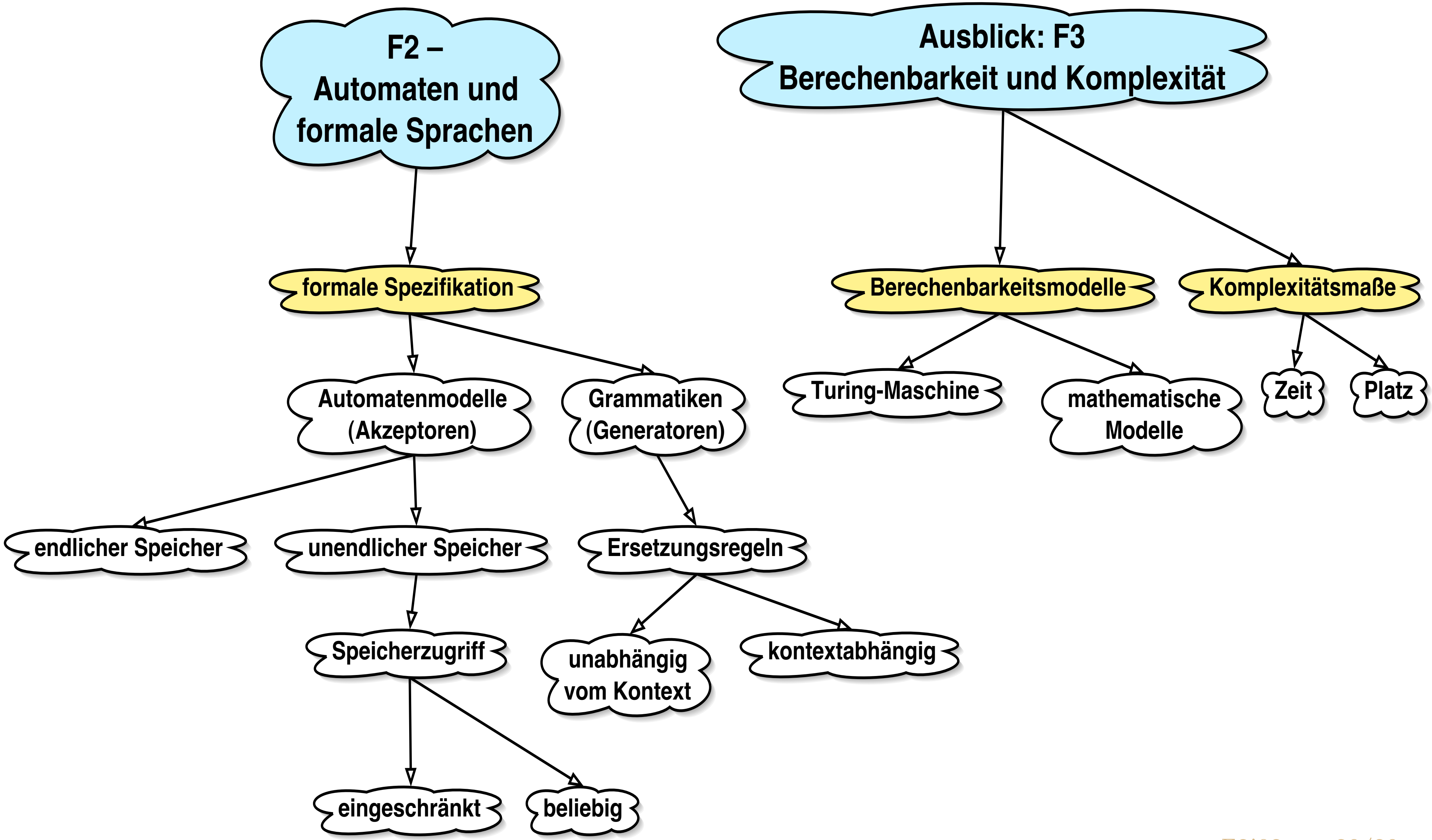
Ziele der Vorlesung

Wir wollen den Begriff der „**Berechenbarkeit**“ mit eingeschränkten Speichermodellen einführen:

1. konstanter Speicher
2. beliebig viel Speicher, aber eingeschränkter Zugriff
3. beliebig viel Speicher, beliebiger Zugriff

Ein allgemeiner Berechenbarkeitsbegriff wird in der Vorlesung F3 geprägt.

Überblick


F2 –
Automaten und
formale Sprachen
Ausblick: F3
Berechenbarkeit und Komplexität
formale Spezifikation
Berechenbarkeitsmodelle
Komplexitätsmaße
Automatenmodelle
(Akzeptoren)
Grammatiken
(Generatoren)
Turing-Maschine
mathematische
Modelle
Zeit
Platz
endlicher Speicher
unendlicher Speicher
Ersetzungsregeln
Speicherzugriff
unabhängig
vom Kontext
kontextabhängig
eingeschränkt
beliebig